http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
مرداد ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۵ ص‌ص ۲۷-۳۸

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۷/۲۲
تاریخ پذیرش ۹۱/۹/۲۱
ارائه در سایت ۹۲/۲/۳۰

تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی روی بستر الاستیک

محمدجواد ابراهیمی [۱]، محمدمهدی نجفی‌زاده [۲*]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک
* اراک، صندوق پستی ۳۸۱۳۵/۵۶۷، m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

چکیده– در این تحقیق، رفتار پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دو بعدی بر روی بستر الاستیک بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدل‌سازی ماده مدرج تابعی دوبعدی از مدل میکرومکانیکی موری-تاناکا استفاده شده است. معادلات حرکت و مقادیر مرزی به‌دست آمده در این بررسی به‌کمک روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق و انتگرال حل شده‌اند. همچنین، برای بررسی صحت نتایج به‌دست آمده در این تحقیق، نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصل از کارهای گذشته مقایسه شده‌اند. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که فرکانس طبیعی ماده مدرج تابعی دوبعدی در مقایسه با ماده مدرج تابعی یک‌بعدی با خصوصیات همسان مقادیر بزرگ‌تری دارند. همچنین، با استفاده از بستر الاستیک محیط بر پوسته این امکان فراهم می‌شود که مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد پوسته افزایش یابد.

کلیدواژگان: ارتعاش آزاد، پوسته استوانه‌ای، ماده مدرج تابعی دوبعدی، روش مربع‌سازی مشتق و انتگرال

Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation

M. J. Ebrahimi[1], M. M. Najafizadeh[2*]

1- MSc Student, Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Arak Branch, Arak, Iran.
2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Arak Branch, Arak, Iran.
*P.O.B. 38135/567 Arak, m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

Abstract- In this paper, the free vibration of a two-dimensional functionally graded circular cylindrical shell is analyzed. To describe the material properties of the two-phased FGM material Mori-Tanaka micromechanical model is used. The spatial derivatives of the equations of motion and boundary conditions are discretized using the methods of generalized differential-Integral quadrature (GDIQ). To validate the results, comparisons are made with the solutions for FG cylindrical shells available in the literature. The results of this study show that the values of natural frequency of 2D FGMs are higher than those of 1D FGMs in parallel conditions. Furthermore, application of a confining elastic foundation increases the value of natural frequencies.

Keywords: Free Vibration, Cylindrical Shell, Two-dimensional FGM, GDIQ

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی[1] مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به‌وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن‌ها به‌دست می‌آید. فازهای ریزساختاری مواد مدرج تابعی دارای عملکرد متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند و باعث ایجاد وضعیت چندساختاری در مواد مدرج تابعی می‌شوند. با تغییر متناوب و تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده مواد مدرج تابعی، این مواد خاصیت یک ماده پیوسته را از خود نشان می‌دهند. مواد مدرج تابعی در موارد مختلفی چون حسگرهای مدرج تابعی[۱]، فعال‌کننده‌ها[۲]، زره‌های مدرج تابعی سرامیکی/فلزی[۳]، حسگرهای نوری[۴] و ایمپلنت مدرج تابعی دندانپزشکی[۵] مورد استفاده قرار می‌گیرند. با گسترش کاربرد این مواد در سازه‌ها، نیاز به انجام تحقیقات بیشتر بر روی آن‌ها برای محققان آشکارتر شد.

لوی و همکارانش[۶]، در تحقیقی، ارتعاش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی را با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی تئوری پوسته لاو و براساس روش ریلی-ریتز بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده آن است که مشخصه‌های فرکانسی تحت تأثیر کسر حجمی و پیکربندی اجزا هستند. این تحقیق به‌وسیله پرادهان و همکارانش[۷] برای پوسته در شرایط مرزی مختلف به‌صورت گسترده‌تری مورد بررسی قرار گرفت. این مطالعه نشان داد که مشخصه‌های فرکانسی پوسته مدرج تابعی مشابه پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک است. همچنین مشاهده شد که فرکانس‌های طبیعی پوسته، وابسته به کسر حجمی اجزا و شرایط مرزی می‌باشند. شاه و همکارانش[۸] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها، در تحقیق خود، معادلات حرکت را با استفاده از روش موج و بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها به‌دست آوردند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که استفاده از یک بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی می‌شود. فرید و همکارانش[۹] تحلیل ارتعاش آزاد پنل منحنی ضخیم پیش‌تنیده مدرج تابعی روی بستر الاستیک دوپارامتری که تحت تأثیر محیط حرارتی است، با استفاده از فرمولاسیون الاستیسیته سه‌بعدی مورد بررسی قرار داده‌اند. برای به‌دست آوردن معادلات حاکم از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم‌یافته[2] در ضخامت و توابع مثلثاتی در جهت طولی و مماسی استفاده شده است و تأثیر پارامترهای مواد مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. سبحانی و یاس[۱۰]، در تحقیقی که بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی انجام شده است، مشخصه‌های ایستا و ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با الیاف CGFR را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مقاله، معادلات دیفرانسیل معمولی کوپله با ضرایب متغیر با استفاده از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم‌یافته حل شده‌اند و نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج به‌دست آمده از پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت لایه‌ای ساده مقایسه شده‌اند.

می‌بایست توجه نمود که یک ماده مدرج تابعی متداول، همواره قادر به برآورده‌سازی نیازهای طراحی نخواهد بود. این امر ناشی از ایجاد توزیع تنش و حرارت ناهمسان در قطعات پیچیده در جهات مختلف است. استفاده از موادی که در جهات مختلف، توزیع متفاوتی از فازها را داشته باشند یک راه‌حل مناسب برای فائق‌آمدن بر این مشکل است. روش‌های نوین تولید، امکان ساخت مواد مدرج تابعی دو و سه‌بعدی را میسر نموده‌اند. نمت الا در تحقیقات خود[۱۲،۱۱] به بررسی اثرات تنش‌های حرارتی بر روی ورق مستطیلی مدرج تابعی دوبعدی پرداخته است. نتایج حاصل از این تحقیقات نشانگر برتری مواد مدرج تابعی دوبعدی نسبت به مواد مدرج تابعی یک‌بعدی می‌باشند. نی و ژانگ[۱۳] در تحقیقی خمش ورق دایروی و حلقوی مدرج تابعی دوبعدی را با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی عددی مورد بررسی قرار دادند. بر اساس نتیجه به‌دست آمده در این تحقیق، پاسخ‌های به‌دست آمده به‌کمک این روش، نیاز به محاسبات کمتری نسبت به روش‌های المان محدود دارد. ایشان در تحقیق دیگری[۱۴] به بررسی تحلیل دینامیکی ورق حلقوی با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مربع‌سازی مشتق برحسب فضا حالت پرداخته‌اند. در این تحقیق، تغییرات ماده مدرج تابعی در دو جهت شعاع و ضخامت و یا یکی از این دو درنظر گرفته شده است و فرکانس‌های ارتعاشی برای مواد با خواص مدرج متفاوت به‌دست آمده است.

