http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

دوره ۱۲ شماره ۶، اسفند ۱۳۹۱ ص‌ص ۱۴۷-۱۵۸

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۸/۹
پذیرش ۹۱/۶/۱
ارائه در سایت ۹۱/۹/۳۰

آنالیز ارتعاشات آزاد ورق لایه‌لایه مرکب با استفاده از یک تئوری چهارمتغیره پالوده‌شده جدید

فرید کاویانی[1]، حمیدرضا میردامادی[2*]

۱- دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
۲- استادیار مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
* اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

چکیده- در این مقاله ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌لایه مرکب، با استفاده از تئوری جدید چهار متغیره پالوده‌شده ورق، RPT، با توزیع سینوس هذلولوی، جهت محاسبه کرنش‌های برشی برون‌صفحه، پیشنهاد شده است. از ویژگی‌های این تئوری، برآورده‌سازی شرط مرزی تنش برشی صفر روی لایه‌های بالایی و پایینی، بدون استفاده از ضریب شکل تیموشنکوست. معادله‌های حرکت برای متغیرهای استفاده شده در تئوری RPT، برخلاف سایر تئوری‌های مرتبه بالاتر، از نظر دینامیکی تنها در جمله‌های اینرسی درهم‌گیرند، ولی در جمله‌های وابسته به انرژی کرنشی درهم‌گیر نیستند. از این دیدگاه، تئوری RPT شبیه تئوری CLPT است. بررسی عوامل مؤثر بر فرکانس مبنا با استفاده از پارامترهای تأثیرگذار بر آن، مانند نسبت مدول‌ها در دو راستا، نسبت طول به ضخامت و زاویه جهت‌گیری رشته‌ها، از اهداف اصلی این مقاله است. نتایج تئوری پیشنهادی با نتایج تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه یکم و بالاتر (FSDT، HSDT و RPT) مقایسه و درست‌سنجی شده است.

کلیدواژگان: ارتعاش آزاد، تئوری ورق، ورق لایه‌لایه مرکب، تئوری چهارمتغیره پالوده‌شده

Free vibration analysis of laminated composite plate by a novel four-variable refined theory

F. Kaviani[1], H. R. Mirdamadi[2*]

1- BSc. Student, Mech. Eng., Isfahan Univ. of Technology, Isfahan, Iran
2- Assist. Prof., Mech. Eng., Isfahan Univ. of Technology, Isfahan, Iran
* P. O. B. 8415683111 Isfahan, hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

Abstract- In this paper, a novel four-variable refined theory of plate, called RPT, has been proposed for free vibration of composite laminated plates, using a hyperbolic sine function, for calculating out-of-plane shear strains. It is one of the properties of this theory that the boundary condition of zero shear stress is satisfied over upper layer and under lower layer of plate, with no reference to Timoshenko shape factor. In contrast to other higher-order shear deformation theories, in RPT theory, equations of motion are coupled dynamically only in inertial terms, while elastic energy terms are not coupled for the variables used. From this viewpoint, RPT theory is similar to classical plate theory (CLPT). Some of the objectives of this paper are the investigation of effect of influential parameters on fundamental frequency, such as modulus ratio, angle of plies, and plate length-to-thickness ratio. The results of this proposed version of RPT are compared and validated with those of first-order shear deformation theory (FSDT), higher-order shear deformation theory (HSDT), and the original version of RPT.

Keywords: Free Vibration, Plate Theory, Composite Laminated Plate, Four-Variable Refined Plate Theory (RPT)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

۱- مقدمه

با پیشرفت در صنایعی چون هوافضا، کشتی‌سازی و خودرو، استفاده از موادی با ویژگی‌هایی هم‌چون مقاومت و سختی ویژه بالا ضروری شده است. از این رو، موادی با این ویژگی‌ها مورد توجه صنایع پیشرفته قرار گرفته‌اند. با توجه به این مسئله، آنالیز و طراحی سازه‌های مواد مرکب (کامپوزیت)، همچون ورق‌های چندلایه، پراهمیت می‌باشد. بی‌شک تئوری‌های ورق از اساسی‌ترین نیازهاست، زیرا پیش‌بینی رفتار ورق‌ها در هر زمینه‌ای همچون پیش‌بینی شکست و پایش سلامتی آن‌ها و بهینه‌سازی کارکرد سازه‌های ساخته‌شده از قطعه‌های ورق همگی نیازمند آنالیزی دقیق از رفتار سازه‌ای ورق‌اند. از مهم‌ترین آنالیزهای رفتاری ورق آنالیز ارتعاش ورق است. در این زمینه تئوری‌های گوناگون ورق مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نخست، می‌توان تئوری کلاسیک ورق‌های چندلایه (CLPT) را نام برد. این تئوری مؤلفه‌های کرنش و تنش عمودی و برشی درون‌صفحه را مدنظر قرار می‌دهد و مدلی شبیه به یک تک‌لایه دوبعدی ارائه می‌دهد. این تئوری با داشتن ظاهری ساده دارای دقت نسبتاً خوبی برای ورق‌های نازک می‌باشد[۱]. افزون بر این که استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها به ورق‌های نازک محدود می‌شود، از کاستی‌های دیگر این تئوری برقرارنشدن شرط تنش‌های برشی صفر در لایه‌های بالایی و زیرین ورق می‌باشد. برای برداشتن این کاستی، تئوری‌های متعددی پیشنهاد شده است. در این تئوری‌ها تأثیر تغییرشکل‌های برشی را نیز افزون بر تغییرشکل‌های خمشی درنظر گرفته‌اند و نتایج با دقت بالاتری به‌دست آمده است. از مهم‌ترین این تئوری‌ها، تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه یکم (FSDT) است. در این تئوری، خطوط جانبی عمود بر میان‌صفحه، پس از تغییرشکل، دیگر عمود باقی نمی‌مانند و خطوط دارای شیبی ثابت نسبت به خط عمود بر میان‌صفحه‌اند؛ پس تنش برشی برون‌صفحه ثابت فرض می‌شود. بنابراین، برای براورده‌سازی شرایط مرزی در لایه‌های بالایی و زیرین ورق، نیاز به یک ضریب اصلاح برشی می‌باشد. از کاستی‌های تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه یکم، ثابت انگاشتن تنش‌های برشی در ضخامت ورق بود[۲]. بررسی ارتعاش آزاد ورق‌ها با استفاده از تئوری تغییرشکل مرتبه یکم توسط افرادی چون ویتنی و پاگانو[۳]، نور و بارتون[۴] و مراجع [۵] تا [۷] در زمینه‌های گوناگونی گسترش داده شده است.

برای برطرف‌سازی نیاز به ضریب تصحیح برشی، تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر (HSDT) پیشنهاد شده‌اند. در مراجع [۸] تا [۱۱] تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر بررسی شده‌اند. مطالعات فراوانی برای آنالیز ارتعاش آزاد ورق‌ها با استفاده از این تئوری‌ها انجام شده است. می‌توان مراجع [۱۲] تا [۱۴] را در این راستا نام برد. پس از آن شیمپی[۱۵] فرم جدیدی از تئوری‌های تغییرشکل مرتبه بالا را تحت عنوان تئوری ورق پالوده‌شده ارائه داد. وی از دو دسته متغیر استفاده کرد. یک دسته از آن‌ها سازگار با روش‌های آنالیز تغییرات و دسته دیگر ناسازگارند. در متغیرهای سازگار، متغیرهای نامعین سیستم به صورت مستقل از یکدیگر معادلات حرکت ورق را ایجاد می‌کنند، به گونه‌ای که معادله‌ها شبیه معادله‌های رزینر می‌شوند و یکی از معادله‌ها شباهت زیادی با معادله‌های تئوری CLPT دارد (متغیرهای جابه‌جایی جانبی مؤلفه خمشی و مؤلفه برشی مستقل از یکدیگرند). در متغیرهای ناسازگار، با استفاده از معادلات تعادل، رابطه‌ای بین متغیرهای جابه‌جایی جانبی مؤلفه‌های خمشی و برشی ایجاد و این رابطه اضافی، باعث کاهش تعداد متغیرهای سیستم می‌شود. از ویژگی‌های تئوری ورق پالوده‌شده شباهت این تئوری به فرم ساده تئوری کلاسیک ورق‌ها و دقت بالای آن بود. سپس، این تئوری برای چندلایه عمودچین توسط شیمپی و پتل[۱۶] گسترش بیشتری یافت. سیر گسترش این تئوری به گونه‌ای ادامه یافت که تئوری‌های RPT1 و RPT2[۱۷] بر اساس فرضیه‌های این تئوری پدید آمدند. هم‌چنین تئوری‌های پالوده‌شده ورق در مراجع [۱۸] و [۱۹] برای آنالیز ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تئوری پیشنهادی RPT3 تئوری پالوده‌شده جدید ورق با تابع تغییرشکل برشی سینوس هذلولوی دارای نتایجی با دقت بالا در آنالیز کمانش و خمش می‌باشد. از این رو، گسترش این تئوری برای آنالیز ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه می‌تواند نتایج دقیق‌تری را برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی ورق به‌دست دهد. همچنین در محاسبات ورق‌ها، به‌ویژه در زمینه صنایع هوافضا، دقت بالای مورد نیاز و پیچیدگی معادله‌ها می‌تواند قید محدودکننده‌ای برای انتخاب تئوری، جهت تحلیل تنش دینامیکی باشد. دقت بالا و سادگی در محاسبات ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه با استفاده از تئوری پیشنهادی RPT3 می‌تواند چالش‌های نام‌برده را کاهش دهد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

