مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1396، دوره 17، شماره 4، ص‌ص 419-430

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شبیه‌سازی عددی جابجایی آزاد حول یک استوانه ساکن با شار حرارتی ثابت و موقعیت‌های مختلف قطری به روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن

جواد رحمن نژاد[1]، سید علی میربزرگی[2]*

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* بیرجند، صندوق پستی 97175/615، samirbozorgi@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 03 دی 1395
پذیرش: 07 فروردین 1396
ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1396

کلید واژگان:
لتیس بولتزمن
روش مرز غوطه‌ور
جابجایی آزاد
شار حرارتی ثابت
محفظه بسته

چکیده

در این مقاله، یک روش مرز غوطه‌ور-لتیس بولتزمن جدید برای شبیه سازی مسائل حرارتی همراه با شرط مرزی شار حرارتی ثابت توسعه داده شده است. در این روش شرط مرزی عدم لغزش با استفاده از روش اصلاح سرعت ضمنی و شرط مرزی شار حرارتی ثابت با توجه به اختلاف بین شار حرارتی مطلوب و شار محاسبه شده در روند حل اعمال می‌شود. اصلاح سرعت به‌عنوان یک جمله نیرویی به معادله بولتزمن افزوده می‌گردد و برای اصلاح دما، یک جمله چشمه/چاه گرمایی در معادله انرژی منظور می‌شود. حذف فرآیند پیچیده‌ی تولید شبکه، سادگی و کارآیی در عین حفظ دقت، از مزیت‌های بارز روش پیشنهادی می‌باشد. با استفاده از این روش، جریان جابجایی آزاد حول یک استوانه دایروی داغ با شار حرارتی ثابت، درون محفظه‌ای با دیواره‌های سرد در اعداد رایلی 10^3 تا 10^6 مورد مطالعه قرار گرفته است. بعلاوه، اثرات تغییر موقعیت قطری استوانه بر الگوهای جریان و انتقال حرارت و همچنین توزیع عدد ناسلت محلی روی سطح استوانه و دیواره‌های محفظه بررسی شده است. نتایج حاصل، نشان می‌دهد که مکان وقوع عدد ناسلت بیشینه به شدت به موقعیت قطری استوانه وابسته است. با توجه به نتایج این شبیه‌سازی‌ها، می‌توان اظهار داشت که روش حاضر قادرست شرط مرزی شار حرارتی ثابت را به درستی اعمال کند.

Numerical simulation of free convection around a stationary cylinder with constant heat flux and different diagonal locations using IB-LBM

Javad Rahmannezhad, Seyed Ali Mirbozorgi*

Department of Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran
* P.O.B. 97175/615, Birjand, Iran, samirbozorgi@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 December 2016
Accepted 27 March 2017
Available Online 29 April 2017

Keywords:
Lattice Boltzmann
Immersed Boundary Method
Natural Convection
Constant Heat Flux
Enclosure

ABSTRACT

In this paper, a new immersed boundary-lattice Boltzmann method (IB-LBM) is developed to simulate heat transfer problems with constant heat flux boundary condition. In this method, the no-slip boundary condition is enforced via implicit velocity correction method and the constant heat flux boundary condition is implied considering the difference between the desired heat flux and the estimated one. The velocity correction represented as a forcing term is added to Boltzmann equation and for temperature correction, a heat source/sink term is introduced to energy equation. Elimination of sophisticated grid generation process, simplicity and effectiveness while keeping the accuracy, are the main advantages of the proposed method. Using the developed method, natural convection around a hot circular cylinder with constant heat flux in an enclosure with cold walls has been simulated at Rayleigh numbers of 10^3–10^6. Moreover, effects of diagonal position of cylinder on the flow and heat transfer patterns and local Nusselt number distribution on the surface of cylinder and walls of enclosure have been investigated. The obtained results show that the location of maximum local Nusset number is extremely dependent on the diagonal position of the cylinder. According to the results of this simulation, it can be said that the present method is able to imply accurately the constant heat flux boundary condition.

1- مقدمه

امروزه، جریان‌های توام با انتقال حرارت کاربردهای وسیعی در علم مهندسی دارند. از جمله این کاربردها می‌توان به کاربرد انتقال حرارت در سیستم‌های انرژی خورشیدی، تجهیزات خنک‌کاری قطعات الکترونیکی، سیستم‌های ذخیره انرژی و نیروگاه‌های حرارتی اشاره کرد. درک هر چه بهتر مکانیزم‌های جریان و انتقال حرارت در موارد ذکر شده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

بسیاری از جریان‌های توام با انتقال حرارت در تعامل با اجسامی با شکل‌های پیچیده می‌باشند. در تحلیل چنین جریان‌هایی، روش‌های عددی با شبکه‌های منطبق بر مرز، علی‌رغم دقت بالا به واسطه همبستگی شدید شکل مرز و شبکه محاسباتی، به ویژه در هندسه‌های پیچیده و متحرک با مشکلات جدی مواجه هستند. بنابراین، استفاده از شبکه‌ی محاسباتی مستقل از شکل مرز، همواره مطلوب محققان و مهندسان است. روش مرز غوطه‌ور که نخستین بار

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

J. Rahmannezhad, S. A. Mirbozorgi, Numerical simulation of free convection around a stationary cylinder with constant heat flux and different diagonal locations using IB-LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 419-430, 2017 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

توسط پسکین [1] توسعه یافته است چنین ایده‌ای را دنبال می‌کند. در این روش از یک شبکه کارتزین اویلری برای حل معادلات حاکم بر جریان سیال استفاده می‌شود در حالی‌که جسم (به‌طور مشخص مرز آن) با مجموعه‌ای از نقاط لاگرانژی بیان می‌گردد. بدین ترتیب، نحوه وابستگی حل معادلات حاکم به شرایط مرزی آن‌ها کاملا تغییر می‌کند. این در حالی است که در اثر استفاده از شبکه ساده کارتزین در تمام نواحی حل (حتی داخل جسم)، از فرآیندهای پیچیده‌ی تولید شبکه اجتناب می‌شود.

در روش مرز غوطه‌ور، اثر جسم بر جریان سیال به‌صورت یک نیروی چگال محلی ظاهر می‌گردد. برای ارزیابی این نیرو، روش‌هایی چون نیروی بازخوردی، نیرو مستقیم صریح، نیرو مستقیم تکراری و اصلاح سرعت ضمنی ارائه گردیده است. از سوی دیگر، سادگی و کارآیی روش لتیس بولتزمن سبب شده که این روش به‌عنوان جایگزینی مناسب برای روش‌های مبتنی بر حل معادلات ناویر-استوکس در نظر گرفته شود و به‌طور وسیعی برای شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده به‌کار رود [2]. روش لتیس بولتزمن براساس معادله سینیتیک بولتزمن و روی یک شبکه کارتزین عمل می‌کند. ویژگی مشترک روش‌های لتیس بولتزمن و مرز غوطه‌ور در استفاده از شبکه کارتزین، انگیزه ترکیب این دو روش و ایجاد روش نوپایی به نام مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن بوده است.

فنگ و مشائلیدس [3] برای اولین بار روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن را ارائه کردند. تلاش‌های بسیاری برای به‌کارگیری این روش و اصلاح آن انجام گرفته است. از آن جمله می‌توان به روش‌های مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن مستقیم ارائه شده توسط کانگ و حسن [4] و روش اصلاح سرعت ضمنی وو و شو [5] اشاره کرد. موفقیت این روش‌ها در شبیه‌سازی جریان‌های بدون انتقال حرارت، انگیزه محققان برای تعمیم آن‌ها و ایجاد روش‌های جدید برای تحلیل مسائل همراه با انتقال حرارت بوده است. باید اشاره کرد که اعمال مستقیم ایده اصلی پسکین در جریان‌های همراه با انتقال حرارت به واسطه‌ی حضور معادله‌ی انرژی با مشکلاتی همراه خواهد بود. در واقع، با نگاهی به متون تخصصی مربوط به این حوزه، می‌توان دریافت که تعداد کارهای انجام شده در زمینه روش مرز غوطه‌ور در جریان‌های همراه با انتقال حرارت بسیار کمتر از کارهای مشابه در جریان‌های بدون انتقال حرارت است. وانگ و همکاران [6] یک روش گرمایش مستقیم تکراری را پیشنهاد نمودند و انتقال حرارت در مسائل همراه با مرز متحرک را به کمک آن شبیه‌سازی کردند. لی و همکاران [7] یک روش مرز غوطه‌ور بر پایه روش حجم محدود را برای شبیه‌سازی جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی با حضور یک استوانه دایروی در موقعیت‌های مختلف به‌کار گرفتند. رن و همکاران [8] یک روش ضمنی را برای ارزیابی چشمه/چاه گرمایی پیشنهاد کردند و به‌کمک آن جریان‌های حرارتی با شرط مرزی دیریکله را شبیه‌سازی نمودند. مارک و همکاران [9] روش مرز غوطه‌ور هیبرید را به مسائل حرارتی تعمیم داده و جابجایی طبیعی اطراف یک استوانه داغ را بررسی کردند. با به‌کارگیری مفهوم چگالی انرژی، جئونگ و همکاران [10] روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن با تابع توزیع دوگانه را ارائه کردند. آن‌ها به کمک روش توسعه داده شده، جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی همراه با موانعی با شکل‌های مختلف را شبیه‌سازی کردند.

