



## تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانورق مستطیلی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی

احسان عبدالله زاده شهربابکی<sup>1</sup>، اکبر علی بیگلوی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی 143-14115، abeigloo@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 تیر 1394

پذیرش: 21 شهریور 1394

ارائه در سایت: 11 مهر 1394

کلید واژگان:

سه بعدی

ارتعاشات

الاستیسیته غیرمحلی

نانورق

### چکیده

در روش‌های متداول ریتز و گلرکین بر اساس تئوری الاستیسیته محلی، معمولاً از چند جمله‌ای به عنوان توابع تقریب استفاده می‌شود. اما این روش‌ها برای استفاده در تحلیل غیرمحلی سه بعدی مناسب نیستند. در مطالعه حاضر برای غلبه بر این مشکل نوعی راهبرد باقی‌مانده وزنی، با توابع مثلثاتی به عنوان توابع تقریب مناسب تأثیر تکیه‌گاه‌های مختلف در رفتار فرکانسی نانو ورق بررسی شده است. اعتبار سنجی فرمول‌بندی حاضر از طریق مقایسه نتایج عددی حاصل با نتایج ارائه شده در مقالات انجام پذیرفته است. طبق نتایج عددی حاصل، رفتار فرکانسی نانو ورق قویاً متأثر از پارامتر غیر محلی بوده و این اثر در مودهای ارتعاشی بالا به دلیل کوچک بودن طول موج مود از اهمیت بالایی برخوردار است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تفاوت فاحشی بین رفتار جواب مدل سه بعدی نانورق و مدل دو بعدی آن وجود دارد و همچنین اختلاف پاسخ تحلیل دو و سه بعدی در این حد در الاستیسیته کلاسیک بارز نیست. همچنین تأثیرات نسبت طول به ضخامت، نسبت ابعادی، پارامتر غیرمحلی، و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی پایه نانورق مورد مطالعه قرار گرفته است. این حل مرجع می‌تواند برای تخمین دقت تئوریهای دو بعدی مرسوم مورد استفاده قرار گیرد.

## Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity

Ehsan Abdollahzadeh Shahrababaki, Akbar Alibeigloo\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 14115-143 Tehran, Iran, abeigloo@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 20 July 2015  
Accepted 12 September 2015  
Available Online 03 October 2015

**Keywords:**  
Three-dimensional  
Vibration  
Nonlocal Elasticity  
Nanoplate

### ABSTRACT

Conventional Ritz and Galerkin methods based on local theory of elasticity employ polynomials as their approximating functions, however these methods are not convenient to use in three-dimensional nonlocal analysis. In the present study, to conquer this difficulty, a type of weighted residual approach with a set of trigonometric approximating functions was developed. By using appropriate trigonometric approximating functions it is possible to consider the effect of various edges boundary conditions on frequency behavior of nanoplate. Validation of present formulation is carried out by comparing numerical result with the published results. It is concluded that the effect of nonlocal parameter on natural frequencies is significant, especially in higher modes due to the lower wavelength of the mode. The research shows that in nonlocal elasticity there are distinct discrepancies between behaviors of two and three-dimensional results. In addition, the difference between the two- and three-dimensional results in local elasticity is not as noticeable as in nonlocal elasticity. Furthermore, the effects of length to thickness ratio, aspect ratio, nonlocal parameter and different boundary conditions on fundamental natural frequency of nanoplates were studied. This benchmark solution can be used to assess the accuracy of conventional two-dimensional theories.

### 1- مقدمه

انرژی، در مورد الاستیسیته غیرمحلی نیاز به اصلاحات دارد تا در مقیاس نانو بکار برده شوند. در تحلیل سازه‌های نانو به دلیل پرهزینه بودن روش‌های تجربی و زمان‌بر بودن روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، تحلیل‌گران به بررسی تحلیلی در شرایط مرزی و هندسه‌های ساده روی آورده‌اند. این تحلیل‌ها معمولاً به حالت‌های یک و یا دو بعدی محدود می‌شود. باید توجه داشت که تحلیل دو و سه بعدی الاستیسیته غیرمحلی، بطور قابل ملاحظه‌ای

ریشه‌های پیدایش الاستیسیته غیرمحلی را می‌توان در سال 1967 جستجو کرد. این نوع الاستیسیته برای توصیف معادلات حاکم بر جسم الاستیک، هنگامی که در ابعاد نزدیک به شبکه مولکولی هستند بکار می‌رود و این اندازه ابعاد مرز تمایز تئوری‌های دینامیک شبکه و الاستیسیته معمولی است. روش‌های متداول حل در الاستیسیته معمولی از قبیل المان محدود، و روش

Please cite this article using:

E. Abdollahzadeh Shahrababaki, A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

E. Abdollahzadeh Shahrababaki, A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015 (In Persian)

نتایج متفاوتی دارد که این مسأله در این حد در الاستیسیته کلاسیک دیده نمی‌شود.

ارینگن در سال 1983 [1] یک فرم دیفرانسیلی برای معادله رفتاری جامد الاستیک بر اساس الاستیسیته غیرمحلّی ارائه نمود. پولیزوتو [2] اثبات کرد که قانون حداقل انرژی پتانسیل، در مورد مسائل استاتیکی در الاستیسیته غیرمحلّی نیز قابل اعمال است. آقابابایی و ردی [3] ارتعاشات آزاد ورق با فرمول‌بندی درجات بالا با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی را بررسی کردند. پرادهان و فدیکار [4] یک تحلیل پارامتری برای رفتار ارتعاشی نانورق کلاسیک و تغییر فرم برشی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام دادند. مورمو و پرادهان [5] روش جداسازی متغیرها را برای یافتن یک حل تحلیلی برای ارتعاشات درون صفحه ورق کرشهوف با دو تکیه‌گاه ساده و دو تکیه‌گاه دلخواه بکار بردند. پرادهان و مورمو [6] روش مربعات تفاضلی (DQ) دو بعدی را برای تحلیل کماتش ورق کرشهوف مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده استفاده کردند. شن و همکاران [7] با تکنیک آشفستگی دو گامی ارتعاشات آزاد غیر خطی نانورق کلاسیک با تکیه‌گاه ساده در محیط گرمایی را مطالعه کردند. بر اساس فرمول بندی حساب تغییرات، فدیکار و پرادهان [8] از طریق المان محدود، کماتش و خمش و ارتعاشات آزاد نانوتیر اویلر برنولی و نانورق کرشهوف را بررسی نمودند. لازم به ذکر است که این مقاله نقطه عطفی در بکارگیری المان محدود در الاستیسیته غیر محلّی بود. جمعه‌زاده و سعیدی [9] با غیر کوپل نمودن معادلات الاستیسیته غیرمحلّی سه بعدی، حل تحلیلی ارتعاشات آزاد سه بعدی نانورق با تکیه‌گاه‌های ساده را ارائه کردند. پرادهان و کومار [10] ارتعاشات آزاد نانورق کرشهوف ارتوتروپیک با شرایط مرزی مختلف (تکیه‌گاه ساده و گیردار) را با استفاده از روش عددی DQ دو بعدی مورد مطالعه قرار دادند. انصاری و همکاران [11] با استفاده از فرمول‌بندی رینسلر-میندلین به همراه روش DQ دو بعدی، به تحلیل ارتعاشات ورق گرافن چند لایه با شرایط مرزی مختلف (تکیه‌گاه ساده و گیردار) پرداختند. نازندر [12] مدل دو متغیره نانورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را در تحلیل کماتش مورد استفاده قرار داد. شوارتز و همکاران [13] بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و استفاده از روش المان مرزی رفتار خمشی سه بعدی نانورق را بررسی کردند. علی بیگلر [14] حل ارتعاشات آزاد سه بعدی ورق چند لایه گرافن، قرار گرفته در محیط الاستیک، را ارائه نمود. علی بیگلر و پاشا زانوسی [15] تئوری الاستیسیته غیرمحلّی را برای مطالعه رفتار خمشی نانورق سه بعدی با تکیه‌گاه ساده بکار گرفتند. آنها در راستای مختصات ضخامتی، تکنیک فضای حالت را استفاده کردند. فرج پور و همکاران [16] روش DQ را در بحث کماتش نانورق کرشهوف ارتوتروپیک با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار اعمال کردند. آنها نانورق را تحت تأثیر بار درون صفحه بصورت خطی متغیر فرض نمودند. قربانپور ارانی و همکاران [17] کنترل هوشمند کماتش ورق تک لایه گرافن با تکیه‌گاه ساده بر اساس مدل رینسلر-میندلین را بررسی نمودند. انصاری و همکاران [18] پتانسیل‌های بین اتمی را برای محاسبه ثوابت ماده یک ورق گرافن بکار گرفتند، و کماتش و ارتعاشات ورق کرشهوف با تکیه‌گاه ساده را با این ثوابت مطالعه کردند. بر اساس تئوری دو متغیره اصلاح شده، ملک زاده و شجاعی [19] با استفاده از روش DQ، ارتعاشات نانورق با (یا تکیه‌گاه ساده و گیردار) را بررسی کردند. خمش غیرخطی نانورق دو لایه با تکیه‌گاه ساده تحت بار عمودی در محیط گرمایی توسط زو و همکاران [20] ارائه شد. تحلیل کماتش و حساسیت سنجی نانورق ارتوتروپیک با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده توسط رادبه و ادلی [21] انجام

