



ارتعاشات غیر خطی صفحات ساندویچی تابعی با بستر پاسترناک غیر خطی تحت تشدید اولیه با به کارگیری تغییر شکل های برشی مرتبه اول اصلاح شده

موسی رضائی^{1*}، رضا جهانگیری²

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 315-51665 Tabrizu.ac.ir, m_rezaee@

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 17 خرداد 1393
پذیرش: 04 مرداد 1393
ارائه در سایت: 30 مهر 1393

کلید واژگان:

صفحه ساندویچی تابعی
بستر پاسترناک غیر خطی
تحریک عرضی نیرویی
روش مقیاس های چندگانه
دوشاخگی زینی

چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیر خطی صفحات ساندویچی تابعی با بستر پاسترناک غیر خطی که همزمان تحت نیرویی هارمونیک عرضی و استاتیکی درون - صفحه ای قرار دارد، مطالعه شده است. براساس تئوری اصلاح شده تغییر شکل های برشی مرتبه اول صفحات و با به کارگیری تئوری تغییرهای بزرگ وُن - کارمن و اصل همپلتون، معادلات جزئی و غیر خطی حاکم بر حرکت صفحه استخراج شد. با اعمال روش گالرکین، معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی تبدیل و در غیاب بستر، صحت نتایج برای ضرایب تصحیح اصلاح شده تنش های برشی با مقایسه با مراجع، ارائه شد. سپس با به کارگیری روش مقیاس های چندگانه و ارائه حل غیر خطی مرتبه دوم، آنالیز تشدید نخستین تحت تحریکات عرضی صورت گرفت و معادلات پاسخ فرکانسی، نیرویی و میرایی در حالت ماندگار استخراج شد و شرایط وجود و عدم وجود جواب های چندگانه غیردیهی برای دامنه پاسخ و پایداری آن ها بررسی و نقاط دوشاخگی منحنی های مشخصه دامنه پاسخ استخراج و نشان داده شد که با تغییر پارامترهای مسئله در محدوده تشدید، پدیده جهش دامنه اتفاق می افتد. سپس با ارائه نتایج عددی تأثیر پارامترهای مسئله، شامل: فرکانس تحریک، دامنه نیروی تحریک، دامنه نیروی درون - صفحه ای، ضرایب سفتی بستر و پارامتر میرایی بر دامنه پاسخ مطالعه و نشان داده شد که غیرخطیگی بستر تأثیر عمده ای بر منحنی های مشخصه پاسخ می گذارد.

Nonlinear Vibrations of Sandwich FG Plates Resting on Nonlinear Pasternak Foundation under Primary Resonance Excitation Using Modified FSDT

Mousa Rezaee^{1*}, Reza Jahangiri²

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

*P.O.B. 51665-315 Tabriz, Iran, m_rezaee@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 June 2014
Accepted 26 July 2014
Available Online 22 October 2014

Keywords:

Sandwich FG Plate
Nonlinear Pasternak Foundation
Transverse Forcing Excitation
Multiple Scale Method
Saddle Node Bifurcation

ABSTRACT

In this study, the nonlinear vibration of a sandwich FG plate resting on a nonlinear Pasternak foundation which is simultaneously subjected to transverse harmonic forcing excitation and in-plane static force is investigated. Based on the Modified First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), applying the von-Karman nonlinear strain-displacement relation and the Hamilton's principle, the governing nonlinear coupled partial differential equations are derived. Then, the Galerkin's procedure is used to reduce the equations of motion to nonlinear ordinary differential equations. In the absence of foundation, the validity of the formulation for analyzing the modified shear correction factors for shear stresses is accomplished by comparing the results with those reported in the literature. By applying the multiple scales method and considering the second order nonlinear approximation of solution, the primary resonance of the system under the transverse forcing excitation is analyzed. Under the steady-state condition, the frequency-response, the force-response and the damping-response equations are derived. Then the conditions of existence and stability of multiple coexisting non-trivial solutions for amplitude of the responses are discussed and the saddle node bifurcation points of the characteristic curves are derived. It is shown that, the variation of the system parameters in the resonance boundary may cause the jump phenomenon. Moreover, the effects of the system parameters including, excitation frequency, foundation parameters, damping, and amplitude of the harmonic and in-plane forces on the system nonlinear dynamics are investigated. Also it is shown that the presence of the foundation has a considerable influence on the resonance characteristic curves.

1- مقدمه

پوشش داده شده اند، تشکیل شده اند و به دلیل خواص مطلوبی مانند صلبیت خمشی بالا، وزن مخصوص پایین، مشخصات ارتعاشی مطلوب و مقاومت در

در حالت کلی سازه های ساندویچی از هسته ای که توسط لایه های روئین

Please cite this article using:

M. Rezaee, R. Jahangiri, Nonlinear Vibrations of Sandwich FG Plates Resting on Nonlinear Pasternak Foundation under Primary Resonance Excitation Using Modified FSDT, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 186-198, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

برابر خستگی به صورت متداول مورد استفاده قرار می گیرند. در این سازه ها، وجود تغییرات ناگهانی خواص مواد از یک لایه به لایه دیگر، منجر به تمرکز شدید تنش موضعی و تورق بین لایه های می شود، ولی به کارگیری مواد تابعی در ساختار این سازه ها، سبب انتقال تدریجی و پیوسته خواص از یک ماده به ماده دیگر شده که پی آمد آن نیز، کاهش قابل توجه تمرکز تنش تحت اثر بارهای نیرویی و حرارتی است. از این رو قابلیت های مذکور موجب شده که استفاده از سازه های ساندویچی تابعی گسترش یافته و رفته رفته جایگزین سازه های ساندویچی متداول پیشین گردند. وقتی صفحات ساندویچی تحت تأثیر بارهای مکانیکی هارمونیک عرضی/ درون- صفحه ای قرار می گیرند، ممکن است در پهنای وسیعی از فرکانس های اعمالی و تحت شرایط خاصی پدیده تشدید اولیه/ پارامتریک در سازه اتفاق افتد. طوری که یک اغتشاش نیرویی عرضی/ درون- صفحه ای با دامنه کوچک می تواند سبب رشد ناخواسته و نامحدود دامنه ارتعاشی شده و منجر به بروز سیکل حدی ارتعاشی و در نتیجه وارد شدن خسارت جبران ناپذیر به سازه گردد. از این رو مطالعه رفتار غیرخطی صفحات به ویژه صفحات ساندویچی تابعی، تحت تحریکات هارمونیک از اهمیت خاصی برخوردار است.

در این راستا، هگازی [1] رفتار غیرخطی یک صفحه نازک مستطیلی تحت بارگذاری عرضی و درون- صفحه ای با کوپلینگ دو مود اول را مطالعه کرد و نشان داد که ماهیت حرکات آشوبناک صفحه در مود اول کاملاً با رفتار آن در مود دوم متفاوت است. زنگ و همکارانش [2]، ارتعاشات غیرخطی و دینامیک آشوبناک صفحه تابعی ارتوتروپیک مستطیلی، تحت تحریک عرضی و درون- صفحه ای هارمونیک را مطالعه کرده و با استفاده از تقریب گالرکین، معادلات حاکم بر سیستم را کاهش مرتبه داده و با به کارگیری الگوریتم رانگ- کوتا و تحت شرایط تشدید، پاسخ های آشوبناک و دوشاخگی مسئله را بررسی کردند و نشان دادند که تحت تحریک اجباری عرضی، صفحه ممکن است رفتار آشوبناک از خود نشان دهد.

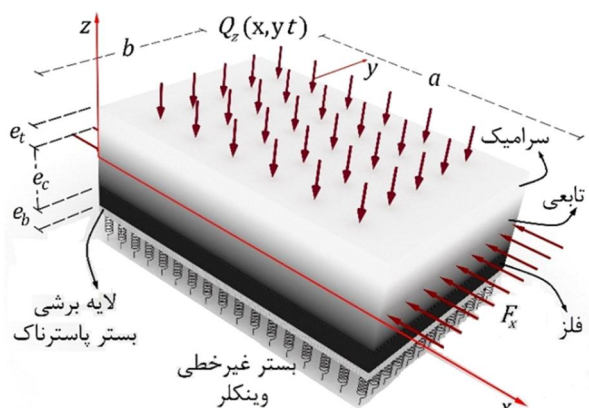
ریبرو [3] نوسانات صفحات تحت اعمال بارهای هارمونیک عرضی و حرارتی را بررسی کرد. او در شبیه سازی های عددی، فرکانس تحریک بارهای عرضی را در نزدیکی اولین فرکانس طبیعی سازه در نظر گرفت و نشان داد که تحریک سازه تحت دامنه ها و میرایی های مختلف همزمان با افزایش دما می تواند سبب تغییر ماهیت نوسانات از هارمونیک به غیر هارمونیک و حتی غیرپریودیک شود. ایشان نشان دادند که وقتی نوسانات ماهیت چند هارمونیک یا غیرپریودیک داشته باشند، اثرات مودهای بالاتر بر رفتار سازه بسیار چشمگیر می شود و افزایش ضخامت صفحه سبب کوچک شدن محدوده رفتار غیرپریودیک می شود. در تحقیق دیگری و برای اولین بار، زنگ و همکارانش [4] دینامیک دوشاخگی و آشوبناک صفحات کامپوزیتی ضخیم پیزوالکتریکی را تحت تأثیر همزمان بارهای عرضی، درون- صفحه ای و تحریکات پیزوالکتریکی مطالعه کردند و حالات وجود تشدید و آشوب را به صورت عددی بررسی کردند.

در تحقیق دیگری زنگ و همکارانش [5] با استفاده از تئوری تغییر شکل های برشی مرتبه بالای صفحات ردی و غیرخطی گری های ون- کارمن، و با به کارگیری اصل همیلتون و تقریب گالرکین معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات غیرخطی با دو درجه آزادی صفحات کامپوزیتی گیردار مستطیلی شکل را در حضور تحریکات پارامتریک نیرویی و گشتاوری استخراج کرده و شرایط وجود دوشاخگی ها و حرکات آشوبناک در رفتار غیرخطی صفحه را استخراج کردند.

تانگ و همکارش [6] ارتعاشات غیرخطی اجباری صفحات ویسکو

الاستیک در حال حرکت را تحت تشدیدهای خارجی و داخلی مطالعه و اثرات سرعت انتقال صفحه، ثابت ویسکوزیته و دامنه تحریک را بر پاسخ های ماندگار سیستم بررسی کردند. از سوی دیگر، کیو و همکارانش [7] با به کارگیری روش غیرخطی مقیاس های چندگانه، تشدید اصلی یک صفحه ارتوتروپیک با خواص الاستو- مغناطیس که به صورت همزمان در معرض اثر میدان مغناطیسی عرضی و بارگذاری مکانیکی عرضی هارمونیک قرار دارد را مطالعه کردند و اثرات میدان مغناطیس، خواص ارتوتروپیک، ضخامت صفحه و بارهای عرضی را روی دامنه تشدید بررسی کردند و نشان دادند که دامنه تشدید، شدیداً تحت تأثیر نیروی میرایی ایجاد شده به واسطه میدان مغناطیسی قرار می گیرد. زنگ و همکارانش [8] با به کارگیری تقریب گالرکین در استخراج معادله غیرخطی دافینگ حاکم بر ارتعاشات غیرخطی صفحه تابعی مستطیلی، تشدید اصلی صفحه تحت تحریکات عرضی هارمونیک را بررسی کرده و پس از استخراج پاسخ های فرکانسی، پایداری پاسخ های حاصل را تحلیل کردند. به تازگی زنگ و همکارانش [9] دینامیک غیرخطی صفحات ساندویچی با هسته خرپائی را تحت اثر بارگذاری های عرضی و درون- صفحه ای بررسی کردند و نشان دادند که تحت حالات خاصی از تشدید غیرخطی های سفت شونده و نرم شونده در صفحه با هسته خرپائی دیده می شود. سعید و همکارش [10] با ارائه حل غیرخطی مرتبه دوم، ارتعاشات غیرخطی صفحات کامپوزیتی نازک تحت تحریکات ترکیبی پارامتریک و خارجی را بررسی کردند و تمامی تشدیدهای ممکن را استخراج کرده و پایداری پاسخ ها را تحلیل کردند.