باید اشاره کرد که تمامی تحقیقات ذکر شده در بالا برای شبیه‌سازی مسائل حرارتی با شرط مرزی دما ثابت (دیریکله) صورت گرفته است. در حالیکه، مسائل حرارتی با شرط مرزی شار حرارتی ثابت (نیومن) دارای چالش بزرگتری هستند. جستجوی نویسندگان در متون تخصصی مربوطه نشان می‌دهد که در زمینه به‌کارگیری روش مرز غوطه‌ور برای جریان‌های حرارتی با شرط مرزی نیومن کارهای بسیار اندکی انجام شده است. در ادامه به کارهای قابل توجه در زمینه اعمال روش مرز غوطه‌ور در جریان‌های همراه با شرط مرزی دمایی نیومن اشاره خواهد شد. ژانگ و همکاران [11] با تعریف مجموعه‌ای کمکی از نقاط لاگرانژی، به‌منظور اعمال شرط مرزی مشتقی، یک روش گرمایش مستقیم را توسعه دادند. در روش آن‌ها، شرط مرزی نیومن با استفاده از اطلاعات دمایی موجود در مجموعه نقاط کمکی لاگرانژی به شرط دیریکله تبدیل شده و سپس اعمال می‌گردد. بامیرو و لیو [12] با استفاده از روش گرمایش مستقیم لتیس بولتزمن، انتقال حرارت جابجایی اجباری حول استوانه‌هایی با مقاطع مربعی و مثلثی را شبیه‌سازی نمودند. در کار آن‌ها، برای محاسبه‌ی جمله‌ی چشمه گرمایی نیاز به استفاده از گرادیان‌های نرمال دما روی سطح جسم نمی‌باشد، در حالی‌که روش آن‌ها برای اعمال اثر حضور جسم از روش نیرو مستقیم با به‌کارگیری معادله ناویر-استوکس بهره می‌برد. رن و همکاران [13] با افزودن جمله‌ی چشمه/چاه گرمایی به معادله انرژی، یک روش مرز غوطه‌ور را برای اعمال شار حرارتی ثابت روی جسم پیشنهاد نمودند. چشمه/چاه گرمایی در روش آن‌ها با توجه به اختلاف بین شار حرارتی مطلوب و شار محاسبه شده در روند حل به‌دست می‌آید. آن‌ها با استفاده از روش توسعه داده شده انتقال حرارت جابجایی آزاد درون دو استوانه هم مرکز را بررسی کردند. هو و همکاران [14] روش تبادل ممنتم را براساس شرط پرش گرادیان دما بسط داده و با اعمال سه شرط اولیه مختلف، سه الگوی جریان متفاوت را برای یک مسئله‌ی دائم جابجایی طبیعی درون دو استوانه هم مرکز به‌دست آوردند.

مرور کارهای ذکر شده در بالا به ویژه تحقیقات مربوط به شرط مرزی نیومن [11-15] حاکی از آنست که روش‌های پیشنهاد شده برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش در هیدرودینامیک و اعمال شرط مرزی مشتقی در انتقال حرارت متنوع می‌باشد. هدف کار حاضر، توسعه‌ی یک روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن با استفاده از دقیق‌ترین و ساده‌ترین این روش‌ها است. به‌عبارت دیگر، در مقاله حاضر برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش (اثر حضور جسم) از روش دقیق اصلاح سرعت ضمنی وو و شو [5] استفاده شده است و برای اعمال شرط مرزی مشتقی (شار حرارتی ثابت) در چهارچوب لتیس بولتزمن از ایده‌ی مطرح شده در کار رن و همکاران [13] استفاده گردیده است. مزیت روش پیشنهادی، بهره‌گیری از سادگی حل معادلات لتیس بولتزمن و رهایی از فرآیند پیچیده‌ی تولید شبکه‌های منطبق بر مرز به کمک روش مرز غوطه‌ور، در عین حفظ دقت در اعمال شرط مرزی شار ثابت می‌باشد. افزون بر این، در این روش نیاز به تعریف لایه کمکی برای اعمال شرط مرزی نیومن وجود نخواهد داشت.

از سوی دیگر، جابجایی آزاد درون محفظه‌هایی با حضور اجسام داخلی، در بسیاری از کاربردهای صنعتی نظیر مبدل‌های حرارتی، راکتورهای شیمیایی و هسته‌ای و جریان‌های جوی دیده می‌شود. به همین علت، تحقیقات قابل توجهی به بررسی جنبه‌های مختلف این مساله پرداخته‌اند [4]. لی و همکاران [7] با استفاده از روش مرز غوطه‌ور- حجم محدود، اثر موقعیت‌های افقی و قطری یک استوانه‌ی داغ بر جابجایی آزاد درون یک محفظه مربعی را مورد تحقیق قرار دادند. پارک و همکاران [16] اثر فاصله‌ی عمودی دو استوانه‌ی داغ بر جابجایی آزاد درون یک محفظه را در اعداد رایلی مختلف بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که الگوهای جریان و انتقال حرارت در چنین

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

مساله‌ای تحت تاثیر عدد رایلی و موقعیت نسبی استوانه‌ها هستند. با استفاده از روش مرز غوطه‌ور، چوی و همکاران [17] الگوهای جریان و انتقال حرارت در جابجایی آزاد درون محفظه‌های زاویه‌دار را در اعداد رایلی 10^3 تا 10^7 مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با توجه به نتایج به دست آمده در موقعیت‌های مختلف عمودی استوانه‌ی داغ داخلی، میدان‌های جریان و حرارت را به سه دسته‌ی پایای متقارن، پایای نامتقارن و ناپایای متقارن تقسیم‌بندی کردند.

با توجه به تحقیقات ذکر شده، می‌توان اظهار داشت که مطالعات بسیاری در مورد انتقال حرارت جابجایی آزاد درون یک محفظه با حضور استوانه‌های داخلی ثابت و یا چرخان در شرایط مرزی گوناگون (عایق، هادی، همدما و یا شار ثابت) انجام شده است. با این وجود، تحقیق خاصی که اثرات موقعیت‌های مختلف قطری یک استوانه شار ثابت درون یک محفظه را گزارش کرده باشد وجود ندارد. بنابراین در این مقاله، با توسعه‌ی یک روش مرز غوطه‌ور-لتیس بولتزمن حرارتی، به بررسی اثر موقعیت‌های مختلف قطری یک استوانه با شار حرارتی ثابت بر جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی در اعداد رایلی 10^3 تا 10^6 پرداخته شده است.

2- روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن حرارتی با شرط مرزی شار ثابت

2-1- معادلات حاکم و شرایط مرزی

همان‌طور که در بخش مقدمه بیان گردید، در مقاله حاضر جابجایی آزاد حول یک استوانه با شار حرارتی ثابت درون یک محفظه بسته [18] مورد مطالعه قرار گرفته است. در "شکل 1" هندسه و شرایط مرزی مربوط به این مسئله آورده شده است. مشاهده می‌شود، در مرکز محفظه به طول و عرض L، استوانه‌ای به شعاع $R = 0.2L$ قرار گرفته است. فاصله‌ی قطری مرکز استوانه و محفظه بین $-0.25L$ تا $0.25L$ متغیر است. شرط مرزی عدم لغزش سرعت برای همه‌ی دیواره‌های محفظه منظور گردیده است در حالی‌که دمای آن‌ها در T_{cold} ثابت نگه داشته می‌شود.

شرایط مرزی روی مرز استوانه نیز به صورت زیر می‌باشند

$$u = U_B \tag{1}$$

$$-K\frac{\partial T}{\partial n} = Q_B \tag{2}$$

U_B، سرعت تعیین شده روی مرز، K هدایت حرارتی سیال و Q_B شار حرارتی داده شده روی مرز استوانه در جهت عمود بر آن است.

برای یک سیال نیوتنی در جریان لزج تراکم‌ناپذیر، معادلات حاکم بر انتقال حرارت جابجایی آزاد با استفاده از مفهوم مرز غوطه‌ور و با اعمال فرض بوزینسک[1] به شکل زیر خواهند بود.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\cdot\nabla u\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + f_x \tag{4}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + V\cdot\nabla v\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + \rho g\big(1 - \beta(T - T_\infty)\big) + f_y \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\cdot\nabla T\right) = \alpha\nabla^2 T + q \tag{6}$$

در معادلات (3) تا (6)، $V = ui + vj$، p، T و T_∞ به ترتیب نشانگر سرعت، فشار، دما و دمای مرجع می‌باشند. ρ، μ، β و α به ترتیب چگالی، لزجت دینامیکی، ضریب انبساط حجمی و ضریب پخش حرارتی سیال هستند. g شتاب گرانش زمین در راستای y است. f_x و f_y مولفه‌های نیرو و q چشمه/چاه گرمایی هستند که به واسطه‌ی به‌کارگیری روش مرز غوطه‌ور اعمال می‌شوند.

با توجه به این‌که در مسئله حاضر، پدیده‌های پخش ممنتم با مقیاس زمانی L^2/υ، پخش حرارت با مقیاس زمانی L^2/α و جابجایی جرم با مقیاس زمانی $\sqrt{K/g\beta Q_B}$ مطرح می‌باشند، مقیاس زمان به‌کار رفته به‌منظور بی بعد سازی معادلات برابر حداقل این مقیاس‌ها یعنی مقیاس زمانی مربوط به پخش حرارت (L^2/α) انتخاب گردیده است.

بنابراین، با تعریف پارامترهای بی‌بعد زیر، می‌توان معادلات حاکم را بی‌بعد کرد.

$$\tau = \frac{t}{L^2/\alpha},\qquad X = \frac{x}{L},\qquad Y = \frac{y}{L}, \tag{7}$$

$$U = \frac{u}{\alpha/L},\qquad V = \frac{v}{\alpha/L},\qquad P = \frac{p}{\rho\alpha^2/L^2}, \tag{8}$$

$$\theta = \frac{T - Tc}{Q_B L/K},\qquad \mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{\alpha},\qquad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta Q_B L^4}{K\upsilon\alpha} \tag{9}$$

در روابط بالا υ ، α، Pr و Ra به ترتیب لزجت سینماتیکی سیال، ضریب پخش حرارتی، عدد پرانتل و عدد رایلی می‌باشند.

بنابراین معادلات بدون بعد حاکم بر مسئله را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \mathrm{Pr}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) + \bar{f}_x \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \mathrm{Pr}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) + \mathrm{RaPr}\theta + \bar{f}_y \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) + \bar{q} \tag{13}$$

در روابط (10) تا (13)، $\bar{f}_x$، $\bar{f}_y$ و $\bar{q}$ به ترتیب بیانگر جمله نیرویی بی‌بعد در راستای x، جمله نیرویی بی‌بعد در راستای y و چشمه/چاه گرمایی بی‌بعد هستند.