شد. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، الزهرانی و همکاران [22] تحلیل استاتیکی ورق تک لایه گرافن با تکیه‌گاه‌های ساده بر روی بستر وینکلر-پسترناک و تحت بارهای همزمان مکانیکی-حرارتی-رطوبتی را به انجام رساندند.

طبق بررسی‌های انجام شده مشخص شد که تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های متفاوت تاکنون ارائه نشده است و این تحلیل در مقاله حاضر ارائه می‌شود. هدف این مقاله پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی نانورق با استفاده از نوعی روش باقی‌مانده وزنی برای گسترش تحلیل‌های الاستیسیته غیرمحلّی به سه بعد است. حل این مسأله تاکنون فقط برای تکیه‌گاه ساده انجام شده است که یکی از منابع صحت سنجی مقاله می‌باشد. در این تحقیق، ورق سه بعدی در نظر گرفته می‌شود و الاستیسیته خطی برای نوشتن کرنش‌ها بر حسب جابجایی‌ها بکار برده می‌شود. غیرمحلّی بودن الاستیسیته فرض دیگری است که رابطه رفتاری را تعیین می‌کند. در بخش نتایج، تأثیر پارامتر غیرمحلّی، شرایط مرزی مختلف، و نسبت‌های ابعادی نانورق بر فرکانس‌های طبیعی آن بررسی می‌شود. نتایج این پژوهش دید روشنی از تأثیر عدد موج بر فرکانس‌های طبیعی یک جامد با رفتار الاستیسیته غیرمحلّی بدست می‌دهد.

## 2- تئوری

### 2-1- الاستیسیته سه بعدی غیرمحلّی

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلّی، تنش غیرمحلّی،  $\sigma$ ، در هر نقطه در یک جامد تابع کرنش‌ها در تمام نقاط دیگر آن است و در این تئوری فقط معادله رفتاری با الاستیسیته کلاسیک متداول متفاوت است. در الاستیسیته غیرمحلّی جزء اضافی و متفاوت معادله رفتاری به شکل (1) است [23].

$$\sigma_{ij} = \int_V K(|\bar{x} - x|, \tau) t_{ij}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  مؤلفه‌های تنسور تنش غیرمحلّی هستند. همچنین تابع هسته به شکل  $K(|\bar{x} - x|, \tau)$  نماینده مدول غیرمحلّی است.  $|\bar{x} - x|$  فاصله در نرم اقلیدوسی است و  $\tau$  یک ثابت ماده تعریف شده که به طول‌های مشخصه داخلی و خارجی (به ترتیب مانند فواصل شبکه کریستالی و طول موج) بستگی دارد [23]. بعلاوه  $t_{ij}(\bar{x})$  مؤلفه‌های تنسور تنش ماکروسکوپی در نقطه‌ی  $x$  با مختصات  $x$  برای ماده ایزوتروپیک بصورت رابطه (2) نوشته می‌شود [24]:

$$\begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = [C] \varepsilon \quad (2)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  به ترتیب ثوابت لامه و مدول برشی هستند و  $[C]$  ماتریس سفتی الاستیسیته است. همچنین  $\varepsilon_{ij}$  مؤلفه‌های تنسور کرنش هستند. مشابه الاستیسیته غیرمحلّی رابطه کرنش-جابجایی، در مختصات کارتزین به شکل رابطه (3) است [24].

که در رابطه (8) ملاحظه می‌شود به طول موج ترم‌های میدان جابجایی ربط دارد. لازم به یادآوری است که استفاده از توابع تقریب مثلثاتی (اگرچه به همراه ترم‌های جبری) در راستای ضخامت بی سابقه نیست و این نوع مدل ورق، تئوری ورق سینوسی خوانده می‌شود [26,25].

### 2-3- فرمول‌بندی مسأله و حل آن

نانورق مستطیلی بطول  $a$ ، عرض  $b$ ، و ضخامت  $h$  در دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل 1 فرض می‌شود. در روش باقی‌مانده وزنی در پژوهش حاضر، ابتدا طرفین سه معادله (6) در حالت نیروهای جسمی صفر به ترتیب در  $U$  و  $V$  و  $W$  ضرب می‌شود سپس معادلات حاصل با هم جمع می‌شود. نهایتاً یک معادله بدست می‌آید و از دو طرف آن در روی کل حجم ورق انتگرال‌گیری انجام می‌شود.

$$\frac{1}{2} \iiint_V t_{ij} u_i dV = \frac{1}{2} \iiint_V u_i (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{u}_i) dV \quad (9)$$

در قدم بعدی با اعمال انتگرال جز به جز به سمت چپ معادله انتگرالی حاصل، به روش کتاب الاستیسیته [24] که برای رسیدن از فرم نیوتنی به فرم انرژی استفاده شده است، انرژی پتانسیل کرنشی کل ورق بر اساس تنش محلی بعلاوه ترم شرایط مرزی بصورت رابطه (10) بدست می‌آید.

$$-\frac{1}{2} \iiint_V t_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \iint_B u_i t_{ij} s_j ds = \frac{1}{2} \iiint_V u_i (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{u}_i) dV \quad (10)$$

که در آن  $T_j = t_{ij} s_j$  مؤلفه‌های نیروی کشش محلی بر سطح مرز و  $s_j$  کسینوس‌های هادی بردار عمود بر سطح مرز هستند. ترم شرط مرزی در معادله (10) در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد برای حالت‌های کشش صفر (آزاد تئوری سه بعدی) یا جابجایی صفر (گیردار تئوری سه بعدی) از بین می‌رود (حالت نیروی معین شامل بحث فعلی نیست).

برای اثبات این مطلب ابتدا ذکر این نکته ضروریست که می‌توان ثابت کرد در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد، هر فرکانسی که  $\sigma_{ij} s_j$  را صفر کند  $t_{ij} s_j$  را نیز صفر می‌کند و بالعکس.

اثبات صفر بودن ترم شرط مرزی این است که اگر جابجایی صفر باشد مشخصاً ترم صفر می‌شود و در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد، اگر کشش غیر محلی صفر باشد ( $T_j = \sigma_{ij} s_j = 0$ ) کشش محلی نیز صفر می‌شود ( $t_{ij} s_j = 0$ ) و به طبع آن ترم شرط مرزی صفر می‌شود. پس مادامی که قصد پیدا کردن بردارهای ویژه نباشد و فقط فرکانس طبیعی مد نظر باشد در آخرین مرحله حل، معادله (10) بدون ترم مرزی که صفر شده است، با در نظر داشتن کمیت‌های فیزیکی (11) بی بعد می‌شود.

$$X = \frac{2x}{a}, Y = \frac{2y}{b}, Z = \frac{2z}{h}, U = \frac{u}{h}, V = \frac{v}{h}, W = \frac{w}{h}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{ab}{h^2} \varepsilon_{ij}, \beta^* = \frac{\beta}{h^2} = e_0^2 \left( \frac{\bar{a}}{h} \right)^2$$

بی بعد شده سمت راست معادله (10) را می‌توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$\frac{1}{2} \iiint_V u_i (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{u}_i) dV = \frac{\rho h^3 ab}{16} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( U \left( 1 - \beta^* \left( \left( \frac{2h}{a} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \left( \frac{2h}{b} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \right) \ddot{U} + \right.$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

بطوری که  $U$  و  $V$  و  $W$  به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای  $X$  و  $Y$  و  $Z$  هستند. معادله حرکت برای تئوری‌های الاستیسیته غیرمحل و کلاسیک یکسان و به قرار (4) است.