این مهم از دلایل گسترش این تئوری برای بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه می‌باشد.

هدف از بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه مرکب با استفاده از تئوری RPT3، بررسی تأثیرات تابع تغییرشکل پیشنهادی بر روی فرکانس مبنای ورق با توجه به تأثیر این تابع تغییرشکل در بهبود نتایج آنالیز خمش و کمانش است. در این مقاله، برای گسترش فرمول‌بندی سیستم، از یک تئوری از دیدگاه تغییراتی سازگار استفاده شده است. همچنین نتایج برای چندلایه‌ها با نسبت‌های مدول الاستیسیته (نسبت مدول الاستیسیته در راستای رشته‌ها به مدول الاستیسیته در راستای عمود بر آن‌ها) و چندلایه‌های با تعداد لایه گوناگون بررسی می‌شوند.

بخش‌های بعدی مقاله بدین صورت سازماندهی شده‌اند: در بخش دوم، فرض‌های مورد نیاز جهت برقراری تئوری پیشنهادی ارائه شده است. این فرض‌ها در کلیه تئوری‌هایی که از نتایج آن‌ها در این مقاله استفاده شده نیز به‌کار برده شده است. در بخش سوم، به روابط کرنش-جابه‌جایی و تابع شکل تغییرشکل برشی پرداخته شده است. در بخش چهارم، روابط ساختاری خطی‌سازی شده تنش-کرنش برای مواد همگن عمودسانگرد بیان شده است. در بخش پنجم، معادلات حرکت ورق با استفاده از اصل همیلتون نتیجه شده است. در بخش ششم، معادلات ارتعاش آزاد ورق با استفاده از حل ناویه به‌دست آمده و نتایج به فرم ماتریسی خلاصه شده است. در بخش هفتم، به بررسی نتایج عددی پرداخته شده و در پایان، در بخش هشتم، پیرامون نتایج عددی و نتیجه‌گیری بحث شده است.

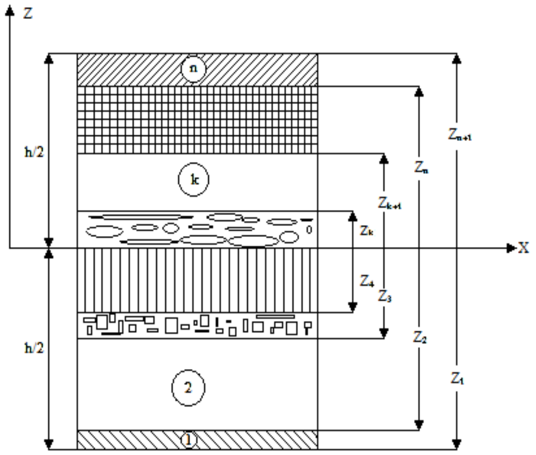
۲- فرض‌های اساسی

ورقی مستطیلی با ضخامت کلی h و شامل N لایه عمودسانگرد را مانند شکل ۱ فرض می‌کنیم. شرایط لازم جهت برقراری تئوری با توجه به تئوری پالوده‌شده ورق‌ها به شرح زیر است:

- جابه‌جایی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک می‌باشد.
- جابه‌جایی جانبی w، دارای دو مؤلفه خمشی w_b، و برشی w_s می‌باشد.

$$w(x,y,z,t)=w_b(x,y,t)+w_s(x,y,t) \qquad (۱)$$

این دو مؤلفه توابعی از دو مختصه مکانی x و y و مختصه زمانی t می‌باشند.



شکل ۱ سیستم مختصات و شماره‌گذاری لایه‌ها جهت نمایش چیدمان لایه‌ها در ورق لایه‌لایه

- تنش عمودی σ_z در مقایسه با دو تنش σ_x و σ_y قابل چشم‌پوشی است.
- جابه‌جایی u در راستای محور x و v در راستای محور y، سه مؤلفه کششی، خمشی و برشی دارد.

$$u(x,y,z,t)=u_a(x,y,t)+u_b(x,y,z,t)+u_s(x,y,z,t)$$
$$v(x,y,z,t)=v_a(x,y,t)+v_b(x,y,z,t)+v_s(x,y,z,t) \qquad (۲)$$

مؤلفه‌های خمشی u_b و v_b مانند تئوری کلاسیک ورق‌ها فرض می‌شوند.

$$u_b(x,y,z,t)=-z\frac{\partial w_b}{\partial x},\ v_b(x,y,z,t)=-z\frac{\partial w_b}{\partial y} \qquad (۳)$$

مؤلفه‌های برشی u_s و v_s به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$u_s(x,y,z,t)=-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x},\ v_s(x,y,z,t)=-f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \qquad (۴)$$

۳- سینماتیک

بر اساس فرض‌های رابطه‌های (۱) تا (۴)، جابه‌جایی‌ها، u_a، v_a، w_b و w_s چهار تابع جابه‌جایی نامعین میان‌صفحه ورق و $f(z)$ تابع شکل توزیع تنش و کرنش برشی در ضخامت ورق است. در تئوری‌های گوناگون، به منظور نمایش توزیع تنش برشی جانبی، توابع متفاوتی به عنوان تابع برشی پیشنهاد شده است. کرنش‌های به‌دست آمده از توابع جابه‌جایی، با استفاده از رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی فون کارمن[۲۰] و در محدوده سینماتیک خطی (چشم‌پوشی از جمله‌های مرتبه بالا) با جانشانی مؤلفه‌های جابه‌جایی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_a}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}-f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_y=\frac{\partial v_a}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}-f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$
$$\varepsilon_z=0$$
$$\gamma_{xy}=(\frac{\partial u_a}{\partial y}+\frac{\partial v_a}{\partial x})-2z\frac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}-2f(z)\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}$$
$$\gamma_{yz}=g(z)\frac{\partial w_s}{\partial y},\ \gamma_{xz}=g(z)\frac{\partial w_s}{\partial x}$$
$$f(z)=\frac{h\sinh(10\frac{z}{h})}{10\cosh(5)}-\frac{h}{100}$$
$$g(z)=-\frac{df}{dz}+1=-\frac{\cosh(10\frac{z}{h})}{\cosh(5)}+1 \qquad (۵)$$

۴- روابط ساختاری

با فرض این که هر چندلایه، ساخته‌شده از ورق‌های تک لایه، دارای صفحه تقارن الاستیک عمود بر صفحه x-y است و رشته‌ها جهت‌گیری دلخواه دارند، رابطه ساختاری برای چندلایه را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45}\\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix} \qquad (۶)$$

$\bar{Q}_{ij}$ ها مؤلفه‌های تانسور سختی کاهش‌یافته در راستای جهانی هستند[۲۱].