همان طور که پیشتر اشاره شد، به تازگی استفاده از صفحات تابعی در کاربردهای صنعتی و به ویژه پوشش روئین یا هسته سازه های ساندویچی به صورت چشمگیری گسترش یافته است. در برخی از این کاربردها می توان پوشش رویه را به صورت صفحه تابعی با بستر الاستیک مدل سازی کرد [11-14]. از این رو بررسی و مطالعه ناپایداری و ارتعاشات غیرخطی این سازه ها نیز مورد توجه قرار گرفته است. در این زمینه ونگ و همکارش [15] پاسخ دینامیکی غیرخطی صفحات ساندویچی با بستر الاستیک و پوشش روئین تابعی در حضور محیط های حرارتی را بررسی کردند و نشان دادند که سفتی بستر و تنش های اولیه تأثیر به سزایی بر رفتار دینامیکی صفحات تابعی تک لایه و ساندویچی می گذارد. تینج و همکارانش [16] نیز با استفاده از تئوری تغییرهای برشی مرتبه اول، ارتعاشات صفحات کامپوزیتی ضخیم با بستر الاستیک ناهمگن را مطالعه کردند. بافرانی و همکارش [17] اثر بارگذاری های درون- صفحه ای بر ارتعاشات غیرخطی صفحات با بستر الاستیک را مطالعه کرده و نشان دادند که با افزایش سفتی بستر وینکلر، نیروی متناظر با حالت کماتش افزایش می یابد و تأثیر پارامترهای بستر پاسترناک بر فرکانس طبیعی، به مراتب بیشتر از تأثیر ثابت سفتی بستر وینکلر است. صبحی [18] کماتش و ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی تابعی نمائی روی بستر الاستیک را مطالعه کرده و تأثیر شرایط مرزی تکیه گاهی و ضخامت لایه ها را بر فرکانس طبیعی بررسی کرده است. سینگ و همکارانش [19] نیز خمش غیرخطی صفحات کامپوزیتی بر بستر الاستیک غیرخطی با غیرخطی های مرتبه سوم وینکلر را تحت بارهای عرضی استاتیکی و در حضور عدم قطعیت های خواص لایه ای را مطالعه و بررسی و حساسیت پاسخ ها را نسبت به شرایط مرزی تکیه گاهی، پارامترهای خطی و غیرخطی بستر مطالعه کردند. نس و همکارانش [20] نیز با استفاده از سری های دوگانه چیشف، رفتار غیرخطی استاتیکی و دینامیکی صفحات کامپوزیتی مربعی شکل واقع بر بستر غیرخطی برشی با غیرخطی های مرتبه سوم تحت بارگذاری های عرضی



شکل 1 شماتیک هندسی صفحه ساندویچی تابعی روی بستر غیرخطی پاسترناک، تحت تحریکات عرضی گسترده هارمونیک با توزیع یکنواخت

مطابق شکل (1)، دستگاه مختصات دکارتی $Oxyz$ منطبق بر صفحه میانی صفحه در نظر گرفته شده است. (U, V, W) و (u, v, w) به ترتیب نشان‌دهنده مؤلفه‌های تغییر مکان نقطه دلخواهی در داخل صفحه و نقطه‌ای در روی صفحه میانی هندسی ($z=0$) در امتداد محورهای x ، y و z هستند. ϕ_x و ϕ_y نیز به ترتیب نشان‌دهنده چرخش بردارهای عمود بر مقاطع عرضی، حول محورهای x و y در آن نقطه دلخواه است [28]. توزیع نامتقارن خواص مواد در راستای ضخامت صفحه ساندویچی حاضر سبب جابه‌جایی صفحه خنثی فیزیکی به مکان $Z=Z_0$ نسبت به صفحه میانی هندسی می‌شود. براساس شکل 1 سطح فوقانی صفحه ساندویچی در معرض اعمال نیروی عرضی هارمونیک با توزیع گسترده یکنواخت با شدت $Q_z(x, y, t) = Q_z \cos \Omega t$ قرار دارد که در آن Ω نشان‌دهنده فرکانس تحریک هارمونیک بار عرضی است. همچنین مطابق این شکل صفحه در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ تحت تأثیر نیروی محوری درون-صفحه‌ای فشاری با دامنه ثابت F_x قرار دارد.

با توجه به شکل 1 همچنین فرض می‌شود که بستر الاستیک ساختار پیوسته داشته و در حین تغییر شکل صفحه، بستر تماس خود را با صفحه حفظ می‌کند. رابطه غیرخطی بین بار و جابه‌جایی بستر الاستیک به صورت زیر فرض می‌شود:

$$q_e = K_1 w(x, y, t) - K_2 \nabla^2 w(x, y, t) + K_3 w(x, y, t)^3 \quad (1)$$

در رابطه (1) $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ و $w(x, y, t)$ نشان‌دهنده خیز صفحه تابعی است. q_e نشان‌دهنده نیروی وارد بر واحد سطح صفحه بوده و K_1 و K_3 به ترتیب نشان‌دهنده پارامترهای سفتی خطی و غیرخطی بستر وینکلر و K_2 ثابتی است که نشان‌دهنده سفتی لایه برشی بستر پاسترناک است.

3- خواص مواد

هر یک از صفحات تابعی طرفین صفحه میانی در شکل 1، از اختلاط اجزاء سرامیکی و فلزی تشکیل شده‌اند، به‌گونه‌ای که خواص ماده در امتداد ضخامت صفحه به صورت پیوسته و تدریجی از خواص 100 درصد فلزی در سطح میانی به خواص 100% سرامیکی در سطوح تحتانی و فوقانی تغییر می‌کند. با فرض این‌که توزیع خواص ماده در راستای ضخامت از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد تبعیت کند، در رابطه (2) داریم:

$$P = P_m V_m(z) + P_c V_c(z) \quad (2)$$

در رابطه (2)، P_c و P_m به ترتیب نشان‌دهنده خواص فلزی و سرامیکی و V_m و V_c نشان‌دهنده کسر حجمی جزءهای فلزی و سرامیکی در داخل لایه‌های

پله‌ای را مطالعه کردند و نشان دادند که شرایط مرزی و پارامترهای بستر تأثیرات بسزایی بر پاسخ زمانی مرکز صفحه می‌گذارند. در تحقیق دیگری یانگ و همکارش [21] تشدید اولیه صفحه نازک مستطیلی شکل همگن با بستر غیرخطی وینکلر در حضور میدان‌های حرارتی را مطالعه کردند و نشان دادند که با افزایش میرایی، ضخامت و پارامترهای بستر، دامنه تشدید کاهش و با افزایش دما و دامنه تحریک، دامنه تشدید افزایش می‌یابد.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که در پژوهش‌های پیشین تاکنون رفتار غیرخطی صفحات ساندویچی (به‌ویژه صفحات ساندویچی تابعی) نسبتاً ضخیم با بستر الاستیک غیرخطی پاسترناک، تحت تشدیدهای عرضی اولیه به صورت جامع مورد مطالعه قرار نگرفته است. با توجه به این‌که در برخی از کاربردها، حضور هم‌زمان لایه برشی بستر و بستر غیرخطی وینکلر تأثیر عمده بر رفتار دینامیکی صفحات دارند از این‌رو بررسی رفتار غیرخطی صفحات ساندویچی تابعی، با بستر پاسترناک غیرخطی نیز حائز اهمیت است.

از سوی دیگر، تا به حال در بیشتر تحقیقات صورت گرفته براساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول [22-25]، برای تصحیح تنش‌های برشی، از روابط تقریبی برای محاسبه ضریب تصحیح تنش‌های برشی استفاده شده است. در تحقیق حاضر به‌عنوان یکی از نوآوری‌های ارائه شده، از روش مطرح شده در مراجع [26-27] برای محاسبه ضریب تصحیح اصلاح شده تنش‌های برشی استفاده شده است. در ادامه، ارتعاشات غیرخطی صفحه ساندویچی تابعی نسبتاً ضخیم مستطیلی با بستر غیرخطی پاسترناک، تحت تحریکات هارمونیک نیرویی عرضی در حضور/عدم حضور نیروی استاتیکی درون-صفحه‌ای مطالعه شده و رفتار غیرخطی صفحه تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده متحرک بررسی شده است. برای این منظور با صرف‌نظر کردن از اثرات اینرسی‌های درون-صفحه‌ای و دورانی و با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های بزرگ وُن-کارمن و تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول اصلاح شده، معادلات دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی صفحه با وجود بستر استخراج و با اعمال روش گالرکین، معادلات حاکم به معادلات غیرخطی معمولی تبدیل شده است. سپس با اعمال روش اغتشاشات و با در نظر گرفتن حل تقریبی مرتبه دوم، معادله غیرخطی حاکم حل شده است. معادلات دامنه پاسخ تحت شرایط تشدید نخستین سیستم در شرایط ماندگار به‌دست آمده و منحنی‌های مشخصه پاسخ-فرکانسی، پاسخ-نیروی و پاسخ-میرایی برحسب پارامترهای مسئله ترسیم و پایداری جواب‌های غیربدیهی تحلیل شده است. سپس روی پدیده جهش دامنه و هیستریزس در منحنی‌های پاسخ و دوشاخگی بحث شده است. در ادامه تحت شرایط تشدید اولیه، تأثیر هر یک از پارامترها، به‌ویژه پارامتر لایه برشی بستر، پارامترهای غیرخطی بستر، دامنه تحریک هارمونیک عرضی، دامنه نیروی درون-صفحه‌ای استاتیکی، میرایی و پارامتر تنظیم بر پاسخ غیرخطی مورد بررسی شده است. همچنین، با ترسیم مسیره‌های پاسخ سیستم در صفحه حالت برای مقادیر خاصی از مشخصات فیزیکی مسئله، جداکننده‌های مسیره‌های پاسخ نیز مشخص شد.

2- فرمول بندی مسئله

در شکل 1 صفحه ساندویچی مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت کلی h نشان داده شده است که روی سطوح تحتانی و فوقانی آن، لایه‌های همگن فلزی و سرامیکی با خواص ایزوتروپیک به ترتیب با ضخامت‌های $h_1 = e_b$ و $h_2 = e_c$ جاسازی شده است. هسته صفحه ساندویچی میزبان به ضخامت $e_c = h_2 - h_1$ ، متشکل از یک لایه FG با توزیع نامتقارن از ترکیب خواص سرامیکی و فلزی نسبت به صفحه میانی است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

که در آن مؤلفه ها $Q_{ij}(z)$ بیانگر ثابت های سفتی کاهش یافته صفحه ساندویچی بوده و از رابطه (13) به دست می آید:

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \\ Q_{21}(z) &= Q_{12}(z) = \nu(z)Q_{11}(z), \\ Q_{44}(z) &= Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \end{aligned} \quad (13)$$

با جای گذاری میدان کرنش (10) و (11) در روابط تنش (12) و با استفاده از روابط (13) می توان منتج های نیروهای محوری و برشی و گشتاورهای خمشی مربوط به صفحه ساندویچی تابعی را با انتگرال گیری روی مقطع عرضی آن، از روابط (14-16) به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h_0}^{h_3} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^m \\ \sigma_{yy}^m \\ \sigma_{xy}^m \end{Bmatrix} dz + \int_{h_1}^{h_2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{FG} \\ \sigma_{yy}^{FG} \\ \sigma_{xy}^{FG} \end{Bmatrix} dz + \int_{h_2}^{h_3} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{yy}^c \\ \sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} dz - \begin{Bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^m \\ \sigma_{yz}^m \end{Bmatrix} dz + \int_{h_1}^{h_2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^{FG} \\ \sigma_{yz}^{FG} \end{Bmatrix} dz + \int_{h_2}^{h_3} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^c \\ \sigma_{yz}^c \end{Bmatrix} dz \right) \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{h_0}^{h_1} (z-z_0) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^m \\ \sigma_{yy}^m \\ \sigma_{xy}^m \end{Bmatrix} dz + \int_{h_1}^{h_2} (z-z_0) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{FG} \\ \sigma_{yy}^{FG} \\ \sigma_{xy}^{FG} \end{Bmatrix} dz + \int_{h_2}^{h_3} (z-z_0) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^c \\ \sigma_{yy}^c \\ \sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} dz \quad (16)$$