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = \rho \ddot{u} - F_x, \quad (4)$$

$$\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} = \rho \ddot{v} - F_y,$$

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} = \rho \ddot{w} - F_z$$

که در آن  $F_x$  و  $F_y$  و  $F_z$  به ترتیب مؤلفه‌های نیرو در راستاهای  $X$  و  $Y$  و  $Z$  هستند و  $\rho$  چگالی ماده است. همچنین نقطه بالای هر پارامتر به معنای مشتق نسبت به زمان است. ارینگن [1] نشان داد که رابطه (1)، معادل معادله دیفرانسیلی بصورت (5) می‌باشد.

$$(1 - \beta \nabla^2) \sigma_{ij} = \Gamma(\sigma_{ij}) = t_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad (5)$$

که  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  عملگر لاپلاس است و  $\beta = (\bar{a} e_0)^2$  پارامتر غیرمحل نام دارد. در آن  $\bar{a}$  طول مشخصه‌ای از ماده، مثلاً فواصل شبکه کریستالی، است [23]. نماد  $\Gamma$  را می‌توان عملگر غیرمحل نامید. با اعمال عملگر غیرمحل بر دو طرف روابط (4) و استفاده از رابطه (5) می‌توان روابط (6) را نوشت:

$$t_{xx,x} + t_{xy,y} + t_{xz,z} = (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{u} - F_x) \quad (6-الف)$$

$$t_{yx,x} + t_{yy,y} + t_{yz,z} = (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{v} - F_y) \quad (6-ب)$$

$$t_{zx,x} + t_{zy,y} + t_{zz,z} = (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{w} - F_z) \quad (6-ج)$$

در غیاب نیروهای جسمی جایگذاری روابط (2) و (3) در رابطه (6)، معادلات برداری حاکم بر حرکت بر حسب جابجایی‌ها در الاستیسیته سه‌بعدی غیرمحل برای ماده همسانگرد را به صورت (7) نتیجه می‌دهد.

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) = (1 - \beta \nabla^2) (\rho \ddot{u}) \quad (7)$$

که در آن بردار میدان جابجایی است و بردار گرادینان بصورت  $\bar{\nabla} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$  است.

### 2-2- توابع تقریب مثلثاتی

نظر به اینکه که عملگر غیرمحل در توابع مثلثاتی و نمایی مانند یک ضرب عمل می‌کند یعنی:

$$\Gamma(\sin(p_x x) \sin(p_y y) \sin(p_z z)) = (1 + \beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)) \sin(p_x x) \sin(p_y y) \sin(p_z z) \quad (8-الف)$$

پس معکوس عملگر غیرمحل بر چنین توابعی بصورت زیر عمل خواهد کرد

$$\Gamma^{-1}(\sin(p_x x) \sin(p_y y) \sin(p_z z)) = (1 + \beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2))^{-1} \sin(p_x x) \sin(p_y y) \sin(p_z z) \quad (8-ب)$$

به طوری که دیده می‌شود، اگر میدان جابجایی با توابع مثلثاتی تقریب زده شود، می‌توان نتیجه گرفت که عملگر غیرمحل در روابط (5-7) ساده‌تر می‌شود و بصورت یک سری ضرایب جبری در می‌آید. این ضرایب همان‌طور

و  $P_i(X_j)$  ترم‌های توابع تقریب هستند. با توجه به شرایط مرزی، سه مجموعه توابع، بصورت زیر بکار گرفته می‌شوند. لازم به تذکر است اولین انتخاب از هر فرمول برای حالت متقارن و دومین انتخاب برای حالت نامتقارن مود است.

الف. برای راستای ضخامت با توجه به اینکه در دو سطح بالا و پایین ورق شرط مرزی کشش صفر حاکم است لذا برای هر سه  $U$  و  $V$  و  $W$  می‌توان از رابطه (16) استفاده نمود.

$$P_k(Z) = \begin{cases} \cos\left(\frac{k\pi Z}{2}\right) \\ \sin\left((k+1)\frac{\pi Z}{2}\right) \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots \quad (16)$$

ب. در شرایط مرزی دوسرگیردار در هر راستایی که باشد، برای هر سه  $U$  و  $V$  و  $W$  از رابطه (17) استفاده می‌شود.

$$P_i(X_j) = \begin{cases} \cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X_j\right) \\ \sin\left((i+1)\pi X_j\right) \end{cases} \quad i=0,1,2,\dots \quad (17)$$

ج. در شرط مرزی تکیه‌گاه ساده سه بعدی، برای مثال اگر در راستای  $X$  باشد، برای  $V$  و  $W$  می‌توان رابطه (18-الف) را نوشت.

$$P_i^L(X) = \begin{cases} \cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X\right) \\ \sin\left((i+1)\pi X\right) \end{cases} \quad i=0,1,2,\dots \quad (18-الف)$$

و به همین ترتیب برای  $U$  از رابطه (18-ب) استفاده می‌شود.

$$P_i^A(X) = \begin{cases} \sin\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X\right) \\ \cos\left((i+1)\pi X\right) \end{cases} \quad i=0,1,2,\dots \quad (18-ب)$$

جایگذاری معادلات (15) تا (18) در معادلات (11) و (12) و حداقل‌یابی برای باقی‌مانده‌ها به مساله مقدار ویژه به رابطه (19) منجر می‌شود.

$$[K]\{A^*\} - \omega^2[\chi][M]\{A^*\} = 0 \quad (19)$$

که در آن  $\omega = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق

است، در حالی که  $\{A^*\}$  برداری از ضرایب مجهول  $A_{rst}^w$  و  $A_{lmq}^v$  و  $A_{ijk}^u$  است.  $[K]$  و  $[M]$ ، ماتریس‌های سفتی و جرم نانوورق هستند. بر اساس انرژی پتانسیل کرنشی محلی و جنبشی ورق، مؤلفه‌های این دو به شکل روابط (20) بدست می‌آیند.

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_i^* \partial A_j^*} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C_{ijkm}^* \varepsilon_{km}^* \varepsilon_{ij}^* dXdYdZ \quad (20-الف)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A_i^* \partial A_j^*} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (U^2 + V^2 + W^2) dXdYdZ \quad (20-ب)$$

چون تمام توابع تقریب، مثلثاتی هستند، لذا اعمال عملگر غیر محلی بر هر ترم، تنها به یک ضریب منجر می‌شود.  $[\chi]$  ماتریس قطری از این ضرایب است که مؤلفه‌های قطر اصلی آن بصورت رابطه (21) معرفی می‌شود.

$$\chi_{ii} = 1 + \pi^2 \beta^* \left( (n_i)^2 \left(\frac{h}{a}\right)^2 + (m_i)^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 + (k_i)^2 \right) \quad (21)$$

به طوری که  $n_i/(2a)$  و  $m_i/(2b)$  و  $k_i/(2h)$  اعداد موج ترم  $i$ ام تابع تقریب، در سه راستای مختصات اصلی هستند. حل غیر صفر برای معادله (19) منجر به معادله جبری (22) می‌شود.

$$[K] - \omega^2[\chi][M] = 0 \quad (22)$$

$$V \left( 1 - \beta^* \left( \left(\frac{2h}{a}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \left(\frac{2h}{b}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \right) \dot{V} + W \left( 1 - \beta^* \left( \left(\frac{2h}{a}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \left(\frac{2h}{b}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + 2^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \right) \dot{W} dV \quad (12)$$