1. Functionally Graded Materials

2. Generalized Differential Quadrature

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

سبحانی و همکارانش[۱۵] به بررسی جابه‌جایی‌های ناشی از ارتعاشات پنل‌های منحنی‌شکل مدرج تابعی دوبعدی تقویت‌شده با الیاف پرداخته‌اند. در این تحقیق، از الاستیسیته سه‌بعدی خطی برای بیان معادلات حرکت استفاده شده است. معادلات حرکت به‌دست آمده در این تحقیق با استفاده از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته حل و به‌صورت جابه‌جایی‌های مودال بیان شده‌اند. سبحانی و هدایتی[۱۶] در مقاله دیگری پاسخ ایستا و ارتعاش آزاد یک پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی را براساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته بررسی کردند. در این تحقیق، با استفاده از روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق، که یک روش عددی دقیق است، معادلات حرکت پوسته و شرایط مرزی تحلیل شده‌اند.

در این مقاله، ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته لاو مورد بررسی قرار گرفته است. ماده مدرج تابعی این پوسته به‌صورت ترکیبی از دو فاز درنظر گرفته شده است که توزیع کسر حجمی این دو فاز با استفاده از یک قانون توانی به‌دست می‌آید. در این بررسی، از مدل میکرومکانیکی موری-تاناکا برای توصیف مشخصه ماده استفاده شده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی آن‌ها، برای نخستین‌بار با استفاده از روش ترکیبی مربع‌سازی مشتق و انتگرال تعمیم‌یافته [1] گسسته‌سازی شده و حل شده‌اند و به این ترتیب، مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی به‌دست آمده‌اند. همچنین اثر وجود بستر الاستیک بر ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- قانون کسر حجمی ماده مدرج تابعی دوبعدی

در این تحقیق، ماده مدرج تابعی به‌صورت ترکیبی از دو فاز درنظر گرفته شده است. به این ترتیب، معادله کسر حجمی بایستی توزیع دو فاز در ماده را بیان نماید. کسر حجمی را می‌توان با استفاده از تعریف زیر برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی تعریف نمود:

$$V_f=\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^{n_z}\left(\frac{x}{L}\right)^{n_x} \qquad (۱)$$

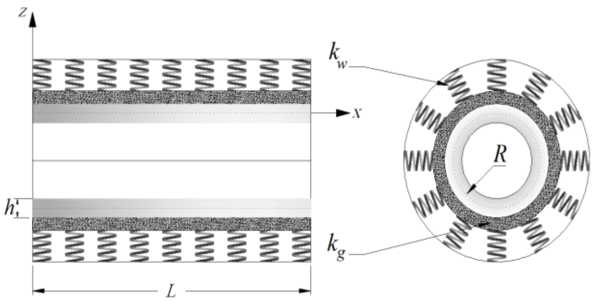
که در آن n_z نمای قانون توانی در جهت z و n_x نمای قانون توانی در جهت x است. مقدار هر دو نما می‌تواند بین صفر و بی‌نهایت تغییر کند $\left(0\le n_x,n_z\le\infty\right)$. نمای برش‌خورده‌ای از پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

تعدادی مدل میکرومکانیکی برای تعیین مشخصه‌های مواد مدرج تابعی پیشنهاد شده است. این روش‌ها عبارت‌اند از قانون مخلوط‌ها (یا مدل فوکت[2])، مدل موری-تاناکا و مدل خودسازگار[3][۱۷]. مدل فوکت یک روش آسان برای بیان مشخصه ماده است. این در حالی است که می‌توان از مدل موری-تاناکا برای توصیف یک فاز ناپیوسته استفاده نمود. هرچند این مدل دارای پیچیدگی‌های بیشتری نسبت به روش قبل می‌باشد، این روش مشخصه‌های ماده را با دقت بیشتری تعیین می‌کند. در این تحقیق از مدل موری-تاناکا برای توصیف مشخصه ماده مدرج تابعی استفاده شده است. در این مدل مدول مؤثر بالک K_f و مدول مؤثر برشی G_f به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{K-K_1}{K_2-K_1}=\frac{V_f}{1+\dfrac{\left(1-V_f\right)\left(K_2-K_1\right)}{K_1+\dfrac{4}{3}K_1}} \qquad (۲)$$

$$\frac{G-G_1}{G_2-G_1}=\frac{V_f}{1+\dfrac{\left(1-V_f\right)\left(G_2-G_1\right)}{G_1+f_1}} \qquad (۳)$$

در معادلات (۲) و (۳)، K_1 و G_1 به‌ترتیب نشان‌دهنده مدول بالک و مدول برشی فاز ماتریس و K_2 و G_2 نشان‌دهنده مدول بالک و مدول برشی فاز ذرات هستند. همچنین برای f_1 در معادله (۳) داریم: $f_1=G_1\left(9K_1+8G_1\right)/6\left(K_1+2G_1\right)$.



شکل ۱ برشی از پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی

1. Generalized differential-Integral quadrature
2. Voigt model
3. Self-consistent

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

به این ترتیب مقادیر مدول یانگ مؤثر (E_f) و مدول برشی مؤثر (G_f) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$E=\frac{9KG}{3K+G},\quad \nu=\frac{3K-2G}{2\left(3K+G\right)} \tag{۴}$$

۳- معادلات دیفرانسیل حاکم

یک پوسته استوانه‌ای نازک را می‌توان در حالت تنش صفحه‌ای فرض نمود و بنابراین برای روابط تنش و کرنش خواهیم داشت:

$$\{\sigma\}=[Q]\{e\} \tag{۵}$$

که در آن $\{\sigma\}$، $[Q]$ و $\{e\}$ به‌ترتیب زیر تعریف می‌شوند:

$$\{\sigma\}^{T}=\{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{x\theta}\} \tag{۶}$$

$$[Q]=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{۷}$$

$$\{e\}^{T}=\{e_{11}+zk_{11} \quad e_{22}+zk_{22} \quad e_{12}+zk_{12}\} \tag{۸}$$

مؤلفه‌های کرنش-جابه‌جایی e_{11} ، e_{22} و e_{12} و مؤلفه‌های کرنش-انحنا k_{11} ، k_{22} و k_{12} در معادله (۸) از روابط (۹) و (۱۰) به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta}+w\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \tag{۹}$$

$$\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \theta}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\ \dfrac{2}{R}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta}\right) \end{Bmatrix} \tag{۱۰}$$