2-2- روش مرز غوطه ور در جریان‌های همراه با انتقال حرارت

در روش مرز غوطه‌ور معرفی جسم در حوزه جریان از طریق اصلاح معادلات

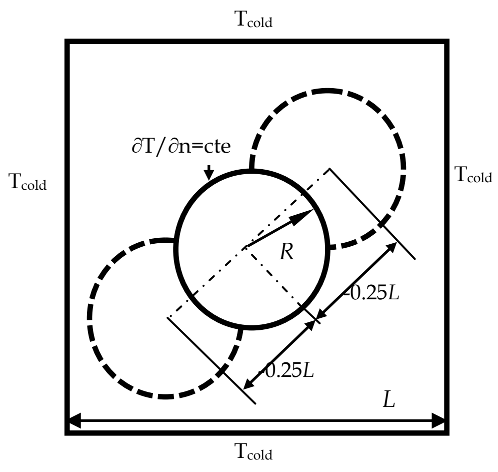

Fig. 1 The configuration of an isoflux cylinder in an enclosure with boundary conditions

شکل 1 پیکربندی استوانه شار ثابت درون محفظه با شرایط مرزی

[1] Boussinesq

حاکم صورت می‌پذیرد. به‌عبارت دیگر، حوزه اویلری جریان اغلب یک حوزه مستطیلی با شبکه کارتزین یکنواخت است و مرز جسم با مجموعه‌ای از نقاط لاگرانژی، به‌صورت مجازی تعریف می‌گردد. با استفاده از معادلات (14)، از طریق میانیابی سرعت در نقاط اویلری برای نقاط لاگرانژی و توزیع نیروی مرزی از نقاط لاگرانژی به نقاط اویلری، تعامل هیدوردینامیکی بین مرز غوطه‌ور و سیال اطراف آن بیان می‌گردد.

$$u(X(s,t),t) = \int_{\Omega} u(x,t)\delta\big(x - X(s,t)\big)\,dx \qquad \text{(14-الف)}$$

$$f(x,t) = \int_{\Gamma} F\big(X(s,t)\big)\delta\big(x - X(s,t)\big)\,ds \qquad \text{(14-ب)}$$

در راوابط (14)، Ω نماینده ناحیه محاسباتی و Γ معرف مرز جسم است. علاوه بر این، dx نشان دهنده‌ی جزء طول و ds معرف جزء سطح می‌باشد. از سوی دیگر، برای بیان تعامل حرارتی بین مرز غوطه‌ور و سیال اطراف آن، با استفاده از معادلات (15)، دما در نقاط لاگرانژی با میانیابی مقادیر متناظر آن در نقاط اویلری به‌دست می‌آید و سپس چشمه/چاه گرمایی از نقاط لاگرانژی به نقاط اویلری توزیع می‌شود.

$$T(X(s,t),t) = \int_{\Omega} T(x,t)\delta\big(x - X(s,t)\big)\,dx \qquad \text{(15-الف)}$$

$$q(x,t) = \int_{\Gamma} \delta Q\big(X(s,t)\big)\delta\big(x - X(s,t)\big)\,ds \qquad \text{(15-ب)}$$

در این‌جا، x مختصات بی‌بعد نقاط اویلری، X مختصات بی‌بعد نقاط لاگرانژی و $\delta\big(x - X(s,t)\big)$ تابع دلتای دیراک[1] می‌باشد. لازم به‌ذکر است مختصات یاد شده با فواصل شبکه بدون بعد شده‌اند. علاوه بر این، F و $Q\delta$ به‌ترتیب چگالی نیرو و چشمه/چاه حرارتی روی مرز هستند. مقدار چشمه/چاه حرارتی مرز با توجه به اختلاف گرادیان دمای مطلوب و گرادیان دمای میانیابی شده از نقاط اویلری برآورد می‌شود که نحوه‌ی تعیین آن در بخش 2-5 تشریح خواهد شد.

2-3- روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن

در کار حاضر، مدل لتیس بولتزمن با تقریب بی-جی-کا[2] به‌عنوان حلگر میدان‌های جریان و دما انتخاب شده است. اثر مرز غوطه‌ور بر سیال مجاورش از طریق تعریف جمله نیرویی در معادله لتیس بولتزمن برای تابع توزیع چگالی و قرار دادن جمله چشمه/چاه گرمایی در معادله لتیس بولتزمن برای تابع توزیع دما در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، معادلات لتیس دو-جمعیتی[3] با جملات نیرویی و حرارتی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x+e_\alpha\Delta t, t+\Delta t) - f_\alpha(x,t) \\ = -\frac{1}{\tau_f}\Big(f_\alpha(x,t) - f_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t)\Big) \\ + F_\alpha \Delta t \end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} g_\alpha(x+e_\alpha\Delta t, t+\Delta t) - g_\alpha(x,t) \\ = -\frac{1}{\tau_g}\Big(g_\alpha(x,t) - g_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t)\Big) \\ +G_\alpha \Delta t \end{aligned} \qquad (17)$$

در روابط فوق، $f_\alpha(x,t)$ و $g_\alpha(x,t)$ توابع توزیع چگالی و دما برای سرعت‌های گسسته‌ی e_α در زمان t و مکان x هستند. Δt گام زمانی است و τ_f و τ_g به ترتیب، زمان‌های رهاسازی بدون بعد برای تابع توزیع چگالی و دما می‌باشند. $f_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t)$ و $g_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t)$ به‌ترتیب، بیانگر توابع توزیع تعادلی چگالی و دما بوده و با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$f_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t) = w_\alpha \rho\left(1 + \frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha\cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2}\right) \qquad (18)$$

$$g_\alpha^{\mathrm{eq}}(x,t) = w_\alpha T\left(1 + \frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha\cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2}\right) \qquad (19)$$

در روابط (18) و (19)، c_s سرعت صوت در شبکه بولتزمن (برابر $1/\sqrt{3}$) می‌باشد و w_α ضرایب وزنی هستند که بستگی به مدل سرعت‌های میکروسکوپی در شبکه بولتزمن خواهند داشت.

در این تحقیق، از مدل $D2Q9$ استفاده گردیده است که در آن سرعت‌های گسسته به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ (c,0),(0,c),(-c,0),(0,-c) & \alpha = 1,2,3,4 \\ (c,c),(-c,c),(-c,-c),(c,-c) & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (20)$$

که در آن $c = \Delta x/\Delta t$، Δx گام مکانی است. علاوه‌بر این، $c = \sqrt{3}c_s$ می‌باشد. ضرایب وزنی مربوطه نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (21)$$

زمان‌های رهاسازی τ_f و τ_g را می‌توان با روابط زیر بیان کرد:

$$\tau_f = 3\nu/(c^2\delta t) + 0.5 \qquad (22)$$

$$\tau_g = 3\alpha/(c^2\delta t) + 0.5 \qquad (23)$$

چگالی نیروی گسسته به کمک رابطه‌ی معرفی شده توسط گوا و همکاران [19] محاسبه می‌شود.

$$F_\alpha = (1\cdot -0.5\tau_f) w_\alpha\left(\frac{e_\alpha - u}{c_s^2} + \frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^4}\cdot e_\alpha\right)\cdot f \qquad (24)$$

برای ارزیابی چشمه/چاه گرمایی گسسته نیز می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$G_\alpha = w_\alpha\left(1 + \frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2}\right) q \qquad (25)$$

در روش مرز غوطه‌ور-لتیس بولتزمن خواص ماکروسکوپیک نظیر چگالی سیال، سرعت و دما را می‌توان با روابط زیر محاسبه کرد:

$$\rho = \sum\nolimits_\alpha f_\alpha \qquad (26)$$

$$\rho u = \sum\nolimits_\alpha e_\alpha f_\alpha + f\delta t/2 \qquad (27)$$

$$T = \sum\nolimits_\alpha g_\alpha + q\delta t/2 \qquad (28)$$

از طریق بسط چاپمن-انسکاگ، می‌توان نشان داد که معادلات (3) تا (6) با دقت مناسبی از مدل حرارتی توسعه داده شده بازیابی می‌شوند.

2-4- فرآیند اصلاح سرعت برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش

برای ارضای شرط مرزی عدم لغزش در روش مرز غوطه‌ور-لتیس بولتزمن حرارتی ارائه شده در کار حاضر، از روش اصلاح سرعت ضمنی وو و شو [5] پیروی شده است. این روش از دو مرحله‌ی پیش بینی و اصلاح تشکیل گردیده است. در مرحله‌ی پیش‌بینی با حل معادله‌ی (16) مقادیر سرعت محاسبه شده و به‌عنوان سرعت‌های میانی (سرعت‌های اصلاح نشده) در نظر گرفته می‌شوند. در مرحله‌ی بعد، مقادیر اصلاح سرعت ارزیابی شده و سرعت‌ها تصحیح می‌گردند. با معلوم بودن جمله چگالی نیرو، می‌توان از رابطه‌ی زیر برای محاسبه مقادیر اصلاح سرعت استفاده کرد.

$$\partial\rho u/\partial t = f \qquad (29)$$

[1] Dirac delta function
[2] Bhatnagar–Gross–Krook(BGK)
[3] Double population

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

به‌کارگیری مستقیم رابطه‌ی (29) سبب ایجاد مشکل نفوذ خطوط جریان به داخل جسم غوطه‌ور خواهد شد. برای غلبه بر این مشکل، چگالی نیرو مجهول در نظر گرفته شده و سرعت در نقاط لاگرانژی مرزی به گونه‌ای محاسبه می‌گردد که مقادیر سرعت میانیابی شده از نقاط اویلری در این نقاط با مقادیر از پیش تعیین شده (U_B) برای آن‌ها یکسان شود. با تعریف سرعت به صورت $u = u^m + \delta u$ رابطه‌ی (29) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\delta\rho u/\delta t = f \quad (30)$$

که u سرعت تصحیح شده، u^m سرعت میانی و δu اصلاح سرعت می‌باشد. افزودن یک جمله‌ی نیرویی به معادلات حاکم معادل انجام تصحیحی در میدان سرعت است [5].

اگر مرز غوطه‌ور با مجموعه‌ای از نقاط لاگرانژی با مختصات $X_B(s_k,t), k = 1,2,\dots,M$ بیان شود، اصلاح سرعت در هر نقطه اویلری را می‌توان با رابطه‌ی (31) به‌دست آورد.

$$\delta u(x_n,t) = \int_\Gamma \delta u_B\big(X(s,t)\big)\delta\big(x - X(s,t)\big)\,ds \quad (31)$$

در رابطه‌ی (31)، $x_n\ (n = 1,\dots,N)$ بیانگر مختصات نقاط اویلری شبکه محاسباتی با فواصل $\delta x = \delta y = 1$ می‌باشد. علاوه بر این، $D(x_n - X_B^k)$ تابع دلتای دیراک است. با توجه به بررسی انجام شده در مورد دقت توابع گوناگون پیشنهاد شده، از تابع زیر استفاده شده است [20].

$$D(x_n - X_B^k) = \delta(x_n - X_B^k)\delta(y_n - Y_B^k), \quad \text{(32-الف)}$$

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(1 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}\right) & 0 \le |r| < 1 \\ \frac{1}{8}\left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}\right) & 1 \le |r| < 2 \\ 0 & |r| \ge 2 \end{cases} \quad \text{(32-ب)}$$

با استفاده از رابطه (32) می‌توان معادله‌ی (31) را به‌صورت زیر تقریب زد

$$\delta u(x_n,t) = \sum_k \delta u_B^k(X_B^k,t)\, D(x_n - X_B^k)\Delta s \quad (33)$$

در رابطه‌ی (33)، $\delta u(x_n,t)$ اصلاح سرعت در نقطه‌ی اویلری n ام می‌باشد.