پارامتر غیرمحل  $\beta^* = e_0^2 (\bar{a}/h)^2$ ، در رابطه بالا شامل نسبت طول مشخصه ماده به طول مشخصه (در اینجا ضخامت) نانوورق است. سمت چپ معادله (10) هم که انرژی کرنشی، بر اساس تنش محلی نانوورق است، برای ماده ارتوتروپیک در مختصات مادی بصورت بی بعد (13) می‌باشد.

$$\frac{1}{2} \iiint_V t_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{h^5 E}{16(ab)} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 C_{11}^* (\varepsilon_{xx}^*)^2 + C_{22}^* (\varepsilon_{yy}^*)^2 + C_{33}^* (\varepsilon_{zz}^*)^2 dV + \frac{h^5 E}{16(ab)} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 4 \left( C_{44}^* (\varepsilon_{yz}^*)^2 + C_{55}^* (\varepsilon_{xz}^*)^2 + C_{66}^* (\varepsilon_{xy}^*)^2 \right) dV + \frac{h^5 E}{16(ab)} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \left[ C_{12}^* (\varepsilon_{xx}^* \varepsilon_{yy}^*) + C_{13}^* (\varepsilon_{xx}^* \varepsilon_{zz}^*) + C_{23}^* (\varepsilon_{yy}^* \varepsilon_{zz}^*) \right] dV \quad (13)$$

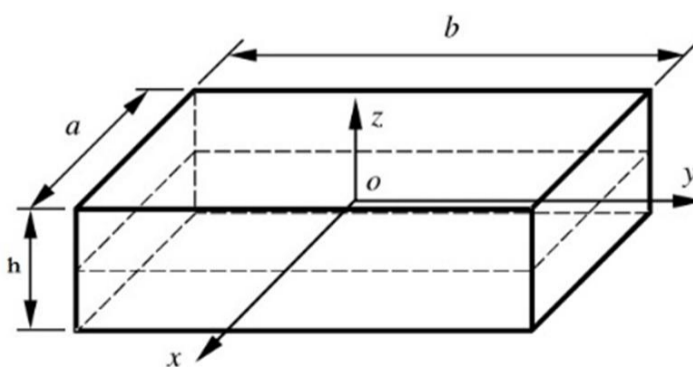
که در آن روابط (14) برقرارند.

$$\varepsilon_{yy}^* = \frac{2a}{h} \frac{\partial V}{\partial Y}, \varepsilon_{zz}^* = \frac{2ab}{h^2} \frac{\partial W}{\partial Z}, \varepsilon_{xx}^* = \frac{2b}{h} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \varepsilon_{yz}^* = \frac{a}{h} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{b}{h} \frac{\partial V}{\partial Z} \right), \varepsilon_{xz}^* = \frac{b}{h} \left( \frac{a}{h} \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} \right), \\ \varepsilon_{xy}^* = \left( \frac{a}{h} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{b}{h} \frac{\partial V}{\partial X} \right) \quad (14)$$

و  $C_{ij}^* = C_{ij}/E$  ماتریس سفتی الاستیسیته بی بعد است. میدان جابجایی با مجموعه توابع تقریب مثلثاتی (15) جایگزین می‌شود

$$U = \sum_{k=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \sum_{i=0}^{n_z} A_{ijk}^u P_i(X) P_j(Y) P_k(Z) \exp(i\omega t), \\ V = \sum_{q=0}^{n_x} \sum_{m=0}^{n_y} \sum_{l=0}^{n_z} A_{lmq}^v P_l(X) P_m(Y) P_q(Z) \exp(i\omega t), \\ W = \sum_{t=0}^{n_x} \sum_{s=0}^{n_y} \sum_{r=0}^{n_z} A_{rst}^w P_r(X) P_s(Y) P_t(Z) \exp(i\omega t) \quad (15)$$

که در آن  $A_{rst}^w$  و  $A_{lmq}^v$  و  $A_{ijk}^u$  ضرایبی هستند که با حداقل‌یابی تعیین می‌شوند و  $\omega$  فرکانس طبیعی نانوورق است. همچنین  $n_x$  و  $n_y$  و  $n_z$  تعداد ترم‌های مجموعه توابع تقریب، به ترتیب در راستاهای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$



شکل 1 هندسه و مختصات استفاده شده در تحلیل نانوورق

## 3- نتایج عددی و بحث

## 3-1- همگرایی

برای نشان دادن همگرایی پاسخها نتایج عددی 10 فرکانس طبیعی بی بعد اول در جدول 1 داده شده است. این نتایج برای مودهای متقارن متقارن نا متقارن (م م ن) به ترتیب در راستاهای  $X$  و  $Y$  و  $Z$  است. همانطور که دیده می شود همگرایی کند بوده که از خصوصیات استفاده از توابع مثلثاتی به عنوان توابع تقریب است. گرچه بکارگیری این توابع تقریب یک نکته مثبت دارد و آن اینکه انتگرال گیری از ترمهای آنها در روشهای مختلف می تواند بصورت دستی انجام شود.

## 3-2- صحت گذاری فرمول بندی

برای صحت سنجی روش حاضر، نتایج عددی برای 10 فرکانس طبیعی بی بعد اول یک ورق مربعی بصورت  $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  با دو نسبت طول به ضخامت مختلف در جدول 2 داده شده است. تکیه گاه ورق چهار طرف گیردار فرض شده و ورق در ابعاد کوچک نیست. از مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج مرجع [27] همخوانی خوبی بین پاسخها دیده می شود. در جدول 3 نتایج تحلیلی فرکانس پایه نانوورق با چهار تکیه گاه ساده آمده است. از مقایسه نتایج حاضر با نتایج مرجع [9] تطابق بسیار خوبی مشاهده می شود.

در انتها چون برای نانوورق در تحلیل سه بعدی مرجعی جز برای تکیه گاه ساده موجود نیست صحت سنجی برای تکیه گاههای دیگر با قیاس نتایج عددی منبع [28] برای مدل دوبعدی ورق با نتایج سه بعدی مطالعه حاضر در جدول 4 انجام می شود. تفاوتها بین دو سری جواب به دلیل دو بعدی بودن تئوری ورق در منبع [28] است که با افزایش پارامتر غیرمحل بی بعد تفاوت افزایش می یابد.

## 3-3- مطالعات پارامتری

در این قسمت تأثیرات عواملی مانند پارامتر بی بعد غیرمحل، نسبتهای ابعادی و طول به ضخامت، بر فرکانس طبیعی پایه بی بعد نانوورق در نمودارها مورد بررسی قرار می گیرد.

نمودار 2 فرکانس پایه بی بعد نانوورق مربعی با شرط مرزی چهار طرف گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت متفاوت را نشان می دهد. طبق شکل با افزایش نسبت طول به ضخامت این فرکانس به سمت عدد مشخصی که

جدول 1 همگرایی ده فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  ورق با شرط مرزی چهار طرف گیردار (دسته م م ن) با پارامترهای  $\beta^* = 0$  و  $\nu = 0/3$  و

| $a=b=10h$ |                         |                         |                         |                         |
|-----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| مود       | $8 \times 14 \times 14$ | $8 \times 22 \times 22$ | $8 \times 26 \times 26$ | $8 \times 28 \times 28$ |
| 1         | 9/9984                  | 9/9498                  | 9/9395                  | 9/9359                  |
| 2         | 31/565                  | 31/430                  | 31/403                  | 31/394                  |
| 3         | 31/871                  | 31/731                  | 31/703                  | 31/693                  |
| 4         | 48/230                  | 48/055                  | 48/021                  | 48/008                  |
| 5         | 62/842                  | 62/589                  | 62/542                  | 62/526                  |
| 6         | 63/007                  | 62/749                  | 62/701                  | 62/684                  |
| 7         | 75/296                  | 75/052                  | 75/006                  | 74/990                  |
| 8         | 75/805                  | 75/540                  | 75/490                  | 75/472                  |
| 9         | 98/063                  | 97/762                  | 97/706                  | 97/686                  |
| 10        | 98/289                  | 97/872                  | 97/801                  | 97/779                  |