۵- معادلات حرکت

با قراردادن رابطه‌های تنش-کرنش در انرژی کرنشی ورق، به رابطه (۷) برای انرژی کرنشی بر حسب برآیندهای تنش دست خواهیم یافت.

$$U=\frac{1}{2}\int(N_x\varepsilon_x^a+N_y\varepsilon_y^a+N_{xy}\gamma_{xy}^a+M_x^b\kappa_x^b+M_y^b\kappa_y^b+M_{xy}^b\gamma_{xy}^b+M_x^s\kappa_x^s+M_y^s\kappa_y^s+M_{xy}^s\gamma_{xy}^s)dxdy \qquad (۷)$$

در رابطه (۷)، N، M^b، M^s و Q^s به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\left(N_x,N_y,N_{xy}\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\right)dz$$
$$\left(M_x^b,M_y^b,M_{xy}^b\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\right)z\,dz$$
$$\left(M_x^s,M_y^s,M_{xy}^s\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\right)f(z)dz$$
$$\left(Q_{yz}^s,Q_{xz}^s\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(\sigma_{yz},\sigma_{xz}\right)g(z)dz \qquad (۸)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۵) در رابطه‌های (۸) و انتگرال‌گیری روی ضخامت ورق رابطه‌های (۹) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}M_x^b\\M_y^b\\M_{xy}^b\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}M_x^s\\M_y^s\\M_{xy}^s\end{Bmatrix}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}\\A_{12}&A_{22}&A_{26}\\A_{16}&A_{26}&A_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\B_{12}&B_{22}&B_{26}\\B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}B_{11}^s&B_{12}^s&B_{16}^s\\B_{12}^s&B_{22}^s&B_{26}^s\\B_{16}^s&B_{26}^s&B_{66}^s\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\B_{12}&B_{22}&B_{26}\\B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\D_{12}&D_{22}&D_{26}\\D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}D_{11}^s&D_{12}^s&D_{16}^s\\D_{12}^s&D_{22}^s&D_{26}^s\\D_{16}^s&D_{26}^s&D_{66}^s\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}B_{11}^s&B_{12}^s&B_{16}^s\\B_{12}^s&B_{22}^s&B_{26}^s\\B_{16}^s&B_{26}^s&B_{66}^s\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}D_{11}^s&D_{12}^s&D_{16}^s\\D_{12}^s&D_{22}^s&D_{26}^s\\D_{16}^s&D_{26}^s&D_{66}^s\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}H_{11}^s&H_{12}^s&H_{16}^s\\H_{12}^s&H_{22}^s&H_{26}^s\\H_{16}^s&H_{26}^s&H_{66}^s\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^a\\\varepsilon_y^a\\\gamma_{xy}^a\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}\kappa_x^b\\\kappa_y^b\\\kappa_{xy}^b\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}\kappa_x^s\\\kappa_y^s\\\kappa_{xy}^s\end{Bmatrix}\end{Bmatrix} \qquad (۹a)$$

$$\begin{Bmatrix}Q_{yz}^s\\Q_{xz}^s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{44}^s&A_{45}^s\\A_{45}^s&A_{55}^s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^a\\\gamma_{xz}^a\end{Bmatrix} \qquad (۹b)$$

ماتریس‌های A، B، D، A^s، B^s، D^s، H^s سختی‌های ورق هستند و با رابطه (۱۰) تعریف می‌شوند.

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}(1,z,z^2)dz\ ،\ (i,j=1,2,6)$$
$$\left(B_{ij}^s,D_{ij}^s,H_{ij}^s\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}(f(z),zf(z),f(z)^2)dz$$
$$\left(A_{ij}^s\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{ij}(g(z)^2)dz\ ،\ (i,j=4,5) \qquad (۱۰)$$

انرژی جنبشی ورق نیز با رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$T=\frac{1}{2}\int\rho\dot{u}_i.\dot{u}_i\,dvol=\int\rho(\dot{u}_a-z\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}+f(z)\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x})(\dot{u}_a-z\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}+f(z)\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x})\,dvol+\int\rho(\dot{v}_a-z\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}+f(z)\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y})(\dot{v}_a-z\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}+f(z)\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y})\,dvol+\int\rho(\dot{w}_b+\dot{w}_s)(\dot{w}_b+\dot{w}_s)\,dvol \qquad (۱۱)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

ρ چگالی جرمی ورق است. برای به‌دست آوردن معادله‌های حرکت ورق از اصل همیلتون در حوزه جابه‌جایی همراه با رابطه‌های ساختاری استفاده می‌کنیم و با جایگذاری رابطه‌های انرژی کرنشی و انرژی جنبشی و انتگرال‌گیری و جداسازی متغیرهای مجازی δu و δv و δw_b و δw_s معادله‌های حرکت ورق به شکل رابطه (۱۲) به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\frac{\partial^2\left(\rho_0 u_0-\rho_1\frac{\partial w_b}{\partial x}+\rho_0^1\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=\frac{\partial^2\left(\rho_0 v_0-\rho_1\frac{\partial w_b}{\partial y}+\rho_0^1\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\rho_0(w_b+w_s)\\
&\quad+\rho_1(\frac{\partial v_a}{\partial y}+\frac{\partial u_a}{\partial x})+\rho_2(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2})\\
&\quad+\rho_1^1(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2})\}\\
&\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x\partial y}+\frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y}+\frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x}\\
&\quad=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\rho_0(w_b+w_s)-\rho_0^1(\frac{\partial v_a}{\partial y}+\frac{\partial u_a}{\partial x})\\
&\quad+\rho_1^1(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2})+\rho_0^2(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2})\}
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

در رابطه (۱۲) ρ_i^j گشتاورهای اینرسی ورق از مرتبه‌ی i و j هستند که با رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&\rho_i^j=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho z^i f(z)^j dz\,,(i=0,1\ \ j=1,2)\\
&\rho_i=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho z^i dz\,,(i=0,1,2)
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

در این مقاله، مؤلفه‌های اینرسی درهم‌گیر ρ_1,ρ_0^1,ρ_1^1 نیز درنظر گرفته شده‌اند. در بررسی ارتعاشات ورق‌های FGM، این مؤلفه‌ها تأثیر بسزایی بر دقت تئوری خواهند داشت.

معادله (۱۲) را می‌توان برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی (u, v, w_b, w_s) با جایگذاری برآیندهای تنش از معادله‌های (۹) بیان کرد. برای چندلایه همگن، معادله‌های حرکت (۱۲) به فرم معادله‌های (۱۴) نمایش داده می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2}+2A_{16}\frac{\partial^2 u_a}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v_a}{\partial x\partial y}\\
&\quad+A_{26}\frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2}-[B_{11}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}+3B_{16}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2\partial y}\\
&\quad+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial y^2}+B_{26}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}]\\
&\quad-[B_{11}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}+3B_{16}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2\partial y}+B_{26}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}\\
&\quad+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 w_b}{\partial x\partial y^2}]=\rho_0\ddot{u}_0-\rho_1\frac{\partial\ddot{w}_b}{\partial x}+\rho_0^1\frac{\partial\ddot{w}_s}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{۱۴a}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{22}\frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2}+2A_{16}\frac{\partial^2 v_a}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u_a}{\partial x\partial y}\\
&\quad+A_{26}\frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2}-[B_{22}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}+3B_{26}\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2\partial x}\\
&\quad+B_{16}\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_b}{\partial y\partial x^2}]-[B_{22}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3}\\
&\quad+3B_{26}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2\partial x}+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 w_b}{\partial y\partial x^2}\\
&\quad+B_{16}^s\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3}]=\rho_0\ddot{u}_0-\rho_1\frac{\partial\ddot{w}_b}{\partial y}+\rho_0^1\frac{\partial\ddot{w}_s}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{۱۴b}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\frac{\partial^3 u_a}{\partial x^3}+3B_{16}\frac{\partial^3 u_a}{\partial x^2\partial y}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 u_a}{\partial x\partial y^2}\\
&\quad+B_{26}\frac{\partial^3 u_a}{\partial y^3}+B_{22}\frac{\partial^3 v_a}{\partial y^3}+3B_{16}\frac{\partial^3 v_a}{\partial y^2\partial x}+B_{16}\frac{\partial^3 v_a}{\partial x^3}\\
&\quad+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v_a}{\partial x^2\partial y}-[D_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3\partial y}\\
&\quad+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^3\partial x}+D_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}]\\
&\quad-[D_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+4D_{16}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}^s+2D_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}\\
&\quad+4D_{26}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^3\partial x}+D_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}]+=\rho_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s)-\rho_1(\frac{\partial\ddot{v}_a}{\partial y}\\
&\quad+\frac{\partial\ddot{u}_a}{\partial x})+\rho_2(\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial y^2})+\rho_1^1(\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial y^2})
\end{aligned}
\tag{۱۴c}
$$

