



## بررسی اختلاط سیال غیرنیوتونی در جریان ترکیبی الکترواسموتیک/ فشار محرک درون میکروکانال ناهمگن با موانع مستطیلی

علیرضا قادری<sup>1</sup>، جعفر جماعتی<sup>2\*</sup>، مسعود رحیمی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

3- استاد، مهندسی شیمی، دانشگاه رازی، کرمانشاه

\* کرمانشاه، صندوق پستی 67149-34667، j.jamaati@razi.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 05 بهمن 1395

پذیرش: 25 اسفند 1395

ارائه در سایت: 03 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:

اختلاط

جریان ترکیبی الکترواسموتیک/فشار-محرک

سیال غیرنیوتونی

موانع مستطیلی

زتابانسیل ناهمگن

### چکیده

در این مقاله پدیده اختلاط در جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک برای سیال غیرنیوتونی در میکروکانال با موانع مستطیلی و زتابانسیل غیرهمگن به صورت عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. رفتار غیر نیوتونی سیال با استفاده از قاعده توانی بر جریان اعمال می‌گردد. همچنین به منظور مدل‌سازی توزیع حاکم بر یون‌های الکتریکی در کانال و میدان حاکم بر پتانسیل الکتریکی، از معادله غیرخطی پواسون-بولتزمن بهره گرفته می‌شود. حل عددی معادلات حاکم بر انتقال مومنتم، میدان الکتریکی و میدان غلظت با به کارگیری روش المان محدود صورت گرفته است. در تحلیل حاضر، تأثیر پارامترهای گرادیان فشار، شاخص رفتار رئولوژیکی سیال و همچنین تأثیر پارامترهای فیزیکی و هندسی موانع مستطیلی بر کیفیت اختلاط مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان داد که اعمال گرادیان فشار معکوس بر جریان، رفتار دیلاتنتی سیال و همچنین ارتفاع بیشتر موانع بر بهبود اختلاط درون کانال بسیار مؤثر هستند. همچنین مشخص شد که در حالتی که کانال دارای زتابانسیل ناهمگن باشد افزایش طول موانع راندمان اختلاط را به طور محسوسی افزایش می‌دهد. اما برای کانال با زتابانسیل همگن، افزایش طول موانع اثر اندکی بر راندمان اختلاط دارد.

## Investigation of non-Newtonian fluid mixing in combined electroosmotic/pressure driven flows inside nonhomogeneous microchannel with rectangular obstacles

Alireza Qaderi<sup>1</sup>, Jafar Jamaati<sup>1\*</sup>, Masoud Rahimi<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

2- Department of Chemical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

\* P.O.B. 67149-34667, Kermanshah, Iran, j.jamaati@razi.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 24 January 2017  
Accepted 15 March 2017  
Available Online 23 April 2017

### Keywords:

Mixing  
Combined electroosmotic/pressure driven flows  
Non-Newtonian fluid  
Rectangular obstacles  
Heterogeneous  $\zeta$ -potential

### ABSTRACT

In this article, mixing in the combined electroosmotic/pressure driven flows of non-Newtonian fluid in a microchannel with rectangular obstacles and non-homogeneous  $\zeta$ -potential has been studied numerically. The non-Newtonian behavior of the fluid is considered for the flow field using power law rule. Also, the nonlinear Poisson-Boltzmann equation is used to model the distribution of ions across the channel and the electric potential. Numerical solutions of coupled equations of momentum, electric field and concentration field are performed by means of finite element method. In this study, the effects of various parameters such as pressure gradient, rheological behavior of the fluid and the geometrical and physical parameters of obstacles on the mixing quality are investigated. The results indicate that applying adverse pressure gradient to the flow, the dilatant behavior of the fluid, as well as the height of barriers, is highly effective in the enhancement of the mixing quality within the microchannel. It is found that for microchannels with heterogeneous  $\zeta$ -potential, increasing the length of obstacles significantly increases the mixing efficiency while for the microchannels with homogeneous  $\zeta$ -potential, barrier length has a slight effect on mixing efficiency.

### 1- مقدمه

را به سمت خود جلب کند. جریان الکترواسموتیک از این جهت مهم تلقی می‌گردد که در بسیاری از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به عنوان عامل حرکت سیال مورد استفاده قرار می‌گیرد. هنگامی که سطوح جامد در تماس با یک الکترولیت قرار می‌گیرند، آرایشی از بارها در مجاورت سطح جامد شکل می‌گیرد که دارای چگالی بار خالص غیرصفر می‌باشد. جریان‌های

استفاده و پیشرفت روزافزون سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در صنایع مختلفی نظیر صنایع پزشکی، داروسازی، شیمیایی و بیوشیمیایی و از طرفی نیاز به حضور قطعات ریزمخلوط‌گر در اکثر این سیستم‌ها موجب شده است که پدیده اختلاط در جریان‌های الکترواسموتیک توجه بسیاری از پژوهش‌ها

Please cite this article using:

A. Qaderi, J. Jamaati, M. Rahimi, Investigation of non-Newtonian fluid mixing in combined electroosmotic/pressure driven flows inside nonhomogeneous microchannel with rectangular obstacles, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 331-340, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

متصل را مطالعه نمودند. باگات و همکاران [8] اختلاط را در کانال‌های دارای مانع در مسیر عبور سیال، به گونه‌ای که مانع توسط سیال احاطه شده باشد در رینولدزهای پایین مطالعه کردند. باتاچاریا و برا [9] ناهمگنی زتاپتانسیل در جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک را مورد بررسی قرار دادند. افضل و کیم [10] اختلاط سیالات غیرنیوتونی را در میکروکانال‌های مستقیم و مارپیچ مطالعه کردند. ژوانگ و ژو [11] جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشارمحرک را برای سیال غیر نیوتونی در میکروکانال‌های T شکل مورد بررسی قرار دادند. همچنین چو و همکاران [12] اختلاط را در جریان‌های الکترواسموتیک سیال غیرنیوتونی در حضور موانع الگودار بررسی کردند.

علی‌رغم حجم وسیع مطالعات صورت گرفته در این زمینه، تا به حال تحقیقی در مورد اختلاط سیالات غیرنیوتونی صورت نگرفته است که تأثیر همزمان حضور گرادیان فشار و وجود موانع دارای خواص سطحی ناهمگن را در جریان‌های الکترواسموتیک لحاظ کند. در این مقاله تأثیرات ناشی از حضور گرادیان فشار، خواص غیرنیوتونی سیال و خواص هندسی موانع مستطیلی دارای خواص سطحی ناهمگن بر کیفیت اختلاط به‌دست آمده، به‌صورت عددی بررسی و مطالعه می‌گردد. به‌علاوه شبیه‌سازی صورت گرفته براساس حل عددی نسخه‌ی غیرخطی معادله‌ی پواسون-بولتزمن و با استفاده از مدل سیال غیرنیوتونی قانون توانی انجام شده است.

## 2- مدل سازی ریاضی

هندسه‌ی در نظر گرفته شده برای ریزمجرای مورد مطالعه به‌صورت یک کانال دارای مقطع مستطیلی که دو مانع مستطیلی روی دیواره‌های آن تعبیه شده است، فرض می‌شود. طول کانال برابر با  $L$  و ارتفاع آن برابر با  $H$  در نظر گرفته می‌شود. طول موانع توسط پارامتر  $L_H$  معرفی شده و ارتفاع آن‌ها توسط پارامتر  $S$  تعیین می‌گردد. موانع دقیقاً در وسط کانال قرار گرفته و الگوی ناهمگنی خواص سطحی قرار گرفته روی سطوح آن‌ها به صورت  $++-$  در نظر گرفته می‌شود، به این معنا که سطح مانع دیواره بالایی در نیمه سمت چپ دارای بارهای منفی و در نیمه سمت راست دارای بار مثبت است و مانع پایینی در نیمه سمت چپ دارای بارهای مثبت و در نیمه سمت راست دارای بار منفی است. (شکل 1) مقدار در نظر گرفته شده برای اندازه زتاپتانسیل روی این نیمه‌ها یکسان است و پارامتر  $\zeta_p$  مشخص شده است در حالی که روی دیواره‌های کانال زتاپتانسیل یکنواخت  $\zeta_w$  در نظر گرفته شده است. میدان الکتریکی خارجی نیز توسط اعمال ولتاژ  $V_0$  به الکترودهای قرار گرفته در ابتدا و انتهای کانال ایجاد می‌شود. در ریزمجرای مورد نظر در صورت اعمال ولتاژ مثبت به الکترودهای سمت چپ در حالی که ولتاژ الکترودهای سمت راست صفر در نظر گرفته شده باشد، میدان الکتریکی به گونه‌ای ایجاد