جدول 2 مقایسه بین ده فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  ورق

مربعی با شرط مرزی چهار طرف گیردار برای تمام دسته مودهای برون صفحه با

پارامترهای  $\beta^* = 0$  و  $\nu = 0/3$

| $\frac{a}{h}$ | م م م    |               | "م ن ن" و "ن م ن" |               | ن ن ن    |               |
|---------------|----------|---------------|-------------------|---------------|----------|---------------|
|               | $\varpi$ | [27] $\varpi$ | $\varpi$          | [27] $\varpi$ | $\varpi$ | [27] $\varpi$ |
| 1             | 9/9395   | 9/9086        | 18/984            | 18/932        | 26/631   | 26/564        |
| 2             | 31/403   | 31/324        | 38/002            | 37/915        | 51/655   | 51/553        |
| 3             | 31/703   | 31/619        | 46/349            | 46/245        | 52/131   | 52/021        |
| 4             | 48/021   | 47/918        | 60/686            | 60/572        | 72/106   | 71/981        |
| 5             | 62/542   | 62/412        | 67/474            | 67/343        | 48/019   | 83/877        |
| 6             | 62/701   | 62/567        | 79/883            | 79/735        | 84/333   | 84/182        |
| 7             | 75/006   | 74/876        | 85/506            | 85/368        | 100/16   | 100/01        |
| 8             | 75/490   | 75/350        | 91/117            | 90/968        | 100/57   | 100/41        |
| 9             | 97/706   | 97/550        | 101/68            | 101/51        | 119/63   | 119/44        |
| 10            | 97/803   | 97/628        | 111/56            | 111/40        | 119/84   | 119/65        |
| 1             | 8/1500   | 8/1360        | 14/265            | 14/245        | 19/182   | 19/160        |
| 2             | 21/888   | 21/864        | 25/993            | 25/967        | 33/758   | 33/731        |
| 3             | 22/191   | 22/164        | 30/618            | 30/589        | 34/027   | 33/997        |
| 4             | 31/825   | 31/796        | 38/883            | 38/853        | 45/130   | 45/098        |
| 5             | 39/579   | 39/546        | 42/422            | 42/389        | 51/206   | 51/170        |
| 6             | 39/746   | 39/710        | 48/803            | 48/769        | 51/244   | 51/209        |
| 7             | 46/662   | 46/628        | 52/226            | 52/192        | 53/573   | 53/572        |
| 8             | 46/795   | 46/759        | 52/714            | 52/702        | 56/450   | 56/433        |
| 9             | 57/062   | 57/042        | 55/028            | 54/990        | 59/934   | 59/894        |
| 10            | 58/101   | 58/067        | 57/753            | 57/750        | 59/981   | 59/942        |

جدول 3 مقایسه بین فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  نانوورق

مربعی با شرط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده برای دسته مود م م ن  $\nu = 0/3$

| $\frac{h}{a}$ | $\beta^*$ | $\frac{a}{b}=1$ |              | $\frac{a}{b}=2$ |              |
|---------------|-----------|-----------------|--------------|-----------------|--------------|
|               |           | $\varpi$        | [9] $\varpi$ | $\varpi$        | [9] $\varpi$ |
| 0/1           | 0         | 5/7769          | 5/7769       | 7/3096          | 7/3098       |
| 0/2           | 0         | 5/3036          | 5/3036       | 6/9025          | 6/9026       |
| 0/1           | 1         | 5/1256          | 5/1260       | 6/7536          | 6/7536       |
| 0/2           | 0/25      | 4/7512          | 4/7513       | 6/4079          | 6/408        |
| 0/1           | 2         | 4/6545          | 4/6550       | 6/3079          | 6/308        |
| 0/2           | 0/5       | 4/3433          | 4/3433       | 6/0069          | 6/007        |
| 0/1           | 3         | 4/2933          | 4/2938       | 5/9402          | 5/9404       |
| 0/2           | 0/75      | 4/0257          | 4/0258       | 5/6731          | 5/6732       |
| 0/1           | 4         | 4/0049          | 4/0056       | 5/6301          | 5/6302       |
| 0/2           | 1         | 3/7693          | 3/7694       | 5/3896          | 5/3898       |

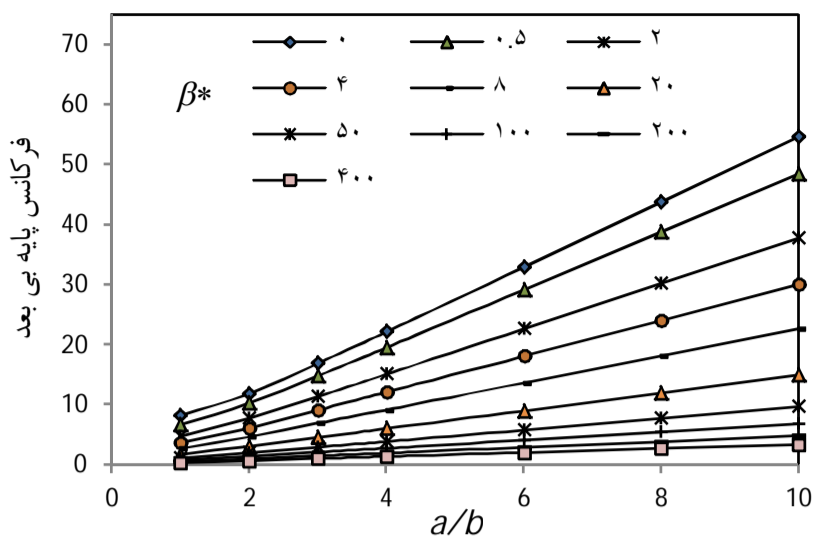
جدول 4 مقایسه بین فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  نانوورق با

