



سرویس های  
ویژه



سرویس ترجمه  
تخصصی



کارگاه های  
آموزشی



بلاگ  
مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری  
STES



فیلم های  
آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



کارگاه آنلاین  
بررسی مقابله ای متون (مقدماتی)



کارگاه آنلاین  
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی



کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی  
بین المللی و  
ترفند های جستجو



## مطالعه شبکه در روش شبکه بولتزمن-حجم محدود در شبیه‌سازی جریان آرام تراکم‌پذیر لزج

حامد جلالی<sup>1</sup>، رامین کمالی مقدم<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14665-834، rkamali@ari.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 آذر 1396

پذیرش: 19 بهمن 1396

ارائه در سایت: 19 اسفند 1396

کلید واژگان:

روش شبکه بولتزمن-حجم محدود

مطالعه شبکه

جریان تراکم‌پذیر لزج آرام

شبکه منحنی الخطا

### چکیده

نرم‌افزاری به روش شبکه بولتزمن بر مبنای حجم محدود (FVLBM) برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام دوبعدی در شبکه منحنی الخطا با سازمان توسعه داده شده‌است. در مقاله حاضر، صحت‌سنجی نرم‌افزار توسعه‌یافته و ارزیابی دقت و چهار مدل شبکه جدید دوبعدی D2Q9L2، D2Q13L2، D2Q17L2 و D1Q21L2 به ازای افزایش سرعت‌های گسسته (فازی) شبکه در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر مورد مطالعه قرار گرفته و شبکه بهینه معین گردیده‌است. جهت شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر در روش شبکه بولتزمن، از روش جدید تابع دایروی بجای بسط یا تصحیح تابع ماکسول به منظور محاسبه توابع توزیع تعادلی استفاده و روش حجم محدود به همراه روش MUSCL مرتبه-3 در گسسته‌سازی عبارت جابجایی برای بهتر شکار کردن ناپیوستگی‌های جریان به کار گرفته شده‌است. جهت بررسی عملکرد روش و مطالعه پارامتری ارائه شده، جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام پیرامون ایرفویل NACA0012 در دستگاه منحنی الخطا با سازمان در زوایای حمله صفر و 10 درجه شبیه‌سازی شده‌است. مسائل شبیه‌سازی شده در رژیم جریان پیوسته با نتایج عددی معتبر حل معادلات ناویر-استوکس مقایسه شده‌است. با وجود این که نتایج عددی در مقایسه با حل عددی متناظر از دقت بسیار مناسبی برخوردار است، محدودیت‌های روش حل حاضر و ارزیابی نتایج حاصل از شبکه‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفته‌است.

## Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann Method in Simulation of Laminar Viscous Compressible Flow

Hamed Jalali, Ramin Kamali-Moghadam\*

Department of Aerospace Engineering, Aerospace Research Institute, Tehran, Iran

\* P.O.B. 14665-834, Tehran, Iran, rkamali@ari.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 27 November 2017

Accepted 08 February 2018

Available Online 10 March 2018

Keywords:

Finite Volume-Lattice Boltzmann Method

Lattice Study

Viscous Laminar Compressible Flow

Curvilinear Grid System

### ABSTRACT

A Finite Volume-Lattice Boltzmann Method (FVLBM) for simulation of viscous laminar compressible flows in 2-D structured curvilinear coordinate system has been developed. In the present study, validation of the presented software and accuracy assessment of four new 2D lattices D2Q9L2, D2Q13L2, D2Q17L2 and D2Q21L2 based on increasing discrete velocities of lattice has been studied and the optimum lattice has been introduced. The presented LBM has developed using new method of circular function idea instead of expansion or correction of Maxwellian function for evaluation of equilibrium distribution functions. Moreover, in order to capture discontinuities in the flow field, 3rd order MUSCL scheme has been implemented for approximation of convective term. The laminar compressible viscous flow over the NACA0012 airfoil has been simulated in the curvilinear coordinate system for two angle of attacks, 0 and 10 Deg. The obtained results have been compared with validated N.S. solutions. Although the results have desirable accuracy in comparison of those of the N.S. solutions, limitation of the presented method and results assessment obtained by the different lattices have been investigated.

### 1- مقدمه

که همان معادله بولتزمن<sup>۱</sup> می‌باشد- دینامیک جریان سیال شبیه‌سازی می‌شود. هنگام حل عددی معادله بولتزمن، می‌توان درست مانند حل عددی معادلات حاکم در مقیاس ماکروسکوپی<sup>۲</sup> یعنی معادلات اوپلر یا ناویر-استوکس رفتار کرد. اما به علت ویژگی‌های خاص روش شبکه بولتزمن در مقایسه با روش‌های متداول CFD از قبیل قابلیت موازی‌سازی ذاتی، معادله

روش شبکه بولتزمن در حال حاضر به عنوان یک روش قدرتمند در دینامیک سیالات محاسباتی<sup>۱</sup> (CFD) برای شبیه‌سازی جریان سیال در رژیم‌های مختلف جریان مورد توجه ویژه قرار گرفته است [2,1]. در روش شبکه بولتزمن با گسسته‌سازی معادله حاکم جریان سیال در مقیاس مروسکوپی<sup>۲</sup>-

<sup>3</sup> Boltzmann equation

<sup>4</sup> Macroscopic scale

<sup>1</sup> Computational Fluid Dynamics

<sup>2</sup> Mesoscopic scale

Please cite this article using:

H. Jalali, R. Kamali-Moghadam, Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann Method in Simulation of Laminar Viscous Compressible Flow, Modares Mechanical Engineering, Vol. 18, No. 03, pp. 417-428, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

www.sti.ir

مولفه‌های همراه با سه سطح انرژی، ارائه دادند. از روی این مدل می‌توان معادلات اوایل را بازیابی کرد. در این روش، مدل شبکه D2Q9 می‌باشد اما به علت تعریف دو سطح انرژی مدل به صورت D2Q9L2 معرفی می‌شود [10].

شی و همکارانش نیز یک مدل دوبعدی 9-مولفه‌ای که از روی آن معادلات اوایل بازیابی می‌شود، ارائه دادند. در این روش نیز شبکه و تابع توزیع همانند مدل D2Q9 است. ایشان مدل خود را با سه سطح انرژی معرفی کردند و به خوبی توانستند مدل-BGK را با روش تفاضل محدود همراه با روش کاهش مجموع تغییرات<sup>6</sup> تحلیل و امواج ضربه‌ای را آشکار سازند [11]. کیو و همکاران روشی جدید و آسان، برای محاسبه توابع توزیع احتمالی بدون محدودیت عدد ماخ ارائه کردند [12]. ایشان از یک تابع موسوم به تابع دایروی<sup>7</sup> در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده نمودند. آن‌ها بجای اصلاح و توسعه تابع ماکسول که از نقطه نظر عملیات ریاضی یک تابع پیچیده می‌باشد، استفاده از یک تابع دایروی با فرم بسیار ساده را پیشنهاد دادند. این روش یک روش بسیار موثر برای ارائه مدل‌های جدید شبکه می‌باشد.

در این مقاله از روش تابع دایروی برای محاسبه توابع توزیع احتمالی استفاده شده تا محدودیت روش استاندارد شبکه بولتزمن برطرف شود و جریان تراکم‌پذیر لزج به خوبی شبیه‌سازی گردد. از طرفی، با توجه به اینکه روش حجم محدود<sup>8</sup>، روشی بر مبنای حفظ قوانین بقای فیزیکی می‌باشد، این روش برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر که معمولاً همراه با ناپیوستگی‌هایی چون موج ضربه‌ای و ناپیوستگی تماسی هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، با استفاده از روش حجم محدود در تحلیل عددی معادله بولتزمن، عدم انعطاف‌پذیری روش شبکه استاندارد بولتزمن نسبت به شبکه‌های پیچیده و منحنی‌الخط بر طرف گردیده است. همچنین برای گسسته‌سازی عبارت جابجایی خطی معادله بولتزمن-BGK، از روش ماسل<sup>9</sup> مرتبه-3 استفاده می‌شود.

در این تحقیق، صحت‌سنجی چهار مدل شبکه جدید دو بعدی D1Q21L2، D2Q17L2، D2Q13L2، D2Q9L2 در تحلیل جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام حول ایرفویل NACA0012 در دستگاه منحنی‌الخط باسازمان مطالعه شده و شبکه بهینه معین گردیده است. به علت قابلیت روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان در دامنه وسیعی از اعداد نادسن<sup>10</sup>، نرم‌افزار توسعه یافته، به خوبی در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر، در دو زمینه صنعتی کاربرد عملی دارد؛ ابتدا در شبیه‌سازی جریان‌های کم-چگالی به عنوان مثال شبیه‌سازی جریان پیرامون اجسام بازگشت به جو در ارتفاعات بالا که در اعداد نادسن بزرگ (1~10) حرکت می‌کنند؛ دوم، در شبیه‌سازی جریان در مقیاس میکرو، مانند میکروکانال‌ها، میکروکمپرسورها، میکرونازل‌ها، میکرو-پرنده‌ها که عدد نادسن به سمت جریان مولکولی آزاد (ناپیوسته) میل می‌کند وجود دارد. اما تمرکز اصلی نویسندگان مقاله حاضر مطالعه شبکه<sup>11</sup> در دقت شبیه‌سازی است و مسئله شبیه‌سازی جریان‌های رقیق مدنظر نمی‌باشد. به عبارت دیگر؛ در این مقاله به ارائه آرایش‌های جدید شبکه (4) شبکه جدید) و مقایسه دقت این روش‌ها در تحلیل میدان جریان تراکم‌پذیر لزج و آرام پرداخته شده است. مطابق تحقیقات به عمل آمده مطالعه آرایش‌های جدید شبکه در روش مدل تابع دایروی تاکنون صورت نگرفته

حاکم ساده‌تر، دسترسی به حل آسان میدان فشار، مواجه بودن با عبارت خطی جابجایی به جای عبارت غیرخطی متناظر در معادلات اوایل/ناویر-استوکس<sup>1</sup>، اعتبار در گستره وسیعی از عدد نادسن و غیره، همه و همه باعث روی آوری محققین به این روش شده است. یکی دیگر از برتری‌های روش شبکه بولتزمن نسبت روش‌های متعارف CFD، ایجاد فضای جدیدی در دینامیک سیالات محاسباتی است که اصطلاحاً به آن «روش‌های بدون-شبکه»<sup>2</sup> گفته می‌شود. بر این اساس روش شبکه بولتزمن نیاز به تولید شبکه متداول ندارد و با توزیع یکنواخت شبکه در یک میدان کارترین و سپس تعیین مرز هندسه و تطبیق مرز با شبکه‌های ریزتر فاز تولید شبکه را به اتمام می‌رساند. اما ما در این پژوهش در بخش تولید شبکه از روش متداول استفاده کرده‌ایم و با تولید شبکه<sup>3</sup> باسازمان<sup>4</sup> منطبق بر هندسه از روش حجم محدود در روش شبکه بولتزمن بهره برده‌ایم.