برای یک ماده ایزوتروپیک، مؤلفه‌های ماتریس $[Q]$ در معادله (۷) به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\quad Q_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},\quad Q_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۱۱}$$

بدین ترتیب انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} PE_s=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\Bigg[& A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{A_{22}}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\right)^2 \\ & +\frac{2A_{12}}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\right)+A_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\ & -2B_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ & +2B_{12}\left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right. \\ & \left.-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\} \\ & +\frac{2B_{22}}{R^3}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\ & +\frac{2B_{66}}{R^3}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \theta}\right) \\ & +D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\frac{D_{22}}{R^4}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2 \\ & -\frac{2D_{12}}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\ & +\frac{D_{66}}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta}\right)^2\Bigg]R\,d\theta\,dx \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به‌ترتیب سختی کششی، کوپلینگ و خمشی می‌باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}\}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}\{1 \quad z \quad z^2\}dz \tag{۱۳}$$

پوسته استوانه‌ای در این تحقیق محاط در یک بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک درنظر گرفته شده است. به این ترتیب، انرژی پتانسیل ناشی از بستر الاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید[۱۸]:

$$PE_{el}=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left\{k_w w^2+k_g\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right]\right\}Rd\theta dx \tag{۱۴}$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

همچنین برای انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$KE=\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\rho_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]R\,d\theta dx \tag{۱۵}$$

که ρ_T در این معادله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_T=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\,dz \tag{۱۶}$$

فانکشنال انرژی با استفاده از تابع لاگرانژ به‌دست می‌آید:

$$\Pi=KE-PE \tag{۱۷}$$

که PE در آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$PE=PE_s+PE_{el} \tag{۱۸}$$

با استفاده از اصل همیلتون بر روی فانکشنال به‌دست‌آمده در معادله (۱۷)، معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای حاصل می‌شوند:

$$L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w=\rho_T\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۱۹-الف}$$

$$L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w=\rho_T\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{۱۹-ب}$$

$$L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w=\rho_T\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k_w w-k_g\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) \tag{۱۹-ج}$$

که اپراتورهای L_{ij} در معادلات (۱۹) در پیوست الف آورده شده‌اند.

در این بررسی پوسته استوانه‌ای بر روی تکیه‌گاه ساده درنظر گرفته شده است؛ بنابراین شرایط مرزی به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$v=0,\quad w=0,\quad N_x=0,\quad M_x=0 \tag{۲۰}$$

معادله (۲۰) در دو سر پوسته، یعنی در $x=0$ و $x=L$ صادق است.

اکنون، برای تحلیل ارتعاش پوسته، از روش انتشار موج استفاده می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}U(x)\cos m\theta e^{i\omega t}$$

$$v=\sum_{m=1}^{\infty}V(x)\sin m\theta e^{i\omega t}$$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}W(x)\cos m\theta e^{i\omega t} \tag{۲۱}$$

که m و ω در آن به‌ترتیب بیانگر عدد موج محیطی و فرکانس طبیعی ارتعاش هستند.

با اعمال معادلات (۲۱) در معادلات (۱۹)، معادلات حرکت به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$S_{110}U+S_{112}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+S_{121}\frac{\partial V}{\partial x}+S_{131}\frac{\partial W}{\partial x}+S_{133}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}=-\rho_T\omega^2 U \tag{۲۲-الف}$$

$$S_{211}\frac{\partial U}{\partial x}+S_{220}V+S_{222}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+S_{230}W+S_{232}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=-\rho_T\omega^2 V \tag{۲۲-ب}$$

$$S_{311}\frac{\partial U}{\partial x}+S_{312}\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+S_{320}V+S_{322}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+S_{330}W+S_{332}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+S_{334}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}=-\rho_T\omega^2 W \tag{۲۲-ج}$$

که اپراتورهای S_{ijk} در آن، در پیوست ب، آمده‌اند.

۴- روش مربع‌سازی مشتق و انتگرال تعمیم‌یافته

روش‌های تقریبی عددی کاربرد زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی دارند. پژوهش در مورد یافتن روش‌های عددی با محاسبات کمتر همواره مطرح بوده است. یکی از این روش‌ها، روش مربع‌سازی مشتق[1] است. این روش اولین‌بار توسط بلمن و همکارانش در سال ۱۹۷۲، به‌عنوان یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی، به‌کار گرفته شد[۱۹]. این روش، به‌دلیل استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالاتر در مختصات عمومی و همچنین تقریب‌زدن مستقیم مشتق یک تابع در یک نقطه از دامنه مورد نظر، بر روش‌های تفاضل محدود و المان محدود برتری دارد. از سوی دیگر دقت بالای نتایج حاصل از این روش با استفاده از تعداد نقاط شبکه‌ای کمتر و سهولت آن باعث محبوبیت روزافزون آن شده است. روش مربع‌سازی مشتق تعمیم‌یافته به‌وسیله شو و ریچاردز[۲۰] با توسعه و بهسازی روش مربع‌سازی مشتق و بهبود عملیات محاسبه ضرایب وزنی معرفی شد.

در روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق rام یک تابع به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

1. Differential quadrature

$$\left.\frac{\partial^r f}{\partial \xi^r}\right|_{\xi_i} = \sum_{k=1}^{M_\xi} c_{ik}^{(r)} f_k \qquad i=1,2,\cdots,M_\xi \tag{۲۳}$$

که M_ξ در معادله (۲۳) تعداد نقاط شبکه در راستای ξ است و $c_{ij}^{(r)}$ها ضرایب وزنی هستند که با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ به‌دست می‌آیند. به این ترتیب ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(\xi_i)}{(\xi_i-\xi_j)L^{(1)}(\xi_j)} \qquad i,j=1,2,\cdots,M_\xi\ ,\ i\neq j \tag{۲۴}$$

که $L^{(1)}(\xi_i)$ در آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{(1)}(\xi_i) = \prod_{j=1, i\neq j}^{M_\xi} (\xi_i-\xi_j) \tag{۲۵}$$

ضرایب وزنی مراتب بالاتر با استفاده از ضرایب وزنی مراتب پایین‌تر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$c_{ij}^{(r)} = r\left(c_{ii}^{(r-1)}c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(r-1)}}{\xi_i-\xi_j}\right) \qquad i,j=1,2,\cdots,M_\xi\ ,\ i\neq j \tag{۲۶}$$

$$c_{ii}^{(r)} = -\sum_{j=1, i\neq j}^{M_\xi} c_{ij}^{(r)} \qquad i,j=1,2,\cdots,M_\xi\ ,\ r=1,2,\cdots,M_\xi-1 \tag{۲۷}$$

در اینجا نقاط شبکه چندجمله‌ای لاگرانژ به‌وسیله روش نمونه‌گیری چبیشف-گاس-لوباتو تعیین می‌شود. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\xi_i = \frac{1-\cos\left(\dfrac{i-1}{N-1}\right)\pi}{2} \qquad i=1,2,\cdots,M_\xi \tag{۲۸}$$

روش مربع‌سازی انتگرال تعمیم‌یافته[1] با استفاده از همان مفهوم مربع‌سازی مشتق چندجمله‌ای توسعه یافته است. اگر تابعی در یک بازه پیوسته باشد، می‌توان آن را به‌صورت یک چندجمله‌ای با درجه بالا، به‌گونه‌ای که تمام مقادیر فانکشنال در بازه استفاده شده باشند، تقریب زد. می‌توان با انتگرال‌گیری از تابع چندجمله‌ای روی هر قسمتی از بازه یا کل آن، انتگرال تابع اصلی را تقریب زد.