با جای گذاری رابطه (12) در روابط (14-16)، روابط بین منتج تنش و منتج های کرنش به شکل ماتریسی به شکل رابطه (17) خلاصه می شود:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{B} \\ \bar{B} & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{Q_s\} = [A_s] \{\gamma_0\} \quad (17)$$

که در آن رابطه (18):

$$\begin{aligned} N &= \{N_{xx} \ N_{yy} \ N_{xy}\}^T, \quad F = \{F_x \ 0 \ 0\}^T, \quad M = \{M_{xx} \ M_{yy} \ M_{xy}\}^T \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_{66} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad A_s = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

در این جا، ماتریس های A ، $\bar{B}$ ، D و A_s به ترتیب نشان دهنده سفتی های محوری، کوپلینگ خمشی-کششی، خمشی و برشی هستند که با لحاظ کردن جابه جایی محور خمشی فیزیکی، عناصر این ماتریس ها، از روابط (19-20) به دست می آید [30]:

$$\begin{aligned} \langle A_{ij}, \bar{B}_{ij}, D_{ij} \rangle &= \int_{h_0}^{h_3} Q_{ij} \langle 1, (z-z_0), (z-z_0)^2 \rangle dz, \quad (i, j=1, 2, 6) \\ A_{ij}^s &= K_s \int_{h_0}^{h_3} Q_{ij} dz, \quad (i, j=4, 5) \end{aligned} \quad (19)$$

با ضرب طرفین رابطه (17) در ماتریس انعطاف پذیری رابطه (20) را داریم:

همگن تحتانی $(z \in [h_0, h_1])$ ، فوقانی $(z \in [h_2, h_3])$ و هسته تابعی $(z \in [h_1, h_2])$ است. با استفاده از قانون توزیع توانی، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه از ضخامت صفحه به صورت رابطه ها (3-4) بیان می شود:

$$V_m(z) = \begin{cases} 0, & z \in [h_2, h_3] \\ \left(\frac{z-z_0-h_1}{h_2-h_1} \right)^n, & z \in [h_1, h_2] \\ 1, & z \in [h_0, h_1] \end{cases} \quad (3)$$

$$V_m(z) + V_c(z) = 1, \quad 0 \leq n \leq \infty \quad (4)$$

که در آن n یک عدد حقیقی نامنفی بوده و مشخص کننده شاخص کسر حجمی سرامیک است و نحوه توزیع جزء سرامیکی در امتداد ضخامت صفحه ساندویچی روی قسمت تحتانی و فوقانی سطح میانی را بیان می کند. همچنین همان طور که اشاره شد Z_0 نیز نشان دهنده فاصله صفحه خنثی فیزیکی از صفحه میانی هندسی بوده که از رابطه (5) به دست می آید [29-30]:

$$Z_0 = \int_{h_0}^{h_3} z E(z) dz / \int_{h_0}^{h_3} E(z) dz \quad (5)$$

با توجه به روابط بالا، می توان توزیع خواص تأثیرپذیر مواد تابعی از قبیل مدول یانگ E ، نسبت پواسون ν و جرم واحد حجم ρ در امتداد ضخامت لایه های تابعی را به صورت روابط (6-8) بیان کرد:

$$E(z) = (E_m - E_c) V_m(z) + E_c \quad (6)$$

$$\nu(z) = (\nu_m - \nu_c) V_m(z) + \nu_c \quad (7)$$

$$\rho(z) = (\rho_m - \rho_c) V_m(z) + \rho_c \quad (8)$$

4- استخراج معادلات غیر خطی حرکت

بر اساس تئوری تغییر شکل های برشی مرتبه اول صفحات $^1(FSDT)$ ، میدان جابه جایی نقاط داخل صفحه مستطیلی را می توان به شکل رابطه (9) بیان کرد [22]:

$$\begin{Bmatrix} U(x, y, z, t) \\ V(x, y, z, t) \\ W(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - (z-z_0) \begin{Bmatrix} \phi_x(x, y, t) \\ \phi_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

که در آن (u, v, w) نشان دهنده مؤلفه های تغییر مکان نقاط روی صفحه میانی $(Z=Z_0)$ در دستگاه مختصات دکارتی است. با استفاده از مؤلفه های کرنش غیر خطی ون-کارمن و رابطه (9)، روابط بین مؤلفه های کرنش و تغییر مکان مربوط به نقاط داخل صفحه را می توان به صورت رابطه های (10-11) بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x + 1/2 w_x^2 \\ v_y + 1/2 w_y^2 \\ u_x + v_y + w_x w_y \end{Bmatrix} + (z-z_0) \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

و

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + w_{,y} \\ \phi_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

در روابط اخیر، ε_0 ، نشان دهنده بردار کرنش های غشائی، κ ، بردار کرنش های خمشی و γ_0 نشان دهنده بردار کرنش های برشی روی مقاطع عرضی است. روابط متشکله تنش-کرنش مربوط به صفحه ساندویچی تابعی ایزوتروپیک در راستای ضخامت به شکل رابطه (12) است [22]:

صفحه فوقانی با توزیع گسترده و یکنواخت به صورت رابطه (28) است:

$$\delta W_{ext} = \int_0^a \int_0^b Q_z(x, y, t) \delta w dy dx \quad (28)$$

تغییرات کار انجام شده توسط نیروی میرایی ویسکوز را می توان به صورت رابطه (29) بیان کرد [32]:

$$\delta W_{nc} = \int_0^a \int_0^b \mu \dot{w} \delta w dy dx \quad (29)$$

که در آن μ نشان دهنده میرایی واحد سطح صفحه است. یادآوری این نکته ضروری است که میرایی داخلی به دلیل تغییر جنس و تغییر خواص مواد متشکله صفحه تابعی در راستای ضخامت تغییر می کند، ولی با توجه به این که هدف اصلی تحقیق حاضر بررسی ارتعاشات غیرخطی است، بنابراین برای تمرکز بر هدف اصلی، میرایی در راستای ضخامت ثابت فرض می شود.

با جای گذاری میدان کرنش از روابط (10-11) در رابطه (12) می توان انرژی کرنشی الاستیک را به صورت عبارات انتگرالی از میدان جابه جایی بیان کرد و سپس با استفاده از اصل همپلتون توسعه یافته، به صورت رابطه (30):

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (30)$$

می توان معادلات غیرخطی حاکم بر حرکات درون صفحه ای و عرضی صفحه نسبتاً ضخیم ساندویچی با هسته تابعی و لایه های همگن واقع بر بستر الاستیک غیرخطی پاسترناک را در غیاب اثر اینرسی های درون صفحه ای و دورانی، به صورت روابط (31-34) به دست آورد:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \quad (31)$$

$$N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 \quad (32)$$

$$M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x = 0 \quad (33)$$

$$M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y = 0 \quad (34)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + Q_z(x, y, t) + (N_{xx} w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_{yy} w_{,y})_{,y} - \mu \dot{w} - I_0 \ddot{w} - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) - K_3 w^3 = 0 \quad (35)$$

در تحقیق حاضر فرض می شود که شرایط مرزی تکیه گاهی حاکم بر حرکات عرضی لبه های صفحه ساندویچی، از نوع ساده متحرک، رابطه (36) باشند [33]:

$$x=0, a: v=w=\phi_y=M_x=0, N_x=-F_x$$

$$y=0, b: u=w=\phi_x=M_y=N_y=0 \quad (36)$$

با توجه به رابطه (17) به سادگی می توان دریافت که ماهیت غیرهمگن صفحات تابعی، سبب ایجاد کوپلینگ بین منتج های گشتاورهای خمشی و نیروهای محوری می شود که در نتیجه این کوپلینگ شرایط مرزی طبیعی به صورت کامل ارضاء نمی شوند. از این رو مانند مراجع [33] برای ارضاء شرایط مرزی طبیعی می توان جملات تحلیلی اضافی $\hat{U}$ و $\hat{V}$ را به مؤلفه های حرکات درون صفحه ای اضافه کرد. برای بی بعدسازی معادلات حاکم، از پارامترها و متغیرهای بی بعد به صورت رابطه (37) استفاده می شود:

$$\bar{u} = \frac{u}{a}, \bar{v} = \frac{v}{b}, \bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{w} = \frac{W}{h}, \bar{t} = \omega^* t,$$

$$K_1 = \frac{a^4 k_1}{D_{11}}, K_2 = \frac{a^2 k_2}{D_{11}}, K_3 = \frac{a^4 h^2 k_3}{D_{11}}, P_x = \frac{\pi^2 a^2 F_x}{D_{11}},$$

$$q_z = Q_z a^4 / Eh^4, \delta = \frac{\mu}{m \omega^*}, \omega^* = \sqrt{D_{11}/ma^4} \quad (37)$$

در این جا ω^* نشان دهنده فرکانس مرجع و δ نشان دهنده میرایی سازه ای بدون بعد است.

تحقیقات و بررسی های انجام گرفته بر ارتعاشات غیرخطی صفحات تابعی

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \bar{B} \\ \bar{B} & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N - N^E \\ M - M^E \end{Bmatrix} \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (20) و با به کارگیری روش ارائه شده در مرجع [26]، یعنی فرض استفاده از موده های خمشی استوانه ای [31] با فرض ناچیز بودن اثرات منتج نیروهای غشائی بر منتج نیروهای برشی، می توان کرنش های غشائی را بر حسب گشتاورهای خمشی بیان کرده و با استفاده از معادلات تعادل صفحه، تنش های برشی روی مقاطع عرضی را از رابطه (21) به دست آورد:

$$\sigma_{xz} = \bar{m}_{11}(z) Q_x, \quad \sigma_{yz} = \bar{m}_{22}(z) Q_y$$

$$\bar{m}_{11}(z) = - \int_{h_b}^z [Q_{11}(b_{11} + (\tau - z_0)d_{11}) + Q_{11}(b_{21} + (\tau - z_0)d_{21})] d\tau$$

$$\bar{m}_{22}(z) = - \int_{h_b}^z [Q_{12}(b_{12} + (\tau - z_0)d_{12}) + Q_{22}(b_{22} + (\tau - z_0)d_{22})] d\tau \quad (21)$$

در این جا b_{ij} و d_{ij} درایه های ماتریس انعطاف پذیری در رابطه (20) است. حال با توجه به بالانس انرژی مربوط به کرنش های برشی، ضریب تصحیح اصلاح شده تنش های برشی (K_s) را می توان به شکل رابطه (22) بیان کرد:

$$K_s = K_{44} = K_{55} = \frac{H_{55}}{\sum_{k=1}^3 \int_{h_b}^{h_t} Q_{55}^{(k)}(z) dz} \quad (22)$$

در این جا H_{55} نشان دهنده سفتی برشی اصلاح شده است که برای صفحات ساندویچی متشکل از k لایه ایزوتروپیک، با انتگرال گیری در کل ضخامت صفحه، از رابطه (23) به دست می آید:

$$H_{44} = H_{55} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_b}^{h_t} \frac{[\bar{m}_{11}^{(k)}(z)]^2}{Q_{55}^{(k)}(z)} dz,$$

$$Q_{55}^{(k)}(z) = Q_{44}^{(k)}(z) \quad (23)$$

انرژی جنبشی صفحه با در نظر گرفتن اثر اینرسی های حرکات درون صفحه ای و دورانی به صورت رابطه (24) به دست می آید:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-h_b}^{h_t} \int_0^a \int_0^b \rho(z) (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dy dx dz \quad (24)$$

با استفاده از میدان تغییر مکان نقاط داخل صفحه (9)، تغییرات انرژی جنبشی کل را می توان به صورت رابطه (25) بیان کرد:

$$\delta T = \int_{-h_b}^{h_t} \{ I_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) + I_1 (\dot{u} \delta \dot{\phi}_x + \dot{u} \delta \dot{\phi}_x) + I_1 (\dot{v} \delta \dot{\phi}_y + \dot{v} \delta \dot{\phi}_y) + I_2 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \delta \dot{\phi}_y) \} dy dx \quad (25)$$