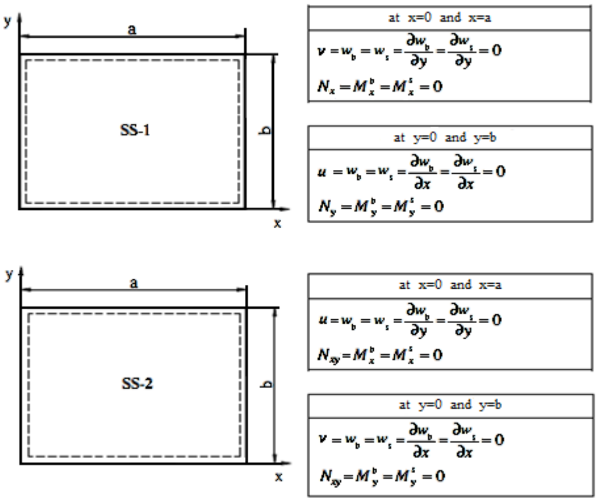
$$
\begin{aligned}
&B_{11}^s\frac{\partial^3 u_a}{\partial x^3}+3B_{16}^s\frac{\partial^3 u_a}{\partial x^2\partial y}+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 u_a}{\partial x\partial y^2}\\
&\quad+B_{26}^s\frac{\partial^3 u_a}{\partial y^3}+B_{22}^s\frac{\partial^3 v_a}{\partial y^3}+3B_{26}^s\frac{\partial^3 v_a}{\partial y^2\partial x}+B_{16}^s\frac{\partial^3 v_a}{\partial x^3}\\
&\quad+(B_{12}^s+2B_{66}^s)\frac{\partial^3 v_a}{\partial x^2\partial y}-[D_{11}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4}+4D_{16}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3\partial y}\\
&\quad+2(D_{12}^s+2D_{66}^s)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^3\partial x}+D_{22}^s\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}]\\
&\quad-H_{11}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}+4H_{16}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3\partial y}+2(H_{12}^s+2H_{66}^s)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2\partial y^2}\\
&\quad+4H_{26}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^3\partial x}+H_{22}^s\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}A_{55}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+A_{44}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\\
&\quad+2A_{45}^s\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y}=\rho_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s)+\rho_0^1(\frac{\partial\ddot{v}_a}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_a}{\partial x})\\
&\quad+\rho_1^1(\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_b}{\partial y^2})+\rho_0^2(\frac{\partial^2\ddot{w}_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}_s}{\partial y^2})
\end{aligned}
\tag{۱۴d}
$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

۶- حل

۶-۱- حل برای چندلایه عمودچین پادمتقارن

برای چندلایه مستطیلی با دو نوع شرط مرزی ساده، حل ناویه مانند شکل ۲ مورد استفاده قرار گرفته است. برای چندلایه عمودچین پادمتقارن، شرایط مرزی (تکیه‌گاهی) نیز با شکل ۲، (SS-1) مشخص می‌شوند.



شکل ۲ دو نوع شرط مرزی ساده [۲۳]

حل ناویه با معادله (۱۵) ارائه می‌شود.

$$u_a(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\cos(\mu x)\sin(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$v_a(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}\sin(\mu x)\cos(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$w_b(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn}\sin(\mu x)\sin(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$w_s(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{smn}\sin(\mu x)\sin(\lambda y)\,e^{i\omega t} \qquad (۱۵)$$

$\mu=\frac{\pi m}{a}$ و $\lambda=\frac{\pi n}{b}$ ضرایب مثلثاتی رشته‌های فوریه و a و b به‌ترتیب طول و عرض ورق در راستاهای x و y می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌های (۱۵) در معادله‌های حرکت ورق، حل ناویه به شکل رابطه (۱۶) تبدیل می‌شود.

$$\{[k]-\omega^2[m]\}[U]=[0] \qquad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶) ماتریس $[k]$ و $[m]$ به‌ترتیب ماتریس‌های سختی و جرم معادل سیستم می‌باشند و مؤلفه‌های این دو ماتریس به صورت زیر می‌باشند.

$$k_{11}=A_{11}\mu^2+A_{66}\lambda^2,\ k_{12}=\mu\lambda(A_{12}+A_{66})$$
$$k_{13}=-B_{11}\mu^3,\ k_{14}=-B^s_{11}\mu^3$$
$$k_{22}=A_{66}\mu^2+A_{22}\lambda^2,\ k_{13}=B_{11}\lambda^3,\ k_{14}=B^s_{11}\lambda^3$$
$$k_{33}=D_{11}\mu^4+2(D_{12}+2D_{66})\mu^2\beta^2+D_{22}\lambda^4$$
$$k_{34}=D^s_{11}\mu^4+2(D^s_{12}+2D^s_{66})\mu^2\lambda^2+D^s_{22}\lambda^4$$
$$k_{44}=H^s_{11}\mu^4+2(H^s_{12}+2H^s_{66})\mu^2\lambda^2+H^s_{22}\lambda^4+A^s_{55}\mu^2+A^s_{44}\lambda^2$$
$$m_{11}=m_{22}=\rho_0,\ m_{13}=-\rho_1\mu,\ m_{14}=\rho_0^1\mu,\ m_{23}=-\rho_1\lambda$$
$$m_{24}=\rho_0^1\lambda,\ m_{33}=\rho_0+\rho_2\left(\mu^2+\lambda^2\right)$$
$$m_{33}=\rho_0+\rho_1^1\left(\mu^2+\lambda^2\right)$$
$$m_{44}=\rho_0+\rho_0^2\left(\mu^2+\lambda^2\right) \qquad (۱۷)$$

برای چندلایه‌ای که دارای چگالی و جرم یکسان برای هر لایه می‌باشد، داریم:

$$\rho^1=\rho_0^1=\rho_1^1=0 \qquad (۱۸)$$

۶-۲- حل برای چندلایه اریب‌چین پادمتقارن

برای چندلایه اریب‌چین پادمتقارن، شرایط مرزی (تکیه‌گاهی) نیز با شکل ۲، (SS-2) مشخص می‌شوند. شرایط تکیه‌گاهی، توسط رشته‌های فوریه زیر برآورده سازی می‌شوند.

$$u_a(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\sin(\mu x)\cos(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$v_a(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}\cos(\mu x)\sin(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$w_b(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn}\sin(\mu x)\sin(\lambda y)\,e^{i\omega t}$$
$$w_s(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{smn}\sin(\mu x)\sin(\lambda y)e^{i\omega t} \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۴)، معادله‌ای به فرم معادله (۱۶) و با مؤلفه‌های زیر حاصل می‌شود.

$$k_{11}=A_{11}\mu^2+A_{66}\lambda^2,\ k_{12}=\mu\lambda(A_{12}+A_{66})$$
$$k_{13}=-(3B_{16}\mu\lambda^2+B_{26}\lambda^3)$$
$$k_{14}=-(3B^s_{16}\mu\lambda^2+B^s_{26}\lambda^3)$$
$$k_{22}=A_{66}\mu^2+A_{22}\lambda^2,\ k_{23}=-\left(3B_{26}\lambda\mu^2+B_{16}\mu^3\right)$$
$$k_{24}=-\left(3B^s_{26}\lambda\mu^2+B^s_{16}\mu^3\right)$$
$$k_{33}=D_{11}\mu^4+2(D_{12}+2D_{66})\mu^2\lambda^2+D_{22}\lambda^4$$
$$k_{34}=D^s_{11}\mu^4+2(D^s_{12}+2D^s_{66})\mu^2\lambda^2+D^s_{22}\lambda^4$$
$$k_{44}=H^s_{11}\mu^4+2(H^s_{12}+2H^s_{66})\mu^2\lambda^2+H^s_{22}\lambda^4+A^s_{55}\mu^2+A^s_{44}\lambda^2$$
$$m_{11}=m_{22}=\rho_0,\ m_{13}=-\rho_1\mu,\ m_{14}=\rho_0^1\mu,\ m_{23}=-\rho_1\lambda$$
$$m_{14}=\rho_0^1\mu,\ m_{23}=-\rho_1\lambda, m_{24}=\rho_0^1\lambda,\ m_{33}=\rho_0+\rho_2\left(\mu^2+\lambda^2\right)$$
$$m_{33}=\rho_0+\left(\mu^2+\lambda^2\right), m_{44}=\rho_0+\rho_0^2\left(\mu^2+\lambda^2\right) \qquad (۲۰)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

