http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

بهمن ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۱ ص ص ٦٤-٧٦

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۲/۲۰
تاریخ پذیرش ۹۲/٤/۲
ارائه در سایت ۹۲/۹/۳۰

تأثیر حرارت روی خیز، بار کمانش بحرانی و ارتعاشات تیر اویلر- برنولی غیرمحلی بر بستر الاستیک پاسترناک با استفاده از روش ریتز

مهدی محمدی‌مهر[۱*]، محمد سالمی[۲]، حسین نصیری[۲]، حسن افشاری[۳]

۱- استادیار، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان
۳- دانشجوی دکتری، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان
* کاشان، کدپستی ۵۱۱۶۷- ۸۷۳۱۷، mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

چکیده- در این مقاله، تأثیر حرارت، شرایط مرزی مختلف، ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نوع پاسترناک و پارامتر غیر محلی روی خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی نانو تیر اویلر- برنولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات حرکت تیر اویلر- برنولی بر بستر الاستیک پاسترناک تحت تأثیر بار حرارتی با استفاده از روش انرژی بدست می‌آید. روش ریتز برای حل معادلات حاکمه حرکت استفاده می‌شود. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با افزایش ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی پاسترناک مقدار خیز بی‌بعد در تیر کاهش و فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی بی بعد افزایش می‌یابند. درحالی که با افزایش حرارت، مقدار خیز بی بعد در تیر افزایش و فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی بدون بعد کاهش می‌یابند. همچنین با اضافه شدن ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی پاسترناک شکل مودهای پایین‌تر در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی بر بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک حذف شده و جای خود را به مودهای بالاتر می‌دهند.

کلیدواژگان: کمانش، ارتعاشات، خیز تیر اویلر-برنولی غیر محلی، بستر الاستیک پاسترناک، روش ریتز.

Thermal effect on deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method

M. Mohammadimehr[1*], M. Salemi[2], H. Nasiri[2], H. Afshari[3]

1- Assist. Prof., Dep. Solid Mech, Faculty Mech. Eng., Kashan Univ., Kashan, Iran
2- MSc. Student, Dep. Solid Mech, Faculty Mech. Eng., Kashan Univ. Kashan, Kashan, Iran
3- PhD. Student, Dep. Solid Mech, Faculty Mech. Eng., Kashan Univ. Kashan, Kashan, Iran
* P.O.B. 87317-51167 Kashan, Iran. mmohammadimehr@kashanu.ac.ir

Abstract- In this paper, the effects of thermal, various boundary conditions, Winkler-type spring constant, Pasternak-type shear constant, non-local parameter on deflection, critical buckling load and vibration of Euler-Bernoulli nano beam on Pasternak foundation using Ritz method is proposed. Equations of motion Euler-Bernoulli beam on Pasternak elastic foundation under thermal load is achieved by using energy method. Ritz method is used to solve the governing equations of motion. The obtained results indicate that with an increase of Winkler and Pasternak constants, the dimensionless natural frequency and critical buckling load increase, while the dimensionless deflection decreases. However, with increasing the temperature change, the dimensionless natural frequency and critical buckling load decrease, while the dimensionless deflection increases. Moreover, with considering Winkler and Pasternak constants, the lower mode shape are removed and replaced with higher mode shapes.

Keywords: Buckling, Vibration, Deflection of Nonlocal Euler-Bernoulli Beam, Pasternak Foundation, Ritz Method.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.11.3]

۱- مقدمه

علم نانو به سرعت در حال پیشرفت است و این پیشرفت به دلیل علاقه محققان در تحلیل سازه‌های مختلف از قبیل نانو تیر، نانو ورق و نانو پوسته با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک طول می‌باشد. اولین مدل الاستیسیته غیرمحلی توسط ارینگن در سال ۱۹۸۳ ارائه شد [۱]. نظریه ارینگن فرض می‌کند که تنش در یک نقطه به کرنش در سایر نقاط وابسته است. بنابراین معادلات تغییر می‌کنند و در این حالت دیگر نمی‌توان از معادلات کلاسیک (محلی) استفاده کرد. به عبارت دیگر، در حالت غیر محلی رفتار جسم تغییر نموده و دلیل آن نیروهای بین اتمی و اثر مقیاس کوچک[1] طول می‌باشد که به عنوان پارامتر مادی در معادلات متشکله ظاهر می‌شود.