الکترواسموتیک با بهره‌گیری از همین پدیده و اعمال نیروی الکتریکی به بار خالص به وجود آمده در ناحیه‌ی مذکور (که به لایه‌ی الکتریکی دوگانه<sup>1</sup> موسوم است) شکل می‌گیرند. براساس تئوری گوی-چاپمن-استرن<sup>2</sup> [1] لایه‌ی الکتریکی دوگانه از یک لایه یون غیرمتحرک چسبیده به سطح جامد موسوم به لایه‌ی استرن و یک لایه از یون‌های دارای قابلیت تحرک موسوم به لایه‌ی پخشی تشکیل می‌گردد. نیروی الکتریکی وارد شده به بار خالص موجود در لایه‌ی الکتریکی دوگانه، توسط اعمال یک میدان الکتریکی خارجی ایجاد می‌شود. این میدان الکتریکی بارهای الکتریکی موجود در لایه‌ی الکتریکی دوگانه را تحت اثر خود وادار به حرکت کرده که این حرکت به نوبه‌ی خود توسط لزجت سیال باعث حرکت سیال در نقاط دورتر از لایه‌ی الکتریکی دوگانه و مرکز کانال می‌گردد و درنهایت در کل میکروکانال سیال به حرکت در می‌آید [2]. در بعضی از کاربردهای خاص ممکن است جریان‌های الکترواسموتیک و جریان‌های پوازی به‌صورت ترکیبی وجود داشته باشند. گرادیان فشار عامل جریان پوازی ممکن است به دلایل مختلفی در کانال وجود داشته باشد. برای مثال ممکن است به‌عنوان مکانیزمی برای پمپ کردن سیال در جریان حضور داشته باشد و یا ممکن است به دلیل وجود شیرهای مکانیکی در مسیر عبور سیال [3] و یا حتی به صورت ناخواسته در اثر وجود نشستی در مخازن سیال دو سر کانال یا انحراف در الکترودهای قرار گرفته در دو انتهای کانال به وجود آید. جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک حالتی پیچیده‌تر و عمومی‌تر دارند و نشان داده شده است که از نظر ویژگی‌های هیدرودینامیکی کاملاً با جریان‌های الکترواسموتیک خالص و یا جریان‌های پوازی خالص تفاوت دارند [4]. از این جهت مطالعه‌ی این گونه جریان‌ها کاملاً ضروری به نظر می‌رسد.

جریان‌های موجود در میکروکانال‌ها عموماً دارای عدد رینولدز کوچک بوده و دارای رژیم از نوع آرام می‌باشند. از این جهت پدیده‌ی اختلاط در میکروکانال‌ها به کندی پیشرفت می‌کند چرا که مکانیزم غالب اختلاط در جریان‌های آرام مکانیزم دیفیوژن می‌باشد [5] که ذاتاً یک مکانیزم کند محسوب می‌شود. لذا به منظور اجتناب از مشکلاتی نظیر طولانی شدن زمان مورد نیاز یا طولانی شدن مسیر مورد نیاز برای دستیابی به کیفیت قابل قبول در اختلاط، از انواع روش‌های فعال و غیرفعال در ریزمخلوط‌گرها به عنوان اهرمی در ارتقای کیفیت اختلاط درون میکروکانال‌ها استفاده می‌شود. یکی از اصلی‌ترین روش‌های بهبود کیفیت اختلاط به‌صورت غیرفعال استفاده از موانع تعبیه شده در مسیر کانال به‌طوری که دارای خواص سطحی غیرهمگن نسبت به خواص سطحی کانال باشند، می‌باشد. در این حالت هم هندسه و هم نیروی محرکه‌ی الکترواسموتیکی بر ویژگی‌های هیدرودینامیکی جریان درون میکروکانال تأثیرگذار هستند و پدیده‌ی اختلاط و جریان را دستخوش تغییر می‌کنند.

برمبنای حیله‌ی کاربرد سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و با توجه به این امر که شارهای به‌کار رفته در این حوزه‌ها عموماً دارای رفتار غیرنیوتونی می‌باشند، ضروری به نظر می‌رسد که به‌منظور تطابق بیشتر نتایج با واقعیت، مطالعات جریان‌های مذکور با لحاظ کردن رفتار غیرنیوتونی سیال جاری در کانال، صورت گیرد. مطالعات فراوانی پیرامون پدیده‌ی اختلاط و جریان‌های الکترواسموتیک صورت گرفته است. بیدیس و همکاران [6] اختلاط در کانال دارای ناهمگنی در زتاپتانسیل دیواره را به‌صورت تجربی مورد بررسی قرار دادند. یانگ و همکاران [7] اختلاط درون مجراهای ساخته شده از شیارهای

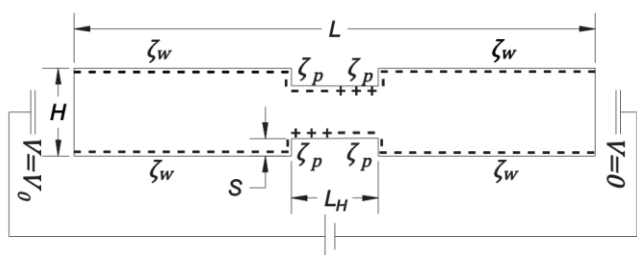


Fig. 1 Schematic configuration of the microchannel

شکل 1 پیکربندی شماتیک میکروکانال

<sup>1</sup> EDL

<sup>2</sup> Gouy-Chapman-Stern

می‌گردد که در ازای وجود زتابانسیل منفی روی دیواره‌های ریزمجرا، جهت جریان ایجاد شده در سیال از سمت چپ کانال به سمت راست می‌باشد.

### 2-1- معادلات حاکم

مدل‌سازی جریان موردنظر با استفاده از فرض‌های تراکم‌ناپذیری سیال، چشم‌پوشی از اثرات گرانش بر مبنای برقراری مقیاس میکرو [13]، پایدار بودن جریان و متقارن بودن الکتروولت موجود در کانال انجام شده است. در این حالت می‌توان معادلات حاکم بر فیزیک مسأله را به صورت روابطی که در ادامه خواهند آمد، در نظر گرفت:

#### 2-1-1- معادلات پیوستگی و مومنتوم

معادله‌ی حاکم بر پیوستگی با فرض تراکم‌ناپذیری سیال به صورت رابطه‌ی (1) بیان می‌شود. همچنین معادله‌ی مومنتوم حاکم بر جریان سیال بر اساس معادله‌ی مومنتوم کوشی به صورت رابطه‌ی (2) نوشته می‌شود:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \cdot [\tau] - \rho_e \vec{\nabla}\Phi \quad (2)$$

در معادله‌ی (2) عبارات  $P$ ،  $\vec{v}$ ،  $\rho$ ،  $[\tau]$  به ترتیب بیانگر چگالی، بردار سرعت، فشار و تانسور تنش لزجت در سیال می‌باشند، همچنین آخرین عبارت سمت راست در معادله‌ی (2) بیانگر نیروی حجمی وارد بر سیال می‌باشد، که در آن  $\rho_e$  بیانگر چگالی خالص بار الکتریکی و  $\vec{\nabla}\Phi$  بزرگی میدان الکتریکی کلی به وجود آمده می‌باشند. مقادیر  $\rho_e$  و  $\Phi$  توسط روابط (3) و (4) قابل محاسبه هستند [14]:

$$\rho_e = \sum z_i e n_i = e z(n^+ - n^-) \quad (3)$$

$$\Phi = \varphi + \psi \quad (4)$$

در معادلات (3) و (4) عبارات  $z_i$ ،  $e$ ،  $n_i$ ،  $\varphi$  و  $\psi$  به ترتیب بیانگر والانس یون گونه‌ی موردنظر، بار پایه‌ی الکتریکی، غلظت یون موردنظر، پتانسیل الکتریکی میدان خارجی اعمال شده و پتانسیل الکتریکی به وجود آمده در اثر توزیع یون‌ها درون کانال (میدان الکتریکی داخلی) می‌باشند. برای لحاظ کردن رفتار غیرنیوتونی سیال از مدل قانون توانی استفاده می‌گردد، بر مبنای این مدل می‌توان نوشت [15]:

$$[\tau] = 2\mu(\dot{\gamma})[\dot{\gamma}] \quad (5)$$

$$[\dot{\gamma}] = \frac{1}{2}([\vec{\nabla}\vec{v}] + [\vec{\nabla}\vec{v}]^T) \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}[\dot{\gamma}]:[\dot{\gamma}]} \quad (7)$$

$$\mu(\dot{\gamma}) = m(2\dot{\gamma})^{n-1} \quad (8)$$

در روابط (5) الی (8) عبارات  $\mu(\dot{\gamma})$ ،  $[\dot{\gamma}]$ ،  $[\vec{\nabla}\vec{v}]$ ،  $n$  و  $m$  به ترتیب بیانگر لزجت مؤثر سیال، تانسور نرخ کرنش در سیال، تانسور گرادین میدان سرعت، بزرگی تانسور نرخ کرنش، شاخص پایداری جریان<sup>1</sup> و شاخص رفتار جریان<sup>2</sup> می‌باشند. هنگامی که  $n > 1$  باشد، سیال رفتار غیرنیوتونی از نوع دیلاتانت<sup>3</sup> از خود نشان می‌دهد و اگر  $n = 1$  باشد، رفتار سیال نیوتونی می‌باشد در حالی که اگر  $n < 1$  باشد، سیال رفتار غیرنیوتونی شبه‌پلاستیک از خود نشان می‌دهد [16]. با در نظر گرفتن جریان دوبعدی و با در نظر گرفتن مؤلفه‌های تانسور نرخ کرنش مربوط به این نوع جریان،  $\dot{\gamma}$  به صورت رابطه‌ی (9) به دست