۷- نتایج عددی

در این بخش چند مثال عددی برای بحث پیرامون دقت تئوری ارائه‌شده و پارامترهای مؤثر بر ارتعاش آزاد ورق مطرح خواهد شد، که شامل ارتعاش آزاد چندلایه‌های عمودچین و اریب‌چین با شرایط تکیه‌گاهی شکل ۲ می‌باشد. نتایج به‌دست آمده از این تئوری با نتایج تئوری‌های FSDT، HSDT، RPT مقایسه شده‌اند. در تمامی مثال‌ها ضریب تصحیح برشی ۵/۶ استفاده شده است.

ویژگی‌های چندلایه‌های مورد استفاده به صورت زیر است:

چندلایه نوع یکم[۲۵،۲۴]:

$$E_1/E_2=open,\ G_{12}=G_{13}=0.6E_2,\ G_{23}=0.5E_2,\ \upsilon_{12}=0.25 \quad (۲۱a)$$

چندلایه نوع دوم[۲۶]:

$$E_1=40E_2,\ G_{12}=G_{13}=0.5E_2,\ G_{23}=0.6E_2,\ \upsilon_{12}=0.25 \quad (۲۱b)$$

برای راحتی نمایش نتایج در جدول‌ها، از بی‌بعدسازی‌های (a,b) زیر استفاده شده است[۲۵،۲۳].

$$\overline{\omega}=\omega(\frac{b^2}{h})\sqrt{\rho/E_2}\ ,\ (a)$$
$$\overline{\omega}=100\omega(h)\sqrt{\rho/E_2}\ ,\ (b) \quad (۲۲)$$

در مثال‌های ۱ و ۳ از بی‌بعدسازی a و در مثال ۲ از بی‌بعدسازی b استفاده شده است.

۷-۱-۱- مثال ۱: چندلایه عمودچین پادمتقارن $(0/90)_n$ مربعی، با شرایط مرزی ساده نوع یکم (SS-1)، را درنظر می‌گیریم. چندلایه نوع یکم و برای نسبت طول به ضخامت ۵ استفاده شده است. نتایج عددی نسبت به فرکانس مبنای بی‌بعد به‌دست‌آمده از سایر تئوری‌ها در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱ فرکانس مبنای ارتعاش آزاد بی‌بعد دولایه عمودچین پادمتقارن $(0/90)_n$ مربعی زیر شرایط مرزی ساده

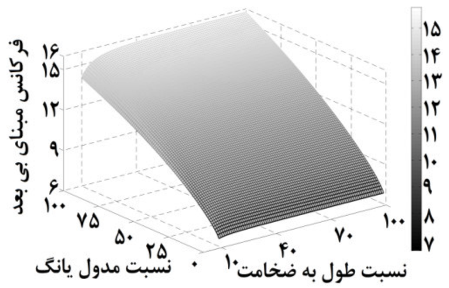
تعداد لایه‌ها (n)	مرجع	E_1/E_2 ۴۰	E_1/E_2 ۳۰	E_1/E_2 ۲۰	E_1/E_2 ۱۰	E_1/E_2 ۳
۱	حل دقیق[24]	۸/۵۶۲۵	۸/۱۷۶۳	۷/۶۷۴۵	۶/۹۸۴۵	۶/۲۵۷۸
	TSDT [10]	۹/۰۸۷۱	۸/۵۰۵۰	۷/۸۲۱۰	۶/۹۸۸۷	۶/۲۱۶۹
	FSDT [10]	۸/۸۳۳۳	۸/۳۲۱۱	۷/۷۰۶۰	۶/۹۳۹۲	۶/۲۰۸۵
	RPT1 [19]	۹/۰۸۷۱	۸/۵۰۵۰	۷/۸۲۱۰	۶/۹۸۸۷	۶/۲۱۶۹
	RPT2 [19]	۹/۰۲۲۷	۸/۴۶۴۶	۷/۸۰۱۱	۶/۹۸۳۶	۶/۲۱۶۷
	مطالعه کنونی(RPT3)	۸/۹۶۱۳	۸/۴۱۰۰	۷/۷۵۶۰	۶/۹۵۲۲	۶/۱۹۸۹
۲	حل دقیق[24]	۱۰/۶۷۸۹	۱۰/۱۶۵۰	۹/۴۰۵۵	۸/۱۴۴۵	۶/۵۴۵۵
	TSDT [10]	۱۱/۱۷۱۶	۱۰/۵۳۴۸	۹/۶۲۶۵	۸/۱۹۵۴	۶/۵۰۰۸
	FSDT [10]	۱۱/۲۷۰۸	۱۰/۶۱۹۸	۹/۶۸۸۵	۸/۲۲۴۶	۶/۵۰۴۳
	RPT1 [19]	۱۱/۱۷۱۶	۱۰/۵۳۴۸	۹/۶۲۶۵	۸/۱۹۵۴	۶/۵۰۰۸
	RPT2 [19]	۱۱/۱۷۰۵	۱۰/۵۳۳۴	۹/۶۲۵۲	۸/۱۹۴۹	۶/۵۰۰۸
	مطالعه کنونی(RPT3)	۱۱/۰۸۷۴	۱۰/۴۶۸۸	۹/۵۷۸۹	۸/۱۶۶۰	۶/۴۸۳۸
۳	حل دقیق[24]	۱۱/۲۷۲۸	۱۰/۶۹۵۸	۹/۸۳۹۸	۸/۴۱۴۳	۶/۶۱۰۰
	TSDT [10]	۱۱/۵۰۱۲	۱۰/۸۵۴۷	۹/۹۱۸۱	۸/۴۰۵۲	۶/۵۵۵۸
	FSDT [10]	۱۱/۵۲۶۴	۱۰/۸۸۲۸	۹/۹۴۲۷	۸/۴۱۸۳	۶/۵۵۶۹
	RPT1 [19]	۱۱/۵۰۱۲	۱۰/۸۵۴۷	۹/۹۱۸۱	۸/۴۰۵۲	۶/۵۵۵۸
	RPT2 [19]	۱۱/۵۰۰۹	۱۰/۸۵۴۷	۹/۹۱۸۱	۸/۴۰۵۲	۶/۵۵۵۸
	مطالعه کنونی(RPT3)	۱۱/۴۰۰۷	۱۰/۷۷۵۸	۹/۸۶۱۷	۸/۳۷۱۸	۶/۵۳۸۱
۵	حل دقیق[24]	۱۱/۶۲۴۵	۱۱/۰۰۲۷	۱۰/۰۸۴۳	۸/۵۶۲۶	۶/۶۴۵۸
	TSDT [10]	۱۱/۶۷۳۰	۱۱/۰۱۹۷	۱۰/۰۶۷۴	۸/۵۱۲۶	۶/۵۸۴۲
	FSDT [10]	۱۱/۶۴۴۴	۱۱/۰۰۵۸	۱۰/۰۶۳۸	۸/۵۱۳۲	۶/۵۸۳۷
	RPT1 [19]	۱۱/۶۷۳۰	۱۱/۰۱۹۷	۱۰/۰۶۷۴	۸/۵۱۲۶	۶/۵۸۴۲
	RPT2 [19]	۱۱/۶۷۰۵	۱۱/۰۱۸۶	۱۰/۰۶۷۱	۸/۵۱۲۶	۶/۵۸۴۲
	مطالعه کنونی(RPT3)	۱۱/۵۳۳۳	۱۰/۹۰۹۹	۹/۹۹۰۰	۸/۴۶۹۷	۶/۵۶۵۲