شرط مرزی دوطرف مقابل گیردار و دو طرف مقابل تکیه گاه ساده برای دسته مودهای

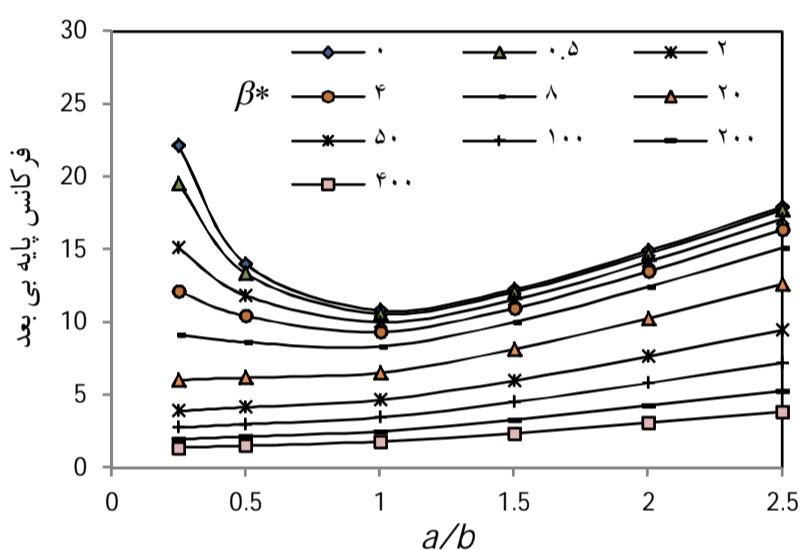
بیرون از صفحه مختلف با پارامترهای

$a=b=10h$  و  $\nu = 0/3$

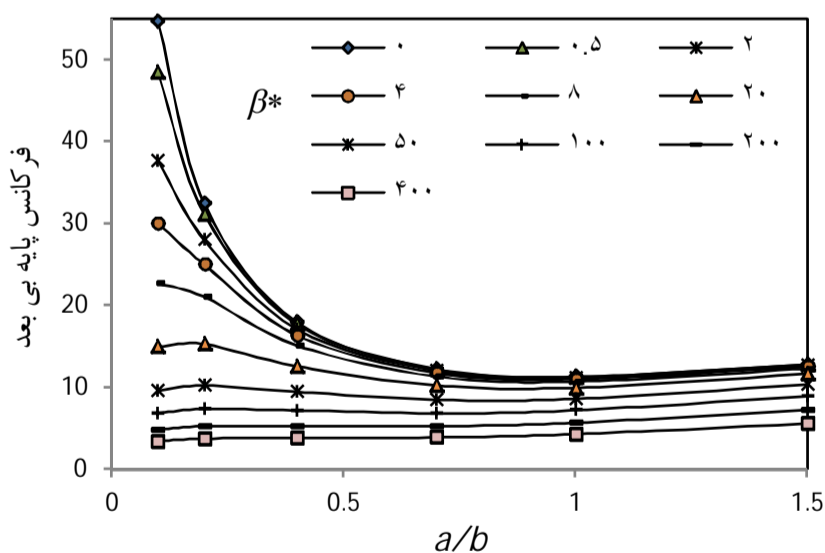
| $\beta^*$ | م م م    |               | م ن ن    |               | ن ن ن    |               |
|-----------|----------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|
|           | $\varpi$ | [28] $\varpi$ | $\varpi$ | [28] $\varpi$ | $\varpi$ | [28] $\varpi$ |
| 0         | 26/891   | 26/891        | 49/399   | 49/399        | 79/575   | 79/195        |
| 4         | 18/315   | 18/315        | 26/032   | 26/032        | 35/589   | 37/776        |
| 16        | 11/319   | 11/319        | 14/631   | 14/631        | 19/310   | 20/725        |
| 36        | 7/9423   | 7/9423        | 10/001   | 10/001        | 13/091   | 14/080        |
| 64        | 6/0720   | 6/0720        | 7/5696   | 7/5696        | 9/8773   | 10/635        |



شکل 3 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحل بی بعد مختلف  $\nu = 0/3$  و  $b = 5h$



شکل 4 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحل بی بعد مختلف  $\nu = 0/3$  و  $b = 20h$



شکل 5 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحل بی بعد مختلف  $\nu = 0/3$  و  $b = 50h$

لازم به ذکر است در منابع [4] و [10] مقدار فاکتور کاهش فرکانس طبیعی در نمودارها بر حسب کوچک بودن ابعاد ورق می‌تواند تا  $0/5$  باشد که کاملاً با بازه کاهش فرکانس در اثر تغییر پارامتر غیر محلی نشان داده شده در جداول و نمودارهای مطالعه کنونی همخوانی دارد.

تابع ضریب غیر محلی می‌باشد، میل می‌کند که فرکانس نانوورق بر اساس تئوری کرشهوف است. همان‌طور که در این پژوهش اثر پارامتر غیر محلی بصورت ماتریس ضرایب غیر محلی،  $[\chi]$ ، از فرکانس می‌کاهد آقابابایی و ردی [3] نیز اثر پارامتر غیر محلی را در ورق دوبعدی غیرمحل با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بصورت فاکتوری کاهنده یافتند. ضمیمه الف فرکانس نانوورق بر اساس تئوری کرشهوف را برای تکیه‌گاه ساده ارائه می‌کند. در واقع تحقیق کنونی تعمیم این روند به سه بعد و تمام شرایط مرزی است. همچنین در شکل 2 دیده می‌شود که برای پارامترهای غیرمحل بزرگتر وابستگی فرکانس طبیعی به نسبت طول به ضخامت خطی می‌شود و نزدیک شدن پاسخ به عدد نهایی آن به تعویق می‌افتد.

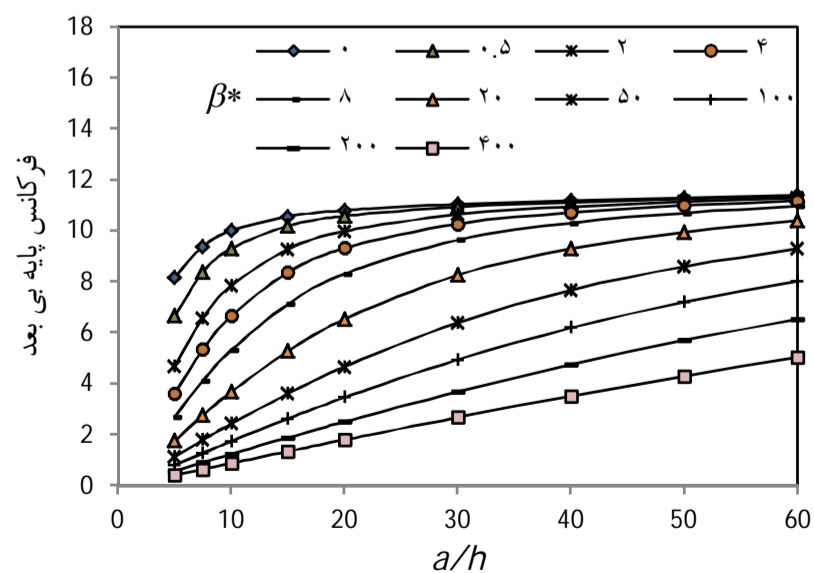
تأثیر نسبت ابعادی بر فرکانس پایه بی بعد برای نانوورق های مستطیلی ضخیم، نسبتاً ضخیم و نازک در شکل‌های 3 تا 5 دیده می‌شود.

طبق شکل 3 با افزایش نسبت طول به عرض ورق ضخیم فرکانس پایه بصورت خطی روند افزایشی دارد. بعلاوه می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر غیرمحل، اثر افزایش نسبت طول به ضخامت در فرکانس پایه کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که اثر پارامتر غیرمحل در ورق مربعی حداقل بوده و با باریک شدن ورق این اثر افزایش می‌یابد.

بر اساس شکل‌های 4 و 5 در ورق نسبتاً ضخیم و نازک با افزایش نسبت طول به عرض ورق فرکانس پایه در پارامترهای غیرمحل پائین ابتدا با شیب تند کاهش یافته و سپس افزایش تدریجی دارد ولی در پارامترهای غیر محلی بالا همواره فرکانس پایه روند افزایشی تدریجی دارد.

فرمول به شکل بسته ضمیمه ب که برای حالت ساده موج در یک محیط بی نهایت در آمده از دید روند تغییرات کاملاً مشابه شکل‌های 4 و 5 دارد از رویت آن می‌توان تا حدی به عوامل تغییر دهنده و نقش آنها در این دو شکل پی برد.

تأثیر شرایط مرزی بر پنج فرکانس طبیعی اول نانو ورق‌ها در دسته مودهای مختلف در جداول 5 تا 7 آمده است. طبق جداول و همان‌طور که انتظار می‌رود بدون توجه به پارامتر غیرمحل، فرکانس طبیعی با افزایش قید افزایش می‌یابد. یعنی فرکانس نانوورق با چهار مرز گیردار بیشترین، و برای نانوورق با چهار تکیه‌گاه ساده کمترین می‌باشد. همچنین دیده می‌شود که فرکانسهای تمام دسته مودها با افزایش پارامتر غیرمحل کاهش می‌یابد. طبق جداول 5 تا 7 تأثیر پارامتر غیرمحل در مودهای بالاتر بیشتر است. به طوری که در مودهای بالا فرکانس‌ها تقریباً تابع پارامتر غیرمحل بوده و مستقل از عدد موج (شماره مود) می‌باشد.



شکل 2 تأثیر نسبت طول به ضخامت بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق مربعی با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحل بی بعد مختلف  $\nu = 0/3$

- تأثیر پارامترهای غیرمحلی بزرگ بر تأثیر شرط مرزی در فرکانس ورق غالب تر است.
- تأثیر پارامتر غیرمحلی در نانورق مربعی کمترین مقدار بوده و با افزایش نسبت طول به عرض ورق این اثر افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به عرض ورق ضخیم، برخلاف ورق های نازک، فرکانس پایه بصورت خطی افزایش می‌یابد.

