



## آنالیز پایداری و طراحی کنترل کننده فیدبک حالت در سیستم‌های کنترل تحت شبکه دارای تأخیر متغیر با زمان

فاطمه خیراندیش<sup>۱</sup>، محسن اکرامیان<sup>۲\*</sup>، محمد عطائی<sup>۳</sup>

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی برق-کنترل، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- استادیار، مهندسی برق-کنترل، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۳- دانشیار، مهندسی برق-کنترل، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی ۸۱۷۴۶۷۳۴۴۱

### چکیده

در دهه‌های اخیر استفاده از کنترل کننده‌های تحت شبکه به جای کنترل کننده‌های سنتی مورد توجه بسیاری قرار گرفته است که موجب کاهش چشم‌گیر هزینه‌ها، کاهش وزن و توان تجهیزات لازم و قابلیت اطمینان بالا در سیستم‌های کنترلی شده است. بکارگیری این کنترل کننده‌ها در کار بهره‌مندی از مزایای متعدد دارای متعاین از جمله ایجاد تأخیر متغیر با زمان و اتلاف داده‌ها در انتقال داده‌های کنترلی می‌باشد که این امر موجب ایجاد نایابدای می‌گردد. در این مقاله مسأله‌ای پایداری و پایدارسازی توسط فیدبک حالت برای سیستم‌های کنترل تحت شبکه دارای تأخیر متغیر با زمان مورد مطالعه قرار گرفته است. به این منظور از روش لیابانی-کراسفسکی و ارائه‌ی تابعی مناسب استفاده شده است. در روش ارائه شده یک معیار پایداری با محافظه‌کاری و نامساوی ترکیب مقابلاً محدود تخمین دقیقی از مشتق تابعی به دست آمده است. در روش ارائه شده یک معیار پایداری با محافظه‌کاری و پیچیدگی محاسبات کمتر به دست آمده است. در ادامه، مسأله‌ی طراحی کنترل کننده مورد بررسی قرار گرفته است که بر اساس معیار پایداری به دست آمده کنترل کننده فیدبک حالت طراحی شده است. در نهایت، به منظور نشان دادن تأخیر و مزایای روش ارائه شده، از مثال سیستم یک ماهواره استفاده شده است که نشان می‌دهد روش ارائه شده تأخیر مطلوبی در کاهش محافظه‌کاری تثابیج داشته و عملکرد بهتری را داشته است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دربافت: ۲۷ بهمن ۱۳۹۵

پذیرش: ۱۵ فوریه ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۰۹ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلید واژگان:

سیستم‌های کنترل تحت شبکه

تأخر متغیر با زمان

آنالیز پایداری

نامساوی ویریننگر

کنترل کننده فیدبک حالت

## Stability analysis and state feedback controller design for networked control systems with time varying delays

Fatemeh Kheirandish, Mohsen Ekramian\*, Mohammad Ataei

Department of Electrical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

\* P.O.B. 8174673441, Isfahan, Iran, m.ekramian@eng.ui.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 15 February 2017

Accepted 04 April 2017

Available Online 29 April 2017

**Keywords:**

Networked control systems

Time varying delay

Stability analysis

Wirtinger inequality

State feedback controller

### ABSTRACT

Network Control Systems (NCS) arise in many real-world applications and they have been an active area over recent decades. Using NCSs instead of traditional controllers has led to significant decrease in costs, weight and power of installations, also increases in reliability of control systems. Despite these advantages, NCSs confront various challenges such as time varying delays and data packet dropouts in control data transfer which leads to instability. In this paper, the stability analysis and stabilization with state feedback are studied for NCSs which includes time varying delays in state equations. This goal is achieved by introducing a new functional and using the Lyapunov-Krasovskii approach. Then, an accurate estimation of derivative of functional is obtained by applying Wirtinger and Reciprocally convex combination inequalities. In the proposed method, a stability criterion is derived with less conservatism and complexity. Afterwards, the problem of controller design is examined in which the state feedback controller is designed based on stability criterion. Finally, the dynamic model of the satellite as an example is used to demonstrate the advantages of proposed method which illustrates our proposed method has desirable influence in decreasing conservatism of results and leads to better performance.

اهمیت پیدا کرده‌اند. دلیل این امر، کاهش چشم‌گیر هزینه‌ها، کاهش وزن و توان تجهیزات لازم، نصب و نگهداری آسان، قابلیت اطمینان بالای این سیستم‌ها و سهولت بخشیدن به تشخیص عیب<sup>۲</sup> و نگهداری<sup>۳</sup> است [۲,1]. از جمله زمینه‌های مهمی که NCS در آن‌ها به کار گرفته شده است می‌توان به مباحث رباتیک و بازوهای صنعتی [۴,3]، وسایل نقلیه [۵]، سیستم‌های هوای

۱- مقدمه با توسعه سریع تکنولوژی‌های کامپیوتر و شبکه، سیستم‌های کنترل معمولی به سیستم‌های مدرن کنترل تحت شبکه<sup>۱</sup> (NCS) تحول پیدا کرده‌اند که در آن‌ها عملکردها و دستورهای کنترلی به کمک شبکه‌های ارتباطی انتقال پیدا می‌کنند. این سیستم‌ها به طور فزاینده‌ای در کنترل فرآیندهای صنعتی

<sup>2</sup> Diagnostics

<sup>3</sup> Maintenance

<sup>1</sup> Networked control systems

### Please cite this article using:

F. Kheirandish, M. Ekramian, M. Ataei, Stability analysis and state feedback controller design for networked control systems with time varying delays, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 77-85, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

F. Kheirandish, M. Ekramian, M. Ataei, Stability analysis and state feedback controller design for networked control systems with time varying delays, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 77-85, 2017 (in Persian)

به عنوان مؤثرترین نامساوی در کاهش محافظه‌کاری شناخته شده است که با در نظر گرفتن یک تأخیر کلی در NCS، از آن در [16] استفاده شده است. در [17] با تبدیل مدل خطی NCS به یک مدل زمان گستته نامتغیر با زمان و با نامعنه‌ی دلای اندازه محدود، از خصوصیات روش‌های کنترل مقاوم در کنار به کارگیری روش لیاپانف-کرافسکی برای کاهش محافظه‌کاری استفاده شده است. در نوعی دیگر از مطالعات پایداری NCS وجود دو تأخیر زمانی برای آن در نظر گرفته می‌شود که در برخی مطالعات از جمله [19,18] با استفاده از ماتریس‌های وزن آزاد این وضعیت مورد بررسی قرار گرفته است. از این دست مطالعات پایداری در سال‌های اخیر توجه محققان زیادی را به خود جلب نموده است [20-22]. به دلیل استفاده از تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری<sup>۶</sup> متفاوت، روش‌های به کار گرفته شده دلای اپیچیدگی نیز هستند. لذا همواره زمینه‌ی مناسبی برای مطالعات بهمنظور رفع مشکلات مذکور فراهم است. هدف از مطالعه‌ی پایداری NCS را می‌توان بهبود شرایط پایداری وابسته به تأخیر عنوان نمود به طوری که بیشترین مقدار تأخیری که می‌تواند در سیستم وجود داشته باشد به دست آید و در عین حال، کمترین تعداد متغیر تصمیم‌گیری به کار برد شود [23].

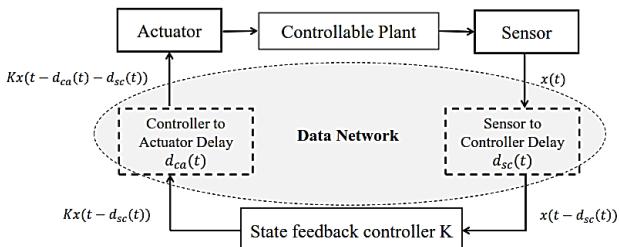
دومین مسأله‌ی مهم در مطالعه‌ی NCS طراحی کنترل گنده مناسب است. در بحث طراحی کنترل گنده، هدف مورد نظر تضمین پایداری شبکه با به کارگیری کنترل گنده مناسب و افزایش کران تأخیر به دست آمده در بحث پایداری می‌باشد. به عنوان یک روش نمونه می‌توان روش کنترل تصادفی بهینه را نام برد [24]. هر چند این روش عملکرد خوبی داشته است اما به دلیل نیاز به حجم زیادی از حافظه برای ذخیره اطلاعات کنترل گنده، روش کنترلی مطلوبی به حساب نمی‌آید. کنترل گنده‌های سنتی PID نیز در NCS به کار برد شده است [25]. در دلایهای اخیر به منظور صرفه‌جویی در حافظه کنترل گنده طراحی شده و سهولت مواجهه با عدم قطعیت در فرایند تحت کنترل، کنترل گنده‌های فیدبک حالت/خروجی بی‌حافظه برای NCS مورد توجه قرار گرفته‌اند [27,26,7]. با توجه به این موضوع در این مقاله نیز از مزایای کنترل گنده‌ی فیدبک حالت بهره گرفته شده است.

در این مقاله، در مقایسه با [16] یک مدل خطی NCS با درنظر گرفتن دو نوع تأخیر زمانی در ورودی و خروجی سیستم مشابه با [19] بررسی شده است. هدف اولیه در مباحث ارائه شده، بررسی پایداری سیستم مبتنی بر یک معیار پایداری مناسب می‌باشد. بر این اساس، سعی می‌شود علاوه بر به کارگیری LKF مناسب نسبت به [10,9] به منظور کاهش محافظه‌کاری، از نامساوی ویرتینگر و نامساوی ترکیب متقابل محب<sup>۷</sup> به عنوان مؤثرترین نامساوی‌های اخیر در کاهش محافظه‌کاری استفاده گردد. به کمک نامساوی‌های معرفی شده یک معیار پایداری بهبود یافته با محافظه‌کاری و تعداد متغیر تصمیم‌گیری کمتر و نسبت به مطالعات گذشته از جمله [19,18] برای مدل NCS به دست آمده است. به کمک معیار پایداری پیشنهادی، با درنظر گرفتن ارتباط بین تأخیرهای زمانی موجود در NCS کران بالا برای هر دو نوع تأخیر در ورودی و خروجی سیستم محسوسه می‌گردد. همچنین کاهش محافظه‌کاری روش دوم مقاله، نتایج موردنظر به طراحی کنترل گنده در سیستم-های تحت شبکه تعمیم یافته است. بر این اساس با به کارگیری نتایج به دست آمده در تحلیل پایداری و استفاده از الگوریتم CCL<sup>۸</sup> یک کنترل گنده

فضا [6] و صنایع ساخت و ساز اشاره نمود. عبارت NCS در زمینه‌های تحقیقاتی و کاربردی به خوبی شناخته شده است. در مقایسه با سیستم‌های کنترل معمولی نقطه به نقطه، به کارگیری شبکه‌های ارتباطی در سیستم‌های حلقه بسته منجر به بروز برخی مشکلات عمده در طراحی و پیاده‌سازی سیستم‌های کنترل می‌شود. با توجه به مشکل ذاتی شبکه‌های ارتباطی، همیشه دلای اتأخیر زمانی و از دست رفتن داده است که این امر دلیل اصلی تضعیف عملکرد و حتی ناپایدار شدن سیستم حلقه بسته می‌باشد. فرض کلی در تئوری کنترل سنتی یعنی انتقال بلاذرینگ و بدون اتلاف داده‌ها در NCS برقرار نمی‌باشد. بر این اساس بسیاری از تکنولوژی‌های موجود مبتنی بر کنترل گنده‌های سنتی جهت تحقق اهداف خاص، با به کارگیری کنترل-گنده‌های مبتنی بر شبکه برقرار نخواهد بود. همچنین تجزیه و تحلیل پایداری و طراحی کنترل گنده برای NCS باید با توجه به محدودیت‌های موجود در ارتباطات مانند تأخیر القا شده، اتلاف داده‌ها، وضعیت مکانی متغیر در ارتباطات و محدودیت پهنای باند ارتباطی صورت گیرد. در دلایهای اخیر، روش‌های کنترلی مختلفی مبتنی بر توسعه یافته‌اند که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان کنترل وابسته به تأخیر در NCS، کنترل تصادفی، کنترل سوئیچ سونده، کنترل پیش‌بین، کنترل برمبنای مدل و کنترل فازی را نام برد.