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

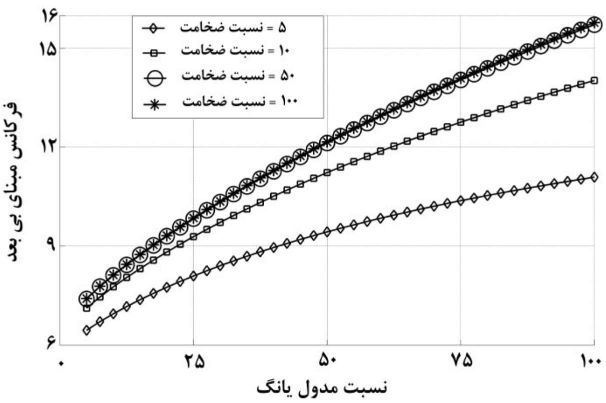
تئوری RPT3 در مقایسه با نتایج حل دقیق به‌دست آمده توسط نور و بارتون[۲۴]، برای ورق‌های با نسبت مدول بالا، در مقایسه با تئوری‌های دیگر، دارای دقت بیشتری است. همچنین برای ورق‌های با تعداد لایه‌های کمتر، دقت تئوری پیشنهادی بیشتر می‌شود. از دلایل این مسئله می‌توان به افزوده‌شدن مقدار *h/100* به تابع سینوس هذلولوی اشاره کرد. این مقدار جهت جبران پیش‌بینی‌های کمتر از حل‌های دقیق به تابع سینوس هذلولوی اضافه شده است. با اینکه در آنالیز خمش این کمبود جبران می‌شود، در بیشتر موارد، در محاسبه فرکانس مبنا و نیروی بحرانی، افزایش این جمله اثر وارون دارد و باعث کاهش مقدار بار بحرانی و فرکانس مبنا می‌شود. این موضوع خود از ویژگی‌های پدیده‌های کمانش و ارتعاش است. بنابراین، برای برخی از نسبت‌های مدول و تعداد لایه‌ها این اثر باعث فاصله‌گرفتن نتایج از نتایج حل دقیق نور و بارتون می‌شود.

در شکل ۳ تأثیرات نسبت طول به ضخامت و نسبت مدول الاستیسیته برای بازه گسترده‌ای از این پارامترها، برای چندلایه نوع یکم، نشان داده شده است. با توجه به شکل ۳، مشاهده می‌شود که با گذشتن از ورق‌های ضخیم (*a/h<8*)، افزایش زیادی در فرکانس مبنای ورق رخ می‌دهد، ولی با رسیدن به ورق‌های نازک شیب این تغییرات بسیار کم شده و مقدار فرکانس مبنای ورق تقریباً یکنواخت می‌شود. افزایش نسبت مدول برای ورق‌های ضخیم دارای تأثیرات کمی بر روی فرکانس مبناست، در صورتی که با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، برای ورق‌های نازک و در ناحیه غشایی افزایش نسبت مدول تأثیر بسیاری در فرکانس مبنای ورق می‌گذارد و افزایش آن باعث افزایش شدید فرکانس مبنای ورق می‌شود.

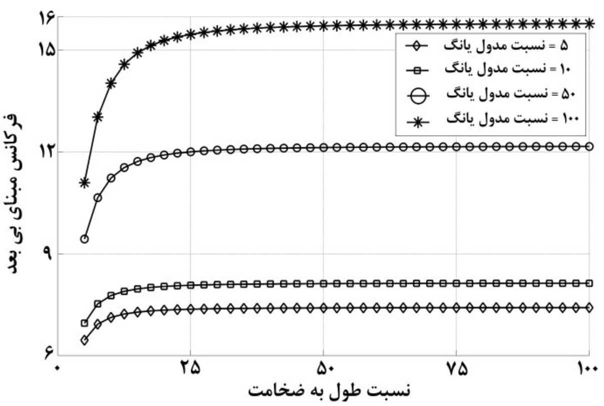


شکل ۳ تأثیرات نسبت طول به ضخامت و نسبت مدول بر فرکانس مبنای ورق

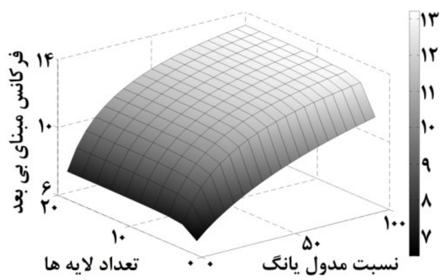
در شکل‌های ۴ و ۵ نمای دوبعدی برای نسبت‌های طول به ضخامت ثابت و بررسی تأثیر نسبت مدول بر فرکانس مبنای ورق، و نسبت مدول ثابت و بررسی تأثیر نسبت طول به ضخامت ورق بر فرکانس مبنای ورق نمایش داده شده است.



شکل ۴ تأثیرات نسبت مدول در نسبت طول به ضخامت ثابت بر فرکانس مبنای ورق



شکل ۵ تأثیرات نسبت طول به ضخامت در نسبت مدول ثابت بر فرکانس مبنای ورق



شکل ۶ تأثیرات تعداد لایه‌های چندلایه و نسبت مدول بر فرکانس مبنای ورق

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

۷-۱-۲- مثال ۲: دولایه اریب‌چین پادمتقارن (θ/-θ) مربعی، با شرایط مرزی ساده نوع دوم (SS-2)، را درنظر می‌گیریم. در این مثال، چندلایه نوع دوم مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج عددی نسبت به فرکانس مبنای بی‌بعد حاصل از مرجع [۲۵] در جدول ۲ آورده شده است. این تئوری در مقایسه با نتایج حل تئوری مرتبه بالاتر رن[۲۵] برای کلیه مقادیر a/h دارای دقت بیشتری نسبت به تئوری‌های RPT1 و RPT2 می‌باشد. همچنین نتایج برای نسبت طول به ضخامت ۱۰۰ برای هر چهار تئوری تقریباً یکسان است. هدف از استفاده از این مثال بررسی اثر زاویه جهت‌گیری رشته‌های چندلایه مرکب اریب‌چین پادمتقارن بر روی فرکانس مبنای ورق بوده است.

جدول ۲ فرکانس مبنای ارتعاش آزاد بی‌بعد دولایه‌ی اریب‌چین پادمتقارن (θ/-θ) مربعی زیر شرایط مرزی ساده