برای ارضای شرط عدم لغزش (رابطه‌ی (1))، سرعت در نقطه مرزی میانیابی شده از مقادیر متناظر آن در نقاط اویلری، باید با سرعت مطلوب روی مرز ($U_B(X_B^k,t)$) برابر باشد، یعنی:

$$U_B(X_B^k,t) = \sum_n u(x_n,t)D(x_n - X_B^k)\,\Delta x\Delta y \quad (34)$$

سرعت اصلاح شده در نقاط اویلری ($u(x_n,t)$) به‌صورت مجموع سرعت میانی و اصلاح سرعت بیان می‌شود.

$$u(x_n,t) = u^m(x_n,t) + \delta u(x_n,t) \quad (35)$$

با جای‌گذاری روابط (33) و (35) در رابطه‌ی (34) خواهیم داشت

$$\sum_n \sum_k \delta u_B^k(X_B^k,t)D(x_n - X_B^k)D(x_n - X_B^k)\,\Delta s = U_B(X_B^k,t) - \sum_k u^m(x_n,t)D(x_n - X_B^k)\,\Delta x\Delta y \quad (36)$$

در رابطه‌ی (36) مجهولات، مقادیر اصلاحات سرعت در نقاط لاگرانژی (δu_B^k) هستند. دستگاه معادلات (36) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$AX = B \quad (37)$$

در دستگاه معادلات (37)، A ماتریس ضرایب، X ماتریس مجهولات و B ماتریس معلومات است [5].

با حل معادلات (37) به طور همزمان، اصلاحات سرعت در نقاط لاگرانژی به‌دست آمده و سرعت اصلاح شده در نقاط اویلری با استفاده از معادلات (34) و (35) محاسبه می‌گردد. علاوه‌بر این، مقادیر جمله نیرویی در نقاط اویلری را می‌توان به سادگی با استفاده از رابطه‌ی (30) تعیین کرد.

2-5- فرآیند اصلاح دما برای اعمال شرط مرزی شار ثابت

در پژوهش حاضر، با استفاده از روش پیشنهادی رن و همکاران [13] چهارچوب جدیدی برای اعمال شرط مرزی نیومن (شار ثابت) در روش مرز غوطه‌ور- لتیس بولتزمن بنا شده است. برای اعمال شرط مرزی در این روش، دما در دو مرحله پیش‌بینی و اصلاح محاسبه خواهد شد. با حل معادله‌ی (17) در مرحله‌ی پیش‌بینی، مقادیر دما تعیین گردیده و به‌عنوان دماهای میانی (اصلاح نشده) شناخته می‌شوند. در مرحله‌ی اصلاح، ابتدا اصلاحات دما تعیین گردیده و سپس با استفاده از رابطه‌ی (28) مقادیر دمای اصلاح شده به‌دست خواهد آمد.

$$T(x_n,t) = T^m(x_n,t) + \delta T(x_n,t) \quad (38)$$

برای یافتن مقادیر اصلاح دما در نقاط لاگرانژی نیازمند محاسبه گرادیان‌های نرمال دما در این نقاط هستیم. به همین منظور، ابتدا با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی مرتبه دوم، گرادیان‌های دما در راستاهای x و y برای نقاط اویلری محاسبه می‌گردند. سپس با به کارگیری روابط (39) تا (41)، گرادیان‌های نرمال دما در نقاط لاگرانژی نیز ارزیابی می‌شوند.

$$\frac{\partial T^m}{\partial x}(X_B^k,t) = \sum_n \frac{\partial T^m}{\partial x}(x_n,t)D(x_n - X_B^k)\,\Delta x\Delta y \quad (39)$$

$$\frac{\partial T^m}{\partial y}(X_B^k,t) = \sum_n \frac{\partial T^m}{\partial y}(x_n,t)D(x_n - X_B^k)\,\Delta x\Delta y \quad (40)$$

$$\frac{\partial T^m}{\partial n}(X_B^k,t) = \frac{\partial T^m}{\partial x}(X_B^k,t)\cdot n_{xk} + \frac{\partial T^m}{\partial y}(X_B^k,t)\cdot n_{yk} \quad (41)$$

در روابط بالا، n_{xk} و n_{yk} مقادیر مولفه‌های بردار نرمال سطح جسم غوطه‌ور در نقطه لاگرانژی k ام هستند که به کمک روابط (42) و (43) محاسبه می‌گردند و $\frac{\partial T^m}{\partial n}(X_B^k,t)$ گرادیان نرمال دما در همان نقطه لاگرانژی است.

$$n_{xk} = -\frac{y_B^{k+1} - y_B^k}{\sqrt{\left(x_B^{k+1} - x_B^k\right)^2 + \left(y_B^{k+1} - y_B^k\right)^2}} \quad (42)$$

$$n_{xk} = \frac{x_B^{k+1} - x_B^k}{\sqrt{\left(x_B^{k+1} - x_B^k\right)^2 + \left(y_B^{k+1} - y_B^k\right)^2}} \quad (43)$$

با معلوم شدن گرادیان‌های نرمال دما در نقاط لاگرانژی می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (44)، مقادیر جمله چشمه/چاه گرمایی در این نقاط را به‌دست آورد [13].

$$\delta Q(X_B^k,t) = 2\left[Q_B(X_B^k,t) + \alpha\frac{\partial T^m}{\partial n}(X_B^k,t)\right]/\rho c_p \quad (44)$$

جمله چشمه/چاه گرمایی در نقاط اویلری را می‌توان به کمک تابع دلتای دیراک و با استفاده مقدار متناظر این کمیت در نقاط لاگرانژی تعیین کرد.

$$q(x_n,t) = \sum_k \delta Q(X_B^k,t)D(x_n - X_B^k)\,\Delta s \quad (45)$$

درنهایت با محاسبه جمله‌ی چشمه گرمایی در نقاط اویلری و به کمک رابطه‌ی (38)، می‌توان دماهای اصلاح شده در این نقاط را ارزیابی کرد. باید اشاره کرد که در روش حاضر شرط مرزی نیومن (شار ثابت) به‌طور تقریبی ارضا می‌گردد [13].

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

2-6- ترتیب محاسباتی

فرآیند حل در روش پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

1-محاسبه درایه‌های ماتریس A

2-حل معادله (16) و استفاده از رابطه‌ی (27) برای به دست آوردن سرعتهای میانی (u^m)

3-حل دستگاه معادلات (37) برای تعیین مقادیر اصلاح سرعت در نقاط لاگرانژی و استفاده از رابطه‌ی (33) برای محاسبه اصلاح سرعت در نقاط اویلری

4-تصحیح میدان سرعت در نقاط اویلری به کمک رابطه‌ی (35)

5-حل معادله (17) و استفاده از رابطه‌ی (28) به منظور تعیین دماهای میانی (T^m)

6-استفاده از معادلات (39) تا (45) برای محاسبه جمله چشمه/چاه گرمایی در نقاط اویلری

7-تصحیح میدان دما با استفاده از رابطه‌ی (28)

8-تکرار مراحل (2) تا (8) تا رسیدن به همگرایی مورد نظر.

3- نتایج عددی و بحث

3-1- اعتبارسنجی

در این بخش، برای اثبات صحت روش عددی پیشنهاد شده جریان جابجایی آزاد حول یک استوانه داغ با شار حرارتی ثابت درون یک محفظه بسته شبیه‌سازی شده است. در شبیه‌سازی‌هایی که گزارش می‌شود، به ترتیب، عدد پرانتل (Pr) برابر 0.7 و نسبت قطر استوانه به طول محفظه (D/L) برابر 0.4 در نظر گرفته شده است. عدد رایلی (Ra)، در بازه‌ی 10^3 تا 10^6 تغییر می‌کند. فاصله‌ی بی‌بعد قطری مراکز استوانه و محفظه (λ) در بازه‌ی -0.25 تا 0.25 تغییر می‌کند. به علاوه، دمای بی‌بعد دیواره‌های سرد برابر صفر اعمال گردیده است و گرادیان نرمال دما روی سطح استوانه برابر -0.05 قرار داده شده است.

برای محاسبه‌ی عدد ناسلت متوسط روی سطوح از روابط زیر بهره گرفته شده است [7].

$$\mathrm{Nu_{loc}} = \frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{n}}\Big|_{wall}, \qquad \mathrm{Nu_{av}} = \frac{1}{A}\int_0^A \mathrm{Nu_{loc}}\, \mathrm{dA} \tag{46}$$

برای مطالعه‌ی استقلال از شبکه در بیشترین مقدار عدد رایلی (10^6) ناحیه محاسباتی با حداکثر 200×200 گره تقسیم بندی شده است. با توجه به جدول 1 شبکه‌ای با ابعاد 100×100 گره برای تمامی شبیه‌سازیها مورد استفاده قرار گرفته است. علاوه بر این، تعداد 50 نقطه لاگرانژی برای بیان مرز استوانه در نظر گرفته شده است.

به‌منظور صحت‌سنجی کد محاسباتی توسعه داده شده، جابجایی آزاد درون یک محفظه‌ی مربعی بیرونی سرد با یک استوانه‌ی داغ داخلی دما ثابت بررسی شده است [21]. عدد ناسلت متوسط روی سطح استوانه محاسبه شده و با مقادیر متناظر گزارش شده توسط کیم و همکاران [21] و لی و همکاران [7] مقایسه گردیده است و نتایج آن در جدول 2 آورده شده است. با توجه به جدول 2، تطابق خوبی مابین نتایج کار حاضر و سایر تحقیقات مشاهده

جدول 1 بررسی استقلال شبکه با توجه به عدد ناسلت متوسط روی سطح استوانه

Table 1 Grid independence study considering average Nusselt number on the surface of the cylinder

ابعاد شبکه	50×50	100×100	150×150	200×200
عدد ناسلت	14.072	14.102	14.105	14.109

می‌شود.