به‌طور کلی فرض می‌شود که تابع $f(\xi,\eta)$ به‌صورت ترکیبی خطی از مقادیر فانکشنال‌ها روی کل بازه به‌فرم زیر تقریب زده می‌شود[۲۱]:

$$\int_{\xi_i}^{\xi_j} f(\xi,\eta)\,d\xi = \sum_{k=1}^{N} c_k^{ij} f(\xi_k,\eta) \tag{۲۹}$$

که در آن ξ_i و ξ_j مختصه‌های قابل تغییرند و زمانی که $\xi_i=a$ و $\xi_j=b$ باشد، معادله بالا به‌شکل یک انتگرال متداول در می‌آید. ضریب وزنی c_k^{ij} در معادله (۲۹) به‌صورت تفاضل زیر بیان می‌شود:

$$c_k^{ij} = d_{jk}^I - d_{ik}^I \tag{۳۰}$$

که با بیان ماتریسی d^I می‌توان این ضرایب را به ترتیب زیر تعیین نمود:

$$\left[\mathrm{d}^\mathrm{I}\right] = [\mathrm{a}]^{-1} \tag{۳۱}$$

که ماتریس $[\mathrm{a}]$ در معادله (۳۱) با استفاده از تعریف روش مربع‌سازی مشتق تعمیم‌یافته و بیان تابع f به‌عنوان مشتق مرتبه اول تابع f^I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\mathrm{f}\} = [\mathrm{a}]\{\mathrm{f}^\mathrm{I}\} \tag{۳۲}$$

با درنظر گرفتن M نقطه نمونه در راستای x و N نقطه نمونه در راستای z و درنتیجه به‌وجود آمدن یک شبکه $M\times N$ و استفاده از آنچه در بالا گفته شد، معادلات (۲۲) به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$S_{110_i}U_i + \sum_{k=1}^{M} S_{112_i} c_{ik}^{(2)} U_k + \sum_{k=1}^{M} S_{121_i} c_{ik}^{(1)} V_k + \sum_{k=1}^{M}\left(S_{131_i} c_{ik}^{(1)} + S_{133_i} c_{ik}^{(3)}\right) W_k = -\rho_T \omega^2 U_i \tag{۳۳-الف}$$

$$\sum_{k=1}^{M} S_{211_i} c_{ik}^{(1)} U_k + S_{220_i} V_i + \sum_{k=1}^{M} S_{222_i} c_{ik}^{(2)} V_k + S_{230_i} W_i + \sum_{k=1}^{M} S_{232_i} c_{ik}^{(2)} W_k = -\rho_T \omega^2 V_i \tag{۳۳-ب}$$

$$\sum_{k=1}^{M}\left(S_{311_i} c_{ik}^{(1)} + S_{312_i} c_{ik}^{(3)}\right) U_k + S_{320_i} V_i + \sum_{k=1}^{M} S_{322_i} c_{ik}^{(2)} V_k + S_{330_i} W_i + \sum_{k=1}^{M}\left(S_{332_i} c_{ik}^{(2)} + S_{334_i} c_{ik}^{(4)}\right) W_k = -\rho_T \omega^2 W_i \tag{۳۳-ج}$$

که در آن $i=1,\cdots,M$ تغییر می‌کند. سختی‌های جای‌گرفته در S_{ijk} های معادلات (۳۳) به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N}\left(d_{nk}^I - d_{mk}^I\right) Q_{ij_k} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \end{Bmatrix} \qquad k=1,2,\cdots,N \tag{۳۴}$$

که N در معادله (۳۴) تعداد نقاط شبکه در راستای محور z است.

1. Generalized Integral Quadrature

با گسسته‌سازی شرایط مرزی برای پوسته استوانه‌ای روی تکیه‌گاه ساده و ساده‌سازی نتایج به‌دست آمده معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$V_1 = 0 \quad \text{(۳۵-الف)}$$

$$W_1 = 0 \quad \text{(۳۵-ب)}$$

$$\sum_{k=1}^{M} c_{1k}^{(1)} U_k = 0 \quad \text{(۳۵-ج)}$$

$$\sum_{k=1}^{M} c_{1k}^{(2)} W_k = 0 \quad \text{(۳۵-د)}$$

معادلات (۳۵) در نقطه $x=0$ صادق هستند.

$$V_M = 0 \quad \text{(۳۶-الف)}$$

$$W_M = 0 \quad \text{(۳۶-ب)}$$

$$\sum_{k=1}^{M} c_{Mk}^{(1)} U_k = 0 \quad \text{(۳۶-ج)}$$

$$\sum_{k=1}^{M} c_{Mk}^{(2)} W_k = 0 \quad \text{(۳۶-د)}$$

که این معادلات شرایط مرزی در نقطه $x=L$ را بیان می‌کنند.

معادلات (۳۵) و (۳۶) هشت معادله مرزی به‌دست می‌دهند. معادلات (۳۵-الف) تا (۳۵-ج) و (۳۶-الف) تا (۳۶-ج) معادلات حرکت U، V و W در نقاط شبکه 1 و M هستند و معادلات (۳۵-د) و (۳۶-د) به‌ترتیب رفتار W در نقاط شبکه 2 و M–1 را توصیف می‌کنند.

برای حل دستگاه معادلات، کل بازه به دو قسمت تقسیم می‌شود. یک قسمت از نقاط داخلی تشکیل شده و معادلات حرکت بر روی آن اعمال می‌شود و قسمت دوم که نقاط مرزی آن را تشکیل داده و شرایط مرزی رفتار آن‌ها را توصیف می‌کنند.

بر این اساس، معادله حرکت پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\mathrm{S_{db}}]\{\mathrm{b}\}+[\mathrm{S_{dd}}]\{\mathrm{d}\}=-\omega^2[\mathrm{M}]\{\mathrm{d}\} \quad \text{(۳۷)}$$

که در آن $[\mathrm{S_{db}}]$ و $[\mathrm{S_{dd}}]$ ماتریس‌های سختی، $[\mathrm{M}]$ ماتریس جرم و $\{\mathrm{d}\}$ و $\{\mathrm{b}\}$ به‌ترتیب مقادیر فانکشنال در نواحی داخلی و مرزی پوسته را بیان می‌کنند.