مقالات با معادلات متشکله محلی (بدون در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک طول) به صورت زیر بیان می‌شود:

دانشجو و همکارانش [۲] در مقاله‌ای ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دوار با تقویت‌کننده‌های متعامد تحت بارگذاری محوری یکنواخت و فشار با تئوری الاستیسیته سه بعدی لایه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله معادلات حاکم را از روش انرژی بر اساس اصل هامیلتون[2] بدست آوردند و تأثیر مواردی مانند نیروی محوری روی فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. رفیعی‌پور و همکارانش [۳] در مقاله خود به تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند[3] بر بستر الاستیک غیرخطی[4] تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی[5] پرداخته‌اند. برای این تحلیل از روش گالرکین[6] استفاده کردند. آنها نشان دادند که کمترین نسبت فرکانسی مربوط به تکیه‌گاه گیردار و بیشترین آن مربوط به تکیه‌گاه گیردار- ساده است. همچنین آنها نتیجه گرفتند که افزایش ضریب بستر الاستیک خطی منجر به کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای همه شرایط مرزی می‌شود.

مقالات با معادلات متشکله غیر محلی (با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک طول) به صورت زیر ارائه می‌شود:

سیوالک و دمیر [۴] تحلیل خمش میکرو لوله را با استفاده از مدل تیر الاستیک غیرمحلی بسط دادند. همچنین اثر اندازه را با بکاربردن تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن در نظر گرفتند. ردی [۵] خمش، کمانش و ارتعاشات تیر را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی[7] بررسی کرد. وی جواب‌های تحلیلی برای خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی را بدست آورد. سپس تاثیر اثر مقیاس کوچک طول را روی پارامترهای مذکور بررسی نمود. اِلطاهر و همکارانش [۶] مدلی برای تحلیل ارتعاشات تیر اویلر- برنولی به کمک روش المان محدود[8] ارائه کردند. آنها در مقاله‌شان جابجایی تیر اویلر- برنولی با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن بدست آوردند. نتایج آنها نشان داد که فرکانس طبیعی اصلی با افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن برای تمام شرایط مرزی بجز شرایط مرزی یکسرگیردار- یکسرآزاد کاهش می‌یابد و تاثیر این پارامتر بر روی مودهای بالاتر کمتر می‌باشد. قنادپور و همکارانش [۷] تحلیل تنش، کمانش و ارتعاشات تیر اویلر- برنولی را بررسی کردند. آنها فرمول‌های تحلیلی برای یافتن ماتریس سختی کمانشی و ماتریس جرم را توسعه دادند و سپس با استفاده از روش ریتز[9] و شرایط مرزی دلخواه بار کمانش بحرانی، فرکانس‌های طبیعی و خیز را بدست آوردند.

فادیکار و پارادهان [۸] روابط المان محدود را برای تئوری‌های الاستیسیته تیر اویلر- برنولی و تیموشنکو ارائه دادند. آنها برای نانو لوله‌های کربنی شکل ضعیف شده معادلات حاکم[10] و توابع انرژی[11] را بدست آوردند و با روش المان محدود تحلیل خمش، ارتعاشی و کمانشی تیر غیرمحلی را برای شرایط مرزی گوناگون محاسبه کردند. سپس تحلیل خمش، ارتعاشی و کمانشی را برای تیرهای مخروطی بسط دادند. وانگ و همکارانش [۹] مساله ارتعاشات آزاد مدل‌های میکرو و نانو تیر را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته ارینگن برای تیر تیموشنکو بررسی کردند. معادلات حاکم و شرایط مرزی را با استفاده از اصل هامیلتون استخراج کرده و این معادلات تحلیلی را برای فرکانسهای ارتعاشی تیرها با شرایط مرزی مختلف حل کردند. تای [۱۰] نظریه تغییر شکل برشی تیر