که در آن I_0 جرم واحد سطح صفحه بوده و I_1 و I_2 نشان دهنده اینرسی های دورانی صفحه نسبت به محور خنثی است و از رابطه انتگرالی (26) به دست می آیند.

$$\langle I_0, I_1, I_2 \rangle = \int_{h_b}^{h_t} \langle 1, z - z_0, (z - z_0)^2 \rangle \rho(z) dz \quad (26)$$

تغییرات انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم به صورت مجموع انرژی کرنشی داخل حجم صفحه تابعی و انرژی پتانسیل ناشی از بستر و به صورت رابطه (27) است:

$$\delta V = \int_{h_b}^{h_t} \int_0^a \int_0^b \{ \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \} dy dx dz$$

$$+ \int_0^a \int_0^b (K_1 w - K_2 \nabla^2 w + K_3 w^3) \Big|_{z=-h/2} \delta w dy dx \quad (27)$$

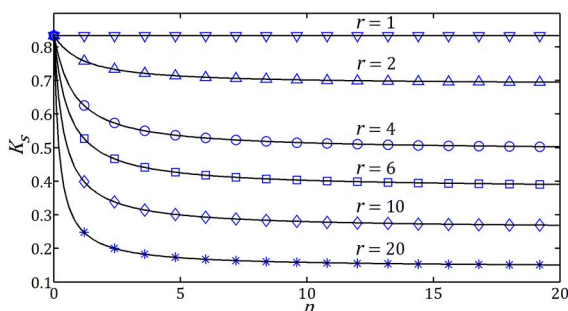
تغییرات کار خارجی انجام شده توسط بارگذاری های مکانیکی عرضی روی

دارند. مانند مرجع یاد شده و با استفاده از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه از ضخامت صفحه ساندویچی به صورت رابطه (40) بیان می شود:

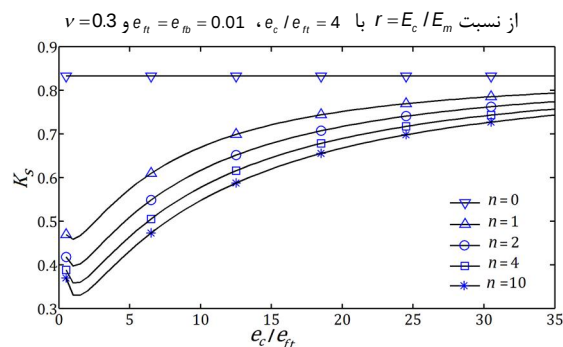
$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^n, & z \in [h_2, h_3] \\ 1, & z \in [h_1, h_2] \\ \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^n, & z \in [h_0, h_1] \end{cases} \quad (40)$$

شکل 2-الف تغییرات ضرایب تصحیح در برابر شاخص کسر حجمی n را برای 6 حالت از نسبت $r = E_c/E_m$ در یک مقدار خاص $e_c/e_f = 4$ نشان می دهد. از این شکل پیداست که با افزایش E_c/E_m ، مقدار ضریب تصحیح کاهش می یابد. شکل 2 ب نیز تغییرات ضرایب تصحیح در برابر نسبت ضخامت هسته به رویه فوقانی، e_c/e_f ، را برای 5 حالت از شاخص کسر حجمی n در یک مقدار خاص $r = E_c/E_m = 6$ نشان می دهد. از این شکل پیداست که با افزایش نسبت e_c/e_f مقدار ضریب تصحیح افزایش می یابد.

با توجه به این شکل ها که منطبق بر نتایج مراجع [26] است، می توان دریافت که ضریب تصحیح تنش های برشی روی مقاطع عرضی، شدیداً به مقادیر n ، E_c/E_m و e_c/e_f وابسته است. از این رو به هنگام استفاده از تئوری تغییر شکل های برشی مرتبه اول صفحات، استفاده از مقدار اصلاح شده ضریب تصحیح تنش های برشی ضروری است. در تحقیق حاضر برای دستیابی به نتایج دقیق تر، با به کارگیری روش به کار رفته در مرجع [26]، ضریب تصحیح تنش های برشی روی مقاطع عرضی صفحه ساندویچی حاضر با هسته تابعی به ضخامت e_c ، رویه فوقانی همگن سرمایی به ضخامت e_f و رویه تحتانی فلزی با ضخامت e_b (مدل 3) اصلاح شد. در شکل 3 تغییرات ضرایب تصحیح مدل حاضر در برابر شاخص کسر حجمی n ، برای 6 حالت از نسبت $r = E_c/E_m$ در یک مقدار خاص $e_c/e_f = 3$ نشان داده شده است.



شکل 2 الف تغییرات ضریب تصحیح در برابر شاخص کسر حجمی n ، برای 8 حالت



شکل 2 ب تغییرات ضریب تصحیح در برابر نسبت e_c/e_f ، برای 5 حالت از شاخص کسر حجمی n ، با $r = E_c/E_m = 6$ ، $e_b = e_f = 0.01$ و $v = 0.3$

مستطیلی با شرایط مرزی تکیه گاهی ساده نشان داده است که تأثیر شکل موده های مربوط به فرکانس های پائین بسیار چشمگیرتر و غالب بر اثرات شکل موده های متناظر با فرکانس های بالا است [2]; برای مطالعه و بررسی ارتعاشات عرضی و غیرخطی این صفحات، در تقریب گالرکین می توان از چند شکل مود اول ارتعاشی صفحه که شرایط مرزی ساده تکیه گاهی مربوط به لبه های صفحه را ارضاء می کنند، استفاده و معادلات حرکت کوپله شده دیفرانسیلی با مشتقات جزئی را به فرم معادلات دیفرانسیلی غیرخطی معمولی تبدیل کرد. با فرضیات یاد شده می توان تابع تغییر مکان عرضی صفحه را به شکل رابطه (38) نوشت:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) \sin m\pi x \sin n\pi y \quad (38)$$

در این جا m و n به ترتیب نشان دهنده تعداد نیم موج ها در جهت x و y است و $w_{mn}(t)$ نشان دهنده دامنه وابسته به زمان در شکل مود مربوطه است. با توجه به این که معادلات (31-34) دربرگیرنده دستگاه معادلات کوپل شده غیرخطی و پیدا کردن حل دقیق این معادلات بسیار پیچیده است، بنابراین می توان مانند مراجع [33] حل تقریبی مؤلفه های جابه جایی های درون صفحه های u و v و زوایای چرخش ϕ_x و ϕ_y ، برای صفحه های با شرایط مرزی تکیه گاهی ساده متحرک را به صورت تابعی از $w_{mn}(t)$ و به شکل رابطه (39) بیان کرد:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{mn} w_{mn}(t) \cos m\pi x \sin n\pi y \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \beta_{mn} w_{mn}(t) \sin m\pi x \cos n\pi y \\ \phi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \eta_{mn} w_{mn}(t) \cos m\pi x \sin n\pi y \\ \phi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \xi_{mn} w_{mn}(t) \sin m\pi x \cos n\pi y \end{aligned} \quad (39)$$

در ادامه و برای سادگی با پرهیز از بالانویس (ˆ) از روی پارامترهای مکانی بی بعد شده (37)، با جای گذاری حل های (38-39) در روابط (31-34) و سپس با اعمال روش گالرکین، مؤلفه های u و v ، ϕ_x و ϕ_y را برحسب دامنه های جابه جایی های عرضی بیان کرده و سپس با جای گذاری آن ها در معادله (35) می توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکات عرضی صفحه مفروض بر بستر را در حضور تحریکات عرضی، به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آورد.

5- اثرات خواص و هندسه صفحه ساندویچی تابعی روی ضریب تصحیح تنش های برشی

در این بخش اثر شاخص کسر حجمی هسته n ، نسبت مدول الاستیک مواد متشکله، $r = E_c/E_m$ و نسبت ضخامت هسته به ضخامت رویه تابعی فوقانی، e_c/e_f ، را بر ضریب تصحیح تنش های برشی واقع بر مقاطع عرضی صفحه ساندویچی بررسی می شود. در این راستا، ابتدا به منظور صحت گذاری بر نتایج، مشابه مرجع [26] فرض می کنیم که صفحه ساندویچی مورد نظر از سه قسمت رویه تابعی پایینی ($z \in [h_0, h_1]$)، هسته مرکزی همگن فلزی ($z \in [h_1, h_2]$) و رویه تابعی بالایی ($z \in [h_2, h_3]$) تشکیل شده است. h_0 و h_3 به ترتیب نشان دهنده موقعیت قائم وجوه تحتانی و فوقانی و h_1 و h_2 نشان دهنده موقعیت قائم محل اتصال لایه ها است که با ضخامت های لایه تابعی تحتانی e_b ، هسته مرکزی e_c و لایه تابعی فوقانی e_f رابطه مستقیم

خمشی و نیروهای محوری) در مقایسه با غیرخطیگی های مرتبه سوم و میرایی از مرتبه بالاتری هستند [8, 36]. می توان با وارد کردن پارامتر کوچک و بدون بعد ε که نشان دهنده مرتبه دامنه حرکات عرضی صفحه است و با استفاده از روش مقیاس های چندگانه، معادله (41) را به شکل رابطه (42) تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 + \omega^2 W_1 = -\varepsilon \alpha_1 q_z \cos \Omega t - \varepsilon \alpha_2 W_1^2 - \varepsilon^2 \alpha_3 W_1^3 - \varepsilon^2 \alpha_4 \delta W_1 \\ (a_i = \varepsilon \alpha_i, i=1,2, a_j = \varepsilon^2 \alpha_j, j=1,2) \end{aligned} \quad (42)$$

هنگامی که فرکانس تحریک بارگذاری عرضی، Ω ، در محدوده اولین فرکانس طبیعی سیستم، ω ، باشد کوچک ترین تغییر در پارامترهای سیستم، می تواند منجر به وجود آمدن پاسخ هایی با دامنه های بزرگ شود، بنابراین جهت بررسی کیفی و مطالعه رفتار غیرخطی سیستم هنگام تشدید اولیه، با وارد کردن پارامتر تنظیم σ می توان رابطه فرکانس در ناحیه تشدید اصلی را به شکل رابطه (43) بیان کرد:

$$\Omega = \omega + \sigma \varepsilon^2 \quad (43)$$

حل تقریبی و مرتبه دوم معادله (42) به شکل رابطه (44) است:

$$\begin{aligned} W(t, \varepsilon) = W_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon W_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2) + \dots, \quad T_n = \varepsilon^n t, \quad n=0,1 \end{aligned} \quad (44)$$

با تعریف اپراتورهای دیفرانسیلی به صورت رابطه (45):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

که در این جا $D_j = \partial / \partial T_j$ ، ($j=0,1$) است و با جای گذاری (43-45) در معادله (42) و با متحد قرار دادن ضرایب توان های مشابه ε روابط (46-48) را خواهیم داشت:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_1^2 W_0 = 0 \quad (46)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_1^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_1 q_z \cos \Omega T_0 - \alpha_2 W_0^2 \quad (47)$$

$$\varepsilon^2: D_0^2 W_2 + \omega_1^2 W_2 = -D_0^2 W_0 - \alpha_4 \delta D_0 W_0 - 2D_0 D_2 W_0 - 2D_0 D_1 W_1 - 2\alpha_3 W_0 W_1 - \alpha_3 W_0^3 \quad (48)$$

حل همگن معادله (46) به صورت رابطه (49) است:

$$W_0 = A(T_1, T_2) e^{i\Omega T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\Omega T_0} \quad (49)$$

که در آن $A(T_1, T_2)$ تابع مجهول بوده و $\bar{A}(T_1, T_2)$ مزدوج مختلط آن است. با جای گذاری حل همگن (49) در (47)، رابطه (50) را داریم:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_1^2 W_1 = -(2iD_1 A + \frac{1}{2} \alpha_2 q_z e^{i\Omega T_0}) e^{i\Omega T_0} - \alpha_2 A^2 e^{2i\Omega T_0} - 2\alpha_2 A \bar{A} - \alpha_2 \bar{A}^2 e^{-2i\Omega T_0} \end{aligned} \quad (50)$$