به همین ترتیب، با بیان شرایط مرزی به فرم ماتریسی خواهیم داشت:

$$[\mathrm{S_{bb}}]\{\mathrm{b}\}+[\mathrm{S_{bd}}]\{\mathrm{d}\}=0 \quad \text{(۳۸)}$$

که در آن $[\mathrm{S_{bb}}]$ و $[\mathrm{S_{bd}}]$ ماتریس‌های سختی هستند.

با جای‌گذاری معادله (۳۸) در معادله (۳۷) و حذف فانکشنال مرزی به‌دست می‌آوریم:

$$[\mathrm{S}]\{\mathrm{d}\}=-\omega^2[\mathrm{M}]\{\mathrm{d}\} \quad \text{(۳۹)}$$

که $[\mathrm{S}]$ در آن به‌صورت زیر است:

$$[\mathrm{S}]=[\mathrm{S_{dd}}]-[\mathrm{S_{db}}][\mathrm{S_{bb}}]^{-1}[\mathrm{S_{bd}}] \quad \text{(۴۰)}$$

با استفاده از معادله (۳۹)، مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی قابل محاسبه می‌باشد.

۵- نتایج و بحث

در این بررسی، از دو نوع فلز و یک سرامیک استفاده شده است. به این ترتیب که برای مقایسه نتایج با کارهای انجام‌شده و نتایج نشان داده شده در جدول‌ها از ماده مدرج تشکیل‌شده از فولاد ضدزنگ و نیکل استفاده شده است و ماده مدرج تابعی سازنده پوسته در نمودارها از دو ماده فولاد ضدزنگ و سیلیسیوم کاربابد تشکیل شده است. مشخصه مواد استفاده شده در این تحقیق در جدول ۱ آمده است.

به‌منظور بررسی صحت نتایج این تحقیق، پاسخ‌های فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی به‌دست آمده با نتایج مقاله لوی و همکارانش[۶] مقایسه شده است. این نتایج در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. مقایسه انجام‌شده در این جدول‌ها به‌خوبی نشان می‌دهد که نتایج به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از کارهای گذشته هم‌خوانی دارد.

در جدول ۳، به بررسی همگرایی روش مربع‌سازی مشتق و انتگرال تعمیم‌یافته پرداخته شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده از این روش به‌سرعت همگرا شده که این امر در کاهش زمان محاسبات و افزایش سرعت پردازش اطلاعات نقش مهمی ایفا می‌کند. براساس نتایج به‌دست آمده در این جدول، در بررسی‌های انجام‌شده در ادامه مقاله از یک شبکه‌بندی المان ۱۱×۱۱ برای به‌دست آوردن مقادیر فرکانسی استفاده شده است.

جدول ۱ مشخصه مواد تشکیل‌دهنده ماده مدرج تابعی [۶و۱۶]

	فولاد ضدزنگ	نیکل	سیلیسیوم کاربابد
$E(\mathrm{N \cdot m^{-2}})$	$۲/۰۷۷۸۸\times۱۰^{۱۱}$	$۲/۰۵۰۹۸\times۱۰^{۱۱}$	$۴/۱۰\times۱۰^{۱۱}$
ν	۰/۳۱۷۷۵۶	۰/۳۱۰۰	۰/۱۷۰
$\rho(\mathrm{kg \cdot m^{-3}})$	۸۱۶۶	۸۹۰۰	۳۱۰۰

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی نوع اول بر روی تکیه‌گاه ساده با اعداد موج محیطی مختلف $\left(h/R=0.002,\, L/R=20\right)$

m		n_z=0.7	n_z=2	n_z=15	n_z=30
۱	لوی و همکارانش[۶]	۱۳/۲۶۹	۱۳/۱۰۳	۱۲/۹۳۳	۱۲/۹۱۴
	بررسی حاضر	۱۳/۲۶۷۹	۱۳/۱۰۳۴	۱۲/۹۳۳۰	۱۲/۹۲۱۰
۲	لوی و همکارانش[۶]	۴/۴۹۹۴	۴/۴۴۳۵	۴/۳۸۳۴	۴/۳۷۶۵
	بررسی حاضر	۴/۴۹۸۸	۴/۴۴۳۲	۴/۳۸۳۳	۴/۳۷۹۰
۳	لوی و همکارانش[۶]	۴/۱۷۴۹	۴/۱۲۳۵	۴/۰۶۵۳	۴/۰۵۷۶
	بررسی حاضر	۴/۱۷۴۰	۴/۱۲۳۱	۴/۰۶۵۲	۴/۰۶۰۹
۴	لوی و همکارانش[۶]	۷/۰۶۹۱	۶/۹۸۲۰	۶/۸۸۵۶	۶/۸۷۲۶
	بررسی حاضر	۷/۰۶۸۱	۶/۹۸۱۸	۶/۸۸۵۸	۶/۸۷۸۸
۵	لوی و همکارانش[۶]	۱۱/۲۹۰	۱۱/۱۵۱	۱۱/۹۹۹	۱۰/۹۷۸
	بررسی حاضر	۱۱/۲۸۸۹	۱۱/۱۵۰۹	۱۰/۹۹۹۱	۱۰/۹۸۸۲
۶	لوی و همکارانش[۶]	۱۶/۵۲۷	۱۶/۳۲۳	۱۶/۱۰۱	۱۶/۰۷۱
	بررسی حاضر	۱۶/۵۲۵۴	۱۶/۳۲۳۳	۱۶/۱۰۲۰	۱۶/۰۸۶۰

جدول ۳ همگرایی مقادیر فرکانس طبیعی یک پوسته مدرج تابعی دوبعدی بر روی تکیه‌گاه ساده $\left(h/R=0.002, L/R=20, m=5, n_x=n_z=10\right)$

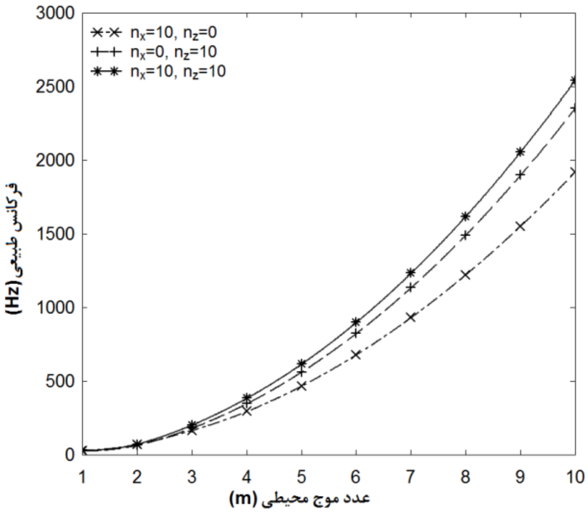
تعداد نقاط شبکه	مقادیر فرکانس طبیعی (Hz)
۵×۵	۱۰/۹۵۲۲
۷×۷	۱۰/۹۵۵۹
۹×۹	۱۰/۹۵۵۷
۱۱×۱۱	۱۰/۹۵۵۷
۱۳×۱۳	۱۰/۹۵۵۷

شکل ۲ تغییرات مقادیر فرکانس ارتعاش آزاد پوسته مدرج تابعی تشکیل‌یافته از دو ماده فولاد ضدزنگ و سیلیسیوم کارباید با نسبت طول به شعاع ۲۰ و ضخامت به شعاع ۰/۰۵ را نشان می‌دهند. نمای قانون توانی برابر با ۱۰ در سه حالت متفاوت برای پوسته مدرج تابعی نشان داده شده است.