1. Small Scale Effect
2. Hamilton's Principle
3. Functionally Graded Materials
4. Nonlinear Elastic Foundation
5. Homotopy Analysis Method
6. Galerkin Method
7. Nonlocal Elasticity Theory
8. Finite Element Method
9. Ritz Method
10. Weak Forms of the Governing Equations
11. Energy Functionals

غیرمحلی را برای ارتعاشات، کمانش و خمش نانوتیرها و با استفاده از روابط دیفرانسیل غیرمحلی ساختاری ارینگن ارائه داد. وی معادلات حرکت را با استفاده از اصل هامیلتون بدست آورد. سپس راه حل تحلیلی برای محاسبه خمش، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی تیر با شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده را بدست آورد. مشاهده شد که گنجاندن اثر غیرمحلی باعث افزایش خیز و کاهش بار کمانشی و فرکانس طبیعی تیر بخصوص برای مقادیر بزرگ پارامتر غیرمحلی می‌شود.

محمدی‌مهر و همکارانش [۱۱] اثرات مقیاس کوچک را روی بار کمانش پیچشی بحرانی نانو لوله‌های کربنی دو جداره بر بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک[1] را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی بررسی کردند. اثرات محیط الاستیک شامل ثابت فنری نوع وینکلر[2] و ثابت برشی نوع پاسترناک[3] و همچنین نیروی واندروالس[4] بین لایه‌های درونی و بیرونی نانو لولهٔ کربنی دو جداره را در نظر گرفتند. از نتایج بدست آمده مشاهده شد که ثابت برشی پاسترناک، بار کمانشی بحرانی غیرمحلی را افزایش می‌دهد در حالی که اختلاف بین حضور و عدم حضور ثابت برشی پاسترناک زیاد است و همچنین مشاهده شد که بار کمانش بحرانی غیرمحلی کمتر از بار کمانش برشی بحرانی محلی است. محمدی‌مهر و رحمتی [۱۲] ارتعاشات محوری غیرمحلی[5] الکترو ترمو مکانیکی نانو میله نیترید بور تک جداره[6] تحت تحریک الکتریکی را تحلیل نمودند. آنها معادله ساختاری نانو میله تحت بارگذاری‌های الکترو-ترمومکانیکی[7] را با استفاده از اثر مقیاس‌های کوچک بدست آوردند. آنها اثرات مقیاس کوچک، ضریب شکل[8] و شرایط مرزی دو سرگیردار و یکسرگیردار- یکسرآزاد روی فرکانس طبیعی را بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که با افزایش درجه حرارت و ضریب ثابت پیزوالکتریک[9] جابجایی محوری نانو نانو میله تک جداره افزایش یافته، همچنین با افزایش اثر مقیاس کوچک فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

در این مقاله، تأثیر حرارت، بستر الاستیک و اثر مقیاس کوچک روی خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد تیر اویلر- برنولی مورد بررسی قرار می‌گیرد و تغییرات شکل مودهای ارتعاشی و کمانش بحرانی تحت اثر بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک بررسی می‌شود. حل تیر غیرمحلی ارائه شده در این تحقیق برای مهندسانی که در حال طراحی دستگاه‌های‌میکرو و نانو مکانیکی می‌باشند، مفید است.

۲- معادلات حاکم بر تیر اویلر-برنولی در شرایط غیرمحلی

مدل الاستیسیته غیرمحلی توسط ارینگن در سال ۱۹۸۳ ارائه شد [۱]. این مدل بیان می‌کند که تنش وارد شده در یک نقطه در ابعاد میکرو و نانو وابسته به کرنش در تمام نقاط مدل است و به شکل رابطه (۱) نوشته می‌شود.

$$(1-(e_0a)^2\nabla^2)\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (۱)$$

در این معادله C_{ijkl} تانسور مدول الاستیسیته و σ_{ij} و ε_{kl} به ترتیب تانسورهای تنش و کرنش می‌باشند و e_0a ضریب پارامتر غیرمحلی ارینگن (پارامتر اثر مقیاس کوچک طول) است.