می‌آید [17]:

$$\dot{\gamma} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

با استفاده از رابطه‌ی (8) و (9) می‌توان لزجت مؤثر را به صورت رابطه‌ی (10) ارائه نمود:

$$\mu(\dot{\gamma}) = m \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (10)$$

با ترکیب روابط (5) و (10) سه مؤلفه‌ی غیرصفر و مستقل تانسور تنش لزجت به صورت روابط (11) نوشته می‌شوند:

$$\tau_{xx} = 2\mu(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11-الف)$$

$$\tau_{xy} = \mu(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (11-ب)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11-ج)$$

با جاگذاری روابط (11) در رابطه‌ی (2) و با فرض پایداری جریان می‌توان معادلات مومنتوم حاکم بر جریان را در راستای  $x$  و  $y$  به صورت روابط (12) ارائه نمود:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + A \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \rho_e \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (12-الف)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \left[ \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + A \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \rho_e \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (12-ب)$$

در روابط (12) عبارت  $A$  تابعی از  $u$ ،  $v$ ،  $x$  و  $y$  بوده و به صورت رابطه‌ی (13) تعریف می‌شود:

$$A = m \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (13)$$

#### 2-1-2- معادلات حاکم بر پتانسیل الکتریکی

بر مبنای رابطه‌ی (4) پتانسیل الکتریکی کلی از مجموع پتانسیل‌های الکتریکی خارجی ( $\varphi$ ) و داخلی ( $\psi$ ) به دست می‌آید. منظور از میدان الکتریکی خارجی میدان اعمال شده به دو سوی کانال با هدف برقراری جریان می‌باشد، در حالی که منظور از میدان داخلی، میدان ایجاد شده در اثر توزیع خاص یون‌ها در عرض کانال می‌باشد. با فرض ثابت بودن رسانایی کپه‌ای محلول، معادله‌ی حاکم بر توزیع  $\varphi$  توسط رابطه‌ی (14) به صورت معادله‌ی لاپلاس بیان می‌گردد:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (14)$$

معادله‌ی حاکم بر توزیع  $\psi$  معادله‌ی پواسون بوده که به صورت رابطه‌ی (15) نوشته می‌شود [18]:

$$\nabla \cdot (\epsilon_w \epsilon_0 \nabla \psi) + \rho_e = 0 \quad (15)$$

در رابطه‌ی (15) عبارات  $\epsilon_w$  و  $\epsilon_0$  به ترتیب بیانگر ضریب گذردهی الکتریکی نسبی سیال و ضریب گذردهی الکتریکی خلأ می‌باشند.

#### 2-3-1- معادله‌ی بولتزمن

معادله‌ی بولتزمن برقرار کننده‌ی رابطه‌ی میان غلظت یون‌ها ( $n_i$ ) و پتانسیل

<sup>1</sup> Flow consistency index

<sup>2</sup> Flow behavior index

<sup>3</sup> Dilatant

$$+A^* \left. \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} \right] - B\rho_e^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \right) \quad (22-الف)$$

$$\left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_{HS}} \left[ \frac{\partial A^*}{\partial x^*} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + A^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial A^*}{\partial x^*} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + A^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + 2 \frac{\partial A^*}{\partial y^*} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + 2A^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] - B\rho_e^* \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right) \quad (22-ب)$$

پتانسیل الکتریکی خارجی:

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (23)$$

پتانسیل الکتریکی داخلی:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = \kappa^{*2} \times \sinh(\psi^*) \quad (24)$$

توزیع غلظت گونه‌ها:

$$u^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (25)$$

در روابط (22) عبارت  $A^*$  تابعی برحسب کمیت‌های بدون بعد  $u^*$ ،  $v^*$ ،  $x^*$  و  $y^*$  است:

$$A^* = \left[ 2 \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (26)$$

در معادلات (22)، (24) و (25) اعداد و پارامترهای بدون بعد ظاهر شده به صورت روابط (27) تعریف می‌شوند:

$$Re_{HS} = \frac{\rho U_{HS}^{2-n} H^n}{m} \quad (27-الف)$$

$$B = \frac{n_0 K_B T}{\rho U_{HS}^2} \quad (27-ب)$$

$$\kappa^{*2} = \frac{2z^2 e^2 n_0 H^2}{\epsilon_w \epsilon_0 K_B T} \quad (27-ج)$$

$$Pe = \frac{H U_{HS}}{D} \quad (27-د)$$

رابطه‌ی (27-الف) بیانگر عدد بدون بعد رینولدز که بر مبنای سرعت هلمهولتز-اسمولوفسکی تعریف شده است، می‌باشد. همچنین رابطه‌ی (27-د) معرف عدد بدون بعد پکله می‌باشد. در رابطه‌ی (27-ج) پارامتر بی‌بعد  $\kappa^*$  معرف نسبت ارتفاع کانال به ضخامت لایه‌ی الکتریکی دوگانه بوده و به صورت  $\kappa^* = \kappa H$  تعریف می‌شود. که در آن  $\kappa$  معرف عکس طول دباب می‌باشد. عدد رینولدز تعریف شده بر مبنای سرعت هلمهولتز-اسمولوفسکی تنها تأثیرات مربوط به جریان الکترواسموتیک خالص را شامل می‌شود. بر این اساس در جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک تعریف یک عدد رینولدز مؤثر که علاوه بر جریان الکترواسموتیک تأثیرات بخش پواری جریان را نیز شامل شود ضروری به نظر می‌رسد. برای این منظور می‌توان از تعریف عدد رینولدز مبتنی بر جریان پواری خالص که بر اساس سرعت متوسط جریان فشارمحرک میان دو صفحه به فاصله‌ی  $H$  تعریف می‌شود، استفاده کرد [26]. اندازه‌ی سرعت متوسط جریان سیال غیرنیوتونی میان دو صفحه به فاصله‌ی  $H$  با استفاده از مدل قانون توانی به صورت رابطه‌ی (28) به دست می‌آید [27]:

$$u_m = \frac{nH}{4n+2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \frac{H}{2m} \right|^{\frac{1}{n}} \quad (28)$$

با استفاده از سرعت متوسط  $u_m$  می‌توان عدد رینولدز پواری را به صورت رابطه‌ی  $Re_{po} = \rho u_m^{2-n} H^n / m$  تعریف کرد. بر این اساس با معرفی پارامتر بدون بعد  $\Gamma$  به صورت رابطه‌ی (29) که معرف نسبت سرعت ماکزیمم سیال در جریان‌های فشارمحرک به سرعت هلمهولتز-اسمولوفسکی می‌باشد، می‌توان عدد رینولدز مؤثر را به صورت رابطه‌ی (30) تعریف نمود:

الکتریکی میدان داخلی ( $\psi$ ) می‌باشد. مادامی که ارتفاع کانال به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد به گونه‌ای که غلظت یون‌های موردنظر در محلول در مرکز کانال با غلظت کپه‌ای محلول برابر گردد، توزیع بولتزمن برقرار می‌باشد. مادامی که ضخامت EDL در کانال نازک باشد حتی با وجود ناهمگنی در هندسه و توزیع زتاپتانسیل، توزیع بولتزمن نتایج مناسبی به دست می‌دهد [19]. این توزیع به صورت رابطه‌ی (16) بیان می‌گردد [20]:

$$n_i = n_0 \exp \left( \frac{-z_i e \psi}{K_B T} \right) \quad (16)$$

در معادله‌ی (16) عبارات:  $n_i$ ،  $K_B$  و  $T$  به ترتیب بیانگر غلظت کپه‌ای محلول، ثابت بولتزمن و دمای مطلق برحسب  $K$  می‌باشند. با فرض متقارن بودن الکترولیت و تک‌والانس بودن یون‌های موجود در آن، ترکیب معادلات (3)، (15) و (16) معادله‌ی حاکم بر  $\psi$  را به صورت رابطه‌ی (17) موسوم به معادله-ی پواسون-بولتزمن غیرخطی ارائه می‌نماید:

$$\epsilon_w \epsilon_0 \nabla^2 \psi = -2n_0 e |z| \sinh \left( \frac{e|z|\psi}{K_B T} \right) \quad (17)$$

#### 2-1-4- معادله‌ی حاکم بر غلظت گونه‌ها

در حالت پایدار معادله‌ی حاکم بر انتقال گونه‌ها در محلول می‌تواند توسط معادله‌ی همرفتی-پخش (18) بیان شود [21]:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) C = D \nabla^2 C \quad (18)$$

در رابطه‌ی (18) عبارات  $C$  و  $D$  به ترتیب بیانگر غلظت گونه‌ی موردنظر و ضریب پخش مولکولی گونه‌ی مذکور می‌باشند.