بر همین اساس استفاده از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر و آشکارسازی پدیده‌های فیزیکی مانند امواج ضربه‌ای و امواج تماسی جذاب خواهد بود. معادله بولتزمن با روش‌های مختلف عددی از قبیل حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود قابل حل است. در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر به روش شبکه بولتزمن صورت گرفته است. کاربرد روش شبکه بولتزمن استاندارد محدود به تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر می‌باشد چرا که مدل‌های شبکه بولتزمن بر مبنای عبارت تابع ماکسول در اعداد ماخ کوچک پایه‌ریزی شده است. بنابراین در میان پژوهش‌های جدید در حوزه دینامیک سیالات عددی، تحقیقات فراوانی برای پوشش رژیم‌های جریان گذر صوتی و مافوق صوتی مشاهده می‌شود و تاکنون چندین مدل شبکه بولتزمن برای پوشش جریان‌های تراکم‌پذیر ارائه گردیده است [3-13]. اولین قواعد برخورد ذرات در روش شبکه بولتزمن توسط فریش و همکارانش ارائه شد [3]. الکساندر و همکارانش در سال 1991 روش شبکه بولتزمن را برای جریان تراکم‌پذیر به کار بردند و معادله برگرز<sup>4</sup> را شبیه‌سازی کردند [4]. کونکسو از طریق وارد نمودن یک جمله غیرتعدالی در توابع توزیع ذرات، مدل ساده شده بهاتناگر-گروس-کروک<sup>5</sup> را برای جریان لزج تعمیم داد. وی عنوان نمود که نتیجه این کار تقریب دقیق‌تر معادلات ناویر-استوکس می‌باشد و همچنین بیان کرد که مدل مذکور برای حل جریان لایه مرزی و البته برای مدل کردن موج ضربه‌ای، مناسب است [5].

کینگ لی با ارائه روش تابع توزیع دوگانه مدلی برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر ارائه کرد [6]. چنگهای سان با افزودن سرعت سیال به سرعت حرکت ذرات روش را به گونه‌ای اصلاح نمود که می‌تواند جریان سیال تراکم‌پذیر را در دامنه وسیعی از اعداد ماخ شبیه‌سازی کند. سان با این روش مسائلی نظیر مساله پخش موج ضربه‌ای و انعکاس آن در اعداد ماخ بزرگ را شبیه‌سازی نمود [7]. چنگهای سان و هسو در سال 2003 روش سان را برای جریان‌های سه بعدی توسعه دادند و جریان روی سیلندر داخل یک کانال و جریان گذر صوتی روی NACA0012 را با آن تحلیل کردند [8]. یالینگ هیو و همکاران، در سال 2013 توانستند یک مدل سه بعدی مبتنی بر روش اختلاف محدود روش شبکه بولتزمن در جریان تراکم‌پذیر با رویکرد تابع توزیع دوگانه، را تحلیل کنند [9]. یان چن و هیو، یک مدل دوبعدی 9-

<sup>6</sup> Total variation diminishing (TVD)<sup>7</sup> Circular Function (CF)<sup>8</sup> Finite Volume Method (FVM)<sup>9</sup> Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL)<sup>10</sup> Knudsen number<sup>11</sup> Lattice<sup>1</sup> Euler/Navier-Stokes equations<sup>2</sup> Meshless methods<sup>3</sup> Grid generation<sup>4</sup> Bergures equation<sup>5</sup> Bhatnagar-Gross-Krook (BGK)

$$\lambda_c = \frac{2(\gamma - 1)\rho e}{\rho_c} \quad (8)$$

با استفاده از رابطه  $\rho_c = \rho/\gamma$  و بسط چایمن-انسکوگ و با تعاریف فوق معادله بولتزمن-BGK، معادلات ناویر-استوکس قابل بازیابی است. برخی خواص ماکروسکوپی سیال به صورت زیر به دست می آید:

$$\mu = \tau p \quad (9)$$

$$\mu_b = \left(\frac{5}{3} - \gamma\right)\mu \quad (10)$$

$$k = \tau p C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tau p R \quad (11)$$

که در آن  $\mu$ ، لزجت دینامیکی،  $\mu_b$ ، لزجت حجمی،  $\tau$ ، زمان آرامش،  $k$ ، ضریب انتقال حرارت گاز،  $C_p$ ، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت و  $R$ ، ثابت جهانی گازها است. نکته قابل توجه این است که لزجت و ضریب انتقال حرارت مستقل از هم نیستند (به عبارت دیگر عدد پرانتل برابر 1 ثابت می شود) و از طرفی در جریان تراکم پذیر لزجت حجمی صفر نمی شود چرا که در جریان تراکم پذیر برخلاف جریان تراکم ناپذیر که مولکول ها تک-اتمی در نظر گرفته می شوند، به علت افزایش درجات آزادی و فعال شدن مد انرژی دورانی مولکولی، الزاما باید مولکول ها دو-اتمی در نظر گرفته شوند و بنابراین لزجت حجمی صفر نخواهد بود. این نکته در رابطه (10) به خوبی نمایان است به نحوی که اگر درجات آزادی اضافی مولکولی با  $K$  نشان داده شود و ابعاد مسئله با  $D$  مشخص شود، همچنین چنانچه  $b$  معرف تعداد کل درجات آزادی مولکولی باشد (برای مولکول تک-اتمی  $b = 3$ ، مولکول دو-اتمی  $b = 5$  و 7 و 6 به ترتیب برای مولکول گاز سه-اتمی، خطی و غیرخطی):

$$K = b - D \quad (12)$$

از طرفی تعداد کل درجات آزادی مولکولی گاز نسبت گرمایی ویژه گاز را تعیین می کند:

$$\gamma = \frac{b + 2}{b} \quad (13)$$

اگر  $b = 3$  باشد یعنی مولکول تک-اتمی در نظر گرفته شود (جریان تراکم ناپذیر)،  $\gamma = 5/3$  خواهد بود و لزجت حجمی برابر صفر خواهد شد. بنابراین در مدل حاضر، برای گاز با مولکول دو-اتمی یا چند اتمی، لزجت حجمی غیر صفر هم مرتبه با لزجت دینامیکی می شود در صورتی که در اکثر مسائل مهندسی  $\mu_b$  به اندازه کافی نسبت به  $\mu$  کوچک است و قابل صرف نظر می باشد. به هر حال برای برخی از مسائل (هنگام وجود جدایش جریان لایه مرزی روی سطح) وجود  $\mu_b$  در مدل حاضر باعث بروز خطای عددی می شود. بنابراین در جریان تراکم پذیر وجود این دو خطا یعنی  $Pr = 1$  و صفر نبودن لزجت حجمی در این مدل وجود دارد که هر دو ناشی از مدل برخورد مولکولی BGK می باشد، زیرا در مدل برخورد BGK تنها یک پارامتر  $\tau$  وجود دارد که سه پارامتر انتقالی  $\mu$ ،  $\mu_b$  و  $k$  را تنظیم نماید. پیش از این نیز در

است و تحقیق حاضر گام جدیدی در بررسی پارامتریک شبکه در روش تابع دایروی محسوب می شود.

## 2- روابط حاکم

معادله استاندارد شبکه بولتزمن تنها برای جریان های کم سرعت (تراکم ناپذیر) معتبر می باشد [8]. بنابراین برای پوشش جریان های تراکم پذیر نیاز به تصحیح این روش می باشد. در این مقاله، ابتدا به محاسبه توابع توزیع تعادلی و سپس به بیان نحوه گسسته سازی معادله بولتزمن پرداخته خواهد شد.

## 2-1- تابع دایروی

توابع توزیع تعادلی در روش استاندارد شبکه بولتزمن، توسط معادله ماکسول به دست می آید:

$$g = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{K+D}{2}}} \exp \left[ \frac{(\xi - u)^2 + \sum_{i=1}^K \xi_i^2}{2RT} \right] \quad (1)$$

ایده تابع دایروی بجای بسط و توسعه تابع ماکسول ارائه شد تا از پیچیدگی اصلاح این تابع برای اعداد ماکز بزرگ جلوگیری شود. باید توجه داشت که عملا تابع ماکسول نمی تواند در شبیه سازی جریان تراکم پذیر مورد استفاده قرار گیرد به علت این که این تابع برای مولکول های دو-اتمی یا چند-اتمی، درجه آزادی چرخشی<sup>1</sup> را در نظر نگرفته است و این درجه آزادی در جریان تراکم پذیر فعال می شود. بنابراین استفاده از یک تابع ساده پیشنهاد می شود که در بردارنده همه درجات آزادی مولکول باشد. این تابع برای مسائل دوبعدی، به صورت زیر تعریف می شود [13]:

$$g = \begin{cases} \frac{\rho_c}{2\pi r} & \text{اگر } |\xi - u| = r \text{ و } \lambda = \lambda_c \\ \rho_p & \text{اگر } \xi = u \text{ و } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $\xi$ ، سرعت ذره،  $\lambda$ ، انرژی داخلی یا پتانسیل ذره،  $c$ ، سرعت ویژه ذره سیال و  $u$ ، سرعت متوسط جریان (ماکروسکوپیکی) می باشد. تعبیر ریاضی تابع دایروی برای جریان لزج به این صورت است که، چگالی به دو قسمت تقسیم می شود؛  $\rho_c$  بر روی دایره ای به شعاع  $r$  با انرژی  $\lambda_c$  متمرکز شده است. و قسمت دیگر  $\rho_p$  در تصویر نقطه مرکز دایره روی صفحه  $\xi_x - \xi_y$  قرار می گیرد (شکل 1). بنابراین کل انرژی داخلی روی دایره ای که تنها کسری از چگالی را داراست، توزیع می شود.  $\rho_c$ ،  $\rho_p$ ،  $r$  و  $\lambda_c$  باید روابط زیر را ارضا کنند:

$$\rho = \rho_c + \rho_p \quad (3)$$

$$\rho e = \rho_c \left( \frac{1}{2} r^2 + \lambda_c \right) \quad (4)$$

$$P = (\gamma - 1)\rho e = \frac{1}{2} \rho_c r^2 \quad (5)$$

که در آن،  $e$ ، انرژی استاتیکی،  $P$ ، فشار استاتیکی و  $\gamma$ ، نسبت گرمایی ویژه گاز است.