**جدول 6** پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\omega = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  نانورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودهای مختلف با پارامترهای  $\nu = 0/3$  و  $\beta = 1$

| $a=b=10h$ |        |        |        | شروط | نوع    |
|-----------|--------|--------|--------|------|--------|
|           |        |        |        | مرزی | مود    |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 1    | برون   |
| 18/667    | 14/604 | 14/604 | 8/6905 | 2    | صفحه   |
| 28/805    | 23/811 | 23/811 | 20/976 | 3    | چهار   |
| 29/267    | 27/264 | 27/264 | 21/344 | 4    | طرف    |
| 34/905    | 31/718 | 31/718 | 27/580 | 5    | گیردار |
| 37/949    | 33/873 | 33/873 | 32/525 | 1    | درون   |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 2    | صفحه   |
| 36/161    | 33/484 | 33/484 | 45/423 | 3    | چهار   |
| 43/207    | 44/105 | 44/105 | 51/664 | 4    | طرف    |
| 49/003    | 49/478 | 49/478 | 51/770 | 5    | گیردار |
| 50/092    | 52/427 | 52/427 | 54/151 | 1    | درون   |
| 52/054    | 54/088 | 54/088 | 54/455 | 2    | صفحه   |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 3    | چهار   |
| 17/018    | 14/006 | 11/634 | 7/1711 | 4    | طرف    |
| 26/725    | 21/583 | 22/970 | 17/827 | 5    | گیردار |
| 28/614    | 27/188 | 24/146 | 20/925 | 1    | درون   |
| 33/966    | 30/973 | 30/202 | 26/244 | 2    | صفحه   |
| 36/360    | 31/760 | 33/674 | 29/964 | 3    | چهار   |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 4    | طرف    |
| 37/229    | 30/509 | 43/538 | 32/841 | 5    | گیردار |
| 48/568    | 42/351 | 51/055 | 43/415 | 1    | درون   |
| 49/279    | 44/217 | 51/306 | 47/660 | 2    | صفحه   |
| 53/053    | 49/481 | 54/163 | 52/171 | 3    | چهار   |
| 54/132    | 50/958 | 54/820 | 53/530 | 4    | طرف    |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 5    | گیردار |
| 15/075    | 10/778 | 10/778 | 5/1256 | 1    | درون   |
| 26/186    | 20/549 | 20/549 | 17/464 | 2    | صفحه   |
| 26/186    | 23/984 | 23/984 | 17/464 | 3    | چهار   |
| 32/923    | 29/330 | 29/330 | 24/749 | 4    | طرف    |
| 36/217    | 31/480 | 31/480 | 29/894 | 5    | گیردار |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 1    | درون   |
| 41/194    | 35/649 | 35/649 | 25/180 | 2    | صفحه   |
| 50/525    | 46/491 | 46/491 | 41/039 | 3    | چهار   |
| 50/525    | 49/090 | 49/090 | 43/708 | 4    | طرف    |
| 54/048    | 52/315 | 52/315 | 43/708 | 5    | گیردار |
| 55/396    | 53/388 | 53/388 | 49/607 |      |        |

**جدول 5** پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\omega = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$  نانورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودها با پارامترهای  $\nu = 0/3$  و  $\beta = 0$

| $a=b=10h$ |        |        |        | شروط | نوع    |
|-----------|--------|--------|--------|------|--------|
|           |        |        |        | مرزی | مود    |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 1    | برون   |
| 26/631    | 18/984 | 18/984 | 9/9395 | 2    | صفحه   |
| 51/655    | 38/002 | 38/002 | 31/403 | 3    | چهار   |
| 52/131    | 46/349 | 46/349 | 31/703 | 4    | طرف    |
| 72/106    | 60/686 | 60/686 | 48/021 | 5    | گیردار |
| 84/019    | 67/474 | 67/474 | 62/542 | 1    | درون   |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 2    | صفحه   |
| 44/415    | 37/412 | 37/412 | 61/646 | 3    | چهار   |
| 54/535    | 61/817 | 61/817 | 70/419 | 4    | طرف    |
| 79/666    | 74/801 | 74/801 | 76/429 | 5    | گیردار |
| 81/775    | 90/004 | 90/004 | 91/613 | 1    | درون   |
| 91/637    | 99/185 | 99/185 | 105/05 | 2    | صفحه   |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 3    | چهار   |
| 24/080    | 18/116 | 14/948 | 8/1378 | 4    | طرف    |
| 47/627    | 34/227 | 36/442 | 26/448 | 5    | گیردار |
| 50/914    | 46/082 | 41/068 | 31/088 | 1    | درون   |
| 69/816    | 58/947 | 57/509 | 45/431 | 2    | صفحه   |
| 80/299    | 63/243 | 66/849 | 57/663 | 3    | چهار   |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 4    | طرف    |
| 46/270    | 34/408 | 59/000 | 36/656 | 5    | گیردار |
| 71/850    | 52/046 | 72/173 | 59/020 | 1    | درون   |
| 81/055    | 62/895 | 89/459 | 73/713 | 2    | صفحه   |
| 88/768    | 79/844 | 90/753 | 74/983 | 3    | چهار   |
| 101/26    | 87/185 | 107/38 | 97/974 | 4    | طرف    |
| ن ن ن     | م ن ن  | ن م ن  | م م م  | 5    | گیردار |
| 21/214    | 13/805 | 13/805 | 5/7769 | 1    | درون   |
| 46/581    | 32/491 | 32/491 | 25/869 | 2    | صفحه   |
| 46/581    | 40/749 | 40/749 | 25/869 | 3    | چهار   |
| 67/527    | 55/724 | 55/724 | 42/725 | 4    | طرف    |
| 79/885    | 62/596 | 62/596 | 57/476 | 5    | گیردار |
| م ن ن     | م م ن  | م م ن  | م م م  | 1    | درون   |
| 55/107    | 43/566 | 43/566 | 27/553 | 2    | صفحه   |
| 87/132    | 70/248 | 70/248 | 46/502 | 3    | چهار   |
| 87/132    | 73/349 | 73/349 | 61/611 | 4    | طرف    |
| 92/545    | 80/331 | 80/331 | 61/611 | 5    | گیردار |
| 110/21    | 97/416 | 97/416 | 82/660 |      |        |

#### 4- جمع بندی

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانو ورق مستطیلی، بر اساس نوعی روش باقی مانده وزنی ارائه شده است. در این روش بر خلاف شیوه های متداول از توابع تقریب مثلثاتی استفاده شد. حل سه بعدی حاضر می تواند برای تخمین دقت حل های دو بعدی فرکانس های طبیعی نانورق بکار گرفته شود. از نتایج عددی این تحقیق می توان به موارد زیر اشاره کرد.

- افزایش پارامتر غیرمحلی باعث کاهش اتصال صلب بین اتمها شده که نتیجتاً منجر به کاهش فرکانس طبیعی می شود.
- اثر پارامتر غیرمحلی در اندازه ابعادی کوچک اهمیت دارد.
- اثر پارامتر غیرمحلی در مودهای ارتعاشی بالا بیشتر است.

$$W = \sin(n\pi X) \sin(m\pi Y) \sin(\omega t)$$

پس فرکانس طبیعی ورق به صورت (الف - 3) می شود.

$$\omega = \omega \frac{ab}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\pi \left( n^2 \left( \frac{b}{a} \right) + m^2 \left( \frac{a}{b} \right) \right)}{\sqrt{12(1-\nu^2) \left( \frac{1}{\pi^2} + \beta^* \left( n^2 \left( \frac{h}{a} \right)^2 + m^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 \right) \right)}} \quad (\text{الف - 3})$$

### ضمیمه ب - فرکانس یک موج سه بعدی در جامد بی نهایت غیرمحلی

میدان جابجایی یک موج سه بعدی می تواند بگونه (ب - 1) باشد.

$$U = c_1 \cos(n\pi X) \sin(m\pi Y) \sin(k\pi Z) \sin(\omega t),$$

$$V = c_2 \sin(n\pi X) \cos(m\pi Y) \sin(k\pi Z) \sin(\omega t),$$

$$W = c_3 \sin(n\pi X) \sin(m\pi Y) \cos(k\pi Z) \sin(\omega t) \quad (\text{ب - 1})$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (7) و حل فرکانس طبیعی، روابط (ب - 2) و (ب - 3) به دست می آیند.