#### 2-2- بی‌بعد سازی معادلات حاکم

با انتخاب متغیرهای بی‌بعد مناسب می‌توان معادلات حاکم بر سیستم را بدون بعد کرد. متغیرهای بدون بعد اختیار شده به صورت روابط (19) گزارش می‌گردد [23,22]:

$$u^* = \frac{u}{U_{HS}}, v^* = \frac{v}{U_{HS}}, p^* = \frac{p}{\rho U_{HS}^2}, \varphi^* = \frac{\varphi |z| e}{K_B T} \\ \psi^* = \frac{\psi |z| e}{K_B T}, x^* = \frac{x}{H}, y^* = \frac{y}{H}, C^* = \frac{C}{C_0}, \rho_e^* = \frac{\rho_e}{|z| e n_0} \quad (19)$$

در روابط (19) عبارات  $U_{HS}$  و  $C_0$  به ترتیب بیانگر سرعت مرجع هلمهولتز-اسمولوفسکی و غلظت کپه‌ای محلول برحسب  $\text{mol/m}^3$  می‌باشند. سرعت مرجع  $U_{HS}$  به صورت رابطه‌ی (20) می‌باشد [24]:

$$U_{HS} = n \lambda_D^{\frac{n-1}{n}} \left( -\frac{\epsilon_w \epsilon_0 \zeta V_0}{Lm} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (20)$$

در رابطه‌ی (20)  $\lambda_D$  و  $\zeta$  به ترتیب بیانگر طول دباب<sup>1</sup> و زتاپتانسیل متوسط روی دیواره‌های کانال و سطح موانع می‌باشد. طول دباب از رابطه‌ی  $\lambda_D = (2n_0 e^2 z^2 / \epsilon_w \epsilon_0 K_B T)^{-\frac{1}{2}}$  قابل محاسبه است و  $\zeta = \sum_i \zeta_i l_i / \sum_i l_i$  تعریف می‌شود [25]. بر اساس متغیرهای بی‌بعد معرفی شده در روابط (19) معادلات حاکم بر جریان به صورت بدون بعد قابل بازنویسی هستند:

پویوستگی:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (21)$$

مومنتموم:

$$\left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_{HS}} \left[ 2 \frac{\partial A^*}{\partial x^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + A^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial A^*}{\partial y^*} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + 2A^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial A^*}{\partial y^*} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + A^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial A^*}{\partial y^*} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right]$$

<sup>1</sup> Debye length

شرط‌های مرزی ارائه شده در روابط (34) براساس شرط عدم لغزش روی دیواره‌های کانال، نفوذناپذیری دیواره‌ها نسبت به عبور مواد و عایق بودن دیواره‌ها نسبت به عبور شار الکتریکی تعیین شده‌اند.

### 3- روش عددی و اعتبارسنجی

روش عددی مورد استفاده بر پایه‌ی روش المان محدود و با استفاده از نرم‌افزار تجاری کامسول مولتی‌فیزیکس نسخه‌ی 5.2a صورت گرفته است. به این منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم بر میدان‌های فیزیکی دخیل در مسأله به گونه‌ای انتخاب شده است که ضمن پایین بودن هزینه‌ی محاسبات، نتایج دارای دقت کافی نیز باشند. گسسته‌سازی میدان سرعت، غلظت و میدان الکتریکی به صورت مرتبه‌ی دوم و برای میدان فشار به صورت مرتبه‌ی سوم لحاظ می‌شود. مش مورد استفاده در حل عددی مسأله به صورت یک شبکه‌ی بدون ساختار مثلثی است که در نزدیکی دیواره‌ها و نیز در گوشه‌های تیز حوزه‌ی حل تراکم بیشتری دارد. بررسی استقلال نتایج عددی از شبکه، با در نظر گرفتن چهار کیفیت متفاوت برای شبکه صورت گرفته است و با استفاده از مقادیر به دست آمده برای دبی حجمی، استقلال از شبکه بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده در راستای بررسی استقلال از شبکه، در جدول 1 به نمایش در آمده است. براساس داده‌های ارائه شده در جدول 1 اگر میزان تغییرات مطلوب کمتر از یک صدم درصد در نظر گرفته شود، تعداد المان‌های به کار رفته در ساختمان مش برای حالتی که کانال بدون حضور مانع در نظر گرفته می‌شود، 11225 المان و در حالتی که مانع‌ها در کانال حضور دارند 8024 المان گزارش می‌شود. همچنین معیار همگرایی در نظر گرفته شده برای حل عددی برابر با  $10^{-6}$  منظور می‌شود. اعتبارسنجی حل عددی صورت گرفته بر مبنای حل‌های تحلیلی موجود برای دو حالت حدی از جریان صورت می‌گیرد. جریان سیال غیرنیوتونی در حالتی که گرادیان فشار اعمالی بر جریان صفر در نظر گرفته می‌شود و همچنین جریان ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک در حالی که سیال نیوتونی در نظر گرفته می‌شود، دو حالت حدی مدنظر هستند که برای اعتبارسنجی حل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به‌منظور اعتبارسنجی بر مبنای حالت حدی اول یعنی حالتی که گرادیان فشار صفر در نظر گرفته می‌شود و سیال غیرنیوتونی منظور می‌شود از حل تحلیلی به‌دست آمده برای میدان سرعت استفاده می‌شود. معادله‌ی کلی به دست آمده برای پروفیل سرعت در این حالت به صورت معادله‌ی (35) قابل ارائه است [29]:

$$u(y) = \kappa \frac{1-n}{n} \left( -\frac{\varepsilon_w \varepsilon_0 \zeta V_0}{Lm} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\int_{ky}^{\kappa H} \sinh^{\frac{1}{n}}(\kappa y) d(\kappa y)}{\cosh^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\kappa H}{2}\right)} \quad (35)$$

در رابطه‌ی (35) پارامتر  $\kappa$  معرف عکس طول دبی می‌باشد. صورت بی‌بعد پروفیل سرعت به دست آمده به صورت رابطه‌ی (36) قابل ارائه است:

جدول 1 نتایج حاصل از بررسی استقلال از شبکه

دبی حجمی عبوری (μl/s)		تعداد المان‌های شبکه	
بدون مانع	با مانع	بدون مانع	با مانع
95.190	74.493	4087	1226
95.195	74.250	5725	2948
95.186	74.232	11225	8024
95.189	74.239	13137	13981

$$\Gamma = \frac{U_{PD}^n}{U_{HS}^n} = \frac{\left( -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{H}{2m} \right) \left( \frac{Hn}{2+2n} \right)^n}{U_{HS}^n} \quad (29)$$

$$\text{Re} = \left( 1 + \left( \frac{2n+2}{4n+2} \right)^{2-n} \Gamma |\Gamma|^{\frac{2-2n}{n}} \right) \text{Re}_{HS} \quad (30)$$

در رابطه‌ی (29) عبارت  $U_{PD}$  معرف ماکزیمم اندازه‌ی سرعت سیال در جریان پوازی میان دو صفحه به فاصله‌ی  $H$  در حالی که رفتار غیرنیوتونی سیال توسط مدل قانون توانی بر مسأله اعمال می‌شود، می‌باشد.