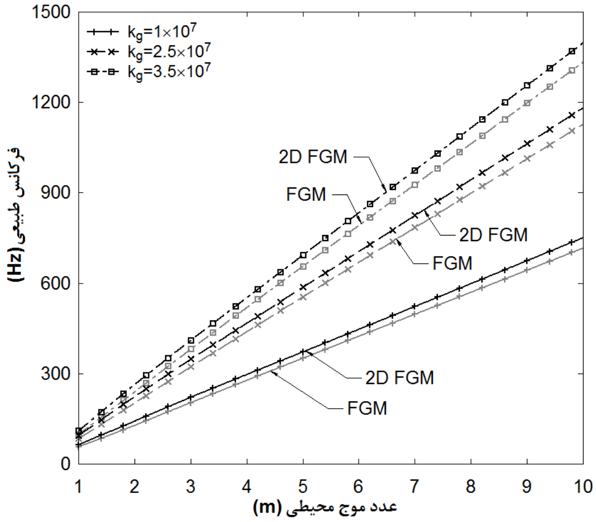
به‌صورتی که در شکل ۲ نشان داده شده است، مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش عدد موج محیطی به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که پوسته مدرج تابعی دوبعدی مقادیر فرکانس طبیعی بزرگ‌تری نسبت به حالات دیگر اختیار کرده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اختلاف مقادیر فرکانس طبیعی در اعداد موج محیطی کوچک (کمتر از ۳) سه نوع پوسته بسیار کوچک است. با افزایش عدد موج محیطی، اختلاف بین مقادیر فرکانس طبیعی انواع پوسته‌های مدرج تابعی افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود که پوسته مدرج تابعی با نماهای قانون توانی مخالف صفر بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی و سپس نوع دارای $n_x=0$ و پس از آن پوسته مدرج تابعی دارای نمای $n_z=0$ قرار می‌گیرند. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، اختلاف میان حالات $n_x=10, n_z=0$ و $n_x=0, n_z=10$ کمتر از اختلاف این دو با نوع دیگر است.

در این قسمت به بررسی اثر بستر الاستیک بر روی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای پرداخته شده است و تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش عدد موج محیطی بررسی شده است.

در شکل‌های ۳ و ۴ مقدار سختی بستر وینکلر ثابت درنظر گرفته شده است و نمودارها برای سختی بستر پاسترناک در سه حالت ۱×۱۰^۷، ۲/۵×۱۰^۷ و ۳/۵×۱۰^۷ رسم شده‌اند. در این نمودارها اختلاف مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی با نمای قانون توانی ۵ به‌تفصیل ارزیابی شده است. شکل ۳ حالتی را نشان می‌دهد که سختی بستر وینکلر در آن برابر با صفر درنظر گرفته شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش عدد موج محیطی مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی افزایش می‌یابد. این افزایش تقریباً به‌صورت خطی اتفاق می‌افتد.

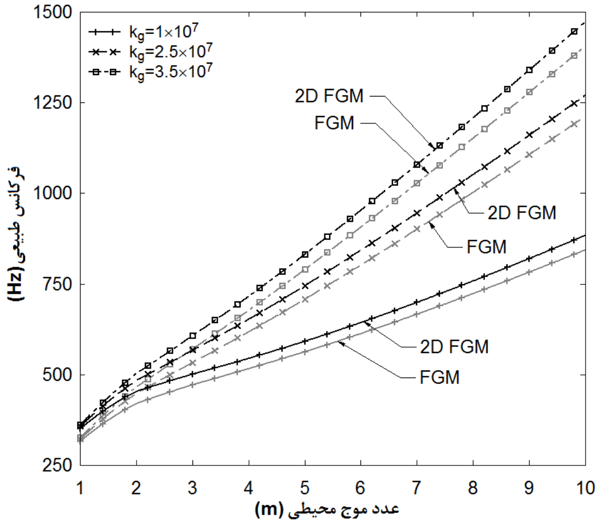


شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج محیطی در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی با آرایش‌های مختلفی از نماهای قانون توانی ۱۰ $\left(L/R=20,\, h/R=0.05\right)$



شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج محیطی در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک

$$\left(L/R=20,\, h/R=0.002,\, k_w=0\ N/m\right)$$



شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج محیطی در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک

$$\left(L/R=20,\, h/R=0.002,\, k_w=1\times10^{7}\ N/m\right)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، با افزایش مقادیر سختی بستر پاسترناک، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین، شیب این نمودارها، نسبت به حالت‌های با سختی کم‌تر، بیش‌تر می‌شود.

شکل ۴ برای حالتی رسم شده است که سختی بستر وینکلر برابر با ۱×$۱۰^{۷}$ نیوتن بر متر باشد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش عدد موج محیطی، مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی افزایش می‌یابد. این افزایش برخلاف حالت قبل به‌صورت خطی اتفاق نمی‌افتد، بلکه در ابتدا شیب افزایش فرکانس طبیعی بیش‌تر بوده و سپس (بعد از موج محیطی دوم) این شیب کاهش می‌یابد.

همچنین، در همه موارد بررسی‌شده در شکل‌های ۳ و ۴، مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی با سختی بستر پاسترناک مشابه، بیش‌تر از پوسته مدرج تابعی یک‌بعدی می‌باشد.