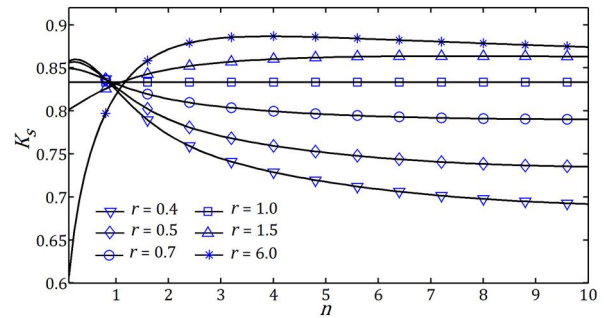
با حذف جملات سکولار از حل W_{11} ، معادله مدولاسیون مرتبه نخست به صورت رابطه (51) به دست می آید:

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -\frac{1}{4i} \alpha_1 q_z e^{i\sigma T_2} \quad (51)$$

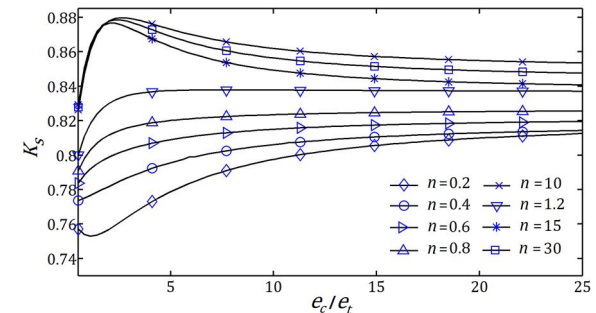
با حذف جملات سکولار، حل معادله (50) متناظر با جملات غیرسکولار را می توان به شکل رابطه (52) به دست آورد:

$$W_1 = \frac{\alpha_2}{3\Omega^2} (A^2 e^{2i\Omega T_0} + \bar{A}^2 e^{-2i\Omega T_0}) - 2\alpha_2 A \bar{A} \quad (52)$$

با جای گذاری (50، 52) در معادله (48) و حذف جملات سکولار معادله مدولاسیون مرتبه دوم به صورت رابطه (53) به دست می آید:



شکل 3 تغییرات ضریب تصحیح در برابر شاخص کسر حجمی n ، برای حالت از نسبت $r = E_c / E_m$ با $e_c / e_t = 3$ و $e_t = e_b = 0.01$



شکل 4 تغییرات ضریب تصحیح در برابر نسبت e_c / e_t ، برای حالت از شاخص کسر حجمی n ، با $E_c / E_m = 6$ و $e_t = e_b = 0.01$

با توجه به شکل های 2-ب و 4 دیده می شود که با افزایش نسبت ضخامت e_c / e_t و مقدار شاخص کسر حجمی، n ، ضریب تصحیح به مقدار حدی متناظر با حالت همگن بودن کامل صفحه، یعنی $5/6$ میل می کند.

6- مشخصات هندسی و فیزیکی مسئله

فرض می شود که خواص طرفین صفحه تابعی ساندویچی در راستای ضخامت دارای توزیع توانی بوده و به صورت پیوسته و تدریجی از خواص خالص فلزی از جنس آلومینیم با $\rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3$ ، $E_m = 70 \text{ GPa}$ و $\nu_m = 0.3$ در سطح میانی به خواص خالص سرامیکی از جنس زیرکونیم با $\rho_c = 3000 \text{ kg/m}^3$ و $E_c = 151 \text{ GPa}$ ، $\nu_c = 0.3$ در سطوح تحتانی و فوقانی تغییر می کند [34]. شاخص کسر حجمی اختلاط مواد $n=3$ در نظر گرفته شده است.

7- تحلیل غیرخطی با روش اغتشاشات

در این بخش، رفتار غیرخطی صفحه تابعی تحت تحریک هارمونیک در شکل مود اول ارتعاشی $w(x, y, t) = w(t) \sin \pi x \sin \pi y$ که در آن $w(t)$ دامنه ارتعاشی وابسته به زمان است مطالعه می شود. با فرض اخیر، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکات عرضی صفحه در حضور تحریک عرضی به شکل رابطه (41) بیان می شود:

$$\dot{W} + \omega^2 W + a_1 q_z \cos \Omega t + a_2 W^2 + a_3 W^3 + a_4 \delta W = 0 \quad (41)$$

که این معادلات دربرگیرنده غیرخطیگی های مرتبه دوم و سوم از حرکات عرضی صفحه ناشی از تغییر شکل های بزرگ و غیرخطیگی های مرتبه سوم غیرخطیگی های بستر است.

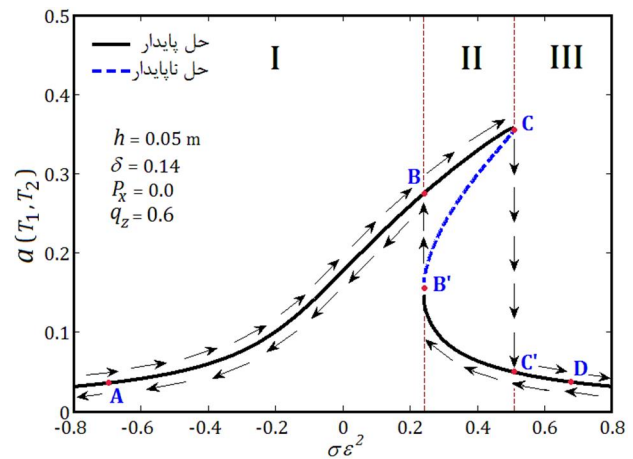
از آنجایی که تحلیل معادلات غیرخطی با استفاده از روش مقیاس های چندگانه در مقایسه با روش های هارمونیک بالانس و ... از دقت بالاتری برخوردار است [35]. بنابراین با فرض این که دامنه جمله تحریک عرضی و غیرخطیگی های هندسی مرتبه دوم ناشی از کوپلینگ منتج های گشتاورهای

خطی سازی شده، رابطه (56)، حول حل پایای غیربدیهی منفی باشند، حل غیربدیهی سیستم پایدار خواهد بود [8]. از سوی دیگر چون $\eta_1 = \delta > 0$ است، بنابراین تنها شرط پایداری $\eta_2 > 0$ است.

8- تحلیل کمی رفتار غیر خطی و پایداری

در این بخش رفتار صفحه ساندویچی تابعی مربعی با نسبت ابعاد $a/h=20$ ، تحت تحریک هارمونیک عرضی به صورت عددی بررسی می شود. با فرضیات بالا و در غیاب بستر الاستیک ($k_1=k_2=k_3=0$)، تغییرات دامنه تشدید اولیه صفحه در برابر پارامتر تنظیم $\sigma\epsilon^2$ در حضور اثرات میرایی با $\delta=0.14$ در شکل 5 نشان داده شده است. در این شکل، منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی که نشان دهنده رفتار هیسترتیک¹ از نوع سخت شونده متناظر با غیرخطیگی های مثبت سیستم غیرخطی نوسانی است، ترسیم شده است که در آن منحنی های پیوسته بیانگر حل های غیربدیهی پایدار و منحنی های منقطع بیانگر حل غیربدیهی ناپایدار برای دامنه پاسخ است. در ناحیه I، وقتی که فرکانس تحریک، Ω ، به مقدار کافی از فرکانس طبیعی اصلی کمتر است (نقطه A)، فقط یک حل غیربدیهی پایدار برای دامنه تشدید وجود خواهد داشت و سیستم با دامنه کوچکی نوسان خواهد کرد. با افزایش تدریجی فرکانس تحریک از نقطه A، دامنه حل غیربدیهی پایدار نیز آرام آرام افزایش می یابد، زمانی که فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی اصلی نزدیک می شود ($\sigma\epsilon^2=0$)، دامنه حل غیربدیهی پایدار تا رسیدن به نقطه C ($\sigma\epsilon^2$)، به سرعت افزایش می یابد. پس از گذر از این نقطه (دوشاخگی زینی) مسیری که نشان دهنده حل غیربدیهی ناپایدار است به سمت عقب دوشاخه می شود. چنین دوشاخگی زینی - مانند منجر به اتفاق افتادن پدیده جهش دامنه می شود که همچنین این جهش، پاسخ سیستم از نقطه C سریعاً به سمت حل غیربدیهی پایدار جذب می شود (نقطه C').

بر اساس شکل 5، در ناحیه III با ادامه افزایش فرکانس تحریک، دامنه پاسخ سیستم به تدریج کاهش می یابد (از نقطه C' به سمت D). از سوی دیگر با کاهش تدریجی فرکانس تحریک از نقطه D، دامنه پاسخ سیستم در امتداد مسیر DC'B' تا رسیدن به نقطه دوشاخگی زینی - مانند دوم یعنی نقطه B'، به صورت پیوسته افزایش می یابد. در این نقطه دامنه پاسخ سیستم به صورت ناگهانی افزایش یافته و جذب حل غیربدیهی پایدار یعنی نقطه B ($\sigma\epsilon^2$) می شود. با ادامه روند کاهش فرکانس تحریک از این نقطه، دامنه پاسخ نیز رفته رفته تا رسیدن به نقطه A کاهش می یابد. با توجه به توضیحات یاد شده، ملاحظه می شود که سیستم تحت تشدید اولیه دارای دو دوشاخگی مخرب² در نقاط C و B' است که در فرکانس های متناظر با این نقاط با توجه به جهت تغییرات فرکانس تحریک حول و حوش فرکانس طبیعی اصلی رفتارهای تشدید متفاوتی از خود بروز می دهد (کاهش ناگهانی دامنه در نقطه C در طی افزایش فرکانس تحریک با گذر از مسیر ACC'D و یا افزایش ناگهانی دامنه در نقطه B' در راستای افزایش فرکانس تحریک با گذر از نقاط DC'B'BA). مانند مشخصات هیسترتیزی حول و حوش فرکانس تشدید به سبب وجود هم زمان حل های چندگانه غیربدیهی پایدار برای دامنه پاسخ است. با توجه به شکل 5 پیداست که در ناحیه II، یعنی در بازه فرکانسی $\sigma\epsilon^2 < \sigma\epsilon^2 < \sigma\epsilon^2$ ، دو حل غیربدیهی پایدار و یک حل غیر بدیهی ناپایدار برای دامنه وجود دارد. از این رو پاسخ فرکانسی سیستم در این ناحیه دو - پایدار³ با توجه به شرایط اولیه سیستم متفاوت خواهد بود.