• موج غیر چرخشی سه بعدی

$$\omega_{nmk} = \omega_{nmk} \left( \frac{ab}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( n^2 \left( \frac{b}{h} \right)^2 + m^2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 + k^2 \left( \frac{ab}{hh} \right)^2 \right)}}{\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \beta^* \left( n^2 \left( \frac{h}{a} \right)^2 + m^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 + k^2 \right)}} \quad (\text{ب - 2})$$

• موج هم حجم سه بعدی

$$\omega_{nmk} = \omega_{nmk} \left( \frac{ab}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)} \left( n^2 \left( \frac{b}{h} \right)^2 + m^2 \left( \frac{a}{h} \right)^2 + k^2 \left( \frac{ab}{hh} \right)^2 \right)}}{\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \beta^* \left( n^2 \left( \frac{h}{a} \right)^2 + m^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 + k^2 \right)}} \quad (\text{ب - 3})$$

### 5- مراجع

- [1] A. Cemal Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, Vol. 54, No 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [2] C. Polizzotto, Nonlocal Elasticity and related Variational Principles, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 42, pp. 7359-7380, 2001.
- [3] R. Aghababaei, J.N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009.
- [4] S.C. Pradhan, J.N. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, No. 1, pp. 206-223, 2009.
- [5] T. Murmu, S.C. Pradhan, Small-scale effect on the free in-plane vibration of nanoplates by nonlocal continuum model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 8, pp. 1628-1633, 2009.
- [6] S.C. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics, *Computational materials science*, Vol. 47, No. 1, pp. 268-274, 2009.

جدول 7 پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول  $\omega = \omega(ab/h) \sqrt{\rho/E}$  نانورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودها با پارمترهای  $\nu = 0/3$  و  $\beta = 10$

| a=b=10h |        |        |        | شروط مرزی | نوع مود      |
|---------|--------|--------|--------|-----------|--------------|
| 7/8920  | 6/7219 | 6/7219 | 4/8794 | 1         |              |
| 10/817  | 9/4014 | 9/4014 | 8/5828 | 2         | برون         |
| 11/069  | 10/531 | 10/531 | 8/9228 | 3         | صفحه         |
| 12/580  | 11/667 | 11/667 | 10/473 | 4         |              |
| 13/492  | 12/365 | 12/365 | 11/995 | 5         | چهار طرف     |
| 17/962  | 18/547 | 18/547 | 18/598 | 1         | گیردار       |
| 18/601  | 18/600 | 18/600 | 18/659 | 2         | درون         |
| 18/663  | 18/661 | 18/661 | 18/660 | 3         | صفحه         |
| 18/663  | 18/662 | 18/662 | 18/717 | 4         |              |
| 18/720  | 18/718 | 18/718 | 18/717 | 5         |              |
| 7/2636  | 6/4975 | 5/4586 | 4/1214 | 1         |              |
| 10/067  | 8/5606 | 9/1172 | 7/3603 | 2         | برون         |
| 10/811  | 10/518 | 9/2659 | 8/6859 | 3         | صفحه         |
| 12/263  | 11/424 | 11/129 | 9/9983 | 4         | دوطرف        |
| 12/916  | 11/555 | 12/308 | 11/006 | 5         | ساده         |
| 18/108  | 17/335 | 18/108 | 18/440 | 1         | دوطرف گیردار |
| 19/064  | 18/733 | 19/064 | 18/977 | 2         | درون         |
| 19/066  | 19/000 | 19/066 | 19/197 | 3         | صفحه         |
| 19/267  | 19/168 | 19/267 | 19/291 | 4         |              |
| 19/350  | 19/244 | 19/350 | 19/295 | 5         |              |
| 6/4737  | 5/0805 | 5/0805 | 3/0029 | 1         |              |
| 9/8723  | 8/1670 | 8/1670 | 7/2199 | 2         | برون         |
| 9/8723  | 9/2089 | 9/2089 | 7/2199 | 3         | صفحه         |
| 11/889  | 10/815 | 10/815 | 9/4397 | 4         |              |
| 12/870  | 11/458 | 11/458 | 10/984 | 5         | چهار طرف     |
| 18/476  | 17/883 | 17/883 | 15/977 | 1         | ساده         |
| 19/133  | 18/889 | 18/889 | 18/687 | 2         | درون         |
| 19/133  | 19/052 | 19/052 | 18/687 | 3         | صفحه         |
| 19/308  | 19/225 | 19/225 | 19/081 | 4         |              |
| 19/367  | 19/277 | 19/277 | 19/240 | 5         |              |

### ضمیمه الف - فرکانس طبیعی نانورق با تکیه گاههای ساده بر اساس الاستیسیته غیرمحلی و تئوری کرشهوف

می توان ثابت کرد که معادله حاکم در چنین ورقی بصورت (الف - 1) است.

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^3} (1-\beta \nabla^2) \dot{W} \quad (\text{الف - 1})$$

با بی بعد کردن معادله بالا، (الف - 2) به دست می آید.

$$4 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{b^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 W = \frac{a^2 b^2 \rho}{h^2 E} \left( 1 - 4\beta^* \left( \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \right) \dot{W} \quad (\text{الف - 2})$$

مود ارتعاشی چنین ورقی میدان خیزی بصورت زیر دارد:



- [17] A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, H. Vossough, Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory, *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 407, No. 22, pp. 4458-4465, 2012.
- [18] R. Ansari, A. Shahabodini, H. Rouhi, Prediction of the biaxial buckling and vibration behavior of grapheme via a nonlocal atomistic-based plate theory, *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 88-94, 2013.
- [19] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory, *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 443-452, 2013.
- [20] Y-M. Xu, H-S. Shen, C-L.Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear bending of bilayer graphene sheets subjected to transverse loads in thermal environments. *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 294-302, 2013.
- [21] I.S. Radebe, S. Adali, Buckling and sensitivity analysis of nonlocal orthotropic nanoplates with uncertain material properties. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 840-846, 2014.
- [22] E. Alzahrani, A.M. Zenkour, M. Sobhy, Small scale effect on hygro-thermo-mechanical bending of nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 163-172, 2013.
- [23] J.N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
- [24] M.H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*, 2<sup>nd</sup> Edition, pp. 69-122, Elsevier Academic Press, 2009.
- [25] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *International journal of engineering science*, Vol. 29, No. 8, pp. 901-916, 1991.
- [26] A.M. Zenkour, Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading, *Composite Structures*, Vol. 65, No. 3, pp. 367-379, 2004.
- [27] D. Zhou, Y.K. Cheung, F.T.K Au, S.H. Lo, Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 26, 6339-6353, 2002.
- [28] S. Hosseini-Hashemi, M. Zare, R. Nazemnezhad, An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity, *Composite Structures*, Vol. 100, pp. 290-299, 2013.
- [7] L. Shen, H-S. Shen, C-L. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Materials Science*, Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010.
- [8] J.N. Phadikar, S.C. Pradhan, Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates, *Computational Materials Science*, Vol. 49, No. 3, pp. 492-499, 2010.
- [9] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional vibration analysis of nano-plates, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 1015-1020, 2011.
- [10] S.C. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 774-779, 2011.
- [11] R. Ansari, B. Arash, H. Rouhi, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 9, pp. 2419-2429, 2011.
- [12] S. Narendar, Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 12, pp. 3093-3103, 2011.
- [13] M. Schwartz, N.T. Niane, R. Kouitat Njiwa, A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, No. 4, pp. 606-612, 2012.
- [14] A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of multi-layered graphene sheets embedded in elastic matrix, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 19, No. 16, pp. 2357-2371, 2013.
- [15] A. Alibeigloo, A.A. Pasha Zanoosi, Static analysis of rectangular nanoplate using three-dimensional theory of elasticity, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10, pp. 7016-7026, 2013.
- [16] A. Farajpour, A.R. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics. *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1605-1615, 2012.