a/h	Θ	مرجع	E_1/E_2 ۴۰	E_1/E_2 ۳۰	E_1/E_2 ۲۰	E_1/E_2 ۱۰	E_1/E_2 ۳
۵	۵	رن [11]	۴۰/۱۳۲	۳۸/۷۸۲	۳۶/۶۴۴	۳۲/۵۹۲	۲۶/۲۷۰
		RPT1 [19]	۴۵/۷۴۸	۴۳/۳۸۱	۳۹/۸۸۰	۳۳/۹۸۸	۲۶/۳۷۱
		RPT2 [19]	۴۵/۷۰۷	۴۳/۳۶۰	۳۹/۸۷۲	۳۳/۹۸۶	۲۶/۳۷۰
		RPT3	۴۵/۱۲۶	۴۲/۸۹۰	۳۹/۵۳۲	۳۳/۷۹۷	۲۶/۲۹۲
	۱۵	رن [11]	۳۸/۱۷۴	۳۶/۹۰۲	۳۵/۰۰۲	۳۱/۵۷۸	۲۶/۰۹۸
		RPT1 [19]	۴۲/۱۴۰	۳۹/۹۸۲	۳۷/۰۸۴	۳۲/۴۸۴	۲۶/۱۷۱
		RPT2 [19]	۴۱/۹۴۶	۳۹/۸۷۰	۳۷/۰۳۶	۳۲/۴۷۴	۲۶/۱۷۱
		RPT3	۴۱/۴۸۰	۳۹/۴۷۰	۳۶/۷۲۷	۳۲/۲۸۷	۲۶/۰۹۱
	۳۰	رن [11]	۳۷/۹۱۲	۳۶/۴۴۲	۳۴/۳۲۴	۳۰/۸۵۰	۲۵/۸۳۰
		RPT1 [19]	۴۲/۴۰۲	۳۹/۶۵۶	۳۶/۱۹۸	۳۱/۴۶۲	۲۵/۸۶۶
		RPT2 [19]	۴۱/۹۰۰	۳۹/۳۳۴	۳۶/۰۳۷	۳۱/۴۲۱	۲۵/۸۶۵
		RPT3	۴۱/۵۳۱	۳۸/۹۹۹	۳۵/۷۵۷	۳۱/۲۳۴	۲۵/۷۸۲
	۴۵	رن [11]	۳۸/۵۰۸	۳۶/۹۴۶	۳۴/۶۹۰	۳۱/۰۰۶	۲۵/۷۵۸
		RPT1 [19]	۴۳/۳۵۹	۴۰/۴۲۰	۳۶/۶۹۴	۳۱/۶۲۱	۲۵/۷۸۳
		RPT2 [19]	۴۲/۷۲۳	۴۰/۰۰۲	۳۶/۴۷۸	۳۱/۵۶۴	۲۵/۷۸۱
		RPT3	۴۲/۳۷۶	۳۹/۶۸۰	۳۶/۲۰۲	۳۱/۳۷۳	۲۵/۶۹۷
۱۰	۵	رن [11]	۱۴/۲۱۱	۱۳/۲۲۰	۱۱/۸۳۹	۹/۷۱۵۹	۷/۲۳۹۸
		RPT1 [19]	۱۵/۲۲۰	۱۳/۹۵۸	۱۲/۲۸۱	۹/۸۶۶۶	۷/۲۴۸۱
		RPT2 [19]	۱۵/۲۱۸	۱۳/۹۵۷	۱۲/۲۸۱	۹/۸۶۶۶	۷/۲۴۸۱
		RPT3	۱۵/۱۲۸	۱۳/۸۹۷	۱۲/۲۴۱	۹/۸۴۶۸	۷/۲۴۰۵
	۱۵	رن [11]	۱۲/۶۱۸	۱۱/۸۵۳	۱۰/۸۲۳	۹/۲۲۹۳	۷/۱۸۲۶
		RPT1 [19]	۱۳/۱۷۹	۱۲/۲۵۸	۱۱/۰۷۰	۹/۳۲۰۹	۷/۱۸۸۶
		RPT2 [19]	۱۳/۱۶۵	۱۲/۲۵۱	۱۱/۰۶۷	۹/۳۲۰۳	۷/۱۸۸۵
		RPT3	۱۳/۱۰۴	۱۲/۲۰۱	۱۱/۰۳۲	۹/۳۰۱۲	۷/۱۸۰۹
	۳۰	رن [11]	۱۲/۳۳۸	۱۱/۴۶۶	۱۰/۳۶۹	۸/۸۶۷۰	۷/۰۹۵۴
		RPT1 [19]	۱۲/۹۲۸	۱۱/۸۴۹	۱۰/۵۶۷	۸/۹۲۲۲	۷/۰۹۸۰
		RPT2 [19]	۱۲/۸۸۶	۱۱/۸۲۳	۱۰/۵۵۴	۸/۹۱۹۵	۷/۰۹۰۱
		RPT3	۱۲/۸۳۴	۱۱/۷۸۱	۱۰/۵۲۳	۸/۹۰۰۵	۷/۰۷۳۹
	۴۵	رن [11]	۱۲/۶۱۹	۱۱/۶۸۲	۱۰/۵۰۴	۸/۹۱۱۴	۷/۰۷۲۲
		RPT1 [19]	۱۳/۲۶۳	۱۲/۰۹۸	۱۰/۷۱۵	۸/۹۶۶۰	۷/۰۷۳۹
		RPT2 [19]	۱۳/۲۰۷	۱۲/۰۶۳	۱۰/۶۹۹	۸/۹۶۲۱	۷/۰۷۳۸
		RPT3	۱۳/۱۵۶	۱۲/۰۲۰	۱۰/۶۶۶	۸/۹۴۲۵	۷/۰۶۵۹

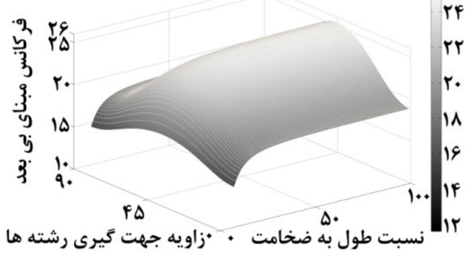
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

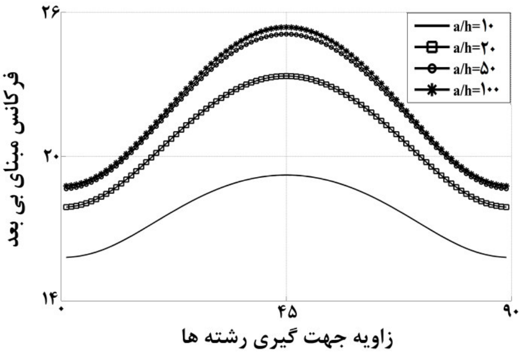
همان‌گونه که از نتایج بر می‌آید، فرکانس مبنای ارتعاش ورق با افزایش زاویه جهت‌گیری رشته‌ها نسبت به محورهای سیستم چندلایه، نخست، کاهش یافته و در زاویه خاصی مجدداً سیر افزایشی پیدا می‌کند. این تغییرات به گونه‌ای تکرار می‌شوند تا دوباره با رسیدن به زاویه ۹۰ به مقدار نخست در صفر درجه برسد. در شکل ۷ تأثیر هم‌زمان تغییرات در نسبت طول به ضخامت و زاویه جهت‌گیری رشته‌ها نشان داده شده است. از این ویژگی می‌توان در موارد صنعتی، که با محدودیت انتخاب جنس چندلایه روبه‌رو هستیم، استفاده کرد.

در شکل ۸، تأثیر تغییر زاویه جهت‌گیری رشته‌ها بر روی فرکانس مبنا، در نسبت طول به ضخامت ثابت، نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، با تغییر نسبت طول به ضخامت، تأثیرات تغییر در زاویه جهت‌گیری رشته‌ها نیز تغییر می‌کند. به عنوان مثال، برای نسبت طول به ضخامت ۱۰۰، میزان تغییرات در فرکانس مبنای ورق به ازای تغییرات در زاویه جهت‌گیری رشته‌ها، با میزان تغییرات در فرکانس مبنای ورق به ازای تغییرات در زاویه جهت‌گیری رشته‌ها برای نسبت طول به ضخامت ۱۰ متفاوت است و این موضوع نشان‌دهنده اثرات درهم‌گیر زاویه جهت‌گیری رشته‌ها و نسبت طول به ضخامت بر فرکانس مبنای ورق می‌باشد. به همین دلیل اثرات تغییر در زاویه جهت‌گیری رشته‌ها و نسبت طول به ضخامت باید به طور هم‌زمان بر فرکانس مبنا بررسی شوند.

۷-۱-۳- مثال ۳: چندلایه اریب‌چین پادمتقارن $_5$(۴۵/۴۵-) مربعی، زیر شرایط مرزی ساده نوع دوم (SS-2)، را درنظر می‌گیریم. در این مثال، چندلایه نوع دوم مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج عددی به‌دست‌آمده، نسبت به فرکانس مبنای بی‌بعد به‌دست آمده از حل دقیق و سایر تئوری‌ها، در جدول ۳ مقایسه شده است.