شکل 5 تغییرات دامنه پاسخ فرکانسی در برابر پارامتر تنظیم برای صفحه مربعی با نسبت ابعاد $a/h=20$ در غیاب بستر و در حضور اثر میرایی $\delta=0.14$ با در نظر گرفتن $q_z=0.6$

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \frac{1}{6i\Omega} (-3D_1^2 A - 3i\Omega\alpha_4 A + (12\alpha_2^2 - 9\alpha_3^2 - \frac{2\alpha_2^2}{\Omega^2}) A^2 \bar{A}) \quad (53)$$

با استفاده از معادلات مدولاسیون مرتبه اول و دوم می توان معادله مدولاسیون کلی را به شکل رابطه (54) به دست آورد:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{6i\Omega} \epsilon^2 \left((12\alpha_2^2 - 9\alpha_3^2 - \frac{2\alpha_2^2}{\Omega^2}) A^2 \bar{A} - 3D_1^2 A - 3i\Omega\alpha_4 A \right) - \frac{1}{4i} \epsilon \alpha_1 q_z e^{i\sigma T_2} \quad (54)$$

برای توصیف معادله (54) در دستگاه مختصات قطبی، می توان تابع $A(T_1, T_2)$ را به صورت رابطه (55) بیان کرد:

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) e^{i\theta(T_1, T_2)} \quad (55)$$

با جای گذاری (55) در رابطه (54) و جداسازی بخش های حقیقی و موهومی آن نهایتاً می توان معادله مدولاسیون (54) در فرم قطبی را به شکل رابطه (56) بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= c_1 \delta a + c_2 q_z \sin(\gamma) \\ a\dot{\gamma} &= c_3 \sigma a + c_5 a^3 + c_6 K_3 a^3 + c_6 q_z \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (56)$$

که در این جا $\gamma = \sigma T_2 - \theta$ است. معادلات پاسخ فرکانسی سیستم، در حالت پایا با ثابت ماندن دامنه و فاز نسبت به زمان متناظر با $\dot{a}=0$ و $\dot{\gamma}=0$ به دست می آید. برای بررسی پایداری حل های پایا، فرض می کنیم که a_s و γ_s به ترتیب نشان دهنده حل های غیربدیهی معادلات (56) در شرایط پایا برای دامنه و فاز است. از این رو می توان حل کلی را به صورت مجموع حل های پایا و اغتشاشی و به شکل رابطه (57) بیان کرد:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_s + a_p(t) \\ \gamma(t) &= \gamma_s + \gamma_p(t) \end{aligned} \quad (57)$$

a_p و γ_p بیانگر اغتشاشات جزئی حل های سیستم نسبت به حل های وضعیت پایا است. با جای گذاری رابطه (57) در (56) و نگاه داشتن جملات خطی نسبت به a_p و γ_p ، و سپس با حل مسئله مقدار ویژه متناظر، می توان به معادله مشخصه زیر که توصیف کننده وضعیت پایداری/ناپایداری حل های اغتشاشی سیستم حول و حوش حل های پایا است، رسید:

$$\lambda^2 + \eta_1 \lambda + \eta_2 = 0 \quad (58)$$

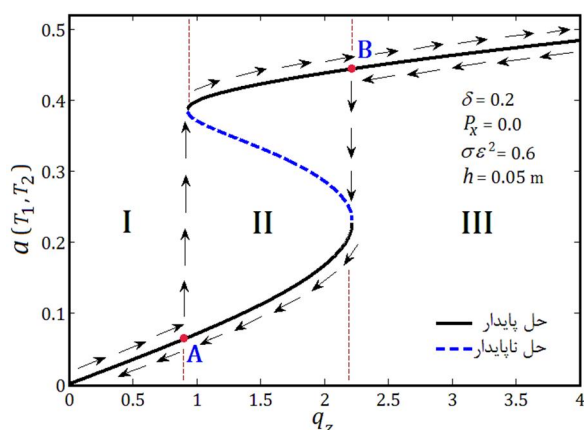
مطابق محک راث- هرویتز اگر به صورت هم زمان $\eta_1 > 0$ و $\eta_2 > 0$ است یا به بیان دیگر اگر بخش حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس ضرایب سیستم

1- hysteretic
2- catastrophic
3- bi-stable

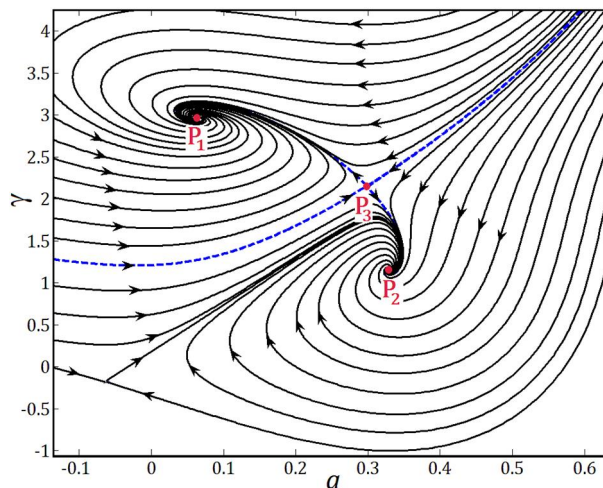
شاخه های پایینی و بالایی منحنی های پاسخ فرکانسی سیستم (حل های پایدار پائینی و بالایی در شکل 6-ب است. همچنین در شکل 6-الف نقطه زینی- مانند P_3 نیز متناظر با شاخه میانی منحنی های پاسخ فرکانسی سیستم (حل ناپایدار میانی در شکل 6-ب است. توجه به این نکته ضروری است که براساس شکل 6-الف ناحیه جذب دو حالت پاسخ ماندگار پایدار (P_1 و P_2) توسط مرزهای جداکننده همسو در نقطه زینی- مانند P_3 از هم تفکیک می شوند. زمانی که حالت اولیه سیستم در ناحیه پایینی (بالایی) دامنه جذب داشته باشد، پاسخ سیستم، مسیر پاسخ غیربدیهی دامنه- بالا (دامنه- پایین) دنبال خواهد کرد.

در شکل 7 مسیرهای سیستم در صفحه حالت (a, γ) برای مقادیر $\delta = 0.14$ و $q_z = 0.6$ در یک مقدار خاص منفی $\sigma\epsilon^2 = -0.7$ نشان داده شده است. با توجه به این شکل، تنها یک نقطه مارپیج- مانند A که متناظر با حل پایدار شکل 6-ب است وجود دارد. مطابق شکل در دامنه جذب سیستم (منطقه میانی)، پاسخ سیستم تحت تمامی حالات اولیه، مسیر پاسخ غیربدیهی پایدار را تا رسیدن به حل مارپیج مانند A دنبال خواهد کرد.

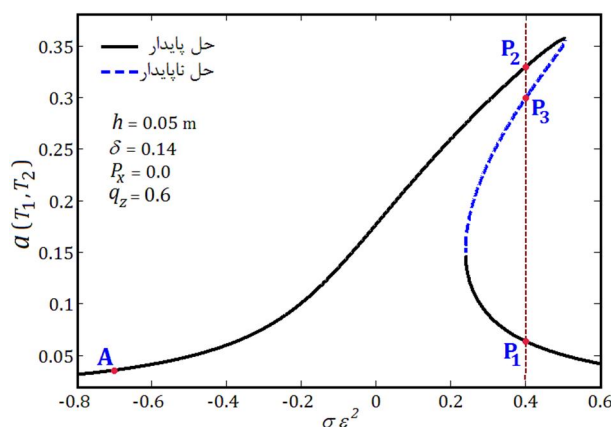
از دیگر روش های مطالعه رفتار سیستم در محدوده تشدید، بررسی تغییرات دامنه پاسخ نسبت به تغییرات دامنه نیروی تحریک است. در شکل 8 منحنی های مشخصه پاسخ- نیرویی در غیاب بستر و برای یک مقدار خاص از پارامتر تنظیم $\sigma\epsilon^2 = 0.6$ در حضور اثر میرایی با $\delta = 0.2$ ترسیم شده است. از این شکل می توان دریافت در غیاب میرایی، تشدید صفحه همواره تحریک شده و کاهش پارامتر $\sigma\epsilon^2$ ، صرفاً سبب افزایش اندازه دامنه تشدید شده و تغییرات آن تأثیری بر عرض منطقه تشدید ندارد. با توجه به این شکل دیده می شود که اگر دامنه تحریک عرضی، q_z ، در گستره نیرویی نواحی I و III به سیستم اعمال شود همواره فقط یک حل غیربدیهی پایدار برای دامنه پاسخ وجود خواهد داشت اما اگر مقدار دامنه نیروی تحریک در ناحیه II قرار گیرد حل های غیربدیهی هم زمان سه گانه برای دامنه پاسخ وجود خواهد داشت که دو تا از آن ها پایدار است که متناظر با شاخه های بالایی و پایینی منحنی های پاسخ- نیرویی هستند ولی یکی از این حل ها ناپایدار بوده و متناظر با شاخه میانی منحنی های پاسخ- نیرویی است. در این حالت نیز وجود حل های چندگانه به وجود آمدن نقاط دوشاخگی زینی- مانند در نقاط A و B می شود که پی آمد آن بروز پدیده جهش دامنه در این نقاط است. با توجه به این شکل با افزایش تدریجی دامنه تحریک از ناحیه I به سمت ناحیه III و سپس کاهش آن در جهت عکس، به دلیل وجود دو نقطه دوشاخگی زینی یادشده، مشابه شکل 5 در این حالت نیز پدیده هیستریزس اتفاق می افتد.



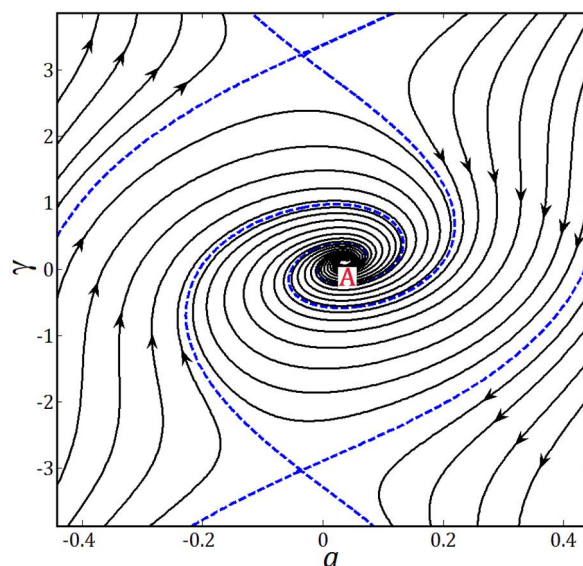
شکل 8 منحنی های پاسخ- نیرویی در غیاب بستر با $\delta = 0.2$ و $\sigma\epsilon^2 = 0.6$



شکل 6-الف صفحه حالت نشان دهنده پاسخ سیستم برای حالت خاصی از $\sigma\epsilon^2 = 0.4$ در حضور اثر میرایی $\delta = 0.14$ با در نظر گرفتن $q_z = 0.6$

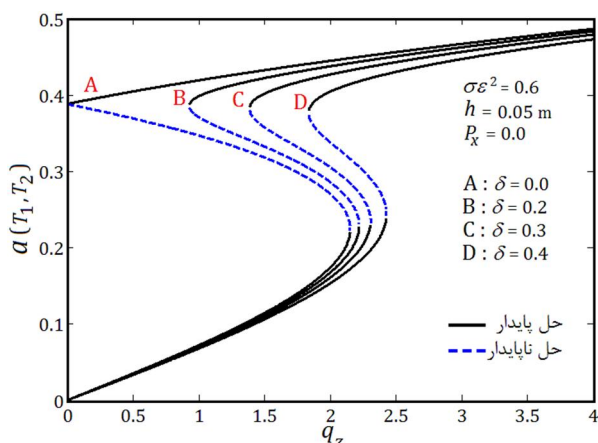


شکل 6-ب منحنی های پاسخ فرکانسی در برابر پارامتر تنظیم در غیاب بستر با $\delta = 0.14$ و $q_z = 0.6$

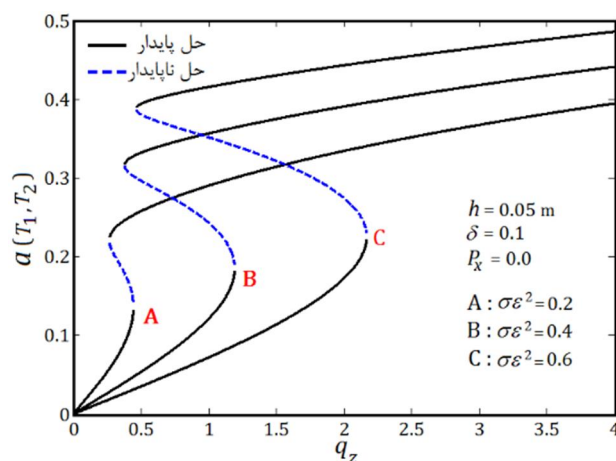


شکل 7 صفحه حالت پاسخ سیستم برای حالت خاصی از $\sigma\epsilon^2 = -0.7$ در حضور اثر میرایی $\delta = 0.14$ با در نظر گرفتن $q_z = 0.6$