برای اطمینان از صحت نتایج روش عددی توسعه داده شده، به طور خاص مسئله جابجایی آزاد روی یک استوانه‌ی ساکن عایق ($\partial T/\partial n = 0$) شبیه‌سازی شده است. شرایط مرزی مطابق "شکل 1" در نظر گرفته شده با این تفاوت که دیواره‌ی سمت چپ در دمای ثابت T_{hot} فرض شده است. با توجه به تعامد نسبتا دقیق خطوط دما ثابت بر سطح استوانه، می‌توان اظهار داشت که نتایج از دقت خوبی برخوردار است (شکل 2).

"شکل 3" خطوط همدما و خطوط جریان برای حالتی که استوانه در مرکز محفظه واقع شده است را در اعداد رایلی مختلف نشان می‌دهد. برای تمامی اعداد رایلی در نظر گرفته شده در این تحقیق، میدان‌های جریان و انتقال حرارت در نهایت به حالت پایا می‌رسند. همان‌طور که در "شکل 3" نشان داده شده است، هنگامی‌که عدد رایلی برابر 10^3 باشد، انتقال حرارت درون محفظه بیشتر تحت تاثیر هدایت حرارتی قرار دارد و چرخش جریان، دو گردابه‌ی چرخان متقارن را به وجود می‌آورد. در عدد رایلی 10^4، الگوهای خطوط هم‌دما و خطوط جریان تشابه زیادی با خطوط نظیرشان در عدد رایلی 10^3 دارند. با افزایش بیشتر عدد رایلی، نقش جابجایی در انتقال حرارت تقویت شده و در نتیجه از ضخامت لایه مرزی حرارتی اطراف استوانه‌ی درونی کاسته می‌شود.

علاوه بر این، در نواحی بالای استوانه‌ی داخلی خطوط دما به سمت اطراف محفظه منبسط می‌شوند. در نتیجه جریان غالب در نیمه‌ی بالایی محفظه وجود خواهد داشت و به تبع آن هسته‌ی اصلی گردابه‌های چرخان در نیمه‌ی بالایی قرار خواهد داشت. در عدد رایلی 10^6، جریان به وجود آمده در قسمت بالای استوانه به شدت به دیوار بالایی محفظه برخود کرده، منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی در ناحیه‌ی مذکور و تقویت انتقال حرارت در آن خواهد شد.

جدول 2 مقایسه‌ی بین اعداد ناسلت متوسط به دست آمده در کار حاضر و تحقیقات عددی گذشته

Table 2 Comparison between the obtained averaged Nusselt numbers in the present study and those of previous numerical studies

عدد رایلی	عدد ناسلت متوسط روی سطح استوانه‌ی داغ		
	کار حاضر	کیم و همکاران	لی و همکاران [7]
10^3	5.025	5.093	5.107
10^4	5.127	5.108	5.109
10^5	7.721	7.761	7.767
10^6	14.102	14.110	14.064

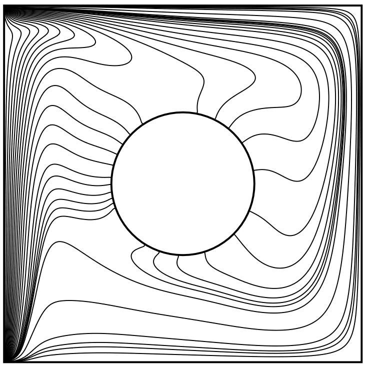

Fig. 2 Isotherms around the isolated cylinder at Ra=10^6

شکل 2 خطوط همدما حول استوانه‌ی عایق در عدد رایلی 10^6

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

3-2- اثر تغییر موقعیت قطری استوانه

یکی از نکات مهم در رابطه با شرط مرزی شار ثابت و به‌ویژه روش به‌کار رفته در اعمال آن، بررسی موقعیت های مختلف استوانه نسبت به محفظه است. با توجه به این‌که در تغییر موقعیت استوانه نسبت به محفظه طرح جریان و خطوط هم دمای متفاوتی ایجاد می‌شود، لزوم بررسی صحت اجرای این شرط یکی از چالش‌های مهم باشد. به‌عبارت دیگر هرچه جسم به دیواره محفظه نزدیک‌تر می‌شود اهمیت نحوه اعمال شرط مرزی شار ثابت در روش لتیس بولتزمن- مرز غوطه‌ور بارز تر می‌گردد. در بخش حاضر این موضوع با جزئیات بیشتری بررسی شده است. "شکل 4" توزیع خطوط هم‌دما و خطوط جریان در اعداد رایلی 10^3 و 10^4 را برای موقعیت‌های قطری مختلف استوانه (λ های مختلف) نشان می‌دهد. زمانی‌که استوانه در راستای قطری حرکت می‌کند، خطوط همدما اطراف گوشه‌ای از محفظه که نزدیک استوانه است، متراکم شده و از تراکم آن‌ها در سمت مخالف قطری کاسته می‌شود. هنگامی‌که استوانه نزدیک گوشه‌ی بالایی سمت راست محفظه قرار می‌گیرد، گردابه‌ی داخلی در سمت راست محفظه فشرده شده و کوچک می‌گردد، اما دو گردابه‌ی موجود در سمت مخالف محفظه در یکدیگر ادغام شده و گردابه‌ی بزرگتری را تشکیل می‌دهند. برای حالت معکوس، یعنی زمانی‌که استوانه نزدیک گوشه‌ی پایینی سمت چپ استوانه می‌شود نیز اتفاق مشابهی رخ می‌دهد. در عدد رایلی 10^4، خطوط هم‌دما به سمت بالای استوانه حرکت می‌کنند. به ویژه، هنگامی‌که λ مقداری منفی و برابر 0.15- تا 0.25- دارد، خطوط هم‌دما در قسمت بالایی استوانه به سمت اطراف منبسط می‌شوند.

"شکل 5" توزیع عدد ناسلت محلی روی سطح استوانه‌ی داخلی ($\mathrm{Nu_c}$) را برای موقعیت‌های مختلف قطری در اعداد رایلی 10^3 و 10^4 نشان می‌دهد. براساس توزیع دمای نشان داده شده در "شکل 4"، نحوه‌ی تغییرات $\mathrm{Nu_c}$ کاملا قابل انتظار است. برای مثال، زمانی‌که استوانه نزدیک گوشه‌ی بالایی سمت راست محفظه قرار می‌گیرد ($\lambda = 0.25$)، نمودار عدد ناسلت دو نقطه‌ی بیشینه در زوایای $\xi = 0$ و $\xi = 90$ یعنی در سمت راست استوانه خواهد داشت. علت این امر اینست که به واسطه‌ی فاصله‌ی اندک سطح استوانه و دیواره‌ی محفظه، خطوط همدما در این ناحیه متراکم می‌شوند. مطابق همین امر، عدد ناسلت محلی محفظه نیز در این حالت روی دیواره‌های بالایی و راستی مقدار بیشینه‌ی خود را دارد (شکل 6).

به طور مشابه، هنگامی‌که استوانه به گوشه‌ی پایینی سمت چپ نزدیک می‌شود ($\lambda = -0.25$)، عدد ناسلت محلی روی استوانه بیشترین مقدار خود را در زوایای $\xi = 180$ و $\xi = 270$ خواهد داشت. همچنین، بیشینه‌ی عدد ناسلت محلی محفظه در این حالت روی دیوارهای پایینی و سمت چپی خواهد بود (شکل 6). به طور مشابه، هنگامی‌که استوانه به گوشه‌ی پایینی سمت چپ نزدیک می‌شود ($\lambda = -0.25$)، عدد ناسلت محلی روی استوانه بیشترین مقدار خود را در زوایای $\xi = 180$ و $\xi = 270$ خواهد داشت. همچنین، بیشینه‌ی عدد ناسلت محلی محفظه در این حالت روی دیوارهای پایینی و سمت چپی خواهد بود (شکل 6).

"شکل 7" توزیع خطوط هم‌دما و خطوط جریان در اعداد رایلی 10^5 و 10^6 را برای موقعیت‌های قطری مختلف استوانه (λ های مختلف) نشان می‌دهد. به‌علت افزایش اثر جابجایی، توزیع دما در اعداد رایلی 10^5 و 10^6 کاملا متفاوت با توزیع آن در اعداد رایلی 10^3 و 10^4 است. همان‌طور که در "شکل 7" نشان داده شده است، زمانی که استوانه‌ی داخلی در راستای قطری به سمت پایین حرکت می‌کند، فضای بیشتری بین استوانه‌ی داغ و دیواره‌های بالایی و سمت راستی محفظه ایجاد شده و جابجایی تحت اثر

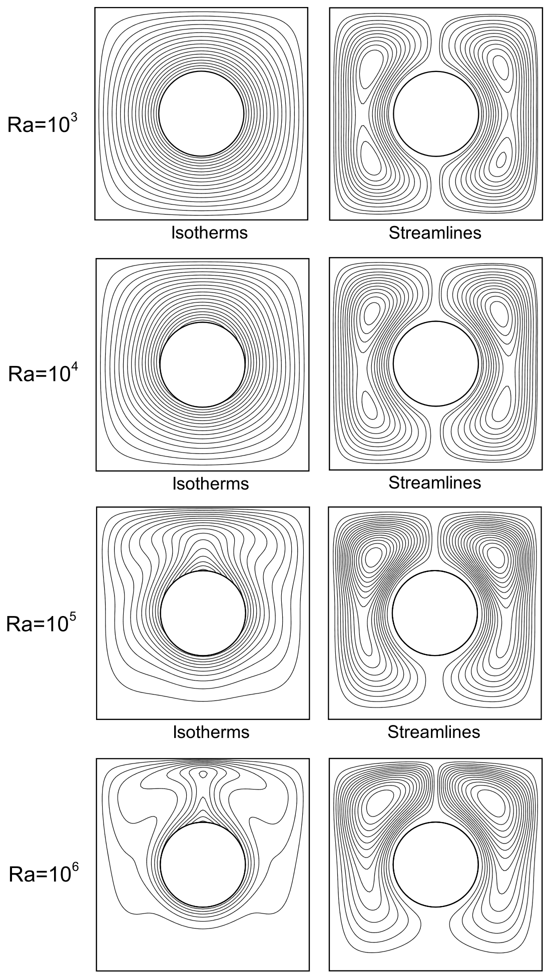

Fig. 3 Isothermes (top) and streamlines (down) for four different Rayleigh number when an isoflux cylinder is at the center of the square enclosure.