به طور کلی در NCS از شبکه‌های مبتنی بر IP از جمله شبکه‌های اینترنت، شبکه‌های اترنت، و شبکه‌های حسگر بی سیم مبتنی بر IP استفاده می‌شود. در نتیجه، تأخیرهای واقعی در شبکه مبتنی بر IP، متغیر با زمان هستند و رفتار نامنظمی را نشان می‌دهند. تاکنون تحقیقات متعددی با در نظر گرفتن تأخیر زمانی، در هر دو حوزه زمان-پیوسته [7] و زمان-گستته [8]، به منظور مطالعه‌ی پایداری NCS صورت گرفته است. در این تحقیقات با در نظر گرفتن روش‌های مختلف از جمله روش لیاپانف-کرافسکی عوامل مختلف در به دست آوردن نتایج با محافظه‌کاری کمتر بررسی شده‌اند. آنالیز پایداری با استفاده از تئوری لیاپانف-کرافسکی موجب اعمال محافظه‌کاری‌های اجتناب‌نپذیری می‌گردد که در محاسبه‌ی بیشترین کران تأخیر موجود خود را نشان می‌دهد. در به دست آوردن شرایط پایداری نوعی مصالحه بین کاهش محافظه‌کاری و پیچیدگی محاسبات وجود دارد. از روش‌های متعددی جهت کاهش محافظه‌کاری استفاده شده است که در بسیاری از آن‌ها با در نظر گرفتن مجموع تأخیرهای موجود در NCS به عنوان یک تأخیر کلی، این مطالعه صورت گرفته است. برخی از این مطالعات مبتنی بر استفاده از جملات انتگرالی مختلف در تابعی لیاپانف-کرافسکی<sup>۱</sup> (LKF) است [10,9]. به طور مثال، در [10,9] از جملات انتگرالی چندگانه در LKF استفاده شده است. در [11] با استفاده از روش تقسیم بندی بازه‌ی تأخیر<sup>۲</sup> و تبدیل بازه‌ی کاهش چند زیربازه مطالعه‌ی آنالیز پایداری صورت گرفته است. در [12] نیز با وجود عامل تأخیر زمانی و از دست رفتن داده محافظه‌کاری نتایج تابعی است. هر دو عامل تأخیر زمانی و از دست رفتن داده محافظه‌کاری نتایج کاهش داده شده است. در برخی دیگر از مطالعات با تخمین مشتق تابعی به کمک روش‌های مختلف، محافظه‌کاری کاهش داده می‌شود. به طور مثال، در [13] با استفاده از نامساوی مبتنی بر ماتریس وزن آزاد<sup>۳</sup> این امر تحقق یافته است. نامساوی ینسن<sup>۴</sup> که در [14] معرفی شده است، نقشی کلیدی در کاهش محافظه‌کاری دارد و در مطالعات متعدد استفاده شده است. اخیراً نیز نامساوی ویرتینگر<sup>۵</sup> در [15] برای غلبه بر محافظه‌کاری معرفی شده است. این نامساوی

<sup>1</sup> Lyapunov-Krasovskii Functional<sup>2</sup> Delay-partitioning approach<sup>3</sup> Free weighting matrix<sup>4</sup> Jensen inequality<sup>5</sup> Wirtinger inequality<sup>6</sup> Decision variables<sup>7</sup> Reciprocally convex combination inequality<sup>8</sup> Cone Complementary Linearization



**Fig. 1** A typical networked control system

**شکل 1** نمونه یک سیستم کنترل تحت شبکه

$$\theta(\alpha, R) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \xi^T W_1 R W_1 \xi + \frac{1}{1 - \tilde{\gamma}} \xi^T W_2 R W_2 \xi \quad (4)$$

در صورتی که یک ماتریس  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  وجود داشته باشد به طوری که  $\begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix} > 0$ . آنگاه نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$\min_{\alpha \in (0,1)} \Theta(\alpha, R) \geq \begin{bmatrix} W_1 \xi \\ W_2 \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & X \\ * & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \xi \\ W_2 \xi \end{bmatrix} \quad (5)$$

- آنالیز پایداری

ابتدا مدل دینامیکی NCS در (2) با تعریف  $d_1(t) = d_{sc}(t)$  و  $d_2(t) = d_{ca}(t)$

و بازای K معلوم به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - d_1(t) - d_2(t)) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\bar{d}_1 - \bar{d}_2]\end{aligned}\tag{6}$$

در این مدل فرض شده است  $0 \leq d_2(t) \leq \bar{d}_2$ ،  $0 \leq d_1(t) \leq \bar{d}_1$  و  $\varphi(t) \in \mathbb{C}(\bar{d}_1 + \bar{d}_2)$ .  
 $d_2(t) \leq \bar{\tau}_2 \leq 1$ ،  $d_1(t) \leq \bar{\tau}_1 \leq 1$  مجموعه‌ی توابع LKF پیوسته و مشتق پذیر در بازه‌ی  $[0, -2(\bar{d}_1 + \bar{d}_2)]$  می‌باشند. با راهه‌ی کم متناسب، معیار پایداری تحت قضیه زیر به دست آمده است. برای بیان قضیه،  $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$  و  $\bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2$  بردار  $\chi$  به صورت

زیر تعریف می شود:

$$x = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ x(t - d(t)) \\ x(t - \bar{d}) \\ \frac{1}{d_1(t)} \int_{t-d_1(t)}^t x(u) du \\ \frac{1}{d_2(t)} \int_{t-d(t)}^{t-d_1(t)} x(u) du \\ \frac{1}{\bar{d} - d(t)} \int_{t-\bar{d}}^{t-d(t)} x(u) du \end{bmatrix} \quad (7)$$

همچنین ماتریس‌های ضریب به صورت زیر تعیف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad e_2 = [0 \ I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\
 e_3 &= [0 \ 0 \ I \ 0 \ 0 \ 0], \quad e_4 = [0 \ 0 \ 0 \ I \ 0 \ 0], \\
 e_5 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \ 0], \quad e_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I], \\
 e_7 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I], \quad e_8 = (Ae_1^T + A_d e_3^T)^T, \\
 M_1 &= [e_1 - e_2, e_1 + e_2 - 2e_5]^T \\
 M_2 &= [e_2 - e_3, e_2 + e_3 - 2e_6]^T \\
 M_3 &= [e_3 - e_4, e_3 + e_4 - 2e_7]^T
 \end{aligned} \tag{8}$$

در این صورت می‌توان سیستم (6) را به فرم  $\dot{x} = e_8^T \chi(t)$  بازنویسی نمود.

قضیہ 1

فیدبک حالت تحت شبکه طراحی شده است. با استفاده از مثال‌های شبیه-سازی، مؤثر بودن روش معرفی شده در کاهش محافظه‌کاری و تعداد متغیرهای تصمیمگیری نسبت به برخی مطالعات نشان داده شده است. در این زمینه با به کارگیری روش طراحی پیشنهادی در مورد مدل سیستم ماهواره اهمیت نتایج بررسی می‌گردد.

در ادامه توضیحاتی پیرامون مباحث بخش‌های مختلف مقاله ارائه می‌گردد. در بخش 2، یک مدل خطی NCS با وجود دو نوع تأخیر زمانی در دینامیک آن، مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش، معیار پیشنهادی مرتبط با بحث پایداری سیستم مطرح می‌شود و در ادامه طراحی کنترل کننده فیلیپک حالت در بخش 4 بررسی شده است. نتایج شبیه‌سازی در مورد یک سیستم عددی و مدل سیستم ماهواره در بخش 5 ارائه شده است. نتایج مطالعه‌ی صورت گرفته در این مقاله نیز در بخش 6 مورد جمع‌بندی قرار گرفته است.

- 2 مسائلہ نفی تع

در NCS، سیستم حلقه بسته یک سیستم زمان-پیوسته خطی است که مدل دینامیک آن، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت و  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی کنترلی است. همچنین  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ماتریس‌های ثابت می‌باشند. ساختار NCS در "شکل 1" نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تأخیر موجود در NCS با توجه به مسیر انتقال داده‌ها، به دو نوع تأخیر سنسور به کنترل کننده  $d_{sc}$  و تأخیر کنترل کننده به عملگر  $d_{ca}$  دسته‌بندی می‌گردد که فرض شده است این تأخیرها تقریباً پیوسته و دارای کران بالا و پایین می‌باشند. بنابراین با اعمال کنترل کننده‌ی فیدبک حالت  $Kx(t) = u(t)$  دینامیک

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-d_{\text{in}}(t)) - d_{\text{out}}(t)) \quad (2)$$

از آن جایی که هدف این مقاله معرفی معیار پایداری وابسته به تأخیر است،  
سعی شده با استفاده از یک LKF جدید و به کارگیری نامساوی ویرتینگر و  
نامساوی ترکیب متقابلاً محدب، معیار پایداری به صورت مجموعه‌ای از  
نامساوی‌های ماتریسی خطی<sup>۱</sup> (LMI) به دست آید. با حل LMI‌های به دست  
آمده بیشترین کران بالای تأخیرها و با کمترین محافظه‌کاری نسبت به برخی  
مطالعات گذشته به دست آمده است. برای به دست آوردن معیارهای پایداری  
لهمه، به استفاده از شدن:

لم 1 (نامساوی مبتنی بر نامساوی ویرتینگر) [15]: به ازای ماتریس معلوم  $R > 0$  و برای همهٔ توابع پیوستهٔ  $\omega$  در  $\mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \dot{\omega}^T(u) R \dot{\omega}(u) du \\ & \geq \frac{1}{b-a} (\omega(b) - \omega(a))^T R (\omega(b) - \omega(a)) \\ & \quad + \frac{3}{b-a} \tilde{\Omega}^T R \tilde{\Omega} \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن  $\tilde{\Omega} = \omega(b) + \omega(a) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \omega(u) du$  می‌شود.