### 2-3- تعیین معیار بررسی کیفیت اختلاط

به منظور بررسی کیفیت اختلاط به دست آمده در کانال از شاخصی مبتنی بر انحراف معیار غلظت در هر مقطع از کانال استفاده می‌گردد. انحراف معیار در هر مقطع از کانال به صورت رابطه‌ی (31) تعریف می‌گردد:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_0^H (C(y) - C_m)^2 dy}{\int_0^H dy}} \quad (31)$$

در رابطه‌ی (31)، عبارت  $C_m$  بیانگر غلظت متوسط در هر مقطع از کانال بوده و توسط رابطه‌ی (32) تعیین می‌گردد:

$$C_m = \frac{\int_0^H C(y) dy}{H} \quad (32)$$

بازده اختلاط صورت گرفته براساس انحراف معیار غلظت با استفاده از رابطه‌ی (33) قابل محاسبه است [28]. توضیح آن که  $\sigma_0$  معرف انحراف معیار غلظت در مقطع ورودی کانال و به‌عبارت دیگر در حالتی است که هنوز هیچ اختلاطی صورت نگرفته است. بر این اساس مقدار به دست آمده برای بازده اختلاط از رابطه‌ی (33) از مقدار 0 که معرف عدم رخداد اختلاط می‌باشد تا مقدار 1، که معرف اختلاط کامل است متغیر خواهد بود.

$$q_x = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (33)$$

### 2-4- شرایط مرزی

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حل معادلات حاکم بر مسأله به صورت روابط (34) ارائه می‌شود:

مرز ورودی کانال:

$$p^* = \left( \frac{2+2n}{n} \right)^n \frac{2mL}{\rho H^{n+1}} U_{HS}^{n-2} \Gamma$$

$$C^* = \begin{cases} 1 & 0 \leq y^* \leq 0.5 \\ 0 & -0.5 \leq y^* \leq 0 \end{cases}$$

$$\varphi^* = \frac{V_0 |z| e}{K_B T}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0$$

(34-الف)

مرز خروجی کانال:

$$p^* = 0 \quad \frac{\partial C^*}{\partial x^*} = 0 \quad \varphi^* = 0 \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad (34-ب)$$

دیواره‌های بالا و پایین کانال:

$$u^* = 0 \quad v^* = 0 \quad \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = 0 \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\psi^* = \begin{cases} \frac{\zeta_w |z| e}{K_B T} & 0 \leq x^* \leq \frac{L-L_H}{2H} \\ \frac{\zeta_p |z| e}{K_B T} & \frac{L-L_H}{2H} \leq x^* \leq \frac{L+L_H}{2H} \\ \frac{\zeta_w |z| e}{K_B T} & \frac{L+L_H}{2H} \leq x^* \leq \frac{L}{H} \end{cases} \quad (34-ج)$$

4- نتایج

نتایج گزارش شده در این قسمت به ازای مقادیر مشخصی از پارامترها و براساس اعداد ثابت مشخص ارائه می‌شوند. پارامترها و ثوابت دخیل در مسأله مطابق با مقادیر درج شده در جدول 2 تنظیم می‌شوند. پارامترهایی که مقادیرشان در جدول 2 ذکر نشده است، پارامترهای آزاداند که در روند بررسی نتایج، تأثیرشان بر رفتارهای جریان مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. پارامترهای: ارتفاع موانع، گرادیان فشار اعمال شده بر جریان، شاخص رفتار سیال و طول موانع از این جمله‌اند. در "شکل 4" کانتورها و خطوط هم‌تراز به‌دست آمده برای حالتی که  $n = 1$  تنظیم شده است (سیال نیوتونی) و گرادیان فشار نیز صفر مدنظر قرار می‌گیرد، رسم شده است.

جدول 2 مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترها و ثوابت به کار رفته در تحلیل مسأله

Table 2 Parameters and constant values used in the simulation

مقدار	مفهوم	پارامتر
$3.944 \times 10^{-6}$ m	ارتفاع کانال	$H$
$6H$	طول کانال	$L$
78.5	ضریب گذردهی الکتریکی نسبی سیال	$\epsilon_w$
$8.854 \times 10^{-12}$ F/m	ضریب گذردهی الکتریکی خلأ	$\epsilon_0$
298.15 K	دما	$T$
$0.01 \text{ mol/m}^3$	غلظت کپه‌ای محلول	$C_0$
$1 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$	ضریب پخش مولکولی	$D$
$1.46 \times 10^4 \text{ V/m}$	بزرگی میدان الکتریکی خارجی	$E_0$
$1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$	شاخص پایداری سیال	$m$
$1000 \text{ kg/m}^3$	چگالی سیال	$\rho$
25 mV	زتا پتانسیل روی دیواره‌های کانال	$\zeta_w$
50 mV	زتا پتانسیل روی موانع	$\zeta_p$

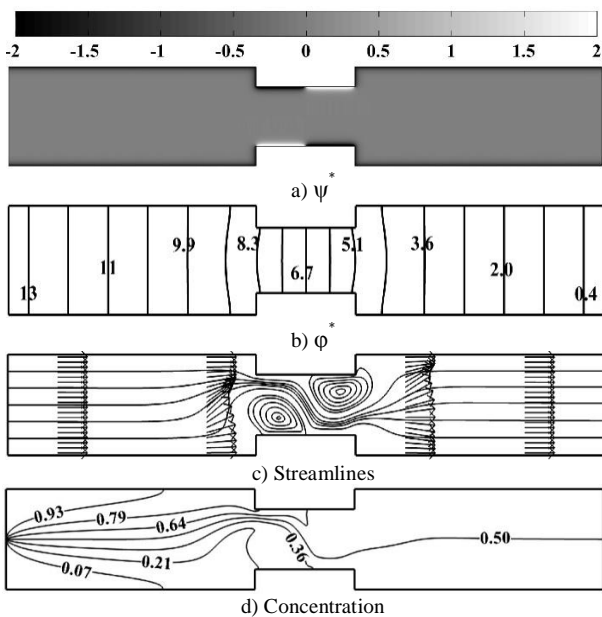


Fig. 4 Obtained contours and isolines when  $n=1$  and  $\Gamma = 0$  ( $Re=0.001$ )

شکل 4 کانتورها و خطوط هم‌تراز برای  $n=1$  و  $\Gamma = 0$  ( $Re = 0.001$ )

$$\frac{u}{U_{HS}} = \frac{\int_{\kappa^* y^*}^{\kappa^*} \sinh^{\frac{1}{n}}(\kappa^* y^*) d(\kappa^* y^*)}{n \cosh^{\frac{1}{n}}(\frac{\kappa^*}{2})} \quad (36)$$

به علاوه به منظور اعتبارسنجی بر مبنای حالت حدی دوم یعنی حالتی که سیال نیوتونی در جریان ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک مدنظر است، از حل تحلیلی به دست آمده برای میدان سرعت در این نوع جریان‌ها استفاده می‌شود. رابطه‌ی بدون بعد پروفیل سرعت در این حالت به صورت رابطه‌ی (37) ارائه می‌شود [30]:

$$\frac{u}{U_{HS}} = 1 - \frac{\cosh(\kappa^* y^*)}{\cosh(\frac{\kappa^*}{2})} - \Gamma(1 - 4y^{*2}) \quad (37)$$

نتایج به دست آمده برای اعتبارسنجی بر مبنای حالات حدی مذکور، در "شکل‌های 2 و 3" به تصویر کشیده شده است. در "شکل 2" نتایج برای حالت حدی اول از جریان ارائه شده است و در "شکل 3" مقایسه‌ی نتایج برای حالت حدی دوم از جریان صورت گرفته است. نتایج رسم شده که به ازای  $\kappa^* = 41$  گزارش شده‌اند، نشانگر تطابق مناسب میان نتایج عددی حاصل و داده‌های به دست آمده از روابط تحلیلی می‌باشند.

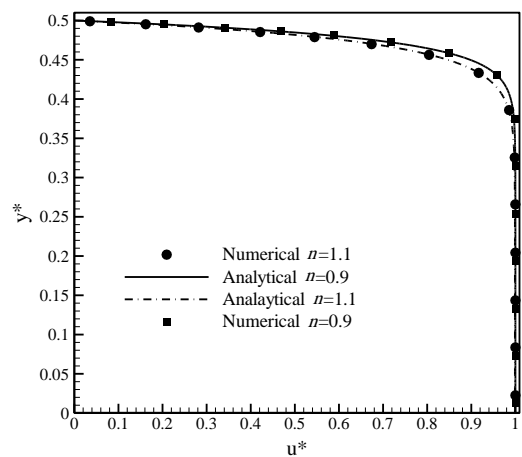


Fig. 2 Comparison between analytical solution (Eq. (36)) and obtained numerical solutions when  $\Gamma = 0$

شکل 2 مقایسه‌ی حل‌های تحلیلی (معادله‌ی (36)) و عددی به دست آمده برای حالت  $\Gamma = 0$