شکل 3 خطوط همدما (بالا) و خطوط جریان (پایین) در چهار عدد رایلی متفاوت هنگامی که یک استوانه‌ی شار ثابت در مرکز محفظه قرار دارد.

نیروی شناوری تقویت می‌شود. بنابراین، خطوط همدما به سمت بالا حرکت کرده و به اطراف منبسط می‌گردند. برخورد این خطوط با دیواره‌ی بالایی محفظه سبب افزایش گرادیان‌های دما روی دیواره‌ی بالایی محفظه خواهد شد.

در عدد رایلی 10^5، الگوی تغییرات خطوط جریان درون محفظه تحت اثر تغییر موقعیت قطری استوانه به‌طورکلی مشابه با اعداد رایلی 10^3 و 10^4 است. هنگامی‌که استوانه‌ی داخلی در راستای قطری به سمت پایین محفظه تغییر وضعیت می‌دهد، اندازه‌ی گردابه‌ی گردنده در جهت ساعت‌گرد در سمت راست محفظه افزایش خواهد یافت اما در سمت مقابل، گردابه‌ی پادساعت‌گرد کوچک شده و دو گردابه‌ی ثانویه‌ی پادساعت‌گرد در قسمت‌های بالایی و پایینی محفظه تشکیل خواهد شد.

در عدد رایلی 10^6، در اثر تقویت اثر جابجایی با افزایش عدد رایلی، تفاوت‌هایی در توزیع خطوط جریان در مقایسه با زمانی‌که عدد رایلی برابر 10^5است به‌وجود خواهد آمد. در عدد رایلی 10^6، به طور مشابه با عدد رایلی 10^5، با حرکت استوانه به‌سمت پایین در راستای قطری، گردابه‌ی پادساعت‌گرد اصلی در سمت چپ محفظه کوچک خواهد شد. در سمت چپ محفظه، گردابه‌های پادساعتگرد ثانویه‌ی موجود در گردابه‌ی اصلی در عدد رایلی 10^6

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

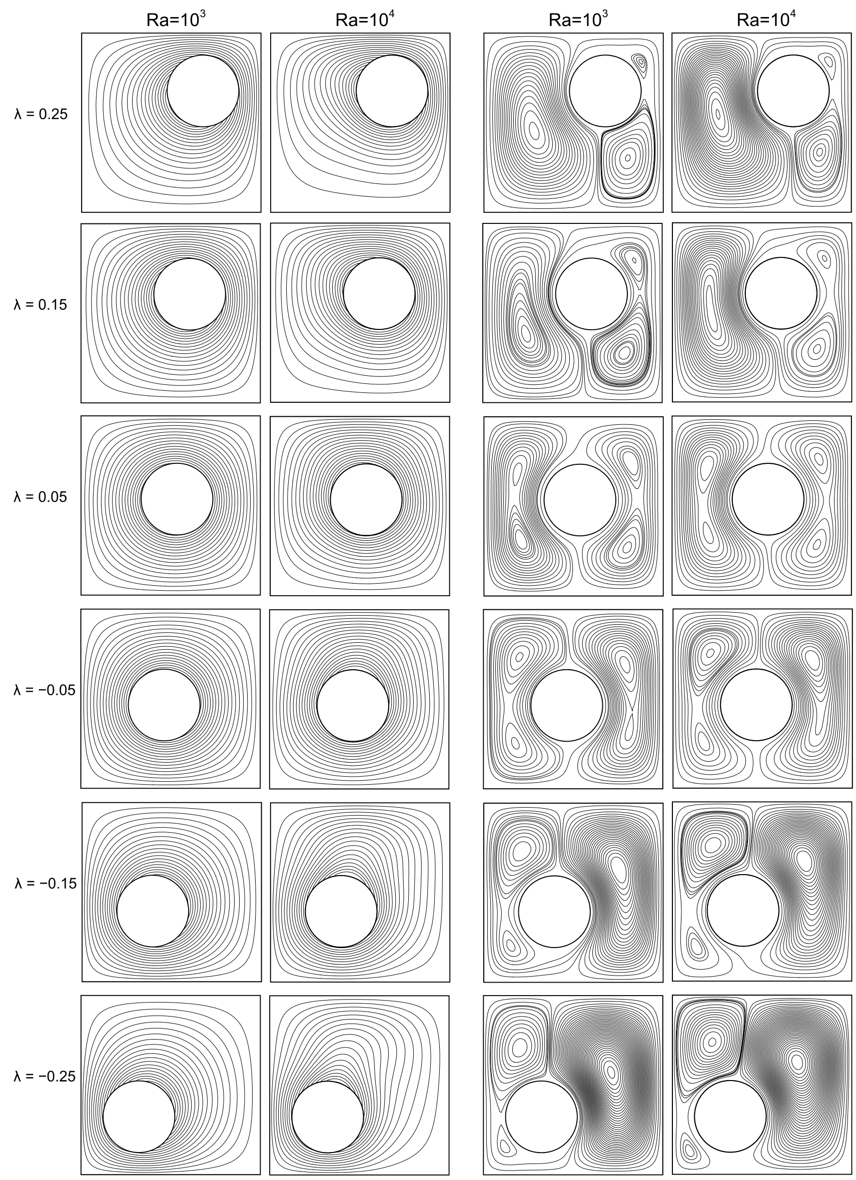

Fig. 4 Isotherms (left) and streamlines (right) for different λs at Ra=10^3 and 10^4

شکل 4 خطوط هم‌دما (چپ) و خطوط جریان (راست) برای λهای متفاوت در اعداد رایلی 10^3 و 10^4

هنگامی تشکیل می‌شوند که $0.1 \le \lambda$ باشد، اما در عدد رایلی 10^5، وقتی $0.05 \le \lambda$ باشد این گردابه‌ها ایجاد می‌گردند. با حرکت قطری استوانه از گوشه‌ی بالایی سمت راست محفظه به سمت گوشه‌ی مخالف، فضای موجود در سمت راست استوانه بزرگ‌تر خواهد شد. در نتیجه، در رایلی 10^6، گردابه‌های ساعت‌گرد ثانویه در سمت راست محفظه ($0.20 \le \lambda \le 0.25$) در یکدیگر ادغام می‌شوند ($\lambda = 0.15$). در حالی‌که، در رایلی 10^5، این گردابه‌ها هنگامی‌که $\lambda = 0.05$ باشد در هم ادغام می‌گردند (شکل 7).

توزیع عدد ناسلت محلی روی سطح استوانه‌ی داخلی ($\mathrm{Nu_c}$) برای موقعیت‌های مختلف قطری در رایلی 10^5 و 10^6 در "شکل 8" آورده شده است. زمانی‌که استوانه نزدیک گوشه‌های محفظه قرار دارد، فضای بین سطوح استوانه و محفظه کوچک می‌شود. در این نواحی، مکانیزم هدایتی در انتقال حرارت غالب خواهد بود، بنابراین، گرادیان‌های شدید دمایی ایجاد خواهند شد.

در نتیجه، زمانی‌که $\lambda = 0.25$ است، دو نقطه‌ی بیشینه‌ی عدد ناسلت در زوایای $\xi = 0$ و $\xi = 90$ قرار می‌گیرد و هنگامی‌که $\lambda = -0.25$ باشد، نقاط بیشینه در زوایای $\xi = 180$ و $\xi = 330$ خواهند بود.

همان‌طور که در "شکل 9" می‌توان مشاهده کرد، به‌طورکلی، روند تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیواره‌های محفظه در اعداد رایلی 10^5 و 10^6 مشابه یکدیگر است، اما مقادیر بیشینه‌ی عدد ناسلت متفاوت است. برای رایلی 10^5، زمانی‌که استوانه نزدیک به یکی از گوشه‌های محفظه قرار می‌گیرد، دو نقطه‌ی بیشینه‌ی عدد ناسلت ($\mathrm{Nu_{en}}$) در محل‌هایی واقع می‌شود که فاصله‌ی بین استوانه و دیوارهای محفظه کمترین مقدار خود را داشته باشد. اما در عدد رایلی 10^6 به‌دلیل اثرات قوی جابجایی خطوط همدما به سمت بالای محفظه حرکت می‌کنند و عدد ناسلت روی دیوار بالایی محفظه به شدت افزایش می‌یابد، در نتیجه بیشینه‌ی عدد ناسلت محلی در محفظه، روی دیوار بالایی آن رخ خواهد داد.

زمانی‌که $0.05 \le \lambda \le 0.25$ باشد، مقدار $\mathrm{Nu_{en}}$ روی دیواره‌ی پایینی خیلی اندک است زیرا جریان روی این دیوار تقریبا ساکن است. اما در همین محدوده، Nu_{en} دارای دو مقدار بیشینه روی دیوارهای بالایی و سمت راستی محفظه است (شکل 9).

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

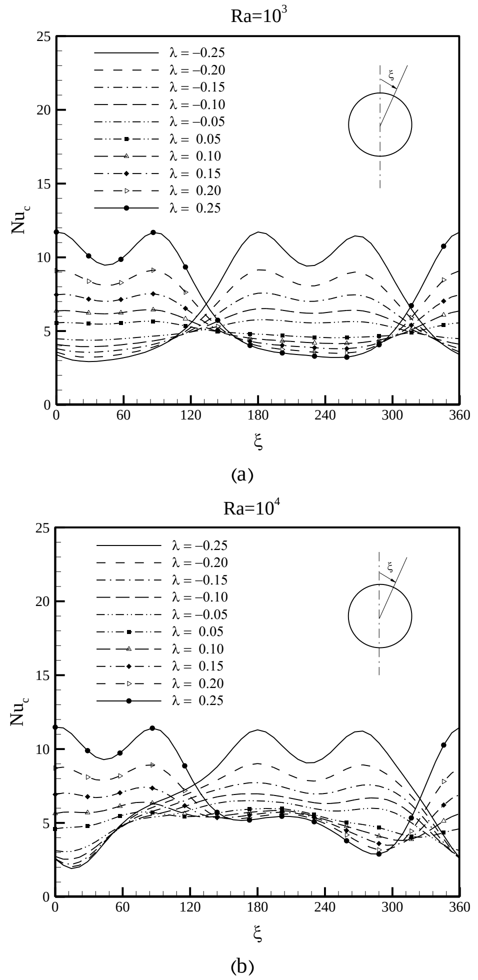

Fig. 5 Distribution of local Nusselt number along the surface of the inner cylinder (Nu_c)

شکل 5 توزیع عدد ناسلت محلی روی سطح استوانه‌ی داخلی (Nu_c)

در عدد رایلی 10^5، هنگامی‌که $-0.25 \le \lambda \le -0.05$ است، با کاهش فاصله‌ی مرکز سیلندر از گوشه‌ی پایینی سمت چپ محفظه، در اثر تقویت هدایت حرارتی در ناحیه‌ی بین استوانه و دیوارهای پایینی و سمت چپی محفظه، Nu_{en} روی این دیوارها افزایش خواهد یافت (شکل 9a). اما تغییرات Nu_{en} در طول دیوارهای بالایی و سمت راستی محفظه محسوس نخواهد بود زیرا مطابق "شکل 7"، تراکم خطوط همدما در نزدیکی این دیوارها تغییر چندانی ندارد.