لم 2 (نامساوی ترکیب متقابلاً محدب) [21]: اعداد صحیح مثبت  $m, n$  یک اسکالار  $\alpha$  در بازه‌ی  $(0, 1)$ ، یک ماتریس  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  با بعد  $n \times n$ ، دو ماتریس  $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  را در نظر می‌گیریم. برای بردار  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  تابع  $\Theta(\alpha, R)$  به

---

## <sup>1</sup> Linear matrix inequalities

$$\begin{aligned} & -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(\beta) R \dot{x}(\beta) d\beta \\ & \leq -\frac{1}{\alpha(t)} \chi^T(t) M_1 \text{diag}\{R, 3R\} M_1^T \chi \\ & -\frac{1}{\gamma(t)} \chi^T(t) M_2 \text{diag}\{R, 3R\} M_2^T \chi \\ & -\frac{1}{\rho(t)} \chi^T(t) M_3 \text{diag}\{R, 3R\} M_3^T \chi \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن، ضرایب  $\alpha(t) = d_1(t)/\bar{d}$  و  $\rho(t) = \gamma(t) = d_2(t)/\bar{d}$  با اعمال لم  $\tilde{R} = \text{diag}\{R, 3R\}$  درنظر گرفته شده‌اند و همچنین (25) را به ازای ماتریس‌های  $S_{12}, S_{13}$  و  $S_{23}$  با اعمال LMI 2 و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} & -\bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(\beta) R \dot{x}(\beta) d\beta \\ & \leq \chi^T \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{R} & S_{12} & S_{13} \\ * & \tilde{R} & S_{23} \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \chi \end{aligned} \quad (26)$$

که با استفاده از آن LMI زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V}(t) < \chi^T (\Psi_1 + \Psi_2) \chi \quad (27)$$

به عنوان نتیجه می‌توان بیان کرد که سیستم (6) پایدار مجانبی است اگر LMI‌های (9) و (10) برقرار باشند.

#### 4- طراحی کنترل گنده فیدبک حالت K

در این بخش پایداری NCS با بهره‌ی کنترلی K نامعلوم مورد مطالعه قرار گرفته است. با فرض نامعلوم بودن ماتریس  $K$ , نامساوی‌های (9) و (10) به دلیل وجود جملات  $PBK$ ,  $A^T RBK$ ,  $K^T B^T RBK$  خطی نخواهند بود. با تعمیم نتایج قضیه 1, قضیه 2 به منظور طراحی بهره‌ی K و به دست آوردن معیار پایداری به صورت زیر تعریف می‌گردد:

قضیه 2

سیستم حلقه بسته‌ی دارای تأخیر متغیر با زمان (2) پایدار مجانبی است اگر، ماتریس‌های مثبت معین  $P$ ,  $R$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $\bar{T}$ ,  $T$ ,  $\bar{R}$ ,  $R$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  و  $\tilde{S}_{12}$ ,  $\tilde{S}_{13}$ ,  $\tilde{S}_{23}$  وجود داشته باشند به گونه‌ای که،

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \dots & \Xi_{17} & \bar{d} \bar{P} A^T \\ * & \dots & \Xi_{27} & 0 \\ * & \ddots & \vdots & \bar{d} M^T B^T \\ * & * & \Xi_{77} & 0_{4 \times 1} \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & \tilde{S}_{12} \\ * & \tilde{T} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{T} & \tilde{S}_{13} \\ * & \tilde{T} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{T} & \tilde{S}_{23} \\ * & \tilde{T} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (29)$$

که در آن

$$\Xi_{11} = A \bar{P} + \bar{P} A + Z_1 + Z_2 + Z_3 - 4T$$

$$\Xi_{12} = -2T - \sum_{i=1, \dots, 4} \tilde{S}_i$$

$$\Xi_{22} = -8T - (1 - \dot{d}_1(t)) Z_1 + \sum_{i=1,2} (\tilde{S}_i + \tilde{S}_i^T) - \sum_{j=3,4} \tilde{S}_j + \tilde{S}_j^T$$

$$\Xi_{13} = BM + \sum_{i=1,3} \tilde{S}_i - \sum_{j=2,4,5,6,7,8} \tilde{S}_j$$

$$\Xi_{23} = 2T + \sum_{i=2,3,5,6} \tilde{S}_i - \sum_{j=1,4,7,8,9,10,11,12} \tilde{S}_j$$

$$\Xi_{33} = -8T - (1 - \dot{d}(t)) Z_2 + \sum_{i=9,10} (\tilde{S}_i + \tilde{S}_i^T) - \sum_{j=11,12} (\tilde{S}_j + \tilde{S}_j^T)$$

$$\Xi_{14} = -\sum_{i=6,8} \tilde{S}_i + \sum_{j=5,7} \tilde{S}_j$$

مثبت معین  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  و  $S_{23}$  وجود داشته باشند به گونه‌ای که،

$$\Psi_1 + \Psi_2 < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & S_{12} \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{R} & S_{13} \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \tilde{R} & S_{23} \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \text{sym}\{e_1 P e_8^T\} + e_1 Q_1 e_1^T - (1 - \bar{\tau}_1) e_2 Q_1 e_2^T + e_1 Q_2 e_1^T \\ &- (1 - \bar{\tau}) e_3 Q_2 e_3^T + e_1 Q_3 e_1^T - e_4 Q_3 e_4^T + \bar{d}^2 e_8 R e_8^T \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi_2 = -\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{R} & S_{12} & S_{13} \\ * & \tilde{R} & S_{23} \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

اثبات: جهت اثبات پایداری تابعی مناسب به صورت زیر انتخاب شده است:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) \quad (13)$$

$$V_1(t) = x^T(t) P x(t) \quad (14)$$

$$V_2(t) = \int_{t-d_1(t)}^t x^T(u) Q_1 x(u) du \quad (15)$$

$$V_3(t) = \int_{t-d(t)}^t x^T(u) Q_2 x(u) du \quad (16)$$

$$V_4(t) = \int_{t-\bar{d}}^t x^T(u) Q_3 x(u) du \quad (17)$$

$$V_5(t) = \bar{d} \int_{-\bar{d}}^0 \int_{t+\beta}^t x^T(u) R \dot{x}(u) du d\beta \quad (18)$$

برای این که شرط اول روش لیاپانف-کرافسکی برقرار باشد، باید  $V(t) > 0$  درنظر گرفته شود. با توجه به تابعی فوق، چون جملات تشکیل‌دهنده‌ی  $V(t)$  مرتعی<sup>1</sup> هستند، برای این که  $V(t)$  مثبت معین باشد، کافی است ماتریس‌های  $P$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  و  $Q_3$  مثبت معین باشند. براساس شرط دوم روش لیاپانف-کرافسکی، برای پایداری سیستم نیاز است  $\dot{V}(t, x_t) \leq 0$  برقرار گردد. به این منظور مشتق 5, ..., 5 به صورت زیر محاسبه شده است.

$$\dot{V}_i(t) = 2x^T(t) P \dot{x}(t) = 2\chi^T e_1 P e_8^T \chi \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= x^T(t) Q_1 x(t) \\ &- (1 - d_1(t)) x^T(t - d_1(t)) Q_1 x(t - d_1(t)) \\ &\leq \chi^T \{e_1 Q_1 e_1^T - (1 - \bar{\tau}_1) e_2 Q_1 e_2^T\} \chi \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= x^T(t) Q_2 x(t) \\ &- (1 - d(t)) x^T(t - d(t)) Q_2 x(t - d(t)) \\ &\leq \chi^T \{e_1 Q_2 e_1^T - (1 - \bar{\tau}) e_3 Q_2 e_3^T\} \chi \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) &= x^T(t) Q_3 x(t) - x^T(t - \bar{d}) Q_3 x(t - \bar{d}) \\ &= \chi^T \{e_1 Q_3 e_1^T - e_4 Q_3 e_4^T\} \chi \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(t) &= \bar{d}^2 \dot{x}(t)^T R x(t) - \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \\ &= \bar{d}^2 \chi^T e_8 R e_8^T \chi - \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \end{aligned} \quad (23)$$

بنابراین کران بالای (23) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \chi^T \Psi_1 \chi \\ &- \bar{d} \int_{t-d_1(t)}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \\ &- \bar{d} \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \\ &- \bar{d} \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از لم 1 و محاسبه کران بالای هریک از جملات انتگرالی در رابطه

(24)، کران بالای جمله‌ی  $\dot{V}(t)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

<sup>1</sup> Quadratic

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi - \begin{bmatrix} \bar{d}A^T R \\ 0 \\ \bar{d}K^T B^T R \\ 0_{4 \times 1} \end{bmatrix} (-R^{-1}) [\bar{d}RA \quad 0 \quad \bar{d}RBK \quad 0_{1 \times 4}] < 0 \quad (36)$$

با اعمال لم مکمل شور<sup>۱</sup> به نامساوی (36)، می‌توان برای معیار غیرخطی (35) یک نامساوی معادل به دست آورد. طبق تعریف این لم برای ماتریس متقاضان  $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0$ ، شرط  $S < 0$  معادل با برقراری دو شرط  $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0$  و  $S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0$  می‌باشد. براساس لم شور، نامساوی (36) معادل با نامساوی زیر به ابعاد  $8n \times 8n$  به ازای  $R > 0$  خواهد بود.

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{17} & \bar{d}A^T R \\ * & \dots & \Psi_{27} & 0 \\ * & \ddots & \vdots & \bar{d}K^T B^T R \\ * & * & \Psi_{77} & 0_{4 \times 1} \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

با توجه به اجزای تشکیل دهنده‌ی  $\hat{\Psi}$  درایه  $\Psi_{13}$  و  $\Psi_{31}$  به ترتیب دارای جمله  $PBK$  و ترانهاده آن هستند. با توجه به نامساوی ماتریسی (37) و وجود عناصر  $P, PBK$ ، این نامساوی یک رابطه غیرخطی برحسب متغیرهای تصمیم‌گیری می‌باشد. سپس به ترتیب ماتریس  $\Delta_1$  از چپ و راست در آن و ماتریس  $\Delta_2$  از چپ و راست در نامساوی (10) ضرب شده و تغییرات زیر برای متغیرها اعمال می‌گردد.

$$\Delta_1 := \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, R^{-1}\}$$

$$\Delta_2 := \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$$

$$\bar{P} := P^{-1}, \quad \bar{R} := R^{-1}, \quad \bar{T} := T^{-1}$$

$$\tilde{S}_l := P^{-1}S_lP^{-1}, \quad l = 1, \dots, 12$$

$$Z_l := P^{-1}Q_lP^{-1}, \quad l = 1, 2, 3$$

$$T := P^{-1}RP^{-1}$$

$$\bar{T} = \text{diag}\{T, 3T\}$$

$$\tilde{S}_{12} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_3 & \tilde{S}_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S}_{13} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_5 & \tilde{S}_6 \\ \tilde{S}_7 & \tilde{S}_8 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S}_{23} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_9 & \tilde{S}_{10} \\ \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \end{bmatrix} \quad (38)$$

با این تعاریف معیار پایداری مناسب به صورت قضیه 2 بدست آمده و بهره‌ی  $K$  نیز طراحی می‌گردد. از آن جایی که با ضرب  $\Delta_1$  در طرفین قضیه 1 ماتریس  $R$  از طریق دو عبارت  $R^{-1}$  و  $P^{-1}RP^{-1}$  در نامساوی وجود دارد پس نمی‌توان آن‌ها را به دو متغیر مستقل از هم تعریف نمود. وجود جمله‌ی  $P^{-1}RP^{-1}$  مسئله‌ی را به یک مسئله‌ی غیر محبد تبدیل می‌کند. از الگوریتم CCL معروف شده در [28] و تعریف  $T$  به منظور حل مسئله‌ی غیرمحبد استفاده شده است. استفاده از این الگوریتم، موجب اعمال نامساوی‌های دیگری نیز شده است. این الگوریتم مسئله‌ی غیرمحبد را به مکمک بهینه‌سازی غیرخطی و مبتنی بر LMI زیر تبدیل می‌کند:

$$\text{minimize } \text{tr}\{P\bar{P} + R\bar{R} + T\bar{T}\} \quad (39)$$

به طوری که قضیه 2 برقرار بوده و

$$\begin{bmatrix} \bar{T} & P \\ P & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & \bar{P} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} R & I \\ I & \bar{R} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} T & I \\ I & \bar{T} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

به کمک این الگوریتم بیشترین کران بالای تأخیر محاسبه می‌گردد.