با این روابط، چگالی، انرژی داخلی و فشار بدون تغییر باقی می ماند چون  $\rho_c$  به صورت یکنواخت در راستای دایره توزیع شده است و تصویر مرکز این دایره در صفحه سرعت های فازی برابر سرعت متوسط جریان  $v$  است. مومنتم نیز مشابه چگالی بدون تغییر باقی می ماند. با استفاده از رابطه (3) تا (5) روابط زیر به دست می آیند:

$$\rho_p = \rho - \rho_c \quad (6)$$

$$r = \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)\rho e}{\rho_c}} \quad (7)$$

<sup>1</sup> Rotational degrees of freedom

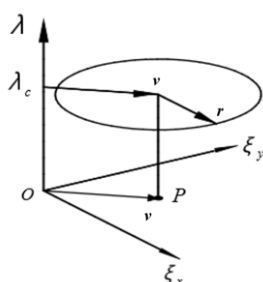


Fig. 1 Viscous Circular Function schematic.

شکل 1 شماتیک تابع دایروی لزج [14].

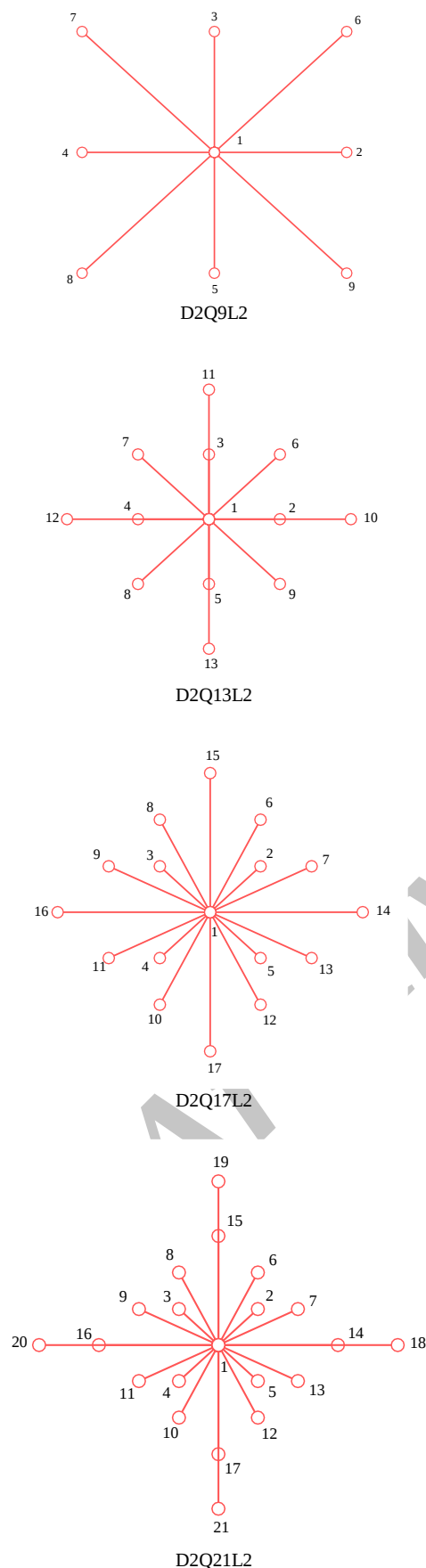


Fig. 2 Four 2D new lattices

شکل 2 چهار شبکه جدید دو-بعدی

معادله ناویر-استوکس با فرض تراکم ناپذیر بودن جریان ( $\nabla \cdot V = 0$ ) لزجت حجمی لحاظ نمی‌شد.

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \left( \frac{1}{3} \mu + \mu_b \right) \nabla (\nabla \cdot V) + F \quad (14)$$

به دلیل این که عدد پراتل تنها معادل 1 می‌تواند باشد، این مدل نمی‌تواند برای شبیه سازی جریان های لزج حرارتی با پراتل غیر واحد استفاده شود. اما زمانی که عدد ماخ جریان آزاد زیاد نباشد و اثرات آیرودینامیکی مهم نباشد، نیروهای آیرودینامیکی نسبت به دما حساس نیستند و نتایج مناسبی به دست می‌آید. تابع دایروی قادر است تمام معادلات بقا را ارضا نماید. توابع توزیع تعادلی برای هر سرعت گسسته می‌تواند توسط رابطه (15) و با استفاده از یک تابع وزنی به دست آید:

$$f_{i1}^{eq} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_c}{2\pi} \varphi_i(u + r_c \cos \theta, v + r_c \sin \theta) \frac{\lambda_2 - \lambda_c}{\lambda_2} d\theta + P_p \varphi_i(u, v)$$

$$f_{i2}^{eq} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_c}{2\pi} \varphi_i(u + r_c \cos \theta, v + r_c \sin \theta) \frac{\lambda_2}{\lambda_2} d\theta \quad (15)$$

می‌توان تضمین نمود که تابع وزن  $\varphi_i(\lambda, \xi)$  تمام قیود بقا را برآورد می‌سازد [14]. حال می‌توان تمام توابع توزیع تعادلی را توسط یک مجموعه چند جمله ای میاناب لاگرانژی<sup>1</sup> به دست آورد چرا که این چند جمله ای تمام قیود تابع وزن را ارضا می‌کند. برای سادگی می‌توان با جداسازی دو سطح انرژی به صورت  $\lambda_1 = 0$  و  $\lambda_2 > \lambda_c$ ، فقط تابع سرعت ذرات در نظر گرفته شود، یعنی  $\varphi_i(\xi)$  و در ادامه با در نظر گرفتن چند جمله ای لاگرانژی، یک شبکه<sup>2</sup> دو بعدی با فرم D2AQML2 ایجاد شود. باید توجه داشت که نیاز نیست همه مولفه های سرعت فازی شبکه عدد صحیح باشند چرا که در این مقاله از روش حجم-محدود برای حل معادله بولتزمن استفاده می‌شود. به علت ساده بودن تابع دایروی، معادله (15) به صورت تحلیلی انتگرال گیری می‌شود. توابع توزیع تعادلی به دست آمده توسط این روش، محدودیت عدد ماخ توزیع ماکسول را ندارند و به راحتی می‌توان از آن‌ها برای شبیه سازی جریان های لزج تراکم پذیر آرام استفاده نمود [14].

## 2-2- ارائه مدل های شبکه جدید دو بعدی

استفاده از یک تابع وزن در نسبت دادن یک متغیر به چندین نقطه به طور گسترده در روش های ذرات، مانند روش ذره در سلول<sup>3</sup>، روش گردابه<sup>4</sup>، و روش گردابه در سلول<sup>5</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک چند جمله ای میانابی لاگرانژی یک-بعدی با  $M$  عبارت به فرم زیر می‌باشد:

$$P(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2 + \dots + a_M + \dots \quad (16)$$

این چند جمله ای  $M$ -نقطه ای می‌تواند به فرم معادله زیر نوشته شود:

$$\varphi_i(x, y) = [a_t][t] \quad (17)$$

که در آن

$$[a_t] = [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,M}]$$

$$[t] = [1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^2 y + xy^2 + x^2 y^2, \dots] \quad (18)$$

مشخص شود، توابع میانابی یا همان توابع وزن  $[a_i]$  حال اگر بردار ضرایب

<sup>1</sup> Lagrangian interpolation polynomial

<sup>2</sup> Lattice

<sup>3</sup> Particle in cell method

<sup>4</sup> Vortex method

<sup>5</sup> Vortex in cell method

جدول 3 بردارهای سرعت شبکه D2Q13L2

Table 3 velocities vector of D2Q13L2 lattice.

|                                                  |                           |
|--------------------------------------------------|---------------------------|
| $e_1 = (0,0)$                                    | برای $\alpha = 1$         |
| $e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$              | برای $\alpha = 2 \dots 5$ |
| $e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$ | برای $\alpha = 6 \dots 9$ |
| $e_{10} = (2,0)$                                 | $e_{11} = (0,2)$          |
| $e_{12} = (-2,0)$                                | $e_{13} = (0,-2)$         |

جدول 4 بردارهای سرعت شبکه D2Q17L2

Table 4 velocities vector of D2Q17L2 lattice

|                                                  |                                        |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $e_1 = (0,0)$                                    | برای $\alpha = 1$                      |
| $e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$              | برای $\alpha = 2 \dots 5$              |
| $e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$ | برای $\alpha = 14 \dots 17$            |
| $e_6 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$               | $e_8 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$    |
| $e_{10} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$          | $e_{12} = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ |
| $e_7 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$               | $e_9 = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$    |
| $e_{11} = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$          | $e_{13} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ |

جدول 5 بردارهای سرعت شبکه D2Q21L2

Table 5 velocities vector of D2Q21L2 lattice

|                                                  |                                        |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $e_1 = (0,0)$                                    | برای $\alpha = 1$                      |
| $e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$              | برای $\alpha = 2 \dots 5$              |
| $e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$ | برای $\alpha = 14 \dots 17$            |
| $e_\alpha = \text{cyc} : 2(\pm 1,0)$             | برای $\alpha = 18 \dots 21$            |
| $e_6 = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$               | $e_8 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$    |
| $e_{10} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$          | $e_{12} = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ |
| $e_7 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$               | $e_9 = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$    |
| $e_{11} = (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$          | $e_{13} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ |

که در کلیه جداول بالا، cyc معرف جایگشت چرخه ای<sup>1</sup> است. در نهایت به عنوان مثال تابع وزن برای مولفه 1 به دست آمده برای مدل های شبکه D2Q9L2 تا D2Q21L2 به ترتیب صورت زیر است:

$$\varphi_1 = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 \quad (22)$$

$$\varphi_1 = 1 - (5/4)x^2 - (5/4)y^2 + (1/4)x^4 + x^2 y^2 + (1/4)y^4 \quad (23)$$

$$\varphi_1 = 1 - (7/4)x^2 - (7/4)y^2 + (3/8)x^4 + (33/16)x^2 y^2 + (3/8)y^4 \quad (24)$$

$$\varphi_1 = 1 - (1517/880)x^2 - (15157/880)y^2 + (643/1408)x^4 + (317/176)x^2 y^2 + (643/1408)y^4 - (621/28160)x^6 - (621/28160)y^6 \quad (25)$$