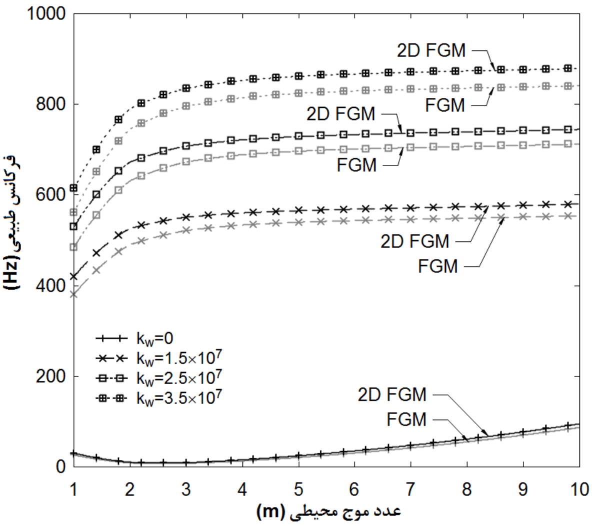
در شکل‌های ۵ و ۶، سختی بستر پاسترناک ثابت فرض شده است و نمودارهای تغییرات فرکانس طبیعی در چهار حالت از مقدار سختی وینکلر با مقادیر صفر، ۱/۵×$۱۰^{۷}$، ۲/۵×$۱۰^{۷}$ و ۳/۵×$۱۰^{۷}$ رسم شده‌اند. در این نمودارها، اختلاف مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی با نمای قانون توانی ۵ به‌تفصیل ارزیابی شده است.

شکل ۵ برای حالتی رسم شده است که در آن سختی بستر پاسترناک برابر با صفر درنظر گرفته شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش عدد موج محیطی، مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی افزایش می‌یابد. این افزایش، در حالتی که سختی بستر وینکلر نیز برابر با صفر در نظر گرفته شده است، متفاوت با دیگر حالت‌هاست؛ به‌طوری که در این حالت، ابتدا مقادیر فرکانس طبیعی کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. این در حالی است که در حالاتی که مقدار سختی بستر وینکلر مقداری نامساوی با صفر اختیار می‌کند، با افزایش عدد موج محیطی، مرتباً افزایش می‌یابد و نهایتاً با افزایش عدد موج محیطی، نرخ افزایش مقادیر فرکانسی کاهش می‌یابد. همچنین، در همه موارد بررسی‌شده، مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی با سختی بستر وینکلر مشابه، بیش‌تر از پوسته مدرج تابعی یک‌بعدی می‌باشد.

شکل ۶ برای حالتی رسم شده است که سختی بستر پاسترناک در آن برابر با ۱×$۱۰^{۷}$ درنظر گرفته شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش عدد موج محیطی، مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی یک‌بعدی و دوبعدی افزایش می‌یابد. در این حالت

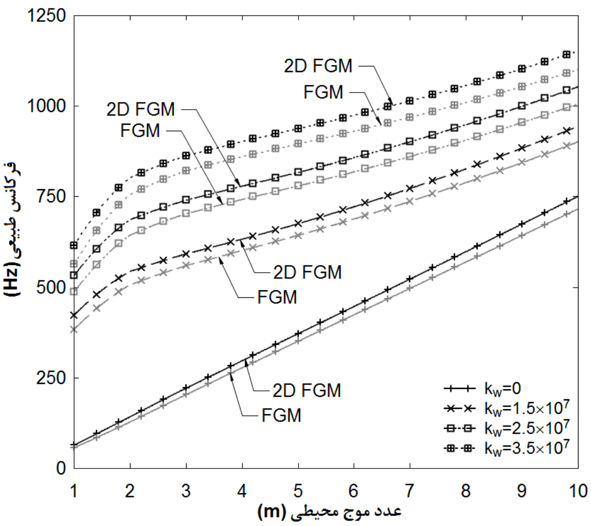
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

نیز، افزایش مقادیر فرکانس طبیعی، در حالتی که سختی بستر وینکلر برابر با صفر باشد، با دیگر موارد متفاوت است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت، افزایش مقادیر فرکانس طبیعی با افزایش عدد موج محیطی تقریباً به‌صورت خطی افزایش می‌یابد. این روند، برای مواردی که سختی بستر وینکلر مخالف صفر باشد، متفاوت است.



شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج محیطی در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک

$$\left(L/R=20,\, h/R=0.002,\, k_g=0\ N/m\right)$$



شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج محیطی در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک

$$\left(L/R=20,\, h/R=0.002,\, k_g=1\times10^7\ N/m\right)$$

همان‌طور که در این نمودار مشاهده می‌شود، تا عدد موج محیطی دوم، شیب افزایش فرکانس طبیعی بیشتر از حالتی است که اعداد موج بزرگ‌ترند. برخلاف شکل قبل، در شکل ۶، برای اعداد موج بیشتر از ۲ نیز افزایش مقادیر فرکانس طبیعی قابل رؤیت می‌باشد که البته این افزایش متفاوت با مقادیر پایین عدد موج می‌باشد. همچنین، در همه موارد بررسی‌شده، مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی با سختی بستر وینکلر مشابه بیشتر از پوسته مدرج تابعی یک‌بعدی می‌باشد.

از نمودارهای رسم‌شده در شکل‌های ۳ تا ۶، می‌توان به این نتیجه رسید که اثر بستر پاسترناک بر روی مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای در اعداد موج پایین‌تر، بیش‌تر از بستر وینکلر می‌باشد. این در حالی است که بستر وینکلر باعث افزایش مقادیر فرکانس طبیعی در اعداد موج بزرگ‌تر می‌شود. علاوه بر این، وجود بستر پاسترناک، یک افزایش خطی در روند مقادیر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای دارد؛ در حالی که وجود بستر وینکلر، یک افزایش منحنی‌شکل در روند فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای با افزایش عدد موج را به‌دنبال دارد.

به‌طور کلی می‌توان گفت که وجود بستر الاستیک باعث به‌تأخیر افتادن فرکانس طبیعی در ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، رفتار پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی دوبعدی براساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدل‌سازی ماده مدرج تابعی از مدل میکرومکانیکی موری-تاناکا استفاده شده است و معادلات دیفرانسیل به‌کمک روش تعمیم‌یافته مربع‌سازی مشتق و انتگرال حل شده‌اند.

نتایج به‌دست آمده در این تحقیق تبیین‌کننده این امر هستند که با استفاده از ترکیبات مختلف در ساختار ماده مدرج تابعی، می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی را به‌صورت دلخواه تغییر داد؛ به این صورت که با افزایش سهم ماده با مدول الاستیک بالاتر می‌توان مقادیر فرکانس طبیعی پوسته مدرج تابعی را افزایش داد و همچنین به‌عکس، با افزایش سهم ماده با مدول الاستیک پایین‌تر، مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد پوسته را کاهش داد. همچنین، وجود یک بستر الاستیک محاط بر پوسته

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]

باعث افزایش مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش پوسته می‌شود؛ به این ترتیب که بستر پاسترناک اثر بیش‌تری بر مقادیر فرکانسی در اعداد موج محیطی پایین‌تر گذاشته و بستر وینکلر در اعداد موج محیطی بالاتر مؤثرتر واقع می‌شود.