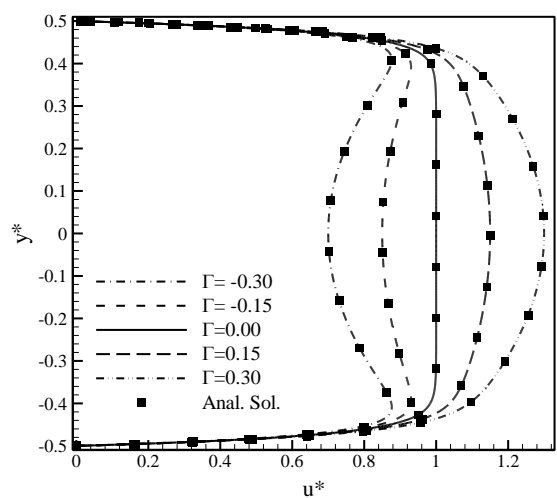


Fig. 3 Comparison between analytical solution (Eq. (37)) and obtained numerical solutions for  $n=1$  and various values of  $\Gamma$

شکل 3 مقایسه‌ی حل‌های تحلیلی (معادله‌ی (37)) و عددی به دست آمده برای حالت  $n=1$  و مقادیر مختلف  $\Gamma$

در قسمت اعتبارسنجی مشخص است، سیالات با رفتار شبه پلاستیک در جریان الکترواسموتیک دارای پروفیل پختری نسبت به سیالات دیلاتنت می‌باشند. این امر با توجه به رفتار کلی سیالات نامبرده قابل پیش‌بینی است، چرا که در جریان‌های الکترواسموتیک بیش‌ترین تنش برشی در نزدیکی دیواره‌ها و در EDL رخ می‌دهد و همین امر تفاوت موجود بین پروفیل‌های سرعت را توجیه می‌کند، چرا که سیالات دیلاتنت در مقابل تنش برشی بیشتر، مقاومت بالاتری نسبت به سیالات شبه پلاستیک دارند. با دقت در "شکل 6" تأثیری که شاخص رفتار سیال بر نحوه و کیفیت اختلاط می‌تواند داشته باشد، قابل بررسی است. کانتورهای غلظت رسم شده در "شکل 6" بیانگر این موضوع هستند که تغییر شاخص  $n$  تأثیرات قابل توجهی بر اختلاط درون کانال دارد. به منظور بررسی دقیق‌تر موضوع، مقادیر بازده اختلاط در طول کانال به ازای مقادیر مختلف شاخص  $n$  در "شکل 7" رسم شده است. با دقت در "شکل 7" می‌توان نتیجه گرفت که هر قدر شاخص  $n$  از 1 کوچکتر باشد (رفتار سیال به رفتار شبه پلاستیک نزدیکتر باشد) در بازده اختلاط تأثیر منفی به وجود می‌آید، و به عکس هر قدر شاخص  $n$  از 1 بزرگتر باشد (رفتار سیال به رفتار دیلاتنت نزدیکتر باشد) اختلاط بهتر صورت گرفته و بازده آن بیشتر می‌شود.

بر این اساس می‌توان گفت که اختلاط در سیالات شبه پلاستیک نسبت به سیالات دیلاتنت سخت‌تر صورت می‌گیرد.

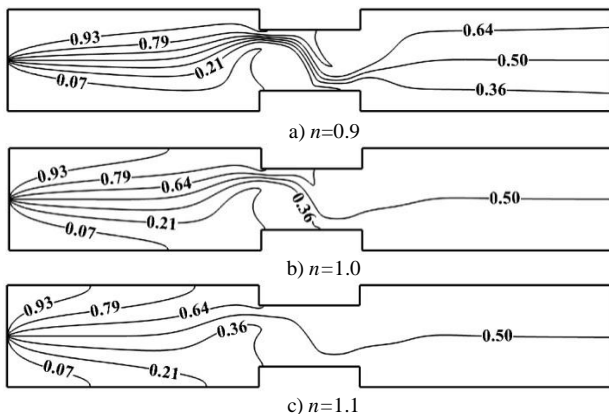


Fig. 6 Concentration contours for various values of  $n$  ( $\Gamma = 0$ )  
شکل 6 کانتورهای غلظت برای مقادیر مختلف  $n$  ( $\Gamma = 0$ )

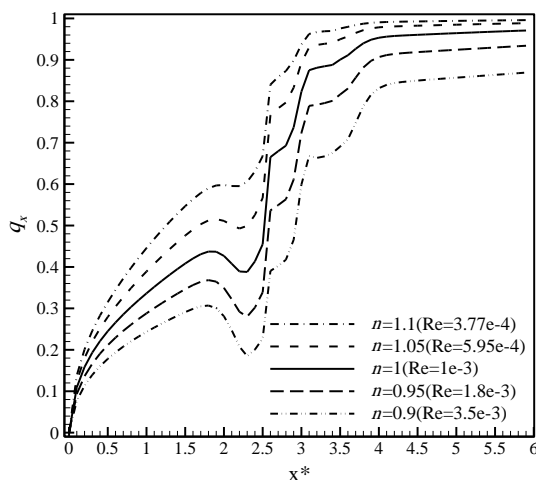


Fig. 7 Mixing efficiency along the channel for various values of  $n$  ( $\Gamma = 0$ )  
شکل 7 بازده اختلاط در طول کانال برای مقادیر مختلف  $n$  ( $\Gamma = 0$ )

#### 1-4- تأثیر گرادیان فشار اعمالی بر بازده اختلاط

تغییر گرادیان فشار اعمالی به جریان با تغییر خواص هیدرودینامیکی جریان می‌تواند بر رفتار جریان بسیار تأثیرگذار باشد. تغییر گرادیان فشار با تأثیری که بر مقدار پارامتر بدون بعد  $\Gamma$  دارد، می‌تواند عدد رینولدز مؤثر را دچار افزایش یا کاهش کند. به این صورت که گرادیان فشار موافق با جریان الکترواسموتیک ایجاد شده، علامت پارامتر  $\Gamma$  را مثبت تعیین می‌کند و از این رو باعث افزایش عدد رینولدز مؤثر می‌شود. بررسی تأثیری که مقدار و جهت گرادیان فشار اعمال شده بر بازده اختلاط صورت گرفته درون کانال دارد توسط محاسبه‌ی بازده اختلاط در چند مقدار مختلف از پارامتر  $\Gamma$  مطالعه می‌شود. "شکل 5" نتایج به دست آمده برای بازده اختلاط را در مقادیر مختلف از پارامتر  $\Gamma$  و در حالی که مقدار  $n = 1$  تنظیم می‌گردد، گزارش می‌کند:

همان‌طور که در "شکل 5" مشخص است، افزایش گرادیان فشار موافق موجب کاهش بازده اختلاط در طول کانال می‌گردد، در حالی که افزایش گرادیان فشار مخالف (نسبت به جریان الکترواسموتیک) موجب بهبود اختلاط صورت گرفته در کانال می‌گردد. تفسیر قابل ارائه در این باره به این صورت است که گرادیان فشار موافق بزرگتر، عدد رینولدز مؤثر بزرگتری را سبب می‌شود که این امر زمان کمتری برای اختلاط سیال فراهم می‌آورد و موجب کاهش راندمان اختلاط صورت گرفته در کانال می‌شود. این تفسیر برای گرادیان فشار مخالف نیز قابل بسط است، به این صورت که گرادیان فشار مخالف بزرگتر موجب می‌شود که عدد رینولدز مؤثر کوچکتر شود و به همین دلیل سیال زمان بیشتری برای اختلاط داشته و راندمان اختلاط بهبود می‌یابد.

#### 2-4- تأثیر شاخص رفتار سیال بر اختلاط

شاخص رفتار سیال، تعیین کننده‌ی رفتار رئولوژیکی سیال به کار رفته در کانال بوده و همان‌طور که در معادلات به دست آمده نیز به خوبی مشهود است، بر خواص هیدرودینامیکی جریان بسیار اثر گذار خواهد بود. همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، در مدل قانون توانی مقدار  $n = 1$  که معرف رفتار نیوتونی برای یک سیال می‌باشد، مرز میان دو رفتار غیرنیوتونی متفاوت به نام‌های شبه پلاستیک و دیلاتنت را تعیین می‌کند. همان‌طور که در "شکل 2"