## 5- شبیه‌سازی

در این بخش دو مثال به منظور نشان دادن مؤثر بودن مطالعات انجام شده، مورد استفاده قرار گرفته است. در توضیح مثال‌های شبیه‌سازی شده و با در نظر گرفتن فرض‌های موجود بر تأخیرها، شرط لازم برای پایداری لیپانف-

$$\begin{aligned} E_{15} &= 6T & E_{44} &= -4T - Z_3 \\ E_{35} &= -2\tilde{S}_3^T + 2 \sum_{i=4,7,8} \tilde{S}_i & E_{25} &= 6T + 2 \sum_{i=3,4} \tilde{S}_i^T \\ E_{55} &= -12T & E_{45} &= -2\tilde{S}_7^T + 2\tilde{S}_8^T \\ E_{26} &= 6T - 2\tilde{S}_2 + 2\tilde{S}_4 & E_{16} &= 2\tilde{S}_2 + 2\tilde{S}_4 \\ E_{46} &= -2\tilde{S}_{11}^T + 2\tilde{S}_{12}^T & E_{36} &= 6T + 2 \sum_{i=11,12} \tilde{S}_i^T \end{aligned}$$

$$E_{66} = -12T \quad E_{56} = -4\tilde{S}_4$$

$$E_{27} = -2\tilde{S}_6 + 2 \sum_{i=8,10,12} \tilde{S}_i \quad E_{17} = 2 \sum_{i=6,8} \tilde{S}_i$$

$$E_{47} = 6T \quad E_{37} = 6T - 2\tilde{S}_{10} + 2\tilde{S}_{12}$$

$$E_{67} = -4\tilde{S}_{12} \quad E_{57} = -4\tilde{S}_8$$

$$E_{77} = -12T \quad (30)$$

همچنین، بهره‌ی کنترل پایدار کننده نیز به صورت  $K = MP$  محاسبه می‌گردد.

اثبات: با توجه به  $\Psi_1$  در رابطه (11)، در صورتی که بهجای استفاده از بردارهای  $e_i, i = 1, \dots, 8$  در آن، به فرم گسترده بازنویسی گردد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \text{sym}\{e_1 Pe_8^T\} + e_1 Q_1 e_1^T - (1 - \bar{\tau}_1)e_2 Q_1 e_2^T \\ &+ e_1 Q_2 e_1^T - (1 - \bar{\tau})e_3 Q_2 e_3^T + e_1 Q_3 e_1^T - e_4 Q_3 e_4^T + \bar{d}^2 e_8 Re_8^T \\ &= \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 & \psi_{13} & 0 & 0_{4 \times 3} \\ * & \psi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \psi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \psi_{44} & 0_{3 \times 3} \\ * & & & & \end{bmatrix} \quad (31) \end{aligned}$$

که در آن

$$\psi_{11} = A^T P + PA + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \bar{d}^2 A^T RA$$

$$\psi_{22} = -(1 - d_1(t)) Q_1$$

$$\psi_{13} = PBK + \bar{d}^2 A^T RBK$$

$$\psi_{33} = -(1 - d(t)) Q_2 + \bar{d}^2 K^T B^T RBK$$

$$\psi_{44} = -Q_3 \quad (32)$$

همچنین برای بازنویسی  $\Psi_2$  در (12) به فرم گسترده نیاز است ماتریس‌های  $S_{12}, S_{13}$  و  $S_{23}$  که دارای ابعاد  $2n \times 2n$  و نامتقاضان می‌باشند به صورت زیر و به کمک درایه‌های  $n \times n$  بازنویسی شوند:

$$S_{12} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}, S_{13} = \begin{bmatrix} S_5 & S_6 \\ S_7 & S_8 \end{bmatrix}, S_{23} = \begin{bmatrix} S_9 & S_{10} \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \quad (33)$$

با این تعریف تغییرات مورد نظر بر ماتریس  $\Psi_2$  اعمال می‌گردد:

$$\Psi_2 = -\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 & S_1 & S_2 & S_5 & S_6 \\ * & 3R & S_3 & S_4 & S_7 & S_8 \\ * & * & R & 0 & S_9 & S_{10} \\ * & * & * & 3R & S_{11} & S_{12} \\ * & * & * & * & R & 0 \\ * & * & * & * & * & 3R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

با احتساب  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  به این فرم، نامساوی اصلی در معادله (9) به صورت زیر به ابعاد  $7n \times 7n$  نوشته می‌شود:

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi + \begin{bmatrix} \bar{d}^2 A^T RA & 0 & \bar{d}^2 A^T RBK & 0_{3 \times 4} \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{d}^2 K^T B^T RBK & 0_{4 \times 4} \\ * & * & * & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

که در آن ماتریس  $\Psi$  دارای جملات خطی به شکل  $\Psi_{ij}$  و برحسب  $S_i$  ها است.

در نتیجه خواهیم داشت:

<sup>1</sup> Schur complements

جدول 1 بیشترین کران بالای تأخیر  $d_2(t)$  به ازای  $\bar{d}_1$  معلوم

Table 1 Maximum upper bound of $d_2(t)$ for given $\bar{d}_1$				
تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری	$d_1=1.5$	$d_1=1.2$	$d_1=1$	روش
59	0.248	0.340	0.415	[18]
85	0.283	0.406	0.512	[19]
63	0.372	0.672	0.872	قیاسیه 1

جدول 2 بیشترین کران بالای تأخیر  $d_1(t)$  به ازای  $\bar{d}_2$  معلوم

Table 2 Maximum upper bound of $d_1(t)$ for given $\bar{d}_2$				
تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری	$d_2=1.5$	$d_2=1.2$	$d_2=1$	روش
59	Infeasible	0.090	0.212	[18]
85	Infeasible	0.178	0.378	[19]
63	0.372	0.672	0.872	قیاسیه 1

براساس نتایج جدول 2، روش پیشنهادی در این پژوهش علاوه بر محافظه‌کاری کمتر، محدودیتی نیز بر  $d_2(t)$  ندارد. پس با توجه به جداول و نتایج حاصل شده کارآمدی روش ارائه شده برای آنالیز پایداری در این مقاله به خوبی نشان داده شده است.

### مثال 2

سیستم یک ماہواره که در [29,6] مورد بررسی قرار گرفته در نظر گرفته شده است. ساختار این سیستم در "شکل 2" نشان داده شده است [29]. با توجه به "شکل 2"، مدل سیستم ماہواره از دو بدنی سخت که توسط یک فر با گشتاور ثابت  $k$  و نسبت میرای ویسکوزیته  $d$  به هم متصل شده‌اند، تشکیل است. در حالت عدم وجود اختشاش معادله‌ی دینامیکی سیستم به صورت زیر توصیف می‌گردد:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1(t) + d(\ddot{\theta}_1(t) - \ddot{\theta}_2(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) &= u(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) + d(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن،  $J_1$  و  $J_2$  اینترسی دو بدن،  $\theta_1(t)$  و  $\theta_2(t)$  زاویه‌ی انحراف<sup>1</sup> برای دو بدن و  $u(t)$  گشتاور کنترلی است. بردار حالت به صورت  $x(t) = [x_1 \ x_2]^T$  تعریف شده و به این طریق مدل سیستم به صورت زیر توصیف شده است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -d & d \\ k & -k & d & -d \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (45)$$

با انتخاب  $1 = J_1 = J_2 = 1$ ،  $d = 0.04$  و  $k = 0.09$ ، مطابق [26]، ماتریس‌های موجود در (41) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.004 & 0.004 \\ 0.3 & -0.3 & 0.004 & -0.004 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

مقادیر ویژه‌ی  $A$  برابر با  $\{0, 0.004 \pm 0.774i, 0\}$  است و لذا سیستم حلقه باز ناپایدار است. با فرض وجود دو تأخیر متغیر با زمان  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  در حالت‌های مدل این سیستم، با استفاده از قیاسیه 2 بهره‌ی کنترلی پایدار گفتنه طراحی شده و کران بالای تأخیر  $d_2(t)$  با فرض  $\bar{d}_1$  معلوم و بر عکس، برای این سیستم به دست می‌آید. به منظور نمایش تأثیر مطالعه‌ی صورت گرفته در این مقاله در کاهش محافظه‌کاری، مقادیر مختلف برای کران بالای  $d_1(t)$  و با

کرافسکی NCS دارای تأخیر متغیر با زمان برقراری روابط (9) و (10) می‌باشد. رابطه‌ی (9) بیان می‌کند که برای  $d \in [0, \bar{d}] \times [\bar{d}, \bar{d}]$  اگر شرط زیر برقرار باشد مشتق LKF همواره منفی معین خواهد بود.

$$\Psi_1(d, \bar{d}) + \Psi_2(d, d) < 0 \quad (42)$$

از آن جایی که ماتریس‌های  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  بر حسب تأخیر  $d(t)$  و مشتق آن  $d(t)$  به صورت مناسب می‌باشند مسئله به صورت محدود فرموله شده است بنابراین در صورتی که نامساوی فوق در نقاط رأس بازه  $\times [\bar{d}, \bar{d}]$  برقرار باشد به ازای تمامی مقادیر  $d(t)$  و  $\dot{d}(t)$  درون بازه نیز برقرار خواهد بود. لذا در مثال‌ها و جداول این مقاله و تحقیقات مشابه نیز با معیار در نظر گرفتن کران‌های تأخیر سعی شده است پایداری سیستم تأخیردار مورد بررسی قرار گیرد و نیازی به بررسی مقادیر تأخیر درون بازه تغییرات نیست. در این مقاله مشابه با برخی مطالعات پایداری NCS که در آن‌ها دو نوع تأخیر به صورت جداگانه در نظر گرفته می‌شود، فرض شده است کران پایین تأخیرها صفر می‌باشند یعنی  $\bar{d}_1 \leq d_1(t) \leq \bar{d}_2$  و  $0 \leq d_2(t) \leq \bar{d}_2$ . به این صورت برای محاسبه‌ی هر کدام از کران‌های بالا نیاز است مقدار کران بالای دیگری معلوم فرض شود. در واقع، برای مقایسه، کران بالای تأخیرها به عنوان معیار در نظر گرفته شده است.