تابع توزیع تعادلی مولفه 1 نیز برای شبکه های نام برده به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:

$$f_{1,1}^{\text{eq}} = \frac{\rho}{16\theta} (5c^2 + 20c^2 u^2 + 4c^2 v^2 + 8u^2 v^2 - 8c^2 - 8u^2 - 8v^2 + 8)(1 - \text{epv}) + \frac{\rho(\gamma - 1)}{\gamma} (u^2 v^2 - u^2 - v^2 + 1) \quad (26)$$

$$f_{1,1}^{\text{eq}} = \frac{\rho}{16\theta} (5c^4 + 20c^2 u^2 + 20 + 4u^4 - 16u^2 v^2 + 4v^4 - 20c^2 - 20c^2 - 20u^2 - 20v^2 + 16) \quad (27)$$

<sup>1</sup> Cyclic permutation

نیز مشخص خواهند شد. از طرفی  $\varphi_i(x, y)$  یک چند جمله ای میانیاب لاگرانژی است که دارای خاصیت  $\delta$  است، یعنی؛

$$\varphi_i(x_i, y_i) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (19)$$

دستگاه معادلات (19) می تواند در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته شود:

$$[A][T] = [I] \quad (20)$$

که در آن

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,M} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,1} & \dots & a_{M,M} \end{bmatrix}, \quad [T] = [t(x_1, y_1), t(x_2, y_2), \dots, t(x_M, y_M)] \quad (21)$$

$[I]$ ، بردار همانی و  $(x_i, y_i)$  مختصات هر سرعت گسسته شبکه می باشد. در این تحقیق چهار نوع شبکه متقارن دو-بعدی جدید (شکل 2) با مختصات سرعت ارائه شده در جدول 1 ارائه شده است. با حل دستگاه (20) همان طور که مشاهده می شود ماتریس  $[A]$  معکوس ماتریس  $[T]$  است) بردار ضرایب به دست خواهد آمد و به واسطه آن توابع وزن از رابطه (17) محاسبه خواهد شد. و سپس با استفاده از رابطه (15) و با یک انتگرال گیری تحلیلی توابع توزیع تعادلی به راحتی محاسبه می شود. باید توجه داشت که در انتخاب تابع چند جمله ای لاگرانژی جملاتی باید انتخاب شوند که ماتریس  $[A]$  تکین نشود. برای این منظور این تابع چند جمله ای میانیاب برای چند درجه متفاوت در "شکل 3" ارائه شده است.

توابع چند جمله ای به شکل زیر هستند.

بردارهای سرعت فازی هر کدام از شبکه های تولید شده در جدول 2 تا جدول 5 ارائه شده است.

|                                                          |          |
|----------------------------------------------------------|----------|
| 1                                                        | $0^{rd}$ |
| $x \ y$                                                  | $1^{rd}$ |
| $x^2 \ xy \ y^2$                                         | $2^{rd}$ |
| $x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3$                               | $3^{rd}$ |
| $x^4 \ x^3 y \ x^2 y^2 \ xy^3 \ y^4$                     | $4^{rd}$ |
| $x^5 \ x^4 y \ x^3 y^2 \ x^2 y^3 \ xy^4 \ y^5$           | $5^{rd}$ |
| $x^6 \ x^5 y \ x^4 y^2 \ x^3 y^3 \ x^2 y^4 \ xy^5 \ y^6$ | $6^{rd}$ |

Fig. 3 Lagrangian interpolation polynomial coefficients

شکل 3 ضرایب چند جمله ای میانیاب لاگرانژی

جدول 1 توابع چند جمله ای لاگرانژی برای چهار شبکه جدید

Table 1 Lagrangian polynomial functions for four new lattices

| شبکه    | تابع چند جمله ای لاگرانژی                                                                                                        |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D2Q9L2  | $P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2 y, x y^2, x^2 y^2$                                                                         |
| D2Q13L2 | $P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, x y^2, y^3, x^4, x^2 y^2, y^4$                                                     |
| D2Q17L2 | $P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, x y^2, y^3, x^4, x^3 y, x^2 y^2, x y^3, y^4, x^5, y^5$                             |
| D2Q21L2 | $P(x, y) = 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, x y^2, y^3, x^4, x^3 y, x^2 y^2, x y^3, y^4, x^5, x^3 y^2, x^2 y^3, y^5, x^6, y^6$ |

جدول 2 بردارهای سرعت شبکه D2Q9L2

Table 2 velocities vector of D2Q9L2 lattice

|                                                  |                           |
|--------------------------------------------------|---------------------------|
| $e_1 = (0,0)$                                    | برای $\alpha = 1$         |
| $e_\alpha = \text{cyc} : (\pm 1,0)$              | برای $\alpha = 2 \dots 5$ |
| $e_\alpha = \text{cyc} : \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$ | برای $\alpha = 6 \dots 9$ |

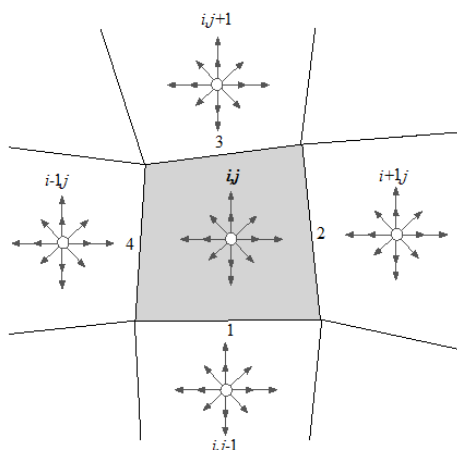


Fig. 4 General 2D finite volume structured cell

شکل 4 حجم محدود دو-بعدی و عمومی با سازمان

روش عددی اختیار می شود. لزجت مولکولی مدل BGK در عبارت برخورد مولکولی و زمان آرامش لحاظ می شود:

$$\tau = \frac{\mu}{p} \quad (32)$$

دومین اتلاف باید از طریق روش عددی مناسب ایجاد گردد.

### 3-1- گسسته سازی عبارت مکانی

برای تخمین مقادیر شار عبوری از سطوح سلول، از مقادیر مرکز سلول استفاده شده و میانمایی توسط روش ماسل مرتبه 3 همراه با هموار کننده حدی<sup>2</sup> به منظور میانمایی مقدار  $f_\alpha$  بر روی دو طرف سطح تماس سلول صورت می گیرد.

$$F_{\alpha,i+1/2,j}^n = \begin{cases} (f_L)_{\alpha,i+1/2,j} (e_\alpha \cdot N_{i+1/2,j}) & \text{اگر } (e_\alpha \cdot N_{i+1/2,j}) \geq 0 \\ (f_R)_{\alpha,i+1/2,j} (e_\alpha \cdot N_{i+1/2,j}) & \text{اگر } (e_\alpha \cdot N_{i+1/2,j}) \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

که در آن  $N_{i+1/2,j}$  بردار عمود بر سطح  $i + 1/2, j$  و  $f_L$  و  $f_R$  به ترتیب توابع توزیع سمت چپ و راست این سطح می باشد. این توابع به صورت زیر قابل محاسبه اند:

$$\begin{cases} (f_L)_{k,i+1/2,j} = f_{\alpha,i,j} + \left\{ \frac{s}{4} [(1-ks)\Delta_- + (1+ks)\Delta_+] \right\}_i \\ (f_R)_{k,i+1/2,j} = f_{\alpha,i+1,j} - \left\{ \frac{s}{4} [(1-ks)\Delta_+ + (1+ks)\Delta_-] \right\}_{i+1} \end{cases} \quad (34)$$

پارامتر  $k$  می تواند مقادیر متفاوتی با توجه به دقت میانمایی مورد نیاز داشته باشد. به عنوان مثال اگر  $k = 1/3$  باشد یک میانمایی سه-نقطه ای با مرتبه-3 مدنظر است، حال اگر مقدار آن برابر 0 یا 1- قرار داده شود، یک روش بسمت باد<sup>3</sup> مرتبه-2 لحاظ خواهد شد و اگر به آن مقدار 1 تخصیص داده شود، روش به یک روش مرکزی<sup>4</sup> ساده تبدیل می شود. در عمل مقادیر  $k = 0, 1/3$  متداول ترند. پارامتر  $s$  تابع حدی ون البادا<sup>5</sup> نام دارد [14].

$$s = \frac{2\Delta_+\Delta_- + \varepsilon^2}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + \varepsilon} \quad (35)$$

که در آن  $\varepsilon$  یک عدد کوچک (در حدود  $10^{-6}$ ) است.

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{128} (69c^4 + 276c^2u^2 + 276c^2v^2 + 48u^4 + 264u^2v^2 + 48v^4 - 224c^2 - 224v^2 + 128) \frac{1-ep\gamma}{\gamma} + \frac{\rho(\gamma-1)}{\gamma} (1 - (7/4)u^2 - (7/4)v^2 + (3/8)u^4 + (33/16)u^2v^2 + (3/8)v^4) \quad (28)$$

$$f_{1,1}^{eq} = \frac{\rho}{225280} (3105c^6 + 27945c^4u^2 + 27945c^4v^2 + 37260c^2u^4 + 37260c^2v^4 + 4968u^6 + 4968v^6 - 127880c^4 - 511520c^2u^2 - 511520c^2v^2 - 102880u^4 - 405760u^2v^2 - 102880v^4 + 388352c^2 + 388352u^2 + 388352v^2 - 225280) \frac{1-ep\gamma}{\theta} + \frac{\rho(\gamma-1)}{\gamma} (1 - (1517/880)u^2 - (1517/880)v^2 + (643/1408)u^4 + (317/176)u^2v^2 + (643/1408)v^4 - (621/28160)u^6 - (621/28160)v^6) \quad (29)$$

که در آن  $\theta$ ، پارامتر سوئیچ و  $ep$  انرژی ویژه است. این دو پارامتر به شکل  $ep = (D - \gamma)e$  و  $\theta = \gamma/Pr$  می باشد. به علت طولانی بودن روابط از آوردن همه روابط در این مقاله خودداری می شود چرا که روند محاسباتی توابع با یک متن کوتاه در نرم افزار میپل یا ممتیکا به راحتی قابل حصول است.