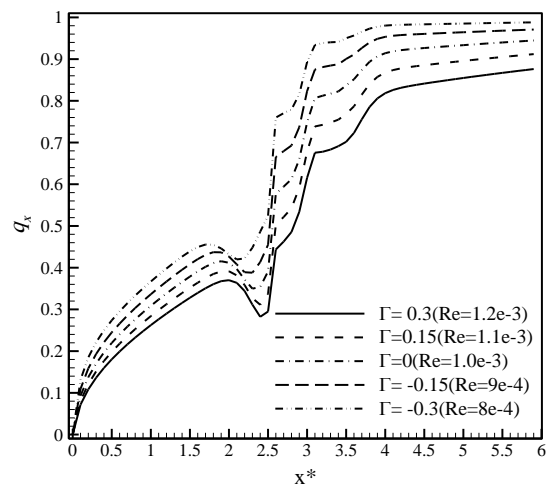
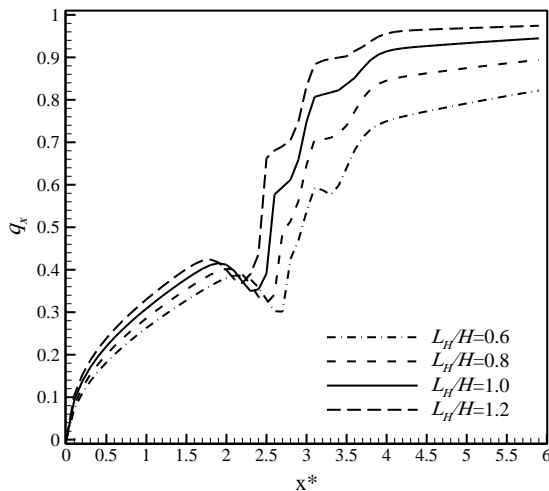


Fig. 5 Mixing efficiency along the channel for various values of  $\Gamma$  ( $n=1$ )

شکل 5 بازده اختلاط در طول کانال برای مقادیر مختلف  $\Gamma$  ( $n=1$ )

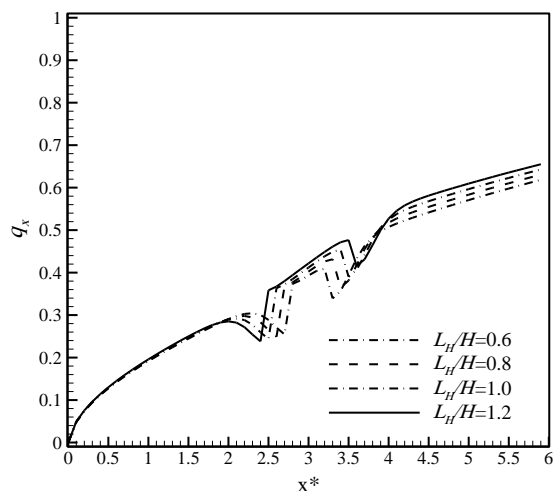


**Fig. 9** Mixing efficiency along the channel for various lengths of obstacle when heterogeneity exists on the obstacle's surface

شکل 9 بازده اختلاط در طول کانال برای مقادیر مختلف از طول مانع هنگامی که روی سطح مانع ناهمگنی وجود دارد

بر این اساس، به منظور مشخص شدن اثری که صرفاً هندسه مانع بر اختلاط دارد، حالتی که مانع دارای زتاپتانسیل همگن و هم‌نوع با زتاپتانسیل دیواره-های کانال می‌باشد ( $\zeta_w = \zeta_p$ ) مد نظر قرار گرفته و تأثیر طول مانع بر رفتار اختلاط مورد مطالعه قرار می‌گیرد. "شکل 10" نتایج حاصل را در حالت ذکر شده به تصویر می‌کشد.

مقایسه‌ی نمودارهای رسم شده در "شکل‌های 9 و 10" نشان می‌دهد تأثیری که تغییر طول مانع بر اختلاط دارد در حالتی که زتاپتانسیل همگن است، بسیار کمتر از حالتی است که ناهمگنی در زتاپتانسیل وجود دارد. البته مشاهده می‌شود که در هر حال افزایش طول مانع بر بازده اختلاط اثر مطلوب دارد، گرچه این تأثیر در حالتی که ناهمگنی در زتاپتانسیل وجود دارد بیشتر محسوس است. همچنین تأثیری که وجود یا عدم وجود ناهمگنی زتاپتانسیل روی سطح موانع درون کانال، در حالت کلی بر راندمان اختلاط دارد از مقایسه‌ی "شکل‌های 9 و 10" قابل دریافت است.



**Fig. 10** Mixing efficiency along the channel for various lengths of the obstacle when  $\zeta$ -potential is homogeneous

شکل 10 بازده اختلاط در طول کانال برای مقادیر مختلف از طول مانع هنگامی که زتاپتانسیل همگن است

از برآیند نتایج به دست آمده در بخش‌های 1-4 و 2-4 می‌توان به این نتیجه رسید که مقادیر بیشتر از شاخص رفتار سیال ( $n$ ) و گرادیان فشار مخالف، راندمان اختلاط به دست آمده را بهبود می‌بخشند، در حالی که مقادیر  $n$  کوچکتر و همچنین گرادیان فشار موافق موجب کاهش راندمان اختلاط می‌شوند. به منظور نمایش بهتر این نتیجه‌گیری، مقادیر به دست آمده برای راندمان اختلاط در انتهای کانال به ازای مقادیر مختلف از پارامترهای  $n$  و  $\Gamma$  به صورت یک رویه رسم شده و در "شکل 8" به نمایش درآمده است:

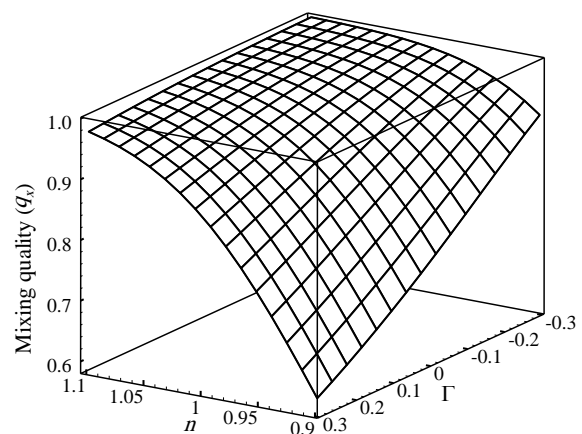
### 3-4- بررسی تأثیر پارامترهای هندسی مانع بر اختلاط

تأثیری که پارامترهای هندسی موانع بر رفتار اختلاط دارند، می‌تواند بسیار حائز اهمیت باشد، چرا که استفاده از موانع در مسیر کانال از جمله روش‌های غیرفعال بسیار رایج در زمینه‌ی بهبود اختلاط می‌باشد. بنابراین تأثیری که ویژگی‌های هندسی موانع به کار رفته، بر اختلاط دارد بسیار مهم تلقی می‌گردد. به همین دلیل دو پارامتر هندسی طول مانع و ارتفاع مانع از نقطه نظر تغییراتی که در اختلاط ایجاد می‌کنند مورد بررسی قرار می‌گیرند.

### 4-3-1- اثر طول مانع بر اختلاط

در این قسمت تغییرات بازده اختلاط در مقادیر مختلف از طول مانع ( $L_H$ ) مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات طول مانع در حالی صورت می‌گیرد که مانع همواره در وسط کانال قرار دارد و دارای ارتفاع ثابت برابر با  $0.2H$  می‌باشد. طول مانع طی چند مرحله به تدریج کاهش می‌یابد تا اثری که بر بازده اختلاط ایجاد می‌کند، نمایان گردد. "شکل 9" نتایج به دست آمده برای راندمان اختلاط را در چند مقدار مختلف از طول مانع و در حالی که زتاپتانسیل روی مانع‌ها نسبت به زتاپتانسیل دیواره‌های کانال دارای ناهمگنی می‌باشد، نشان می‌دهد.

نمودارهای رسم شده در "شکل 9" بیانگر این موضوع هستند که طول مانع بیشتر موجب اختلاط بهتر می‌گردد. در حالت بررسی شده، به تبع این که طول مانع افزایش می‌یابد، طول قطعه‌های ناهمگنی قرار گرفته روی مانع‌ها نیز افزایش می‌یابد و این امر خود موجب بهبود بازده اختلاط می‌گردد، چرا که ناحیه‌های ایجاد کننده‌ی گردابه در جریان (شکل 4) طول بیشتری پیدا کرده و به همین جهت اختلاط بهتر صورت می‌گیرد.