۷- پیوست الف

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$L_{12} = \left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left(\frac{B_{12}+B_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{13} = \frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x} - B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2}$$

$$L_{21} = \left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{22} = \left(A_{66} + \frac{3B_{66}}{R} + \frac{2D_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$L_{23} = \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4}\right)\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R} + \frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$L_{31} = -\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x} + B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2}$$

$$L_{32} = -\left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4}\right)\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R} + \frac{D_{12}+4D_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}$$

$$L_{33} = -\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2B_{22}}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\left(\frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{D_{22}}{R^4}\frac{\partial^4}{\partial \theta^4}$$

۸- پیوست ب

$$S_{110} = -\frac{A_{66}}{R^2}m^2$$

$$S_{112} = A_{11}$$

$$S_{121} = \left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R} + \frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}\right)m$$

$$S_{131} = \frac{A_{12}}{R} + \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}\right)m^2$$

$$S_{133} = -B_{11}$$

$$S_{211} = -\left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R} + \frac{B_{12}+B_{66}}{R^2}\right)m$$

$$S_{220} = -\left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4}\right)m^2$$

$$S_{222} = A_{66} + \frac{3B_{66}}{R} + \frac{2D_{66}}{R^2}$$

$$S_{230} = -\left[\frac{A_{22}}{R^2}m + \frac{B_{22}}{R^3}m\left(m^2+1\right) + \frac{D_{22}}{R^4}m^3\right]$$

$$S_{232} = \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R} + \frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\right)m$$

$$S_{311} = -\left(\frac{A_{12}}{R} + \frac{B_{12}+2B_{66}}{R^2}m^2\right)$$

$$S_{312} = B_{11}$$

$$S_{320} = -\left[\frac{A_{22}}{R^2}m + \frac{B_{22}}{R^3}m\left(m^2+1\right) + \frac{D_{22}}{R^4}m^3\right]$$

$$S_{322} = \left(\frac{B_{12}+2B_{66}}{R} + \frac{D_{12}+4D_{66}}{R^2}\right)m$$

$$S_{330} = -\left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{22}}{R^3}m^2 + \frac{D_{22}}{R^4}m^4 + k_w + \frac{k_g}{R^2}m^2\right)$$

$$S_{332} = \frac{2B_{12}}{R} + 2\left(\frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\right)m^2 + k_g$$

$$S_{334} = -D_{11}$$

۹- مراجع

[1] Müller E., Drašar C., Schilz J., Kaysser W. A., “Functionally Graded Materials for Sensor and Energy Applications”, *Materials Science and Engineering*, A362, 2003, pp. 17-39.

[2] Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., Du H., “Fabrication and High Durability of Functionally Graded Piezoelectric Bending Actuators”, *Smart Materials and Structures*, No. 12, 2003, pp. 115-121.

[3] Liu L. S., Zhang Q. J., Zhai P. C., “The Optimization Design of Metal/Ceramic FGM Armor with Neural Net and Conjugate Gradient Method”, *Materials Science Forum*, No. 423-425, 2003, pp. 791-796.

[4] Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Wosko M., Radziewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., Tlaczala M., “Functionally Graded Semiconductor Layers for Devices Application”, *Vacuum*, No. 82, 2008, pp. 389-394.

[5] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., Kawasaki T., “Biocompatibility of Materials and Development to Functionally Graded Implant for Bio-Medical Application”, *Composites Science and Technology*, No. 64, 2004, pp. 893-908.

[6] Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N., “Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells”, *International Journal of Mechanical Sciences*, No. 41, No. 1999, pp. 309-324.

[7] Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy J. N., “Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various Boundary Conditions”, *Applied Acoustics*, No. 61, 2000, pp. 111-129.

[8] Shah A. G., Mahmood T., Naeem M. N., Iqbal Z., Arshad S. H., “Vibrations of Functionally Graded Cylindrical Shells Based on Elastic Foundations”, *Acta Mechanica*, No. 211, 2010, pp. 293-307.

[9] Farid, M., Zahedinejad, P., Malekzade, H. P., “Three Dimensional Temperature Dependent Free Vibration Analysis of Functionally Graded Material Curved Panels Resting on Two Parameter Elastic Foundation using a Hybrid Semi-Analytic, Differential Quadrature Method”, *Material and Design*, No. 31, 2010, pp. 2-13.

[10] Sobhani Aragh, B., Yas, M. H., “Static and Free Vibration Analyses of Continuously Graded Fiber-Reinforced Cylindrical Shells using Generalized Power-Law Distribution”, *Acta Mechanica*, No. 215, 2010, pp. 155-173.

[11] Nemat-Alla M., “Reduction of Thermal Stresses by Developing Two-Dimensional Functionally Graded Materials”, *International Journal of Solids and Structures*, No. 40, 2003, pp. 7339-7356.

[12] Nemat-Alla M., “Reduction of Thermal Stresses by Composition Optimization of Two-Dimensional Functionally Graded Materials”, *Acta Mechanica*, No. 208, 2009, pp. 147-161.

[13] Nie G., Zhong Zh., “Axisymmetric Bending of Two-Directional Functionally Graded Circular and Annular Plates”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 20, No. 4, 2007, pp. 289-295.

[14] Nie G., Zhong Zh., “Dynamic Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Annular Plates”, *Applied Mathematical Modelling*, No. 34, 2010, pp. 608-616.

[15] Sobhani Aragh B., Hedayati H., Borzabadi Farahani E., Hedayati M., “A Novel 2-D Six-Parameter Power-Law Distribution for Free Vibration And Vibrational Displacements of Two-Dimensional Functionally Graded Fiber-Reinforced Curved Panels”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, No. 30, 2011, pp. 865-883.

[16] Sobhani Aragh B., Hedayati H., “Static Response and Free Vibration of Two-Dimensional Functionally Graded Metal/Ceramic Open Cylindrical Shells under Various Boundary Conditions”, *Acta Mechanica*, No. 223, 2011, pp. 309-330.

[17] Shen H. S., “Nonlinear Vibration of Shear Deformable FGM Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium”, *Composite Structures*, No. 94, 2012, pp. 1144-1154.

[18] Bagherizadeh E., Kiani Y., Eslami M. R., “Mechanical Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells Surrounded by Pasternak Elastic Foundation”, *Composite Structures*, No. 93, 2011, pp. 3063-3071.

[19] Bellman R., Kashef B. G., Casti J., “Differential Quadrature: a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations”, *Journal of Computational Physics*, No. 10, 1972, pp. 40-52.

[20] Shu C., Richards B. E., “Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, No. 15, 1992, pp. 791-798.

[21] Shu C., *Differential quadrature and its application in engineering*, First Ed., Berlin, Springer, 2000.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.5.10.0]