### 3- روش شبکه بولتزمن-حجم محدود

به منظور استفاده از روش حجم محدود، معادله بولتزمن در فرم بقایی و در فضای دو بعدی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \check{f}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \check{g}_\alpha}{\partial y} = \check{\Omega}_\alpha \quad \check{\Omega}_\alpha = \frac{\check{f}_\alpha^{eq} - \check{f}_\alpha}{\check{\tau}} \quad (30)$$

که در آن  $\alpha$ ، نمایشگر سرعت های گسسته شبکه مورد نظر،  $\check{f}_\alpha$  تابع توزیع چگالی،  $\Omega_\alpha$  تابع برخورد،  $\check{f}_\alpha^{eq}$  تابع توزیع تعادلی،  $\tau$  زمان آرامش و  $G$  و  $F$  به ترتیب معرف شار جابجایی در دو جهت دستگاه مختصات می باشند. فرم گسسته حجم محدود معادله (30) عبارت است از:

$$f_{\alpha,i,j}^{n+1} = f_{\alpha,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} [(F_{\alpha,i+1/2,j}^n \Delta s_{\alpha,i+1/2,j} + F_{\alpha,i-1/2,j}^n \Delta s_{\alpha,i-1/2,j}) + (G_{\alpha,i,j+1/2}^n \Delta s_{\alpha,i,j+1/2} + G_{\alpha,i,j-1/2}^n \Delta s_{\alpha,i,j-1/2})] + \Delta t \check{\Omega}_{\alpha,i,j} \quad (31)$$

که در آن  $i, j$ ، شمارنده مراکز سلول و  $V_{i,j}$  معرف حجم سلول (برای فضای دو بعدی، سطح) ست.  $F_{\alpha,i\pm 1/2,j}^n$  و  $G_{\alpha,i,j\pm 1/2}^n$  شارهای عددی عبوری از سطوح سلول و  $\Delta s$  بیانگر مساحت سطوح سلول است. شارهای عددی می توانند توسط حلگر ریمان و با روش های متداول میانمایی محاسبه شوند. نکته بسیار مهم این که در شبیه سازی عددی جریان تراکم پذیر، پخش عددی<sup>1</sup> یا لزجت مصنوعی مورد نیاز برای آشکارسازی امواج ضربه ای یا از طریق معادلات حاکم به حل عددی اعمال می شود و یا از طریق

<sup>2</sup> Smooth limiter

<sup>3</sup> Upwind

<sup>4</sup> Central

<sup>5</sup> Van Albada limiter function

<sup>1</sup> Numerical dissipation

بازگشتن به عقب<sup>1</sup> بیان می شود. برای حل به روش شبکه بولتزمن روی شبکه منحنی الخط یا بی سازمان، این روش همچنان پا برجاست. اما برای مدل های چند سرعت حرارتی، این قانده تنها برای شرط مرزی عدم لغزش و دیواره آدیاباتیک صادق است. در مقاله حاضر از روش مرتبه 2 گو و همکاران<sup>2</sup> و برونمایی قسمت غیرتعادلی توابع توزیع استفاده می شود [15]. مطابق "شکل 5" چنانچه  $x_b$  یک گره مرزی روی دیواره باشد، و  $x_f$  نزدیکترین گره همسایه واقع در سلول های داخل جریان باشد، تابع توزیع در مرز ( $x_b$ ) برابر خواهد بود با:

$$f_i(x_b) = f_i^{eq}(x_b) + [f_i(x_f) - f_i^{eq}(x_f)] \\ = f_i^{eq}(x_b) + f_i^{neq}(x_f) \quad (39)$$

که در آن  $f_i^{eq}(x_b)$  با استفاده از متغیرهای ماکروسکوپی متوسط جریان ( $e_b$  و  $v_b, \rho_b$ ) به دست می آید. در تئوری جنبشی گازها، تنش لزج، پخش و اتلاف انرژی تنها از بخش غیرتعادلی تابع توزیع نشأت می گیرد. با توجه به شرط فشار  $\partial p / \partial n|_b = 0$  به شکل زیر به دست می آید:

$$P_b = \frac{9p_1 - p_2}{8} \quad (40)$$

اگر دیوار همدم باشد،  $e_b$  مقدار ثابتی است و اگر شار حرارتی  $q_b$  مشخص باشد، گرادیان عمود بر سطح انرژی داخلی  $\partial e / \partial n|_b$  ثابت است و  $e_b$  شبیه به  $p_b$  از گره های داخل جریان برونمایی می شود:

$$e_b = \frac{9e_1 - e_2}{8} - \frac{3}{8} \frac{\partial e}{\partial n}|_b \quad (41)$$

چگالی دیواره  $\rho_b$  نیز از معادله حالت  $e_b$  محاسبه می شود. روش دوم که یک راه ساده تر است، آن است که مطابق روش های متداول دینامیک سیالات محاسباتی که خواص در سلول های مجازی دیواره به نحوی حساب می شود که شرط عدم لغزش روی دیواره برآورد شود، توابع توزیع تعادلی براساس این خواص در سلول های مجازی به دست آیند و سپس توابع توزیع این سلول ها معادل توابع توزیع تعادلی در نظر گرفته شود. در این مقاله از روش اول استفاده شده است.

در نهایت، در یک نگاه کلی روند نمای شبیه سازی جریان با استفاده از روش شبکه بولتزمن در تحقیق حاضر در "شکل 6" قابل توصیف است.

## 5- نتایج عددی

در این بخش به شبیه سازی عددی دو مسئله کاربردی پرداخته شده و نتایج با داده های عددی ناویر-استوکس مقایسه شده است. در هر دو مسئله جریان تراکم پذیر حول ایرفویل NACA0012 تحلیل شده است که یکی دارای زاویه حمله بوده و دیگری در زاویه حمله صفر مورد بررسی قرار گرفته است.

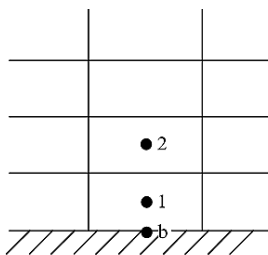


Fig. 5 No slip boundary condition

شکل 5 شرط مرزی عدم لغزش

در معادله (20)،  $\varepsilon$  از تقسیم بر صفر شدن در ناحیه بدون گرادیان جلوگیری می کند، و همچنین داریم:

$$(\Delta_+)_i = \tilde{f}_{\alpha, i+1, j} - \tilde{f}_{\alpha, i, j}, \\ (\Delta_-)_i = \tilde{f}_{\alpha, i, j} - \tilde{f}_{\alpha, i-1, j}, \quad (36)$$

بنابراین شار عددی تمام سطوح سلول به صورت مشابه محاسبه می شود.

## 3-2- بی بعد سازی و محاسبه خواص ماکروسکوپی

به منظور بیان مسئله شبیه سازی شده در مقیاس شبکه، باید از روابط بدون بعد استفاده شود. در اینجا سه متغیر مستقل مرجع، چگالی مرجع  $\rho_{ref}$ ، طول مرجع،  $L_{ref}$  و انرژی استاتیکی داخلی مرجع  $e_{ref}$  برای بی بعد کردن متغیرها استفاده می شود.

$$\begin{cases} U_{ref} = \sqrt{e_{ref}}, & t_{ref} = \frac{L_{ref}}{U_{ref}}, & \tilde{t} = \frac{t}{t_{ref}} \\ \tilde{x} = \frac{x}{L_{ref}}, & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, & \tilde{e} = \frac{e}{e_{ref}} \\ \tilde{\tau} = \frac{\tau}{t_0}, & \tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda}{e_{ref}}, & \tilde{u} = \frac{u}{U_{ref}} \end{cases} \quad (37)$$

نماد ( $\tilde{\alpha}$ ) بیانگر متغیرهای بدون بعد است. مقدار  $e_{ref}$  اهمیت ویژه ای دارد، چرا که این پارامتر، مقدار  $u_{ref}$  را معین می کند و همچنین بی بعد کردن انرژی استاتیکی با استفاده از  $e_{ref}$  صورت می گیرد. برای اطمینان، این مقدار می تواند کمی بزرگتر از بیشینه انرژی سکون داخلی، یعنی  $e_{ref} > \max(e_0)$  موجود در کل میدان جریان لحاظ شود. انرژی سکون داخلی از طریق رابطه  $e_0 = e_{\infty} (1 + (\gamma - 1)/2 M_{\infty}^2)$  محاسبه می شود. بنابراین،  $\tilde{\lambda}_2$  نیز باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. برای سادگی می توان  $\tilde{\lambda}_2 = ep$  باشد. در نتیجه،  $\tilde{\lambda} = 1.0$  و در پی آن خواص ماکروسکوپی در فضای دو بعدی از روابط زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{13} \sum_{v=1}^2 \tilde{f}_{iv} \\ \tilde{\rho} \tilde{u} = \sum_{i=1}^{13} \sum_{v=1}^2 \tilde{f}_{iv} e_i \\ \tilde{\rho} \tilde{E} = \sum_{i=1}^{13} \left[ \sum_{v=1}^2 \frac{\tilde{f}_{iv} e_i^2}{2} + \tilde{f}_{iz} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{e} = \tilde{E} - \frac{\|\tilde{u}\|^2}{2} \\ \tilde{\rho} = (\gamma - 1) \tilde{\rho} \tilde{e} \end{cases} \quad (38)$$

## 4- شرایط مرزی

روش اعمال تمام شرایط مرزی ورودی و خروجی، دیواره غیرلزج، شرط تقارن و ... بدین صورت است که ابتدا متغیرهای جریان ( $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{e}$ ) توسط روابط متداول دینامیک سیالات محاسباتی به دست می آید سپس مقادیر تابع تعادلی  $\tilde{f}_{\alpha v}^{eq}$  روی مرز با استفاده از ( $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{e}$ ) محاسبه می شوند. بنابراین استفاده از مقادیر  $\tilde{f}_{\alpha v}^{eq}$  روی مرز بجای مقادیر دقیق است. به عنوان مثال برای جریان زیرصوت ابتدا با اعمال روش ریمان براساس مشخصه ها، متغیرهای جریان روی مرز به دست می آید و سپس با استفاده از آن ها مقادیر تابع توزیع تعادلی به دست خواهد آمد و در نهایت معادل مقادیر تابع توزیع در مرز قرار داده می شود. در این حالت مقادیر در سلول های مجازی معادل مقادیر مرز در نظر گرفته می شود.