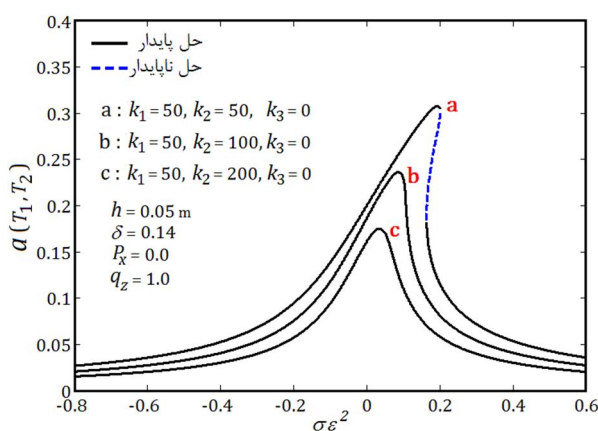
در شکل 6-الف مسیرهای پاسخ سیستم در صفحه حالت (a, γ) برای مقادیر $\delta = 0.14$ و $q_z = 0.6$ در یک مقدار خاص از $\sigma\epsilon^2 = 0.4$ نشان داده شده است. با توجه به این شکل دو نقطه مارپیج- مانند P_1 و P_2 به ترتیب متناظر با



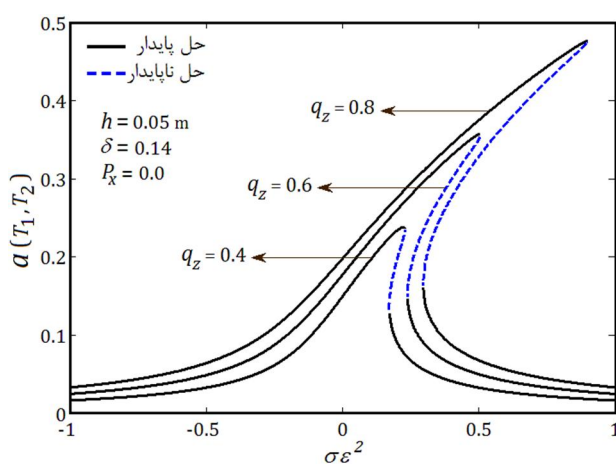
شکل 12 منحنی های مشخصه پاسخ در برابر دامنه تحریک در غیاب بستر به جای $\delta = 0.4$ و $\delta = 0.3$ ، $\delta = 0.2$ ، $\delta = 0$ برای چهار مقدار میرایی $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.6$



شکل 9 منحنی های مشخصه پاسخ نیرویی در غیاب بستر الاستیک، برای سه مقدار پارامتر تنظیم $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.2$ ، $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.4$ و $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.6$



شکل 13 مقایسه منحنی های پاسخ فرکانسی متناظر با $q_z = 1$ و سفتی خطی وینکلر $K_1 = 50$ و در غیاب سفتی غیر خطی وینکلر ($K_3 = 0$) برای سه حالت مختلف از سفتی های خطی برشی بستر: a) $K_2 = 50$ ، b) $K_2 = 100$ ، c) $K_2 = 200$



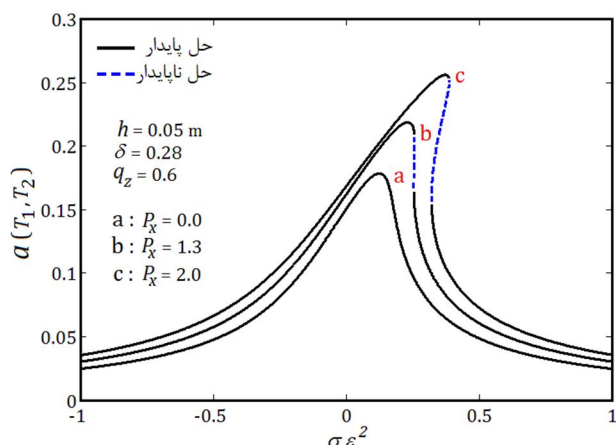
شکل 10 منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی در غیاب بستر، برای سه مقدار از دامنه تحریک عرضی نیرویی $q_z = 0.4$ ، $q_z = 0.6$ و $q_z = 0.8$

شکل 10 نشان دهنده منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی برای سه مقدار مختلف دامنه جمله هارمونیک تحریک عرضی $q_z = 0.4$ ، $q_z = 0.6$ و $q_z = 0.8$ است. مطابق این شکل، افزایش اندازه دامنه تحریک سبب افزایش عرض منطقه وجود جواب های چندگانه شده و افزایش دامنه پاسخ می شود.

در ادامه، اثر دامنه نیروی استاتیکی درون صفحه ای بدون بعد، P_x ، روی منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی بررسی می شود. در شکل 11 منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی صفحه تحت تشدید اولیه در غیاب اثر بستر و برای یک مقدار خاص از دامنه تحریک، $q_z = 0.6$ ، و میرایی $\delta = 0.28$ نشان داده شده است. همان طور که انتظار می رود با افزایش P_x ، فرکانس خطی سیستم تحت تحریک کم شده و غیرخطیگی های مثبت سیستم افزایش می یابد، به گونه ای که تحت شرایط یکسان و با افزایش دامنه نیروی درون - صفحه ای، منحنی های پاسخ فرکانسی به سمت راست خمیده شده و عرض منطقه وجود جواب های چندگانه افزایش می یابد. همچنین افزایش P_x سبب افزایش دامنه پاسخ می شود.

در شکل 12 منحنی های مشخصه دامنه تشدید در برابر دامنه تحریک در حضور اثرات میرایی و در غیاب اثرات بستر و نیروی درون - صفحه ای و برای یک مقدار خاص از پارامتر تنظیم $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.6$ نشان داده شده است.

با توجه به این شکل می توان دریافت که افزایش پارامتر δ سبب کاهش دامنه پاسخ شده و سبب انتقال نقاط دوشاخگی منحنی ها به سمت راست می شود. همچنین افزایش میرایی سبب کاهش عرض منطقه وجود جواب های چندگانه می شود.



شکل 11 منحنی های مشخصه پاسخ فرکانسی برای سه مقدار از دامنه نیروی تحریک درون - صفحه ای $P_x = 0$ ، $P_x = 1.3$ و $P_x = 2$

در شکل 9 منحنی های پاسخ نیرویی برای سه مقدار پارامتر تنظیم $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.2$ ، $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.4$ و $\sigma_{\epsilon}^2 = 0.6$ ترسیم شده است. از این شکل می توان دریافت در غیاب میرایی، تشدید صفحه همواره تحریک شده و افزایش پارامتر σ_{ϵ}^2 ، سبب افزایش دامنه تشدید شده که باعث انتقال نقاط دوشاخگی منحنی های پاسخ - نیرویی به سمت راست شده و تغییرات پارامتر تنظیم سبب افزایش عرض منطقه وجود جواب های چندگانه می شود.

مختلف از مقدار ضریب برشی بدون بعد بستر پاسترناک: (a) $k_2=50$ ، (b) $k_2=100$ ، (c) $k_2=200$ نشان داده شده است.

با توجه این شکل، همچنان که انتظار می رود افزایش ضریب برشی بستر سبب افزایش فرکانس خطی سیستم می شود و پی آمد آن کاهش دامنه پاسخ است. نکته دیگر، افزایش سفتی خطی سبب خمیده شدن منحنی های پاسخ به حالت قائم شده و در نتیجه سبب کوچک شدن عرض ناحیه وجود تشدید دوگانه می شود.

در غیاب لایه برشی بستر ($k_2=0$)، شکل 14 اثر حضور و عدم حضور بستر غیرخطی، روی منحنی های پاسخ-فرکانسی در حضور میرایی ($\delta=0.15$) و نیروی تحریک عرضی ($q_z=0.6$) را نشان می دهد. مطابق این شکل، منحنی های پاسخ-فرکانسی برای سه حالت: (a) بدون وجود بستر، (b) $k_1=k_3=0$ در حضور بستر غیرخطی با $k_1=20$ و $k_3=250$ ، (c) $k_1=k_3=0$ در حضور بستر غیرخطی با $k_1=20$ و $k_3=500$ ، نشان داده شده است.

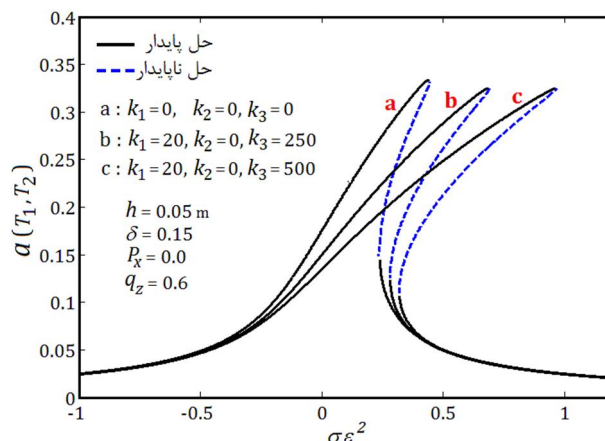
با توجه این شکل دیده می شود که از حالت a به c، افزایش سفتی غیرخطی وینکلر سبب افزایش غیرخطی های سفت شونده¹ شده و منحنی های پاسخ فرکانسی به سمت راست (نسبت به حالت بدون بستر) خمیده می شوند و پی آمد آن دور شدن نقاط دوشاخگی هر یک از منحنی ها نسبت به یکدیگر شده و عرض منطقه وجود جواب های غیربدیهی چندگانه تشدید افزایش می یابد.

شکل 15 منحنی های مشخصه دامنه تشدید نسبت به پارامتر میرایی، δ ، در غیاب بستر را برای یک مقدار خاص از پارامتر تنظیم نشان می دهد. با توجه به این شکل دیده می شود که در ناحیه I و در بازه میرایی داده شده، یک حل غیربدیهی پایدار برای دامنه تشدید وجود دارد و با افزایش تدریجی پارامتر δ ، اندازه دامنه های تشدید کاهش می یابد تا این که اولین نقطه دوشاخگی ظاهر می شود و پس از این نقطه دوشاخگی، سه حل غیر بدیهی که دو تا از آن ها پایدار است برای دامنه پاسخ وجود خواهد داشت (ناحیه II). همان طور که انتظار می رود با ادامه افزایش میرایی، اثر میرایی به تدریج بر اثر تحریک نیرویی غلبه کرده و دامنه پاسخ های غیربدیهی پایدار/ناپایدار رفته رفته کاهش می یابد تا جایی که نقطه دوشاخگی دوم نیز ظاهر می شود و پس از عبور از نقطه دوشاخگی دوم، سیستم فقط یک حل غیربدیهی پایدار خواهد داشت (ناحیه III). در این ناحیه نیز با افزایش میرایی، دامنه تشدید صفحه کاهش می یابد.

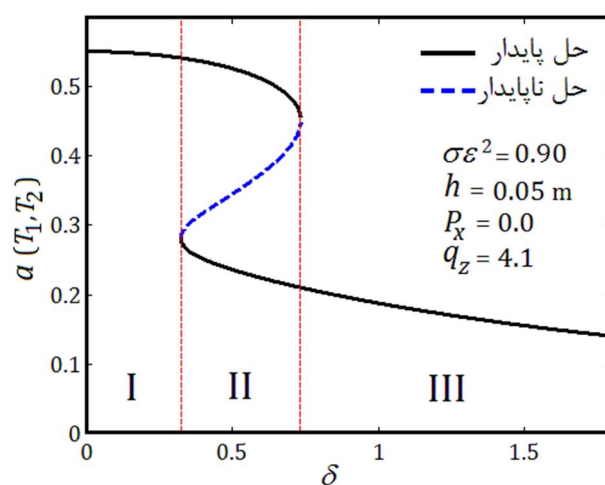
در شکل 16 نیز منحنی های پاسخ-میرایی برای سه مقدار پارامتر تنظیم $\sigma\epsilon^2=0.7$ ، $\sigma\epsilon^2=0.82$ و $\sigma\epsilon^2=0.9$ رسم شده است. با توجه این شکل افزایش پارامتر تنظیم سبب افزایش دامنه پاسخ و افزایش عرض منطقه وجود جواب های چندگانه منحنی های مشخصه پاسخ-میرایی می شود.