در عدد رایلی 10^6، به‌علت حضور نیروی شناوری بسیار قوی، بدون توجه به موقعیت قطری استوانه، خطوط همدما به سمت بالای محفظه حرکت کرده و و در نزدیکی دیوار بالایی متراکم می‌شوند (شکل 7). در نتیجه Nu_{en}، بیشینه‌ی مقدار خود را روی این دیوار خواهد داشت (شکل 8b).

"شکل 10" عدد ناسلت متوسط روی سطح استوانه (Nu_{av}) را برحسب قطری آن در اعداد رایلی مختلف نشان می‌دهد. در یک مقدار ثابت λ ، مقدار Nu_{av} در اعداد رایلی 10^3 و 10^4 تقریبا یکسان است، زیرا در این اعداد رایلی پایین انتقال حرارت بیشتر تحت تاثیر مکانیزم هدایت حرارتی است. اما با افزایش عدد رایلی تا 10^5 و 10^6، Nu_{av} به‌طور پیوسته افزایش می‌یابد و به ویژه در عدد رایلی 10^6 مقدار Nu_{av} بسیار بیشتر از مقادیر متناظر برای اعداد رایلی 10^3 و 10^4 می‌گردد.

به‌طورکلی، زمانی‌که عدد رایلی برابر 10^3 و 10^4 است، پروفیل تغییرات Nu_{av} برحسب λ ، نسبت به موقعیت مرکزی ($\lambda = 0$) تقریبا متقارن خواهد بود. علاوه‌بر این، این پروفیل دارای نقطه‌ی کمینه‌ای در موقعیت مرکزی بوده و با حرکت قطری استوانه به سمت بالا یا پایین محفظه، Nu_{av} افزایش خواهد یافت.

در عدد رایلی 10^5، Nu_{av} مقدار کمینه‌ی خود را در $\lambda = 0.15$ خواهد داشت و با افزایش فاصله‌ی قطری مراکز استوانه و محفظه در محدوده‌ی $0.15 < \lambda \le 0.25$ ، در اثر غالب بودن نیروی شناوری افزایش خواهد یافت. از سوی دیگر، با افزایش λ در محدوده‌ی $-0.25 \le \lambda < 0.15$ عدد ناسلت متوسط روی استوانه به واسطه‌ی تاثیر بیشتر فاصله‌ی سطوح آن با دیوارهای محفظه، افزایش خواهد یافت.

در عدد رایلی 10^6، اثر جابجایی به شدت تقویت خواهد شد، در نتیجه الگوی تغییرات Nu_{av} متفاوت با اعداد رایلی 10^3، 10^4 و 10^5 خواهد بود. زمانی که عدد رایلی برابر 10^6 است، Nu_{av} یک نقطه‌ی بیشینه در $\lambda = 0$ خواهد داشت و با کاهش فاصله‌ی استوانه از دیوارهای محفظه Nu_{av} نیز کاهش می‌یابد.

4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با الهام از روش رن و همکاران [13] که شرط مرزی شار ثابت را در روش دینامیک سیالات محاسباتی مرسوم به‌کار می‌برد، روش مرز

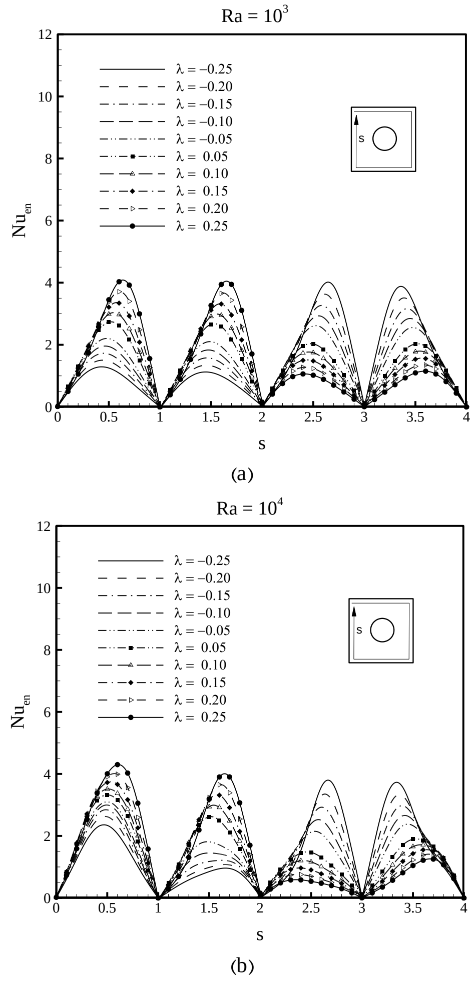

Fig. 6 Distribution of local Nusselt number along the surface of enclosure walls (Nu_{en})

شکل 6 توزیع عدد ناسلت محلی روی دیواره‌های محفظه (Nu_{en})

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.4.42.8]

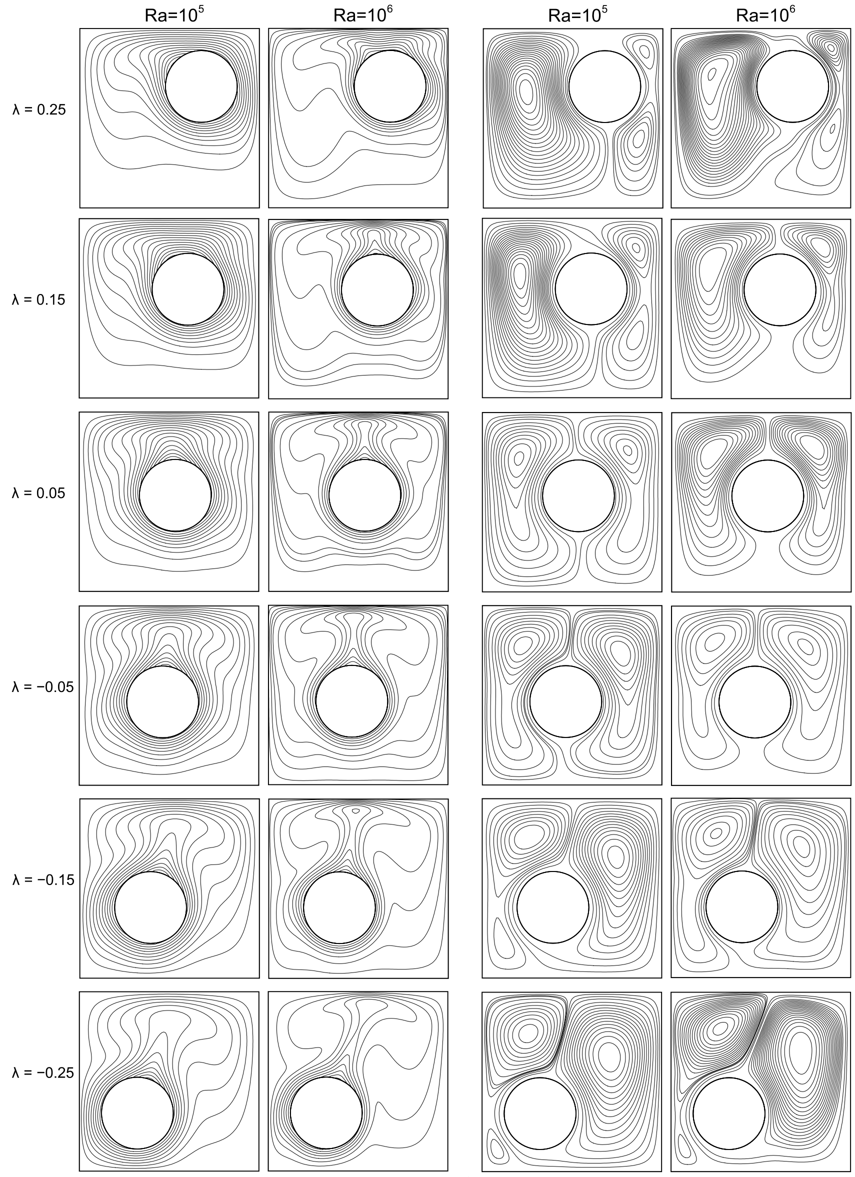

Fig. 7 Isotherms (left) and streamlines (right) for different λs at Ra=10^5 and 10^6

شکل 7 خطوط همدما (چپ) و خطوط جریان (راست) برای λ های متفاوت در اعداد رایلی 10^5 و 10^6