## 4-1- شرط عدم لغزش

در روش شبکه بولتزمن استاندارد، شرط عدم لغزش با استفاده از قانده

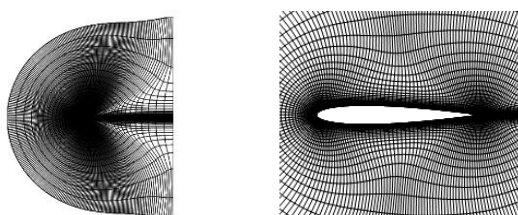
<sup>1</sup> Bounce-back rule

<sup>2</sup> Guo et al

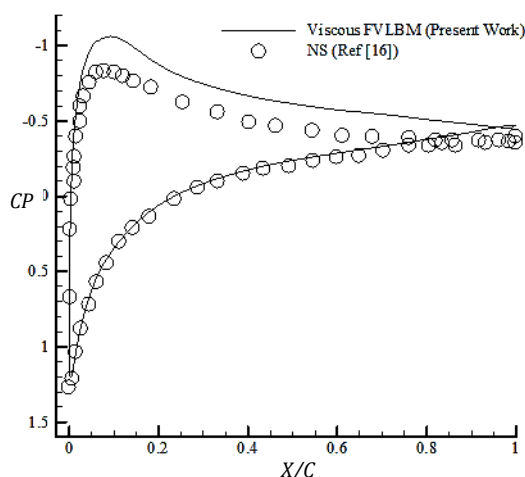
$10^{-3}$  است. "شکل 8" اختلاف به وجود آمده در توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل را به خوبی نشان می دهد. توزیع فشار روی سطح پایینی ایرفویل به خوبی با نتایج مرجع معتبر<sup>[16]</sup> مطابقت دارد، اما سطح بالایی که محل جدایش لایه مرزی است اختلافی در حدود 30 درصدی دارد. دلیل این امر، عدم تطبیق عدد پرانتل با مقدار واقعی آن و محدودیت BGK می باشد. زمانی که لزجت حجمی به درستی توسط مدل BGK استفاده شده در این تحقیق، اعمال نمی شود، اختلاف در توزیع فشار نمایان می گردد.

همچنین توزیع  $C_f$  در "شکل 9" نمایش داده شده است که دقت بسیار خوبی در مقایسه با نتایج حاصل از ناویر-استوکس دارد. محل جدایش روی سطح فوقانی یعنی  $x_s = 0.41c$  به خوبی تخمین زده شده است. "شکل 10" مقایسه کانتور توزیع عدد ماخ حول NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه را نشان می دهد. گردابه بالای سطح که محل افت فشار کل است به خوبی قابل ملاحظه بوده و مطابق با حل مرجع<sup>[16]</sup> است. به منظور ارزیابی کمی، ضریب آیرودینامیکی برآ برای شرایط مساله فوق در جدول 6 ارائه گردیده است. ضریب برای به دست آمده از حل حاضر حدود 14.3 درصد خطا نسبت به مرجع<sup>[16]</sup> دارد که این امر به دلیل مسئله لزجت حجمی است.

**5-2- شبیه سازی جریان تراکم پذیر حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه  $M_\infty = 0.5, Re_\infty = 5000, Kn_\infty = 1.5 \times 10^{-4}, \alpha = 0^\circ$**   
هدف از ارائه این مسئله، بررسی دقت و کارایی شبکه های مختلف تولید شده در حل جریان است. مقادیر مرجع  $e_{ref} = 2.5$  و  $\rho_{ref} = 1.0, L_{ref} = 1.0$

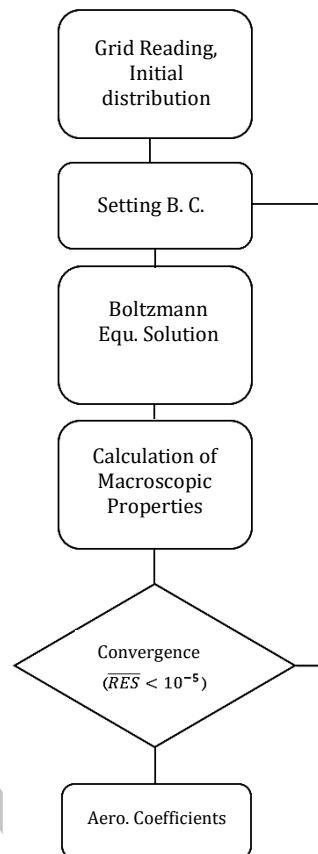


**Fig. 7** C-type structured grid around NACA0012 airfoil  
شکل 7 شبکه با سازمان نوع-C پیرامون ایرفویل NACA0012



**Fig. 8** Pressure coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

شکل 8 مقایسه توزیع ضریب فشار جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه



**Fig. 6** Lattice Boltzmann method flow simulation flowchart

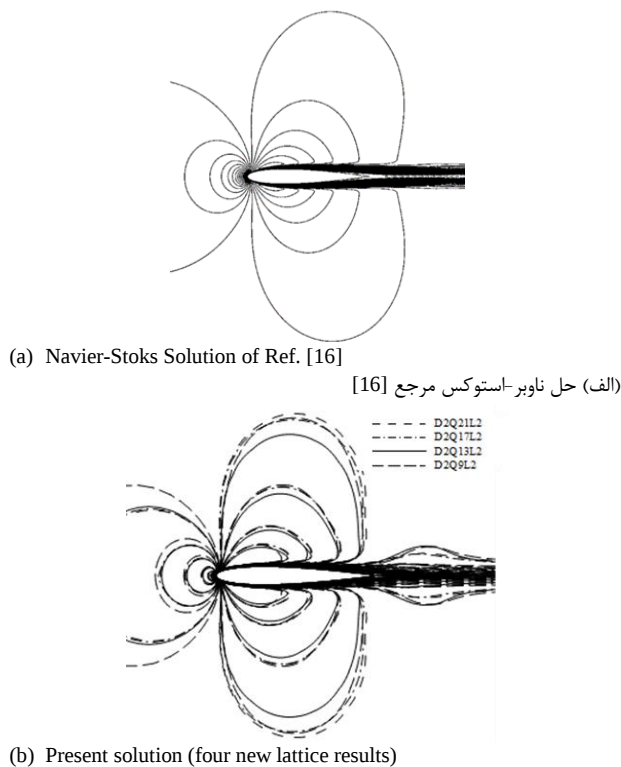
شکل 6 روند نمای کلی شبیه سازی به روش شبکه بولتزمن

**5-1- شبیه سازی جریان تراکم پذیر حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه  $M_\infty = 0.8, Re_\infty = 500, Kn_\infty = 2.3 \times 10^{-3}, \alpha = 10^\circ$**

جهت شبیه سازی مسائل عملی و ارزیابی توانمندی روش شبکه بولتزمن در دستگاه منحنی الخط، مطابق "شکل 7" جریان پیرامون ایرفویل NACA0012، در یک دستگاه شبکه منحنی الخط با ابعاد  $281 \times 70$  شبیه سازی می شود. شبکه نوع-C که برای صحت سنجی مدل های عددی استفاده شده است معادل با شبکه ایست که استقلال حل از آن توسط محققین به اثبات رسیده است<sup>[16]</sup>. شبکه بولتزمن استفاده شده در این حل D2Q13L2 می باشد.

هدف از ارائه حل عددی این بخش، نمایش اختلاف عددی به وجود آمده به علت عدم انطباق مدل استفاده شده در صورت وجود جدایش جریان است. همان طور که گفته شد مدل BGK در مدل سازی لزجت حجمی ناتوان است، و نیاز به اصلاح دارد که در کارهای آینده به عنوان یک زمینه علمی مناسب قابل عرضه می باشد. در صورت وجود جدایش لایه مرزی وجود  $\mu_b$  در مدل حاضر باعث بروز خطای عددی می شود. بنابراین در جریان تراکم پذیر وجود خطای کوچک نبودن لزجت حجمی باعث بروز اختلاف توزیع فشار در سطح بالایی ایرفویل شده است. در مدل برخورد BGK تنها یک پارامتر  $\tau$  وجود دارد که سه پارامتر انتقالی  $\mu$ ،  $\mu_b$  و  $k$  را تنظیم نماید. بنابراین نیاز به تعریف یک پارامتر جدید در معادله بولتزمن می باشد تا بتوان لزجت حجمی (و عدد پرانتل) را به صورت دقیق تنظیم نمود. در این مسئله، مقادیر مرجع  $L_{ref} = 1.0$ ،  $\rho_{ref} = 1.0$  و  $e_{ref} = 3.51$  در نظر گرفته می شود. زمان آرامش در این مسئله با توجه به عدد ماخ و رینولدز جریان آزاد برابر با  $\tilde{t} = 2.24 \times$

<sup>1</sup> GAMM workshop in 1985

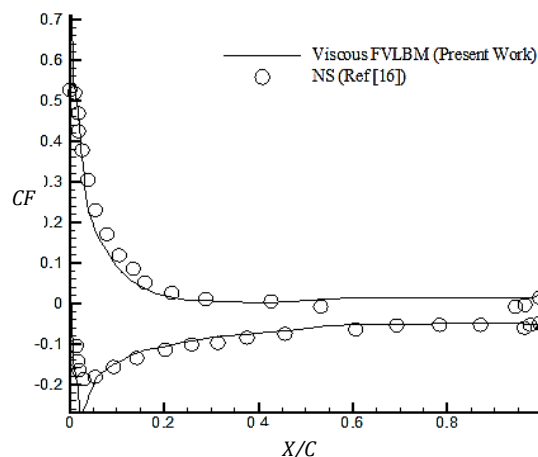


**Fig. 11** Mach No. comparison of flow field over NACA0012 in 0 degree angle of attack. (a) Ref. [16], (b) Present solution.

شکل 11 مقایسه کانتور عدد ماخ برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه. (الف) حل ناویر-استوکس مرجع [16]، (ب) حل حاضر.