### مثال 1

برای ارزیابی کارایی قضایای به دست آمده در تحلیل پایداری NCS در فصل قبل، مثال عددی معروفی که به عنوان مثال معیار در مطالعات متعددی در نظر گرفته شده مورد بررسی قرار گرفته است [21,15]. در این مثال سیستم (6) با مقادیر ماتریسی زیر در نظر گرفته شده است:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

همچنین فرض شده است که تغییرات دو تأخیر  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$ ، یعنی مشتق آن‌ها، به صورت  $d_1(t) \leq 0.1$  و  $d_2(t) \leq 0.8$  باشند. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد دینامیک بخش بدون تأخیر سیستم یک دینامیک پایدار است زیرا مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $A$  برابر با  $-2$  و  $-0.9$  است. پس تنها عامل ناپایداری این سیستم خطی وجود تأخیر می‌باشد. وجود تأخیر تا حدودی، همچنان پایداری را برهم نمی‌زند پس محاسبه‌ی این حدود یا کران اهمیت دارد.

در جدول 1 برای محاسبه‌ی بیشترین حالت تأخیر  $(d_2)$  که با  $\bar{d}_2$  نمایش داده می‌شود،  $d_1(t)$  معلوم در نظر گرفته شده است. با اعمال سه وضعیت معلوم برای  $d_1$ ،  $d_2$  محاسبه گردیده است. سه ردیف اول این جدول نتایج روش‌های اعمال شده به ترتیب در [18] و [19] را نشان می‌دهد. در [18] با تعریف یک تابعی لیبانف-کرافسکی و با استفاده از روش نیوتون-لیبنیز و با تعداد 59 متغیر، در [19] به کمک تکنیک‌های جدید ادغام با لیبنیز و با تعداد 63 متغیر، در [26] به دست می‌آید. مطالعه شده و نتایج فرمول نیوتون-لیبنیز و با تعداد 85 متغیر، آنالیز پایداری مطالعه شده و نتایج آن ارائه گردیده است. در ردیف بعدی این جدول نتایج آنالیز در قیاسیه 1 ارائه شده است. با ملاحظه‌ی این نتایج، دیده می‌شود که قیاسیه 1 با تعداد متغیرهای نزدیک به [18] و [19] نتایج بسیار بهتر و محافظه‌کاری کمتری دارند. حال با محاسبه‌ی بیشترین حالت تأخیر  $d_1(t)$  که با  $\bar{d}_1$  نمایش داده می‌شود، و با فرض معلوم بودن  $d_2(t)$  جدول 2 حاصل می‌گردد. در این جدول، همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش‌های [18] و [19] دارای محدودیت بوده و قادر به تخمین بیشترین کران بالا برای  $d_1(t)$  به ازای هر روش منطقی برای  $d_2(t)$  نیستند. علاوه بر این، میزان کران تخمینی این دو روش با محافظه‌کاری زیادی همراه است.

<sup>1</sup> Viscous damping

<sup>2</sup> Yaw angles

برابر با 0.501 و بهره‌ی کنترل کننده  $[11]$  بیشترین مقدار تأخیر به دست آمده است. در  $[11]$  بیشترین مقدار برای  $d_2(t)$  برابر با 0.621 به دست آمده است. بنابراین علاوه بر تعیین محدوده تغییرات هر دو تأخیر، محدوده تغییر  $d(t)$  نیز با محافظه‌کاری کمتر به دست آمده است.

با فرض شرایط اولیه برای حالت‌های مدل دینامیکی ماهواره به صورت  $x(0) = [-0.1 \ 0.5 \ -0.3 \ 0.2]^T$  نمودار حالت‌های آن تحت بهره‌ی فیدبک  $K$  در "شکل 3" نشان داده شده است که نشان می‌دهد تحت کنترل-کننده طراحی شده، حالت‌های سیستم پایدار می‌گردند.

## 6- نتیجه‌گیری

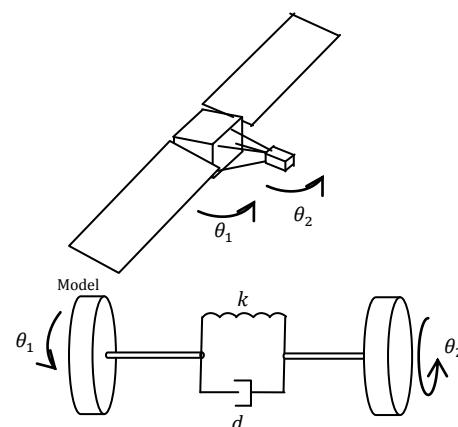
در این مقاله آنالیز پایداری و پایدارسازی NCS مورد مطالعه قرار گرفته است. در ابتدا یک LKF مناسب انتخاب شده است. سپس با بهره‌گیری از نامساوی میتني بر ویرتینگر و نامساوی ترکیب مقابلاً محدب یک معیار پایداری جدید به دست آمده است. نتایج به دست آمده براساس این معیار، دارای محافظه‌کاری کمتری نسبت به برخی مطالعات گذشته است. براساس معیار معرفی شده نیز طراحی کنترل کننده فیدبک حالت برای تضمین پایداری مجانی NCS صورت گرفته است. درنهایت با استفاده مثال‌های کاربردی از جمله سیستم یک ماهواره کاهش محافظه‌کاری و تأثیر مطالعه صورت گرفته نشان داده می‌شود.

## 7- فهرست عالیم

$\mathbb{R}^n$	فضای اقلیدسی با ابعاد $1 \times n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	فضای اقلیدسی با ابعاد $n \times m$
$\mathbb{C}$	مجموعه‌ی توابع پیوسته و مشتق‌پذیر
diag $\{\cdot\}$	ماتریس قطری
$I$	ماتریس همانی با ابعاد $n \times n$
0	ماتریس صفر با ابعاد $n \times n$
$0_{1 \times 4}$	ماتریس صفر با ابعاد $n \times 4n$
*	درایه‌ی متقارن در یک ماتریس متقارن
$P > 0$	ماتریس حقیقی مثبت معین و متقارن
$X + X^T$	$\text{sym}\{X\}$
$e_i$	ماتریس ضربی $i$ ام
$\bar{d}$	کران بالای تأخیر $(t)$
$tr$	مجموع درایه‌های روی قطر
بالا نویس‌ها	
T	ترانهاده ماتریس
$-1$	معکوس ماتریس

## 8- پیوست

در قضیه 2 به منظور تبدیل مسئله غیرمحدب به مسئله بهینه‌سازی غیرخطی و میتني بر LMI از الگوریتم CCL استفاده می‌شود. ایده‌ی اصلی این الگوریتم، این است که اگر  $\begin{bmatrix} T & I \\ I & \bar{T} \end{bmatrix} \geq 0$  به ازای متغیرهای ماتریسی  $T$  و  $\bar{T}$  با ابعاد  $n \times n$  برقرار باشد، آنگاه برای مجموع درایه‌های روی قطر<sup>۱</sup> داریم:  $\text{tr}(T\bar{T}) \geq n$  (۱)



شکل 2 نمای مدل یک ماهواره [29]

شکل 2 نمای مدل یک ماهواره [29]

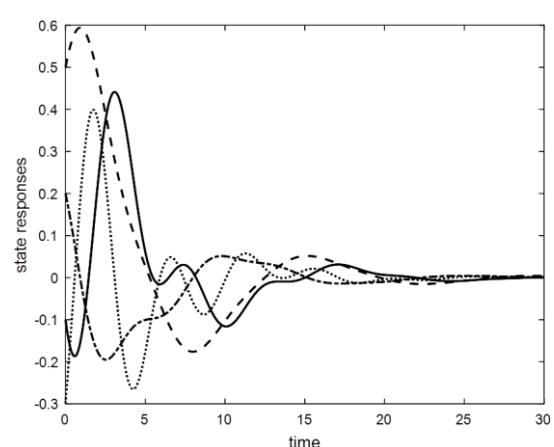
فرض ۱  $d(t) + d_1(t) + d_2(t) = 0$  در نظر گرفته شده است. در تحقیقات [۶] و [۱۱] به عنوان مجموع تمام تأخیرهای موجود در NCS با مشتق برابر با  $d$  در نظر گرفته شده است. سپس کران بالای این تأخیر با فرض کران پایین معلوم محاسبه شده است. از آنجایی که با فرض‌های در نظر گرفته شده بر NCS دارای دو تأخیر، می‌توان عملکرد این دو حالت را معادل هم قرار داد بنابراین نتایج مطالعه‌ی صورت گرفته در این مقاله با نتایج [۶] و [۱۱] در جدول 3 مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

همان‌طور که مشاهده می‌گردد محافظه‌کاری نتایج این پژوهش کمتر از نتایج گذشته است. به طور مثال برای  $\bar{d}_1 = 0.18$  (یا همان کران پایین تأخیر در مدل موردنظر در مقالات ذکر شده) بیشترین مقداری که در [۶] محاسبه شده است برابر با 0.232 است. این مقدار با بهره‌ی کنترلی به صورت 0.0166 قضیه 2

جدول 3 کران بالای تأخیر  $d_2(t)$  با  $\bar{d}_1$  متفاوت با بهره‌ی کنترلی نامعلوم در مثال 2

Table 3 Maximum upper bounds with unknown state feedback gain for  $d_2(t)$  with different  $\bar{d}_1$  for Example 2

0.18	0.15	0.1	0.07	0.03	0.01	$\bar{d}_1$
0.232	0.253	0.291	0.315	0.347	0.362	[6]
0.501	0.506	0.508	0.513	0.515	0.519	[11]
0.621	0.687	0.701	0.795	0.799	0.801	قضیه 2