شکل ۷ تأثیرات زاویه جهت‌گیری رشته‌ها و نسبت مدول بر فرکانس مبنای ورق



شکل ۸ تأثیرات زاویه جهت‌گیری رشته‌ها در نسبت مدول ثابت بر فرکانس مبنای ورق

جدول ۳ فرکانس مبنای ارتعاش آزاد بی‌بعد ده‌لایه اریب‌چین پادمتقارن $_5$(۴۵/۴۵-) مربعی تحت شرایط مرزی ساده

a/h	مرجع	فرکانس بی‌بعد اصلی	خطا (درصد)
	حل دقیق[26]	۹/۹۸۲۵	-
	TSDT [12]	۱۰/۱۵۳۷	۱/۷۲
	FSDT [12]	۱۰/۱۲۸۸	۱/۴۷
۵	RPT1 [19]	۱۰/۱۵۳۷	۱/۷۲
	RPT2 [19]	۱۰/۱۵۱۶	۱/۶۹
	CLPT	۱۵/۴۶۶۱	۵۴/۹۳
	RPT3	۱۰/۰۳۵۱	۰/۵۳
	حل دقیق[26]	۱۳/۵۱۰۰	-
	TSDT [12]	۱۳/۶۰۷۸	۰/۷۲
	FSDT [12]	۱۳/۶۱۴	۰/۷۷
۱۰	RPT1 [19]	۱۳/۶۰۷۸	۰/۷۲
	RPT2 [19]	۱۳/۶۰۷۸	۰/۷۲
	CLPT	۱۵/۸۴۶	۱۷/۲۹
	RPT3	۱۳/۵۴۴۶	۰/۲۶
	حل دقیق[26]	۱۵/۹۵۰۰	-
	TSDT [12]	۱۵/۹۴۸۲	- ۰/۰۱
	FSDT [12]	۱۵/۹۴۸۴	- ۰/۰۱
۱۰۰	RPT1 [19]	۱۵/۹۴۸۲	- ۰/۰۱
	RPT2 [19]	۱۵/۹۴۸۲	- ۰/۰۱
	CLPT	۱۵/۹۷۷۵	۰/۱۷
	RPT3	۱۵/۹۴۷۲	- ۰/۰۲

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

در نتایج به‌دست آمده، تئوری پیشنهادی برای ورق‌های ضخیم نسبت به سایر تئوری‌ها دارای نزدیکی بیشتری به حل دقیق می‌باشد. در این مثال، می‌توان تأثیر نسبت طول به ضخامت ورق بر دقت تئوری‌های پیشنهادشده برای تخمین فرکانس مبنای ورق را مشاهده کرد. همان‌طور که مشخص است، با کاهش نسبت طول به ضخامت ورق، از دقت تئوری‌ها کاسته می‌شود؛ از این رو استقاده از تئوری پیشنهادی، که بتواند نتایج با دقت بیشتری در این نسبت‌ها به‌دست آورد، بسیار سودمند به‌نظر می‌رسد.

۸- نتیجه‌گیری

ارتعاش آزاد تئوری چهارمتغیره پالوده‌شده پیشنهادی برای ورق‌های چندلایه مرکب گسترش داده شد. این تئوری، با نام پیشنهادی RPT3، توزیع سینوس هذلولوی کرنش جانبی برشی برای تئوری RPT را نمایش می‌دهد. در این تئوری شرط مرزی صفرشدن تنش‌های پوسته‌های بالایی و زیرین ورق برقرار است. نتایج با دقت بالای تئوری پیشنهادی RPT3 در پیش‌بینی فرکانس مبنای ورق‌های چندلایه عمودچین و نتایج با دقت بسیار بالای این تئوری در پیش‌بینی فرکانس مبنای ورق‌های چندلایه‌ی اریب‌چین از دلایل ارایه این مقاله بوده است. از ویژگی‌های دیگر این تئوری استفاده از فرم تئوری RPT و به همراه آن سادگی معادله‌ها، افزون بر دقت بالای تئوری، می‌باشد. از این رو استفاده از این تئوری، برای مواردی که پیچیدگی محاسبات زیاد می‌باشد، پیشنهاد می‌شود. همچنین بررسی تأثیر تعداد لایه‌ها و نسبت مدول‌ها و تابع شکل برشی هدف اصلی این مقاله بوده است. با بررسی تأثیر نسبت مدول و نسبت طول به ضخامت ورق می‌توان گفت در محدوده ورق‌های ضخیم ($a/h<8$)، با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، افزایش زیادی در فرکانس مبنای ورق رخ می‌دهد، ولی با گذشتن از این ناحیه شیب این تغییرات بسیار کم شده و مقدار فرکانس مبنای ورق تقریباً یکنواخت می‌شود. برای ورق‌های ضخیم، افزایش نسبت مدول‌ها دارای تأثیرات کمی بر روی فرکانس مبناست، در صورتی که با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، برای ورق‌های نازک و در ناحیه غشایی، افزایش نسبت مدول‌ها تأثیر بسیاری در فرکانس مبنای ورق می‌گذارد و افزایش آن باعث افزایش شدید فرکانس مبنای ورق می‌شود.

۹- مراجع

[1] Mallikarjuna M., Kant T., “A Critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches”, *Composite Structures*, Vol. 23, No. 4, 1993, pp. 293-312.
[2] Reissner E., “The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending Elastic Plates”, *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, Vol. 12, 2, 1945, pp. 69-77.
[3] Whitney J. M., Pagano N. J., “Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates”, *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, Vol. 37, No. 4, 1970, pp. 1031-6.
[4] Noor A. K., Burton W. S., “Stress and Free Vibration Analysis of Multilayered Composite Plates, *Composite Structures*, Vol. 13, No. 3, 1989, pp. 183-204.
[5] Van H. N., Duy N. M., Cong T. T., “Free Vibration Analysis of Laminated Plate/Shell Structures Based on FSDT with a Stabilized Nodal-Integrated Quadrilateral Element”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313, 2007, pp. 205-223.
[6] Cheung Y. K., Zhou D., “Vibration of Tapered Mindlin Plates in Terms of Static Timoshenko Beam Functions”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, 2003, pp. 693-709.
[7] Ngo-Cong D., Mai-Duy N., Karunasena W., Tran-Cong T., “Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT using One-Dimensional IRBFN Method”, *Journal of Computers Structures*, Vol. 89, 2011, pp. 1-13.
[8] Levinson M., “An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates”, *Mechanical Research Communication*, Vol. 7, No. 6, 1980, pp. 343-50.
[9] Bhimaraddi A., Stevens L. K., “A Higher Order Theory for Free Vibration of Orthotropic, Homogeneous and Laminated Rectangular Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, *Trans ASME*, Vol. 51, No. 1, 1984, pp. 195-8.
[10] Reddy J. N., “A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates”, *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, Vol. 51, 1984, pp. 745-52.
[11] Ren J. G., “A New Theory of Laminated Plate”, *Composite Science and Technology*, Vol. 26, 1986, pp. 225-39.
[12] Reddy J. N., Phan N. D., “Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 98, No. 2, 1985, pp. 157-170.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]

[13] Khdeir A. A., “Free Vibration and Buckling of Unsymmetric Cross-Ply Laminated Plates using a Refined Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 128, No. 3, 1989, pp. 377-95.
[14] Matsunaga H., Vibration and Stability of Cross-Ply Laminated Composite Plates According to a Global Higher-Order Plate Theory, *Composite Structures*, Vol. 48, 2000, pp. 231-244.
[15] Shimpi R. P., “Refined plate Theory and Its Variant”, *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 1, 2002, pp. 137-46.
[16] Shimpi R. P., Patel H. G., “A Two Variable Refined Plate Theory for Orthotropic Plate Analysis”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22, 2006, pp. 6783-99.
[17] Kim S. E., Thai H. T., Lee J., “A Two Variable Refined Plate Theory for Laminated Composite Plates”, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 2, 2009, pp. 197-205.
[18] Shimpi R. P., Patel H. G., “Free Vibrations of Plate using Two Variable Refined Plate Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, No. 4-5, 2006, pp. 979-99.
[19] Kim S. E., Thai H. T., “Free Vibration of Laminated Composite Plates using Two Variable Refined Plate Theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 52, 2010, pp. 626-633.
[20] Lurie A. I., *Theory of Elasticity*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
[21] Vasiliev V. V., Morozov V., *Advanced Mechanics of Composite Materials*, Oxford, Elsiver, 2007.
[22] Reddy J. N., *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, New York, John Wiley and Sons, 1984.
[23] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, *Theory and Analysis*, Boca Raton FL, CRC Press, 2004.
[24] Noor A. K., Free vibrations of Multilayered Composite Plates, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 7, 1973, pp. 1038-9.
[25] Ren J. G., Owen D. R. J., Vibration and Buckling of Laminated Plates, *International Journal of Solid and Structures*, Vol. 25, 1989, pp. 95-106.
[26] Noor A. K., Burton W. S., Free Vibrations of Multilayered Composite Plates, *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 7, 1973, pp. 1038-9.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1391.12.6.12.7]
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-05-03]