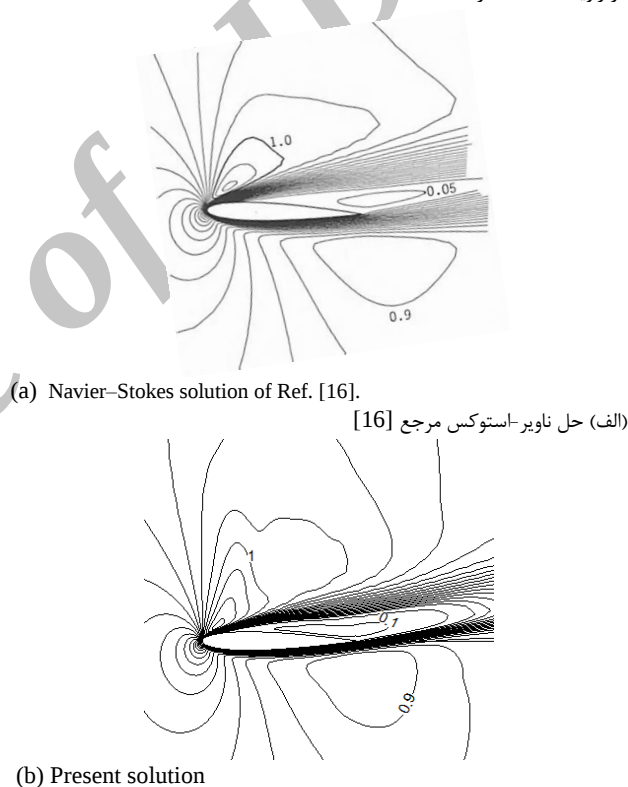
در نظر گرفته می‌شود. زمان آرامش در این مسئله برابر با  $\tau = 1.4 \times 10^{-4}$  و  $p_\infty = 1/\gamma$  است. مقایسه کانتور عدد ماخ برای چهار شبکه تولید شده در حل حاضر با نتایج حاصل از ناویراستوکس [16] برای جریان حول NACA0012 در زاویه حمله صفر در "شکل 11" نشان داده شده‌است. مشابهت کانتورها نشان‌دهنده صحت روند حل حاضر می‌باشد. نتایج نشان می‌دهند که شبکه‌های مختلف اختلاف ناچیزی از نظر کیفی دارند. برای مقایسه دقیق‌تر، توزیع ضریب فشار  $C_p$  و ضریب اصطکاک پوستی  $C_f$  برای شبکه‌های مختلف به ترتیب در "شکل 12 و شکل 13" آورده شده‌اند. در این شبیه‌سازی توزیع‌های  $C_p$  و  $C_f$  برای هر چهار شبکه (خطوط مختلف) با نتایج عددی معادلات ناویر-استوکس از مرجع [16] (نقاط دایره توخالی)، مقایسه شده است. این نتایج، دقت مناسب کار حاضر را نمایش می‌دهد. جریان آرام زیرصوت در زاویه حمله صفر درجه که در آستانه حد بالایی جریان پایای آرام است. تحت این شرایط جدایش جریان در نزدیکی لبه فرار ایرفویل اتفاق می‌افتد که باعث ایجاد یک حباب چرخشی<sup>1</sup> می‌شود. همان‌طور که از نتایج توزیع فشار مشخص است در انتهای لبه فرار دقت کاهش می‌یابد و فشار بیشتر تخمین زده شده است. نقطه جدایش در مرجع [16] برابر با 0.97 به‌دست آمده است در حالی که در حل عددی حاضر حدود 0.824 تخمین زده شده‌است. دو شبکه D2Q9L2 و D2Q13L2 دارای دقت بیشتری نسبت به دیگر شبکه‌ها هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که: «در روش شبکه بولتزمن همواره با افزایش تعداد سرعت‌های فازی شبکه، دقت شبیه‌سازی عددی بیشتر نخواهد شد». نتایج کار حاضر نشان می‌دهد، افزایش دقت

<sup>1</sup> Recirculation bubble



**Fig. 9** Skin friction coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

شکل 9 مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوستی جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه



**Fig. 10** Mach No. comparison of flow field over NACA0012 in 10 degree angle of attack. (a) Ref. [16], (b) Present solution

شکل 10 مقایسه کانتور عدد ماخ جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه. (الف) مرجع [16]، (ب) کار حاضر.

**جدول 6** مقایسه ضریب آیرودینامیکی برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله 10 درجه

**Table 6** Lift aerodynamic coefficient comparison of flow over NACA0012 in 10 degree angle of attack

| ضریب برآ $(C_l)$ | روش عددی                    |
|------------------|-----------------------------|
| 0.51             | روش شبکه بولتزمن (کار حاضر) |
| 0.446            | ناویر-استوکس (مرجع [17])    |
| 14.3             | درصد خطای نسبی              |

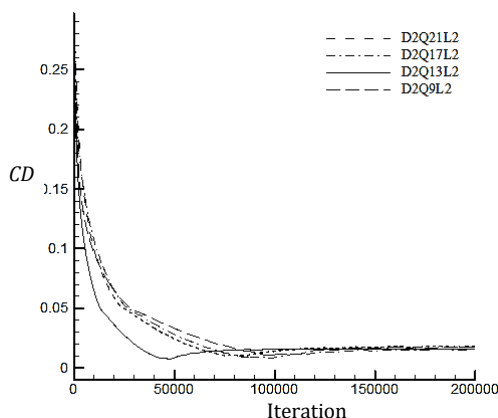
همگرایی چهار شبکه در "شکل 15" نشان داده شده است. شبکه D2Q13L2 و شبکه D2Q9L2 دارای همگرایی مطلوبی هستند اما دو شبکه D2Q21L2 و D2Q17L2 از یک تکرار به بعد نوسانی شده و همگرایی مطلوبی نداشته اند. اما علت احتمالی این مسئله آن است که شرط زیر برای پایداری مدل تابع-دایروی در شبکه D2Q13L2 بهتر است در نظر گرفته شود تا دایره داخل میدان میانمایی باشد و از برونمایی جلوگیری شود (شکل 16).

$$|u| + r < \sqrt{2} \quad (43)$$

اما در دو شبکه D2Q21L2 و D2Q17L2 نوع چینش سرعت های فازی به نحوی است که نیاز به برونمایی است و لذا این امر باعث کاهش پایداری و نوسانی شدن باقیمانده ها می شود. برای این شبکه ها پایداری به شکل زیر است:

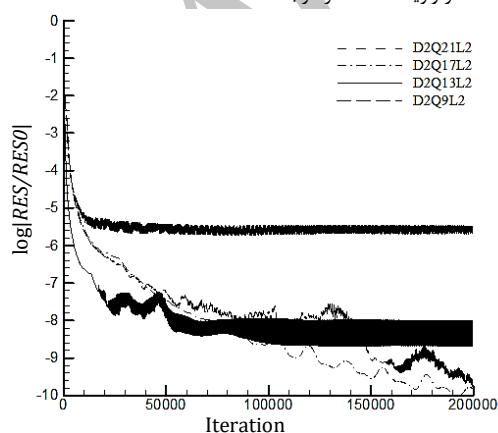
$$|u| + r < \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (44)$$

اما برای سرعت های فازی 7 یا 6 در این دو شبکه (شکل 2)، دایره خارج از فضای میانمایی قرار می گیرد و به همین خاطر احتمالاً پایداری کاهش یافته است. به عبارت دیگر سرعت های فازی 2، 3، 4 و 5 باید بزرگتر بوده به صورتی که با سرعت های 6 تا 13 در راستای یک خط مورب قرار بگیرند.



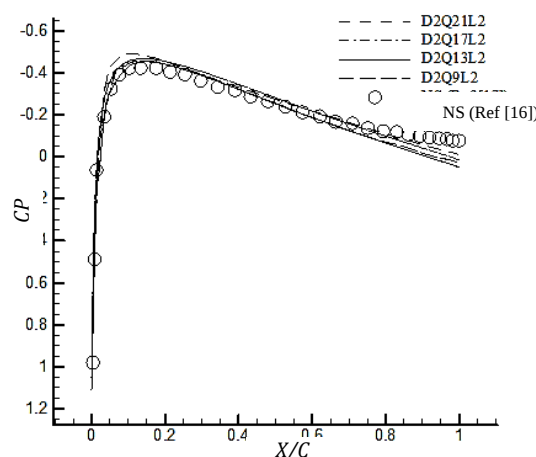
**Fig. 14** Comparison of drag coefficient convergence for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack.

شکل 14 مقایسه روند همگرایی ضریب پسای برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.



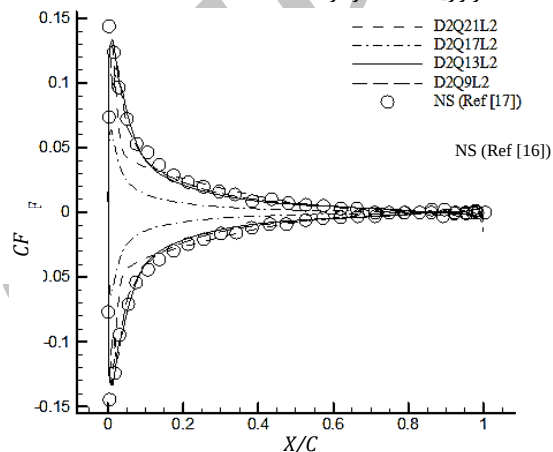
**Fig. 15** Comparison of Residual convergence for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack

شکل 15 مقایسه همگرایی باقیمانده چهار شبکه برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه



**Fig. 12** Pressure coefficient distribution comparison of flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack for four new lattice solutions.

شکل 12 مقایسه توزیع ضریب فشار حل چهار شبکه جدید برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.



**Fig. 13** Comparison of skin friction coefficient distribution of four new lattice solutions for flow over NACA0012 in 0 degree angle of attack.

شکل 13 مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوستی حل چهار شبکه جدید برای جریان حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه.

شبیه سازی از 9 سرعت فازی به 13 سرعت، امکان پذیر است اما با افزایش آن از 13 به 17 یا 21، علاوه بر این که هزینه محاسباتی را زیاد می کند، به افزایش دقت عددی کمک نخواهد کرد. علت اصلی این اتفاق؛ کاهش پایداری عددی با افزایش تعداد سرعت های فازی شبکه است که در بخش بعدی تشریح می شود.