شکل 3 پاسخ حالت مثال 2 دارای تأخیرهای متغیر با زمان تحت کنترل کننده

طراحی شده در قضیه 2

- [5] P. Seiler, R. Sengupta, An  $H^\infty$  approach to networked control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 3, pp. 356–364, 2005.
- [6] J. Dai, A delay system approach to networked control systems with limited communication capacity, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 347, No. 7, pp. 1334–1352, 2010.
- [7] Y. He, G. P. Liu, D. Rees, M. Wu, Improved stabilisation method for networked control systems, *IET Control Theory & Applications*, Vol. 1, No. 6, pp. 1580–1585, 2007.
- [8] J. Xiong, J. Lam, Stabilization of networked control systems with a logic ZOH, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 2, pp. 358–363, 2009.
- [9] T. H. Lee, J. H. Park, H. Y. Jung, O. M. Kwon, S. Lee, Improved Results on Stability of Time-delay Systems using Wirtinger-based Inequality, *IFAC Proceedings Volumes*, Vol. 47, No. 3, pp. 6826–6830, 2014.
- [10] A. Farnam, R. Mahboobi Esfanjani, Improved linear matrix inequality approach to stability analysis of linear systems with interval time-varying delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 294, No. 1, pp. 49–56, 2016.
- [11] Z. Li, Y. Bai, C. Huang, Y. Cai, Novel delay-partitioning stabilization approach for networked control system via Wirtinger-based inequalities, *ISA transactions*, Vol. 61, No. November, pp. 75–86, 2016.
- [12] B. Tang, G. Liu, W. Gui, Improvement of state feedback controller design for networked control systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 55, No. 5, pp. 464–468, 2008.
- [13] H. Zeng, Y. He, S. Member, M. Wu, S. Member, Free-matrix-based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 60, No. 10, pp. 2768–2772, 2015.
- [14] K. Gu, J. Chen, V. Kharitonov, *Stability of time-delay systems*, pp. 300–320, Berlin: Springer Science & Business Media, 2003.
- [15] A. Seuret, F. Gouaisbaut, Wirtinger-based integral inequality : Application to time-delay systems, *Automatica*, Vol. 49, No. 9, pp. 2860–2866, 2013.
- [16] Y. Liu, M. Li, An improved delay-dependent stability criterion of networked control systems, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 351, No. 3, pp. 1540–1552, 2014.
- [17] H. Zhang, Z. Zhang, Z. Wang, Q. Shan, New results on stability and stabilization of networked control systems with short time-varying delay, *IEEE transactions on cybernetics*, Vol. 46, No. 12, pp. 2772–2781, 2016.
- [18] J. Lam, H. Gao, C. Wang, Stability analysis for continuous systems with two additive time-varying delay components, *Systems & Control Letters*, Vol. 56, No. 1, pp. 16–24, 2007.
- [19] H. Gao, T. Chen, J. Lam, A new delay system approach to network-based control, *Automatica*, Vol. 44, No. 1, pp. 39–52, 2008.
- [20] J. Cheng, L. Xiong, Improved integral inequality approach on stabilization for continuous-time systems with time-varying input delay, *Neurocomputing*, Vol. 160, No. 1, pp. 274–280, 2015.
- [21] P. Park, J. Wan, C. Jeong, Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, *Automatica*, Vol. 47, No. 1, pp. 235–238, 2011.
- [22] M. Park, O. Kwon, J. H. Park, S. Lee, E. Cha, Stability of time-delay systems via Wirtinger-based double integral inequality, *Automatica*, Vol. 55, No. 1, pp. 204–208, 2015.
- [23] S. Xu, J. Lam, A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 39, No. 12, pp. 1095–1113, 2008.
- [24] L. Hu, T. Bai, P. Shi, Z. Wu, Sampled-data control of networked linear control systems, *Automatica*, Vol. 43, No. 5, pp. 903–911, 2007.
- [25] H. Zhang, Y. Shi, S. Member, A. S. Mehr, Robust static Output feedback control and remote PID design for networked motor systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 58, No. 12, pp. 5396–5405, 2011.
- [26] D. Yue, Q. Han, C. Peng, State feedback controller design of networked control systems, *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*, Taipei, Taiwan, September 2–4, 2004.
- [27] Y. Shi, B. Yu, Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by markov chains, *IEEE*

و  $\text{tr}(T\bar{T}) = I$  اگر و تنها اگر  $T\bar{T} = I$  با معکوس  $T$  برابرگردد، خواهیم داشت  $T\bar{T} = I$ . پس می‌توان از بررسی شرط  $\text{tr}(T\bar{T}) = n$  برای بهینه‌سازی متغیرهای ماتریسی،  $P$ ، استفاده نمود. اکنون با استفاده از الگوریتم CCL مسئله غیرمحاسب ذکر شده به مسئله زیر تبدیل می‌گردد.

$$\text{minimize } \text{tr}\{P\bar{P} + R\bar{R} + T\bar{T}\} \quad (2)$$

به طوری که،

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & \bar{P} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} R & I \\ I & \bar{R} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} T & I \\ I & \bar{T} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3)$$

در این صورت بیشترین مقدار تأخیر برای  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  با الگوریتم زیر محاسبه می‌گردد:

### گام اول

انتخاب ۱ انتخاب  $\bar{d}_2(t) = \bar{d}_1(t) = \bar{d}_2$ ،  $d_1(t) = \bar{d}_2$ ،  $d_2(t) = \bar{d}_1$  به اندازه کافی کوچک به گونه‌ای که یک پاسخ برای LMIهای (28)، (29) و (40) موجود باشد.