9- نتیجه گیری

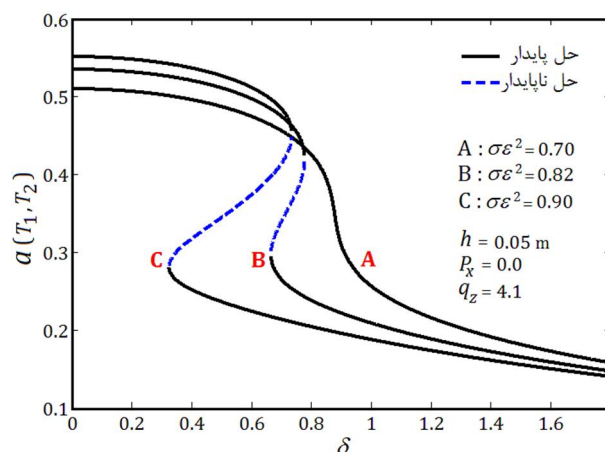
در تحقیق حاضر ابتدا با استفاده از تئوری تغییر شکل های مرتبه اول و با به کارگیری اصل هامیلتون، معادلات دیفرانسیل جزئی و غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی صفحه باوجود غیرخطیگی های هندسی و ناهمگنی ساختاری در حضور بستر غیرخطی پاسترناک استخراج شد و با استفاده از تقریب گالرکین معادلات حاکم به معادلات غیرخطی معمولی تبدیل شد. با تصحیح ضریب تنش های برشی روی مقاطع عرضی صفحه، نشان داده شد که ضریب تصحیح تنش های برشی به شدت به نسبت مدول مواد تشکل شده،



شکل 14 مقایسه منحنی های پاسخ فرکانسی متناظر با $q_z=0.6$ در غیاب لایه برشی بستر ($k_2=0$) برای سه حالت از سفتی های وینکلر بستر: (a) $k_1=k_3=0$ ، (b) $k_1=k_3=0$ و $k_1=20$ و $k_3=250$ ، (c) $k_1=k_3=0$ و $k_1=20$ و $k_3=500$



شکل 15 تغییرات دامنه تشدید با پارامتر میرایی در غیاب بستر الاستیک برای $q_z=4.1$ و $\sigma\epsilon^2=0.9$



شکل 16 مقایسه منحنی های پاسخ میرایی متناظر با $q_z=4.1$ برای سه مقدار پارامتر تنظیم $\sigma\epsilon^2=0.7$ ، $\sigma\epsilon^2=0.82$ و $\sigma\epsilon^2=0.9$

در این بخش اثر وجود بستر با سفتی های خطی و غیرخطی بر مشخصات تشدید صفحه ساندویچی تابعی در حضور اثر میرایی مورد بررسی قرار می گیرد.

در شکل 13 منحنی های مشخصه پاسخ-فرکانسی صفحه با بستر پاسترناک خطی ($k_3=0$) و با سفتی خطی وینکلر، $k_1=50$ ، برای سه حالت

- [7] C.X. Xue, E. Pan, Q.K. Han, S.Y. Zhang, H.J. Chu, Non-linear principal resonance of an orthotropic and magnetoelastic rectangular plate, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 703-710, 2011.
- [8] X.G. Zhang, H. Yuda, X.L. Ren, Nonlinear principal resonance of clamped functionally graded rectangular plate, *Journal of Vibration and Shock*, Vol. 30, No. 6, pp. 153-157, 2011.
- [9] W. Zhang, J.E. Chen, D.X. Cao, L.H. Chen, Nonlinear dynamic responses of a truss core sandwich plate, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 367-386, 2014.
- [10] M. Sayed, A.A. Mousa, Second-order approximation of angle-ply composite laminated thin plate under combined excitations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 17 pp. 5201-5216, 2012.
- [11] H.S. Shen, Z.X. Wang, Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2517-2524, (2010).
- [12] L. Huadong, X. Zhu, Z. Mei, J. Qiu, Y. Zhang, Bending of Orthotropic Sandwich Plates with of Functionally Graded Core Subjected to Distributed Loading, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 26, No. 3, pp. 292-301, (2013)
- [13] M. Zakia, F. Tarlochan, S. Ramesh, Two dimensional elastic deformations of functionally graded coated plates with clamped edges, *Composites: Part B*, Vol. 45, pp. 1010-1022, (2013).
- [14] J.L. Mantari, C.G. Soares, A trigonometric plate theory with 5-unknowns and stretching effect for advanced composite plates, *Composite Structures*, Vol. 107, pp. 396-405, 2014.
- [15] Z.X. Wang, H.S. Shen, Nonlinear dynamic response of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations in thermal environments, *Ocean Engineering*, Vol. 57, pp. 99-110, 2013.
- [16] T.L. Thinh, M.C. Nguyen, D.G. Ninh, Dynamic stiffness formulation for vibration analysis of thick composite plates resting on non-homogenous foundations, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 684-695, 2014.
- [17] A.H. Baferani, A.R. Saidi, Effects of in-plane loads on vibration of laminated thick rectangular plates resting on elastic foundation: An exact analytical approach, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 42, pp. 299-314, 2013.
- [18] M. Sobhy, Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions, *Composite Structures*, Vol. 99, pp. 76-87, 2013.
- [19] B.N. Singh, A. Lal, R. Kumar, Nonlinear bending response of laminated composite plates on nonlinear elastic foundation with uncertain system properties, *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 1101-1112, 2008.
- [20] Y. Nath, M. Prithviraju and A.A. Mufti, Nonlinear statics and dynamics of antisymmetric composite laminated square plates supported on nonlinear elastic subgrade, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 11 pp.340-354, 2006.
- [21] Z. Yang, X.J. Zaho, Primary Resonance of a Thin Rectangular Plate on Nonlinear Foundation in Temperature Field, *Journal of Mechanical Strength*, Vol. 30, No. 5, pp. 744-748, 2008.
- [22] M. Rafiee, X.Q. He, K.M. Liew, Nonlinear dynamic stability of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates with initial Geometric imperfection, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 59, pp. 37-51, (2014).
- [23] Y.Y. Lee, X. Zhao, J.N. Reddy, Postbuckling analysis of functionally graded plates subject to compressive and thermal loads, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, pp. 1645-1653, 2010.
- [24] P. Zhu, K.M. Liew, Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2925-2944, 2011.
- [25] K.J. Sohn, J.H. Kim, Nonlinear thermal flutter of functionally graded panels under a supersonic flow, *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 380-387, 2009.
- [26] H.T. Thai, T.K. Nguyen, T.P. Vo, J. Lee, Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 45, pp. 211-225, 2014.
- [27] T.K. Nguyen, K. Sab, G. Bonnet, First-order shear deformation plate models for functionally graded materials, *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 25-36, 2008.
- [28] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, second edition*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [29] T. Prakash, M.K. Singha, M. Ganapathi, A finite element study on the large amplitude flexural vibration characteristics of FGM plates under aerodynamic load, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, pp. 439-447, 2012.
- [30] M. Rafiee, M. Mohammadi, B. Sobhani Aragh, H. Yaghoobi, Nonlinear free and forced thermo-electro-aero-elastic vibration and dynamic response of piezoelectric functionally graded laminated composite shells, Part I: Theory and analytical solutions, *Composite Structures*, Vol. 103, pp. 179-187, 2013.

شاخص کسر حجمی اختلاط مواد و نسبت ضخامت هسته به لایه ها وابسته بوده و مقدار این ضریب برای صفحات ساندویچی با مقدار آن برای صفحات همگن متفاوت است. در ادامه با استفاده از روش اغتشاشات، معادلات پاسخ به دست آمد و حل های غیردیده این معادلات در شرایط ماندگار استخراج و پایداری آن ها مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج نشان می دهد که در کل محدوده فرکانسی، تشدید صفحه تحریک می شود طوری که با قرار گرفتن فرکانس تحریک در بخش میانی محدوده فرکانسی، سیستم حل های غیردیده سه گانه دارد که دو تا از آن ها پایدار و دیگری ناپایدار است که در نتیجه در این ناحیه تشدید دو گانه خواهیم داشت و پاسخ غیرخطی سیستم با توجه به شرایط اولیه جذب یکی از این حل های پایدار دو گانه خواهد شد. نتایج حاصل نشان داد که در بخش های دیگر این محدوده، سیستم تنها یک حل غیردیده پایدار دارد. همچنین نشان داده شد که وجود حل های چندگانه سبب ایجاد نقاط دوشاخگی زینی می شود که پی آمد آن بروز پدیده جهش دامنه است. علاوه بر این نشان داده شد که:

- الف) با تحریک صفحه در غیاب بستر، افزایش مقدار دامنه تحریک سبب گسترش ناحیه وجود حل های سه گانه شده و دامنه پاسخ فرکانسی می شود.
- ب) در غیاب بستر، افزایش میرایی سبب کاهش دامنه پاسخ و انتقال نقاط دوشاخگی منحنی های مشخصه دامنه-نیروی به سمت راست شده و عرض منطقه وجود سه گانه کاهش می یابد.
- ج) با تحریک عرضی صفحه در غیاب بستر، افزایش پارامتر تنظیم سبب افزایش دامنه پاسخ- نیرویی و انتقال نقاط دوشاخگی منحنی های پاسخ نیرویی به سمت راست شده و عرض منطقه وجود جواب های چندگانه افزایش می یابد.
- د) در غیاب بستر، افزایش نیروی استاتیکی درون- صفحه ای سبب افزایش فرکانس خطی سیستم و دامنه پاسخ شده و غیرخطیگی های مثبت سیستم افزایش یافته و عرض منطقه وجود جواب های چندگانه افزایش می یابد.
- ه) در حضور لایه برشی بستر، افزایش پارامتر خطی لایه برشی سبب افزایش فرکانس خطی سیستم و پی آمد آن کاهش دامنه پاسخ است. افزایش این پارامتر سبب خمیده شدن منحنی های پاسخ به حالت قائم مانند شده که پی- آمد آن کوچک تر شدن عرض ناحیه وجود تشدید دو گانه است.
- و) در غیاب لایه برشی و در حضور غیرخطیگی های بستر وینکلر، افزایش پارامتر غیرخطی سبب افزایش غیرخطیگی های مثبت سیستم و خمیدگی منحنی های پاسخ- فرکانسی به سمت راست می شود و پی آمد آن افزایش عرض منطقه وجود جواب های دو گانه تشدید است.

10- منابع

- [1] U.H. Hegazy, Nonlinear Vibrations of a Thin Plate under Simultaneous Internal and External Resonances, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 132, pp. 051004-1-051004-9, 2010.
- [2] W. Zhang, J. Yang, Y. Hao, Chaotic vibration of an orthotropic FGM rectangular plate based on third-order shear deformation theory, *Nonlinear Dynamic*, Vol. 59, pp. 619-660, 2010.
- [3] P. Ribeiro, Thermally induced transitions to chaos in plate vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, pp. 314-330, 2007.
- [4] W. Zhang, Z.G. Yao, M.H. Yao, Periodic and chaotic dynamics of composite laminated piezoelectric rectangular plate with one-to-two internal resonance, *Sci. China. Ser. E-Tech. Sci.*, Vol. 52, No. 3, pp. 731-742, 2009.
- [5] W. Zhang, M.H. Zhao, X.Y. Guo, Nonlinear responses of a symmetric cross-ply composite laminated cantilever rectangular plate under in-plane and moment excitations, *Composite Structures*, Vol. 100, pp. 554-565, 2013.
- [6] Y.Q. Tang, L.Q. Chen, Primary resonance in forced vibrations of in-plane translating viscoelastic plates with 3:1 internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 69, pp. 159-172, 2012.

- [34] G.N. Praveen, J.N. Reddy, Nonlinear transient thermo-elastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 33, pp. 4457-4476, 1998.
- [35] A. H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, New York, John Wiley & Sons 1979.
- [36] P. Kim, S. Bae, J. Seok, Resonant behaviors of a nonlinear cantilever beam with tip mass subject to an axial force and electrostatic excitation, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 64, pp. 232-257, 2012.
- [31] R. Rolfes, K. Rohwer, Improved Transverse Shear Stresses in Composite Finite Elements Based on First Order Shear Deformation Theory, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 51-60, 1997.
- [32] L. Ravi Kumar, P.K. Datta, D.L. Prabhakara, Dynamic instability characteristics of laminated composite doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 2243-2264, 2005.
- [33] F. Alijani, M. Amabili, Non-linear dynamic instability of functionally graded plates in thermal environments, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 50, pp. 109-126, 2013.