## 6- روند همگرایی

به منظور اطمینان از همگرایی حل، نمودار تاریخچه همگرایی ضریب پسا و باقیمانده مسئله 2-5، در "شکل 14 و شکل 15" آورده شده است. پارامتر باقیمانده توسط رابطه زیر محاسبه می شود:

$$RES = \frac{\sqrt{\sum (p^{n+1} - p^n / \Delta t)^2}}{N \times M} \quad (42)$$

که در آن  $P$  فشار استاتیکی،  $N$  تعداد سلول های شبکه در راستای  $i$ ،  $M$  معرف تعداد سلول های شبکه در راستای  $j$ ،  $n$  و  $n+1$  به ترتیب معرف زمانی گذشته و زمان حال و در نهایت RES باقیمانده می باشد. این مقدار معمولاً با تقسیم نمودن بر مقدار باقیمانده در لحظه اول،  $RES_0$  به بعد می شود و به صورت مقیاس لگاریتمی بر حسب تکرار رسم می شود. تاریخچه

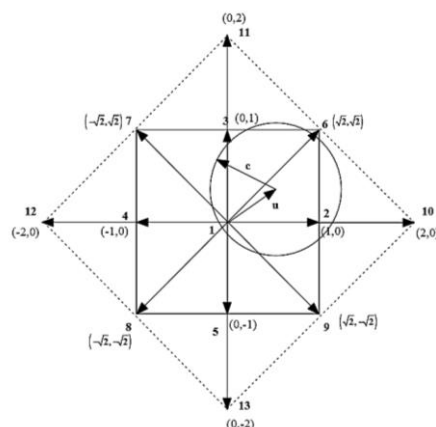


Fig. 16 Numerical stability criteria of lattice in CF method

شکل 16 شرط پایداری عددی شبکه در روش تابع دایروی

## 7- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق به شبیه سازی جریان تراکم پذیر لزج با استفاده از روش شبکه بولتزمن پرداخته شد. در کار حاضر، به منظور به دست آوردن توابع توزیع تعادلی از یک روش جدید موسوم به روش تابع دایروی به جای بسط و استفاده از تابع ماکسول استفاده شد و از این طریق محدودیت عدد ماکس حذف گردید. چهار مدل شبکه دوبعدی جدید D2Q9L2، D2Q13L2، D2Q17L2 و D2Q21L2 براساس چند جمله ای میانیاپ لاگرانژی توسعه داده شده است. جهت اعتبارسنجی، جریان تراکم پذیر آرام پیرامون ایرفویل NACA0012 شبیه سازی و نتایج عددی به دست آمده صحت سنجی شد. در شبیه سازی جریان تراکم پذیر، در صورت نبود جدایش جریان، و کاهش اثرات لزجت حجمی که در مدل BGK لحاظ نمی شود، دقت نتایج بسیار مناسب است. با وجود جدایش جریان و افزایش شدید اثر لزجت حجمی و خطای مدل BGK دقت نتایج کاهش می یابد.

با توجه به مطالعه ای که بر روی انواع شبکه های بولتزمن دوبعدی صورت گرفت، نتایج به دست آمده برای شبکه D2Q9L2 و D2Q13L2 از دقت مناسبی برخوردار است و دقت به دست آمده در تخمین ضریب اصطکاک پوستی برای دو مدل شبکه D2Q17L2 و D2Q21L2 به ترتیب کمتر است، از طرفی به علت سرعت های فازی کمتر دو شبکه D2Q9L2 و D2Q13L2 زمان اجرای آن به مراتب از این دیگر شبکه ها کمتر است. از میان دو شبکه D2Q9L2 و D2Q13L2، شبکه D2Q13L2 بازدهی بهتری نسبت به دیگری دارد و دقت مناسب را به دست می دهد. در ادامه به منظور پیشبرد حل عددی دقیق تر با استفاده از روش شبکه بولتزمن، توسعه روش حاضر و رفع نقاط ضعف مدل BGK برای تخمین دقیق تر لزجت حجمی موضوع های جذاب دیگری است که در این زمینه پیشنهاد می شود.

## 8- فهرست علائم

|            |                                                            |
|------------|------------------------------------------------------------|
| $b$        | تعداد درجات آزادی اضافی مولکولی                            |
| $c$        | بردار سرعت ویژه ذرات (در تابع دایروی) ( $\text{ms}^{-1}$ ) |
| $D$        | بعد فضای شبیه سازی (m)                                     |
| $e_\alpha$ | بردار سرعت های فازی شبکه ( $\text{ms}^{-1}$ )              |
| $e$        | انرژی استاتیکی ( $\text{kJ/kg}$ )                          |
| $ep$       | انرژی ویژه ذرات ( $\text{kJ/kg}$ )                         |
| $e_0, E$   | انرژی سکون ( $\text{kJ/kg}$ )                              |

|                 |                                                    |
|-----------------|----------------------------------------------------|
| $f_\alpha$      | توابع توزیع چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )            |
| $f_\alpha^{eq}$ | توابع توزیع تعادلی ( $\text{kgm}^{-3}$ )           |
| $F$             | شار توابع توزیع در راستای x                        |
| $g$             | تابع دایروی یا تابع ماکسول                         |
| $G$             | شار توابع توزیع در راستای y                        |
| $k$             | پارامتر تابع حدی ون البادا                         |
| $Kn$            | عدد نادسن                                          |
| $K$             | تعداد کل درجات آزادی مولکولی                       |
| $L$             | طول (m)                                            |
| $M_\infty$      | عدد ماخ جریان آزاد                                 |
| $N$             | بردار عمود بر سطح سلول                             |
| $N$             | تعداد کل سلول شبکه                                 |
| $P$             | فشار ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )            |
| $Pr_\infty$     | عدد پرائنتل جریان آزاد                             |
| $R$             | ثابت جهانی گاز ( $\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$ )     |
| $Re_\infty$     | عدد رینولدز جریان آزاد                             |
| $Res$           | باقیمانده                                          |
| $r$             | شعاع تابع دایروی (m)                               |
| $s$             | تابع حدی ون البادا                                 |
| $t$             | زمان (sec)                                         |
| $T$             | دمای استاتیکی (K)                                  |
| $u$             | بردار سرعت متوسط سیال ( $\text{ms}^{-1}$ )         |
| $x, y$          | راستای محور کارترزین                               |
| $z$             | بردار از هر نقطه تابع دایروی به سرعت های فازی شبکه |
| $\alpha$        | شمارنده سرعت های فازی شبکه                         |
| $\gamma$        | نسبت حرارتی ویژه گاز                               |
| $\Delta$        | تفاضل متناهی                                       |
| $\Delta s$      | طول وجه سلول (m)                                   |
| $\Delta t$      | گام زمانی (sec)                                    |
| $\varepsilon$   | عدد نادسن                                          |
| $\theta_s$      | پارامتر سوپچ                                       |
| $\lambda$       | انرژی پتانسیل ذرات ( $\text{kJ/kg}$ )              |
| $\xi$           | بردار سرعت ذرات ( $\text{ms}^{-1}$ )               |
| $\xi_x$         | بردار سرعت ذرات در راستای محور x                   |
| $\xi_y$         | بردار سرعت ذرات در راستای محور y                   |
| $\rho$          | چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )                        |
| $\tau$          | زمان آرامش (عدد نادسن)                             |
| $\mu$           | لزجت سیال                                          |
| $\varphi$       | تابع وزن (تابع مشخصه)                              |
| $\Omega$        | عبارت برخورد                                       |
| $\varepsilon$   | پارامتر تابع حدی                                   |
| $\nabla$        | مساحت سلول ( $\text{m}^2$ )                        |
| بالانویس ها     |                                                    |
| eq              | تعادلی                                             |
| n               | مرحله زمانی                                        |

- [6] L. Qing, Y. L. He, Y. Wang, W. Q. Tao, Coupled double-distribution-function lattice Boltzmann method for the compressible Navier-Stokes equations, *Physical Review E*, Vol. 76, No. 5, pp. 056705, 2007.
- [7] S. Chenghai, Lattice-Boltzmann models for high speed flows, *Physical Review E*, Vol. 58, No. 6, pp. 7283, 1998.
- [8] S. Chenghai, A. T. Hsu, Three-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows, *Physical Review E*, Vol. 68, No. 1, pp. 016303, 2003.
- [9] H. Ya-Ling, Q. Liu, Q. Li, Three-dimensional finite-difference lattice Boltzmann model and its application to inviscid compressible flows with shock waves, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 392, No. 20, pp. 4884-4896, 2013.
- [10] G. Yan, Ch. Yaosong, H. Shouxin. Simple lattice Boltzmann model for simulating flows with shock wave, *Physical Review E*, Vol. 59, No. 1, pp. 454, 1999.
- [11] Sh. Weiping, W. Shyy, R. Mei, Finite-difference-based lattice Boltzmann method for inviscid compressible flows, *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals*, Vol. 40, No. 1, pp. 1-21, 2001.
- [12] Q. Kun, Ch. Shu, Y. T. Chew, Lattice Boltzmann and finite volume simulation of inviscid compressible flows with curved boundary, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 2, No. 05, pp. 573-586, 2010.
- [13] Q. Kun, C. Shu, Y. T. Chew, Alternative method to construct equilibrium distribution functions in lattice-Boltzmann method simulation of inviscid compressible flows at high Mach number, *Physical Review E*, Vol. 75, No. 3, pp. 036706, 2007.
- [14] J. Blazek, *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Principles and Applications*, pp. 94, Kidlington, Oxford, Elsevier, 2001.
- [15] Z. Guo, C. Zheng. An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 6, pp. 1-4, 2002.
- [16] M. Bristeau, Ed. Odile, Numerical simulation of compressible Navier-Stokes flows: A GAMM workshop, *Springer Science & Business Media*, Vol. 18, pp. 21, 2013.

( $\sim$ ) پارامتر بدون بعد  
 زیرنویس ها  
 ref پارامتر مرجع  
 L سمت چپ  
 R سمت راست  
 $i, j$  شمارنده سلول  
 $\nu$  شمارنده سطوح انرژی شبکه  
 b لزجت حجمی

## 9- مراجع

- [1] L. P. Kadanoff, G. R. McNamara, G. Zanetti, From automata to fluid flow: Comparisons of simulation and theory, *Physical Review A*, Vol. 40, No. 8, pp. 4527, 1989.
- [2] J. Hardy, Y. Pomeau, O. D. Pazzis, Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 12, pp. 1746-1759, 1973.
- [3] F. Uriel, D. d'Humieres, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, J. P. Rivet, Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions, *Complex Systems*, Vol. 1, No. 4, pp. 649-707, 1987.
- [4] F. J. Alexander, H. Chen, Sh. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann model for compressible fluids, *Physical Review A*, Vol. 46, No. 4, pp. 1967, 1992.
- [5] X. Kun, A gas-kinetic BGK scheme for the Navier-Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 171, No. 1, pp. 289-335, 2001.



سرویس های ویژه



سرویس ترجمه تخصصی



کارگاه های آموزشی



بلاگ مرکز اطلاعات علمی



سامانه ویراستاری STES



فیلم های آموزشی

## کارگاه های آموزشی مرکز اطلاعات علمی جهاد دانشگاهی



کارگاه آنلاین  
بررسی مقابله ای متون (مقدماتی)



کارگاه آنلاین  
پروپوزال نویسی و پایان نامه نویسی



کارگاه آنلاین آشنایی با پایگاه های اطلاعات علمی بین المللی و ترند های جستجو