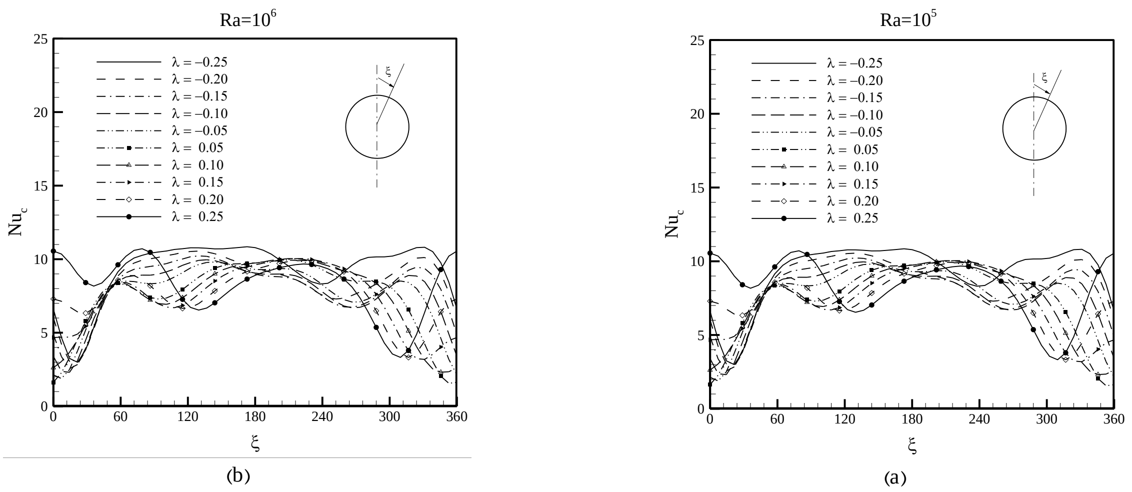

Fig.8 Distribution of local Nusselt number along the surface of the inner cylinder (Nu_c)

شکل 8 توزیع عدد ناسلت محلی روی سطح استوانه‌ی داخلی (Nu_c)

غوطه‌ور- لتیس بولتزمن کارآمدی برای اعمال شرط مرزی نیومن در مسائل حرارتی پیشنهاد شده است. برای اثبات کارآیی و توانایی روش پیشنهادی، انتقال حرارت جابجایی طبیعی حول یک استوانه گرم شده با شار حرارتی ثابت برای اعداد رایلی متفاوت در محدوده‌ی $10^3 \le \mathrm{Ra} \le 10^6$ شبیه‌سازی گردیده است. با استفاده از روش مرز غوطه‌ور-لتیس بولتزمن توسعه داده شده، اثر موقعیت‌های مختلف قطری مرکز استوانه بر الگوی خطوط جریان و خطوط هم‌دما بررسی شده است.

به‌طور کلی، بدون توجه به عدد رایلی، هنگامی‌که استوانه‌ی داخلی با حرکت قطری به دیواره‌های محفظه نزدیک می‌شود، دو گردابه‌ی جدا از هم در قسمت‌های بالایی و پایینی سمت چپ یا راست محفظه تشکیل می‌گردد. به‌طور عکس، در سمت مخالف یک گردابه‌ی بزرگ ایجاد می‌شود.

در اعداد رایلی 10^3 و10^4، میدان‌های جریان و دما بیشتر تحت تاثیر هدایت حرارتی قرار دارند. بنابراین، زمانی‌که با حرکت قطری استوانه‌ی داخلی، فاصله‌ی آن از دیوارهای محفظه کاهش می‌یابد، خطوط هم‌دما در ناحیه‌ی کوچک بین استوانه و محفظه متراکم می‌گردد و در سمت مخالف از تراکم آنها کاسته می‌شود. در نتیجه، نقطه‌ی بیشینه‌ی عدد ناسلت روی سطوح استوانه و محفظه در جاهایی ظاهر می‌شود که فاصله‌ی بین سطوح آن‌ها کاهش می‌یابد.

اما، با افزایش اعداد رایلی تا 10^5 و10^6، اثر جابجایی ایجاد شده توسط

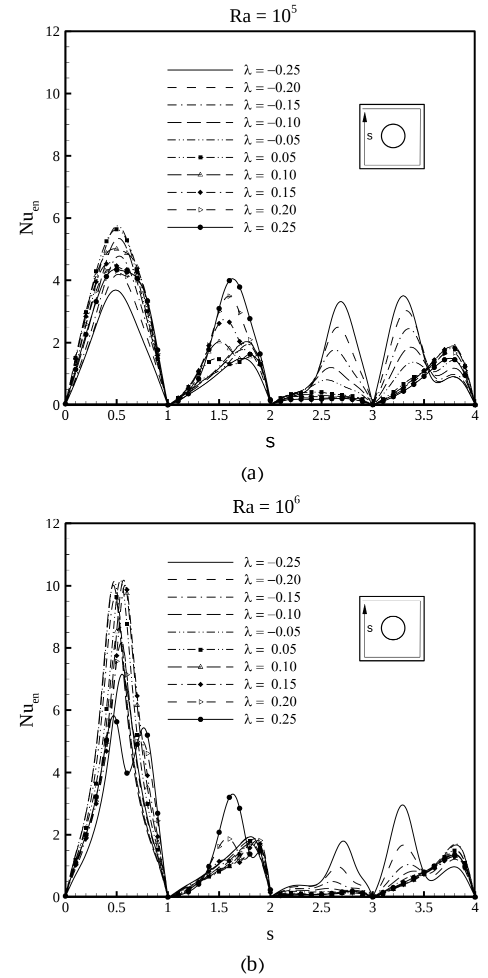

Fig.9 Distribution of local Nusselt number along the surface of enclosure walls ($\mathrm{Nu_{en}}$)

شکل 9 توزیع عدد ناسلت محلی روی دیواره‌های محفظه ($\mathrm{Nu_{en}}$)

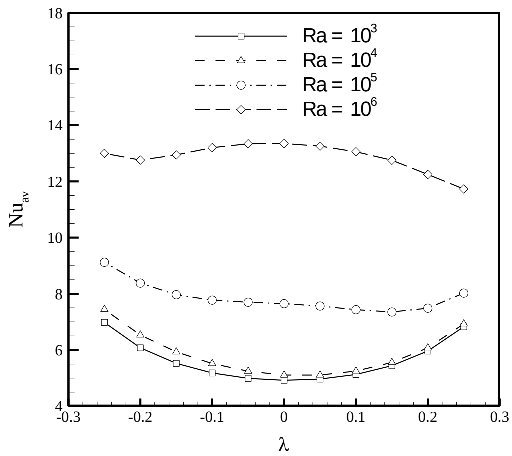

Fig. 10 Variation of surfaces-averaged Nusselt number against the λ for the inner cylinder at different Rayleigh numbers. ($\mathrm{Nu_{av}}$)

شکل 10 تغییرات عدد ناسلت متوسط سطحی نسبت به λ برای استوانه داخلی در اعداد رایلی متفاوت ($\mathrm{Nu_{av}}$)

نیروی شناوری بر میدان جریان و انتقال حرارت در محفظه افزایش خواهد یافت و در نتیجه خطوط هم‌دما به شکل منحنی‌های منبسط شونده‌ای در بالای استوانه‌ی داخلی ظاهر می‌گردند. به همین واسطه، این خطوط در نزدیکی دیوار بالایی محفظه متراکم شده و بیشینه‌ی عدد ناسلت روی این دیوار واقع می‌شود.

5- مراجع

[1] C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: A numerical method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 2, pp. 252-271, 1972.
[2] F. Talati, M. Taghilou, Numerical investigation of natural convection effects on the melting and solidification of PCM within a rectangular finned container using LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 75-86, 2016. (In Persian)
[3] Z.-G. Feng, E. E. Michaelides, The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid–particles interaction problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, No. 2, pp. 602-628, 2004.
[4] S. K. Kang, Y. A. Hassan, A direct-forcing immersed boundary method for the thermal lattice Boltzmann method, *Computers & Fluids*, Vol. 49, No. 1, pp. 36-45, 2011.
[5] J. Wu, C. Shu, Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 6, pp. 1963-1979, 2009.
[6] Z. Wang, J. Fan, K. Luo, K. Cen, Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, No. 19–20, pp. 4510-4518, 2009.
[7] J. M. Lee, M. Y. Ha, H. S. Yoon, Natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different horizontal and diagonal locations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, No. 25–26, pp. 5905-5919, 2010.
[8] W. W. Ren, C. Shu, J. Wu, W. M. Yang, Boundary condition-enforced immersed boundary method for thermal flow problems with Dirichlet temperature condition and its applications, *Computers & Fluids*, Vol. 57, pp. 40-51, 2012.
[9] [A. Mark, E. Svenning, F. Edelvik, An immersed boundary method for simulation of flow with heat transfer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 56, No. 1–2, pp. 424-435, 2013.
[10] H. K. Jeong, H. S. Yoon, M. Y. Ha, M. Tsutahara, An immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method using an equilibrium internal energy density approach for the simulation of flows with heat transfer, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 7, pp. 2526-2543, 2010.
[11] N. Zhang, Z. C. Zheng, S. Eckels, Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 29, No. 6, pp. 1558-1566, 2008.
[12] O. O. Bamiro, W. W. Liou, A direct heating immersed boundary-lattice Boltzmann method for thermal flows, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 24, No. 1, pp. 169-200, 2013.
[13] W. Ren, C. Shu, W. Yang, An efficient immersed boundary method for thermal flow problems with heat flux boundary conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 64, pp. 694-705, 2013.
[14] Y. Hu, D. Li, S. Shu, X. Niu, Study of multiple steady solutions for the 2D natural convection in a concentric horizontal annulus with a constant heat flux wall using immersed boundary-lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 81, pp. 591-601, 2015.

Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 37, No. 8, pp. 1115-1126, 2010.

[19] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, *Physical Review E,* Vol. 65, No. 4, pp. 046308, 2002.

[20] A. A. Delouei, M. Nazari, M. H. Kayhani, S. Succi, Immersed Boundary – Thermal Lattice Boltzmann Methods for Non-Newtonian Flows Over a Heated Cylinder: A Comparative Study, *Communications in Computational Physics,* Vol. 18, No. 2, pp. 489-515, 2015.

[21] B. S. Kim, D. S. Lee, M. Y. Ha, H. S. Yoon, A numerical study of natural convection in a square enclosure with a circular cylinder at different vertical locations, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 51, No. 7–8, pp. 1888-1906, 2008.

[15] Y. Wang, C. Shu, L. M. Yang, Boundary condition-enforced immersed boundary-lattice Boltzmann flux solver for thermal flows with Neumann boundary conditions, *Journal of Computational Physics,* Vol. 306, pp. 237-252, 2016.

[16] Y. G. Park, M. Y. Ha, C. Choi, J. Park, Natural convection in a square enclosure with two inner circular cylinders positioned at different vertical locations, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 77, pp. 501-518, 2014.

[17] C. Choi, S. Jeong, M. Y. Ha, H. S. Yoon, Effect of a circular cylinder's location on natural convection in a rhombus enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 77, pp. 60-73, 2014.

[18] S. H. Hussain, A. K. Hussein, Numerical investigation of natural convection phenomena in a uniformly heated circular cylinder immersed in square enclosure filled with air at different vertical locations, *International*