### گام دوم

یافتن یک مجموعه پایداری  $(\bar{T}, \bar{P}, \bar{R}, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4, \bar{Z}_5, \bar{Z}_6, \bar{Z}_7, \bar{Z}_8, \bar{Z}_9, \bar{Z}_{10}, \bar{Z}_{11}, \bar{Z}_{12}, \bar{Z}_{13}, \bar{Z}_{14}, \bar{Z}_{15}, \bar{Z}_{16}, \bar{Z}_{17}, \bar{Z}_{18}, \bar{Z}_{19}, \bar{Z}_{20}, \bar{Z}_{21}, \bar{Z}_{22}, \bar{Z}_{23}, \bar{Z}_{24}, \bar{Z}_{25}, \bar{Z}_{26}, \bar{Z}_{27}, \bar{Z}_{28}, \bar{Z}_{29}, \bar{Z}_{30}, \bar{Z}_{31}, \bar{Z}_{32}, \bar{Z}_{33}, \bar{Z}_{34}, \bar{Z}_{35}, \bar{Z}_{36}, \bar{Z}_{37}, \bar{Z}_{38}, \bar{Z}_{39}, \bar{Z}_{40}, \bar{Z}_{41}, \bar{Z}_{42}, \bar{Z}_{43}, \bar{Z}_{44}, \bar{Z}_{45}, \bar{Z}_{46}, \bar{Z}_{47}, \bar{Z}_{48}, \bar{Z}_{49}, \bar{Z}_{50}, \bar{Z}_{51}, \bar{Z}_{52}, \bar{Z}_{53}, \bar{Z}_{54}, \bar{Z}_{55}, \bar{Z}_{56}, \bar{Z}_{57}, \bar{Z}_{58}, \bar{Z}_{59}, \bar{Z}_{60}, \bar{Z}_{61}, \bar{Z}_{62}, \bar{Z}_{63}, \bar{Z}_{64}, \bar{Z}_{65}, \bar{Z}_{66}, \bar{Z}_{67}, \bar{Z}_{68}, \bar{Z}_{69}, \bar{Z}_{70}, \bar{Z}_{71}, \bar{Z}_{72}, \bar{Z}_{73}, \bar{Z}_{74}, \bar{Z}_{75}, \bar{Z}_{76}, \bar{Z}_{77}, \bar{Z}_{78}, \bar{Z}_{79}, \bar{Z}_{80}, \bar{Z}_{81}, \bar{Z}_{82}, \bar{Z}_{83}, \bar{Z}_{84}, \bar{Z}_{85}, \bar{Z}_{86}, \bar{Z}_{87}, \bar{Z}_{88}, \bar{Z}_{89}, \bar{Z}_{90}, \bar{Z}_{91}, \bar{Z}_{92}, \bar{Z}_{93}, \bar{Z}_{94}, \bar{Z}_{95}, \bar{Z}_{96}, \bar{Z}_{97}, \bar{Z}_{98}, \bar{Z}_{99}, \bar{Z}_{100}, \bar{Z}_{101}, \bar{Z}_{102}, \bar{Z}_{103}, \bar{Z}_{104}, \bar{Z}_{105}, \bar{Z}_{106}, \bar{Z}_{107}, \bar{Z}_{108}, \bar{Z}_{109}, \bar{Z}_{110}, \bar{Z}_{111}, \bar{Z}_{112}, \bar{Z}_{113}, \bar{Z}_{114}, \bar{Z}_{115}, \bar{Z}_{116}, \bar{Z}_{117}, \bar{Z}_{118}, \bar{Z}_{119}, \bar{Z}_{120}, \bar{Z}_{121}, \bar{Z}_{122}, \bar{Z}_{123}, \bar{Z}_{124}, \bar{Z}_{125}, \bar{Z}_{126}, \bar{Z}_{127}, \bar{Z}_{128}, \bar{Z}_{129}, \bar{Z}_{130}, \bar{Z}_{131}, \bar{Z}_{132}, \bar{Z}_{133}, \bar{Z}_{134}, \bar{Z}_{135}, \bar{Z}_{136}, \bar{Z}_{137}, \bar{Z}_{138}, \bar{Z}_{139}, \bar{Z}_{140}, \bar{Z}_{141}, \bar{Z}_{142}, \bar{Z}_{143}, \bar{Z}_{144}, \bar{Z}_{145}, \bar{Z}_{146}, \bar{Z}_{147}, \bar{Z}_{148}, \bar{Z}_{149}, \bar{Z}_{150}, \bar{Z}_{151}, \bar{Z}_{152}, \bar{Z}_{153}, \bar{Z}_{154}, \bar{Z}_{155}, \bar{Z}_{156}, \bar{Z}_{157}, \bar{Z}_{158}, \bar{Z}_{159}, \bar{Z}_{160}, \bar{Z}_{161}, \bar{Z}_{162}, \bar{Z}_{163}, \bar{Z}_{164}, \bar{Z}_{165}, \bar{Z}_{166}, \bar{Z}_{167}, \bar{Z}_{168}, \bar{Z}_{169}, \bar{Z}_{170}, \bar{Z}_{171}, \bar{Z}_{172}, \bar{Z}_{173}, \bar{Z}_{174}, \bar{Z}_{175}, \bar{Z}_{176}, \bar{Z}_{177}, \bar{Z}_{178}, \bar{Z}_{179}, \bar{Z}_{180}, \bar{Z}_{181}, \bar{Z}_{182}, \bar{Z}_{183}, \bar{Z}_{184}, \bar{Z}_{185}, \bar{Z}_{186}, \bar{Z}_{187}, \bar{Z}_{188}, \bar{Z}_{189}, \bar{Z}_{190}, \bar{Z}_{191}, \bar{Z}_{192}, \bar{Z}_{193}, \bar{Z}_{194}, \bar{Z}_{195}, \bar{Z}_{196}, \bar{Z}_{197}, \bar{Z}_{198}, \bar{Z}_{199}, \bar{Z}_{200}, \bar{Z}_{201}, \bar{Z}_{202}, \bar{Z}_{203}, \bar{Z}_{204}, \bar{Z}_{205}, \bar{Z}_{206}, \bar{Z}_{207}, \bar{Z}_{208}, \bar{Z}_{209}, \bar{Z}_{210}, \bar{Z}_{211}, \bar{Z}_{212}, \bar{Z}_{213}, \bar{Z}_{214}, \bar{Z}_{215}, \bar{Z}_{216}, \bar{Z}_{217}, \bar{Z}_{218}, \bar{Z}_{219}, \bar{Z}_{220}, \bar{Z}_{221}, \bar{Z}_{222}, \bar{Z}_{223}, \bar{Z}_{224}, \bar{Z}_{225}, \bar{Z}_{226}, \bar{Z}_{227}, \bar{Z}_{228}, \bar{Z}_{229}, \bar{Z}_{230}, \bar{Z}_{231}, \bar{Z}_{232}, \bar{Z}_{233}, \bar{Z}_{234}, \bar{Z}_{235}, \bar{Z}_{236}, \bar{Z}_{237}, \bar{Z}_{238}, \bar{Z}_{239}, \bar{Z}_{240}, \bar{Z}_{241}, \bar{Z}_{242}, \bar{Z}_{243}, \bar{Z}_{244}, \bar{Z}_{245}, \bar{Z}_{246}, \bar{Z}_{247}, \bar{Z}_{248}, \bar{Z}_{249}, \bar{Z}_{250}, \bar{Z}_{251}, \bar{Z}_{252}, \bar{Z}_{253}, \bar{Z}_{254}, \bar{Z}_{255}, \bar{Z}_{256}, \bar{Z}_{257}, \bar{Z}_{258}, \bar{Z}_{259}, \bar{Z}_{260}, \bar{Z}_{261}, \bar{Z}_{262}, \bar{Z}_{263}, \bar{Z}_{264}, \bar{Z}_{265}, \bar{Z}_{266}, \bar{Z}_{267}, \bar{Z}_{268}, \bar{Z}_{269}, \bar{Z}_{270}, \bar{Z}_{271}, \bar{Z}_{272}, \bar{Z}_{273}, \bar{Z}_{274}, \bar{Z}_{275}, \bar{Z}_{276}, \bar{Z}_{277}, \bar{Z}_{278}, \bar{Z}_{279}, \bar{Z}_{280}, \bar{Z}_{281}, \bar{Z}_{282}, \bar{Z}_{283}, \bar{Z}_{284}, \bar{Z}_{285}, \bar{Z}_{286}, \bar{Z}_{287}, \bar{Z}_{288}, \bar{Z}_{289}, \bar{Z}_{290}, \bar{Z}_{291}, \bar{Z}_{292}, \bar{Z}_{293}, \bar{Z}_{294}, \bar{Z}_{295}, \bar{Z}_{296}, \bar{Z}_{297}, \bar{Z}_{298}, \bar{Z}_{299}, \bar{Z}_{300}, \bar{Z}_{301}, \bar{Z}_{302}, \bar{Z}_{303}, \bar{Z}_{304}, \bar{Z}_{305}, \bar{Z}_{306}, \bar{Z}_{307}, \bar{Z}_{308}, \bar{Z}_{309}, \bar{Z}_{310}, \bar{Z}_{311}, \bar{Z}_{312}, \bar{Z}_{313}, \bar{Z}_{314}, \bar{Z}_{315}, \bar{Z}_{316}, \bar{Z}_{317}, \bar{Z}_{318}, \bar{Z}_{319}, \bar{Z}_{320}, \bar{Z}_{321}, \bar{Z}_{322}, \bar{Z}_{323}, \bar{Z}_{324}, \bar{Z}_{325}, \bar{Z}_{326}, \bar{Z}_{327}, \bar{Z}_{328}, \bar{Z}_{329}, \bar{Z}_{330}, \bar{Z}_{331}, \bar{Z}_{332}, \bar{Z}_{333}, \bar{Z}_{334}, \bar{Z}_{335}, \bar{Z}_{336}, \bar{Z}_{337}, \bar{Z}_{338}, \bar{Z}_{339}, \bar{Z}_{340}, \bar{Z}_{341}, \bar{Z}_{342}, \bar{Z}_{343}, \bar{Z}_{344}, \bar{Z}_{345}, \bar{Z}_{346}, \bar{Z}_{347}, \bar{Z}_{348}, \bar{Z}_{349}, \bar{Z}_{350}, \bar{Z}_{351}, \bar{Z}_{352}, \bar{Z}_{353}, \bar{Z}_{354}, \bar{Z}_{355}, \bar{Z}_{356}, \bar{Z}_{357}, \bar{Z}_{358}, \bar{Z}_{359}, \bar{Z}_{360}, \bar{Z}_{361}, \bar{Z}_{362}, \bar{Z}_{363}, \bar{Z}_{364}, \bar{Z}_{365}, \bar{Z}_{366}, \bar{Z}_{367}, \bar{Z}_{368}, \bar{Z}_{369}, \bar{Z}_{370}, \bar{Z}_{371}, \bar{Z}_{372}, \bar{Z}_{373}, \bar{Z}_{374}, \bar{Z}_{375}, \bar{Z}_{376}, \bar{Z}_{377}, \bar{Z}_{378}, \bar{Z}_{379}, \bar{Z}_{380}, \bar{Z}_{381}, \bar{Z}_{382}, \bar{Z}_{383}, \bar{Z}_{384}, \bar{Z}_{385}, \bar{Z}_{386}, \bar{Z}_{387}, \bar{Z}_{388}, \bar{Z}_{389}, \bar{Z}_{390}, \bar{Z}_{391}, \bar{Z}_{392}, \bar{Z}_{393}, \bar{Z}_{394}, \bar{Z}_{395}, \bar{Z}_{396}, \bar{Z}_{397}, \bar{Z}_{398}, \bar{Z}_{399}, \bar{Z}_{400}, \bar{Z}_{401}, \bar{Z}_{402}, \bar{Z}_{403}, \bar{Z}_{404}, \bar{Z}_{405}, \bar{Z}_{406}, \bar{Z}_{407}, \bar{Z}_{408}, \bar{Z}_{409}, \bar{Z}_{410}, \bar{Z}_{411}, \bar{Z}_{412}, \bar{Z}_{413}, \bar{Z}_{414}, \bar{Z}_{415}, \bar{Z}_{416}, \bar{Z}_{417}, \bar{Z}_{418}, \bar{Z}_{419}, \bar{Z}_{420}, \bar{Z}_{421}, \bar{Z}_{422}, \bar{Z}_{423}, \bar{Z}_{424}, \bar{Z}_{425}, \bar{Z}_{426}, \bar{Z}_{427}, \bar{Z}_{428}, \bar{Z}_{429}, \bar{Z}_{430}, \bar{Z}_{431}, \bar{Z}_{432}, \bar{Z}_{433}, \bar{Z}_{434}, \bar{Z}_{435}, \bar{Z}_{436}, \bar{Z}_{437}, \bar{Z}_{438}, \bar{Z}_{439}, \bar{Z}_{440}, \bar{Z}_{441}, \bar{Z}_{442}, \bar{Z}_{443}, \bar{Z}_{444}, \bar{Z}_{445}, \bar{Z}_{446}, \bar{Z}_{447}, \bar{Z}_{448}, \bar{Z}_{449}, \bar{Z}_{450}, \bar{Z}_{451}, \bar{Z}_{452}, \bar{Z}_{453}, \bar{Z}_{454}, \bar{Z}_{455}, \bar{Z}_{456}, \bar{Z}_{457}, \bar{Z}_{458}, \bar{Z}_{459}, \bar{Z}_{460}, \bar{Z}_{461}, \bar{Z}_{462}, \bar{Z}_{463}, \bar{Z}_{464}, \bar{Z}_{465}, \bar{Z}_{466}, \bar{Z}_{467}, \bar{Z}_{468}, \bar{Z}_{469}, \bar{Z}_{470}, \bar{Z}_{471}, \bar{Z}_{472}, \bar{Z}_{473}, \bar{Z}_{474}, \bar{Z}_{475}, \bar{Z}_{476}, \bar{Z}_{477}, \bar{Z}_{478}, \bar{Z}_{479}, \bar{Z}_{480}, \bar{Z}_{481}, \bar{Z}_{482}, \bar{Z}_{483}, \bar{Z}_{484}, \bar{Z}_{485}, \bar{Z}_{486}, \bar{Z}_{487}, \bar{Z}_{488}, \bar{Z}_{489}, \bar{Z}_{490}, \bar{Z}_{491}, \bar{Z}_{492}, \bar{Z}_{493}, \bar{Z}_{494}, \bar{Z}_{495}, \bar{Z}_{496}, \bar{Z}_{497}, \bar{Z}_{498}, \bar{Z}_{499}, \bar{Z}_{500}, \bar{Z}_{501}, \bar{Z}_{502}, \bar{Z}_{503}, \bar{Z}_{504}, \bar{Z}_{505}, \bar{Z}_{506}, \bar{Z}_{507}, \bar{Z}_{508}, \bar{Z}_{509}, \bar{Z}_{510}, \bar{Z}_{511}, \bar{Z}_{512}, \bar{Z}_{513}, \bar{Z}_{514}, \bar{Z}_{515}, \bar{Z}_{516}, \bar{Z}_{517}, \bar{Z}_{518}, \bar{Z}_{519}, \bar{Z}_{520}, \bar{Z}_{521}, \bar{Z}_{522}, \bar{Z}_{523}, \bar{Z}_{524}, \bar{Z}_{525}, \bar{Z}_{526}, \bar{Z}_{527}, \bar{Z}_{528}, \bar{Z}_{529}, \bar{Z}_{530}, \bar{Z}_{531}, \bar{Z}_{532}, \bar{Z}_{533}, \bar{Z}_{534}, \bar{Z}_{535}, \bar{Z}_{536}, \bar{Z}_{537}, \bar{Z}_{538}, \bar{Z}_{539}, \bar{Z}_{540}, \bar{Z}_{541}, \bar{Z}_{542}, \bar{Z}_{543}, \bar{Z}_{544}, \bar{Z}_{545}, \bar{Z}_{546}, \bar{Z}_{547}, \bar{Z}_{548}, \bar{Z}_{549}, \bar{Z}_{550}, \bar{Z}_{551}, \bar{Z}_{552}, \bar{Z}_{553}, \bar{Z}_{554}, \bar{Z}_{555}, \bar{Z}_{556}, \bar{Z}_{557}, \bar{Z}_{558}, \bar{Z}_{559}, \bar{Z}_{560}, \bar{Z}_{561}, \bar{Z}_{562}, \bar{Z}_{563}, \bar{Z}_{564}, \bar{Z}_{565}, \bar{Z}_{566}, \bar{Z}_{567}, \bar{Z}_{568}, \bar{Z}_{569}, \bar{Z}_{570}, \bar{Z}_{571}, \bar{Z}_{572}, \bar{Z}_{573}, \bar{Z}_{574}, \bar{Z}_{575}, \bar{Z}_{576}, \bar{Z}_{577}, \bar{Z}_{578}, \bar{Z}_{579}, \bar{Z}_{580}, \bar{Z}_{581}, \bar{Z}_{582}, \bar{Z}_{583}, \bar{Z}_{584}, \bar{Z}_{585}, \bar{Z}_{586}, \bar{Z}_{587}, \bar{Z}_{588}, \bar{Z}_{589}, \bar{Z}_{590}, \bar{Z}_{591}, \bar{Z}_{592}, \bar{Z}_{593}, \bar{Z}_{594}, \bar{Z}_{595}, \bar{Z}_{596}, \bar{Z}_{597}, \bar{Z}_{598}, \bar{Z}_{599}, \bar{Z}_{600}, \bar{Z}_{601}, \bar{Z}_{602}, \bar{Z}_{603}, \bar{Z}_{604}, \bar{Z}_{605}, \bar{Z}_{606}, \bar{Z}_{607}, \bar{Z}_{608}, \bar{Z}_{609}, \bar{Z}_{610}, \bar{Z}_{611}, \bar{Z}_{612}, \bar{Z}_{613}, \bar{Z}_{614}, \bar{Z}_{615}, \bar{Z}_{616}, \bar{Z}_{617}, \bar{Z}_{618}, \bar{Z}_{619}, \bar{Z}_{620}, \bar{Z}_{621}, \bar{Z}_{622}, \bar{Z}_{623}, \bar{Z}_{624}, \bar{Z}_{625}, \bar{Z}_{626}, \bar{Z}_{627}, \bar{Z}_{628}, \bar{Z}_{629}, \bar{Z}_{630}, \bar{Z}_{631}, \bar{Z}_{632}, \bar{Z}_{633}, \bar{Z}_{634}, \bar{Z}_{635}, \bar{Z}_{636}, \bar{Z}_{637}, \bar{Z}_{638}, \bar{Z}_{639}, \bar{Z}_{640}, \bar{Z}_{641}, \bar{Z}_{642}, \bar{Z}_{643}, \bar{Z}_{644}, \bar{Z}_{645}, \bar{Z}_{646}, \bar{Z}_{647}, \bar{Z}_{648}, \bar{Z}_{649}, \bar{Z}_{650}, \bar{Z}_{651}, \bar{Z}_{652}, \bar{Z}_{653}, \bar{Z}_{654}, \bar{Z}_{655}, \bar{Z}_{656}, \bar{Z}_{657}, \bar{Z}_{658}, \bar{Z}_{659}, \bar{Z}_{660}, \bar{Z}_{661}, \bar{Z}_{662}, \bar{Z}_{663}, \bar{Z}_{664}, \bar{Z}_{665}, \bar{Z}_{666}, \bar{Z}_{667}, \bar{Z}_{668}, \bar{Z}_{669}, \bar{Z}_{670}, \bar{Z}_{671}, \bar{Z}_{672}, \bar{Z}_{673}, \bar{Z}_{674}, \bar{Z}_{675}, \bar{Z}_{676}, \bar{Z}_{677}, \bar{Z}_{678}, \bar{Z}_{679}, \bar{Z}_{680}, \bar{Z}_{681}, \bar{Z}_{682}, \bar{Z}_{683}, \bar{Z}_{684}, \bar{Z}_{685}, \bar{Z}_{686}, \bar{Z}_{687}, \bar{Z}_{688}, \bar{Z}_{689}, \bar{Z}_{690}, \bar{Z}_{691}, \bar{Z}_{692}, \bar{Z}_{693}, \bar{Z}_{694}, \bar{Z}_{695}, \bar{Z}_{696}, \bar{Z}_{697}, \bar{Z}_{698}, \bar{Z}_{699}, \bar{Z}_{700}, \bar{Z}_{701}, \bar{Z}_{702}, \bar{Z}_{703}, \bar{Z}_{704}, \bar{Z}_{705}, \bar{Z}_{706}, \bar{Z}_{707}, \bar{Z}_{708}, \bar{Z}_{709}, \bar{Z}_{710}, \bar{Z}_{711}, \bar{Z}_{712}, \bar{Z}_{713}, \bar{Z}_{714}, \bar{Z}_{715}, \bar{Z}_{716}, \bar{Z}_{717}, \bar{Z}_{718}, \bar{Z}_{719}, \bar{Z}_{720}, \bar{Z}_{721}, \bar{Z}_{722}, \bar{Z}_{723}, \bar{Z}_{724}, \bar{Z}_{725}, \bar{Z}_{726}, \bar{Z}_{727}, \bar{Z}_{728}, \bar{Z}_{729}, \bar{Z}_{730}, \bar{Z}_{731}, \bar{Z}_{732}, \bar{Z}_{733}, \bar{Z}_{734}, \bar{Z}_{735}, \bar{Z}_{736}, \bar{Z}_{737}, \bar{Z}_{738}, \bar{Z}_{739}, \bar{Z}_{740}, \bar{Z}_{741}, \bar{Z}_{742}, \bar{Z}_{743}, \bar{Z}_{744}, \bar{Z}_{745}, \bar{Z}_{746}, \bar{Z}_{747}, \bar{Z}_{748}, \bar{Z}_{749}, \bar{Z}_{750}, \bar{Z}_{751}, \bar{Z}_{752}, \bar{Z}_{753}, \bar{Z}_{754}, \bar{Z}_{755}, \bar{Z}_{756}, \bar{Z}_{757}, \bar{Z}_{758}, \bar{Z}_{759}, \bar{Z}_{760}, \bar{Z}_{761}, \bar{Z}_{762}, \bar{Z}_{763}, \bar{Z}_{764}, \bar{Z}_{765}, \bar{Z}_{766}, \bar{Z}_{767}, \bar{Z}_{768}, \bar{Z}_{769}, \bar{Z}_{770}, \bar{Z}_{771}, \bar{Z}_{772}, \bar{Z}_{773}, \bar{Z}_{774}, \bar{Z}_{775}, \bar{Z}_{776}, \bar{Z}_{777}, \bar{Z}_{778}, \bar{Z}_{779}, \bar{Z}_{780}, \bar{Z}_{781}, \bar{Z}_{782}, \bar{Z}_{783}, \bar{Z}_{784}, \bar{Z}_{785}, \bar{Z}_{786}, \bar{Z}_{787}, \bar{Z}_{788}, \bar{Z}_{789}, \bar{Z}_{790}, \bar{Z}_{791}, \bar{Z}_{792}, \bar{Z}_{793}, \bar{Z}_{794}, \bar{Z}_{795}, \bar{Z}_{796}, \bar{Z}_{797}, \bar{Z}_{798}, \bar{Z}_{799}, \bar{Z}_{800}, \bar{Z}_{801}, \bar{Z}_{802}, \bar{Z}_{803}, \bar{Z}_{804}, \bar{Z}_{805}, \bar{Z}_{806}, \bar{Z}_{807}, \bar{Z}_{808}, \bar{Z}_{809}, \bar{Z}_{810}, \bar{Z}_{811}, \bar{Z}_{812}, \bar{Z}_{813}, \bar{Z}_{814}, \bar{Z}_{815}, \bar{Z}_{816}, \bar{Z}_{817}, \bar{Z}_{818}, \bar{Z}_{819}, \bar{Z}_{820}, \bar{Z}_{821}, \bar{Z}_{822}, \bar{Z}_{823}, \bar{Z}_{824}, \bar{Z}_{825}, \bar{Z}_{826}, \bar{Z}_{827}, \bar{Z}_{828}, \bar{Z}_{829}, \bar{Z}_{830}, \bar{Z}_{831}, \bar{Z}_{832}, \bar{Z}_{833}, \bar{Z}_{834}, \bar{Z}_{835}, \bar{Z}_{836}, \bar{Z}_{837}, \bar{Z}_{838}, \bar{Z}_{839}, \bar{Z}_{840}, \bar{Z}_{841}, \bar{Z}_{842}, \bar{Z}_{843}, \bar{Z}_{844}, \bar{Z}_{845}, \bar{Z}_{846}, \bar{Z}_{847}, \bar{Z}_{848}, \bar{Z}_{849}, \bar{Z}_{850}, \bar{Z}_{851}, \bar{Z}_{852}, \bar{Z}_{853}, \bar{Z}_{854}, \bar{Z}_{855}, \bar{Z}_{856}, \bar{Z}_{857}, \bar{Z}_{858}, \bar{Z}_{859}, \bar{Z}_{860}, \bar{Z}_{861}, \bar{Z}_{862}, \bar{Z}_{863}, \bar{Z}_{864}, \bar{Z}_{865}, \bar{Z}_{866}, \bar{Z}_{867}, \bar{Z}_{868}, \bar{Z}_{869}, \bar{Z}_{870}, \bar{Z}_{871}, \bar{Z}_{872}, \bar{Z}_{873}, \bar{Z}_{874}, \bar{Z}_{875}, \bar{Z}_{876}, \bar{Z}_{877}, \bar{Z}_{878}, \bar{Z}_{879}, \bar{Z}_{880}, \bar{Z}_{881}, \bar{Z}_{882}, \bar{Z}_{883}, \bar{Z}_{884}, \bar{Z}_{885}, \bar{Z}_{886}, \bar{Z}_{887}, \bar{Z}_{888}, \bar{Z}_{889}, \bar{Z}_{890}, \bar{Z}_{891}, \bar{Z}_{892}, \bar{Z}_{893}, \bar{Z}_{894}, \bar{Z}_{895}, \bar{Z}_{896}, \bar{Z}_{897}, \bar{Z}_{898}, \bar{Z}_{899}, \bar{Z}_{900}, \bar{Z}_{901}, \bar{Z}_{902}, \bar{Z}_{903}, \bar{Z}_{904}, \bar{Z}_{905}, \bar{Z}_{906}, \bar{Z}_{907}, \bar{Z}_{908}, \bar{Z}_{909}, \bar{Z}_{910}, \bar{Z}_{911}, \bar{Z}_{912}, \bar{Z}_{913}, \bar{Z}_{914}, \bar{Z}_{915}, \bar{Z}_{916}, \bar{Z}_{917}, \bar{Z}_{918}, \bar{Z}_{919}, \bar{Z}_{920}, \bar{Z}_{921}, \bar{Z}_{922}, \bar{Z}_{923}, \bar{Z}_{924}, \bar{Z}_{925}, \bar{Z}_{926}, \bar{Z}_{927}, \bar{Z}_{928}, \bar{Z}_{929}, \bar{Z}_{930}, \bar{Z}_{931}, \bar{Z}_{932}, \bar{Z}_{933}, \bar{Z}_{934}, \bar{Z}_{935}, \bar{Z}_{936}, \bar{Z}_{937}, \bar{Z}_{938}, \bar{Z}_{939}, \bar{Z}_{940}, \bar{Z}_{$

- pp. 1171–1176, 1997.
- [29] R. Biernacki, H. Hwang, S. Bhattacharyya, Robust stability with structured real parameter perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 32, No. 6, pp. 495–506, 1987.
- Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 7, pp. 1668–1674, 2009.
- [28] L. El Ghaoui, F. Oustry, M. Aitrami, A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 8,