**Fig. 8** Mixing efficiency at the end of channel for various values of  $n$  and  $\Gamma$ , as a surface

شکل 8 نمایش بازده اختلاط در انتهای کانال به ازای مقادیر مختلف از پارامترهای  $n$  و  $\Gamma$  به صورت یک رویه



- [4] S. Bera, S. Bhattacharyya, On mixed electroosmotic-pressure driven flow and mass transport in microchannels, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 62, pp. 165-176, 2013.
- [5] Z. Wu, D. Li, Mixing and flow regulating by induced-charge electrokinetic flow in a microchannel with a pair of conducting triangle hurdles, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 5, No. 1, pp. 65-76, 2007.
- [6] E. Biddiss, D. Erickson, D. Li, Heterogeneous surface charge enhanced micromixing for electrokinetic flows, *Anal Chem*, Vol. 76, No. 11, pp. 3208-13, Jun 01 2004.
- [7] J. T. Yang, W. F. Fang, K.-Y. Tung, Fluids mixing in devices with connected-groove channels, *Chemical Engineering Science*, Vol. 63, No. 7, pp. 1871-1881, 2008.
- [8] A. A. S. Bhagat, E. T. K. Peterson, I. Papautsky, A passive planar micromixer with obstructions for mixing at low Reynolds numbers, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 1017-1024, 2007.
- [9] S. Bhattacharyya, S. Bera, Nonlinear Electroosmosis Pressure-Driven Flow in a Wide Microchannel With Patchwise Surface Heterogeneity, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 135, No. 2, pp. 021303-021303-12, 2013.
- [10] A. Afzal, K.-Y. Kim, Flow and mixing analysis of non-Newtonian fluids in straight and serpentine microchannels, *Chemical Engineering Science*, Vol. 116, pp. 263-274, 2014.
- [11] Y. Zhuang, Q. Zhu, Numerical Study of Mixed Electroosmotic/Pressure Driven Flow of Power-law Fluids in T-shaped Microchannels, *Procedia Engineering*, Vol. 126, pp. 740-744, 2015.
- [12] C. C. Cho, C. L. Chen, C. o. K. Chen, Mixing enhancement of electrokinetically-driven non-Newtonian fluids in microchannel with patterned blocks, *Chemical Engineering Journal*, Vol. 191, pp. 132-140, 2012.
- [13] M. Wautelet, Scaling laws in the macro-, micro- and nanoworlds, *European Journal of Physics*, Vol. 22, No. 6, pp. 601-611, 2001.
- [14] D. Erickson, in *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*, Eds., pp. 560-567, Boston: Springer US, 2008.
- [15] W. M. Deen, *Analysis of transport phenomena*, pp. 230-232, New York: Oxford University Press, 1998.
- [16] M. K. Dehghan Manshadi, D. Khojasteh, M. Mohammadi, R. Kamali, Electroosmotic micropump for lab-on-a-chip biomedical applications, *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 29, No. 5, pp. 845-858, 2016.
- [17] M. A. Vakili, A. Sadeghi, M. H. Saidi, Pressure effects on electroosmotic flow of power-law fluids in rectangular microchannels, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 28, No. 4, pp. 409-426, 2014.
- [18] L. Chen, A. T. Conlisk, Effect of nonuniform surface potential on electroosmotic flow at large applied electric field strength, *Biomed Microdevices*, Vol. 11, No. 1, pp. 251-8, Feb 2009.
- [19] S. Bhattacharyya, A. K. Nayak, Combined Effect of Surface Roughness and Heterogeneity of Wall Potential on Electroosmosis in Microfluidic/Nanofluidic Channels, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 132, No. 4, pp. 041103-041103-11, 2010.
- [20] S. Sarkar, S. Ganguly, P. Dutta, Thermally developing combined magnetohydrodynamic and electrokinetic transport in narrow confinements with interfacial slip, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 100, pp. 451-463, 2016.
- [21] M. Hadigol, R. Nosrati, A. Nourbakhsh, M. Raisee, Numerical study of electroosmotic micromixing of non-Newtonian fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 166, No. 17-18, pp. 965-971, 2011.
- [22] T. W. H. Sheu, Y. G. Bhumkar, S. T. Yuan, S. C. Syue, Development of a High-Resolution Scheme for Solving the PNP-NS Equations in Curved Channels, *Communications in Computational Physics*, Vol. 19, No. 2, pp. 496-533, 2016.
- [23] S. A. Mirbozorgi, H. Niazmand, M. Renssizbulut, Electro-Osmotic Flow in Reservoir-Connected Flat Microchannels With Non-Uniform Zeta Potential, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 128, No. 6, pp. 1133-1143, 2006.
- [24] Z. Yousefian, M. Hassan Saidi, Mass transport analysis of non-Newtonian fluids under combined electroosmotically and pressure driven flow in rectangular microreactors, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, Vol. 508, pp. 345-359, 2016.

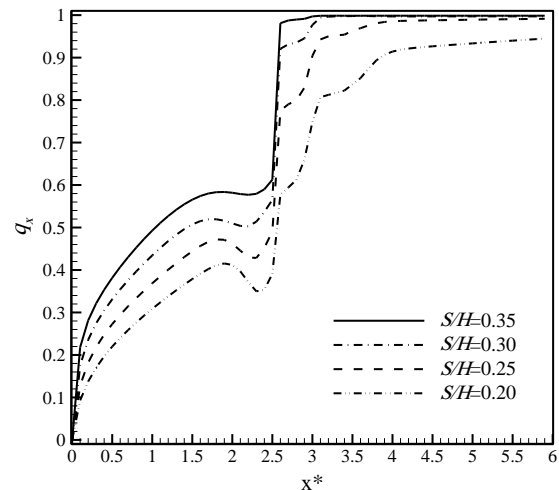


Fig. 11 Mixing efficiency along the channel for various heights of obstacles

شکل 11 بازده اختلاط در طول کانال برای مقادیر مختلف از ارتفاع موانع

#### 4-3-2- اثر ارتفاع مانع بر اختلاط

ارتفاع مانع‌ها که توسط پارامتر  $k$  معرفی گردید دیگر پارامتر هندسی مانع‌های مستطیلی در کانال می‌باشد که مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مقادیر به دست آمده برای بازده اختلاط در طول کانال در چند مقدار مختلف از پارامتر  $k$  و در حالی که طول مانع و سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته شده‌اند، در "شکل 11" رسم شده‌اند.

روند ظاهر شده در "شکل 11" نشان می‌دهد که با افزایش ارتفاع مانع‌ها در کانال، اختلاط بهبود می‌یابد. توجیه قابل ارائه در این باره بر مبنای دبی جرمی عبوری توصیف می‌گردد. به این صورت که هر قدر ارتفاع مانع‌ها در کانال افزایش یابد، دبی جرمی عبوری از کانال کاهش یافته و از این رو سیال به زمان بیشتری برای اختلاط دست پیدا می‌کند و راندمان اختلاط بهبود پیدا می‌کند.

#### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، شبیه‌سازی عددی دو بعدی اختلاط در جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک/فشار محرک صورت گرفت. با در نظر گرفتن رفتار غیرنیوتونی سیال، تأثیر پارامترهای مختلفی بر کیفیت اختلاط مورد ارزیابی قرار گرفت و مشخص شد که اعمال گرادیان فشار مخالف، موانع با طول و ارتفاع بیشتر و همچنین رفتار دیلاتنتی سیال موجب بهبود کیفیت اختلاط در کانال می‌گردد. البته مشخص شد که تأثیر طول موانع بر اختلاط در حالتی که زتاپتانسیل روی سطح موانع همگن باشد، کمتر از حالتی خواهد بود که سطح موانع دارای زتاپتانسیل ناهمگن باشد.

#### 6- مراجع

- [1] R. J. Hunter, *Zeta potential in colloid science: principles and applications*, pp. 33-46, London; New York: Academic Press, 1981.
- [2] A. Ahmadian Yazdi, A. Sadeghi, M. H. Saidi, Electrokinetic mixing at high zeta potentials: ionic size effects on cross stream diffusion, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 442, pp. 8-14, Mar 15, 2015.
- [3] A. Babaie, M. H. Saidi, A. Sadeghi, Heat transfer characteristics of mixed electroosmotic and pressure driven flow of power-law fluids in a slit microchannel, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 53, pp. 71-79, 2012.

- fluids in an electro-osmotic micro-mixer, *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, Vol. 107, pp. 11-20, 2016.
- [29] C. Zhao, E. Zholkovskij, J. H. Masliyah, C. Yang, Analysis of electroosmotic flow of power-law fluids in a slit microchannel, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 326, No. 2, pp. 503-10, Oct 15, 2008.
- [30] A. M. Afonso, L. L. Ferrás, J. M. Nóbrega, M. A. Alves, F. T. Pinho, Pressure-driven electrokinetic slip flows of viscoelastic fluids in hydrophobic microchannels, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 16, No. 6, pp. 1131-1142, 2013.
- [25] J. S. H. Lee, C. L. Ren, D. Li, Effects of surface heterogeneity on flow circulation in electroosmotic flow in microchannels, *Analytica Chimica Acta*, Vol. 530, No. 2, pp. 273-282, 2005.
- [26] S. Bhattacharyya, S. Bera, Combined electroosmosis-pressure driven flow and mixing in a microchannel with surface heterogeneity, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 15, pp. 4337-4350, 2015.
- [27] R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, *Transport phenomena*, Second Edition, pp. 241-243, New York: J. Wiley, 2002.
- [28] A. Shamloo, M. Mirzakhani, M. R. Dabirzadeh, Numerical Simulation for efficient mixing of Newtonian and non-Newtonian