برای تیر اویلر- برنولی میدان جابجایی به صورت روابط (۲) و (۳) تعریف می‌شود [۹].

$$u(x,z,t) = -z\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \qquad (۲)$$

$$w(x,z,t) = w(x,t) \qquad (۳)$$

کرنش طولی برحسب جابجایی عرضی به صورت روابط (۴) و (۵) نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = -z\,\frac{d^2w}{\partial x^2} \qquad (۴)$$

$$\varepsilon_{zz}(x,z) = 0 \;,\; \gamma_{xz}(x,z) = 0 \qquad (۵)$$

در رابطه (۳) فرض بر این است که محورهای x و z به ترتیب درجهت طول و ضخامت تیر هستند و z روی تار خنثی اندازه‌گیری می‌شود. در رابطه (۴) نیز w جابجایی عرضی تیر و ε_{xx} کرنش نرمال ایجاد شده در طول تیر است.

۳- اثر محیط الاستیک پاسترناک

اثر نیروی محیط الاستیک پاسترناک به صورت رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود [۱۱]:

1. Winkler - Pasternak Foundations
2. Spring Constant of the Winkler Type
3. Shear Constant of the Pasternak Type
4. Van der Waals Force
5. Nonlocal Axial Vibration Analysis
6. Single-Walled Boron Nitride Nano Rods
7. Electro-Thermo-Mechanical Loadings
8. Aspect Ratio
9. Piezoelectric Coefficient

$$F_{\text{Elastic medium}} = -k_{\text{w}} w + k_{\text{G}} \nabla^2 w \qquad (۶)$$

که در آن k_{w} ثابت فنری نوع وینکلر و k_{G} ثابت برشی نوع پاسترناک می‌باشند.

۴- روش انرژی و معادلات حاکم بر مسأله

انرژی پتانسیل کل مجموع انرژی های پتانسیل U، جنبشی T و کار ناشی از نیروهای خارجی V به صورت رابطه (۷) بیان می‌شود.

$$\Pi = T - (U + V) \qquad (۷)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل حداقل انرژی، رابطه (۷) به صورت روابط (۸) و (۹) بدست می‌آید.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \prod dt = 0 \qquad (۸)$$

$$\delta \prod = \delta T - \delta U - \delta V = 0 \qquad (۹)$$

که با استفاده از اصل حساب تغییرات، انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۰) ارائه می‌شود [۷].

$$\delta U = \int_0^L \int_0^A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) \, dA \, dx \qquad (۱۰)$$

که σ_{xx} و ε_{xx} به‌ترتیب نشان دهنده تنش و کرنش محوری هستند.

کار ناشی از نیروهای خارجی به ترتیب شامل کار ناشی از بار کمانش محوری، بار گسترده عرضی و محیط الاستیک است که در رابطه (۱۱- الف) ارائه شده است.

$$V = -1/2 \int_0^L \left[p_t \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] dx$$

$$V = -1/2 \int_0^L q(x) \, w \, dx$$

$$V = -1/2 \int_0^L F_{\text{Elastic medium}} \, w \, dx \qquad (۱۱\text{- الف})$$

که p_{t} و $q(x)$ به ترتیب نشان دهنده بار کمانش محوری و بار گسترده عرضی می‌باشند.

V کار ناشی از نیروهای خارجی است و برابر سطح زیر منحنی نیرو – جابجایی است که آن با استفاده از اصل جمع آثار در رابطه (۱۱- ب) آورده شده است.

$$V = -1/2 \int_0^L \left[p_t \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + q(x) w + F_{\text{Elastic medium}} \, w \right] dx \qquad (۱۱\text{- ب})$$

با استفاده از حساب تغییرات، کار ناشی از نیروهای خارجی با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۱۱- ب) به صورت رابطه (۱۱- ج) ارائه می‌شود [۱۱،۷].

$$\delta V = -\int_0^L \left[p_{\text{t}} \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} + q(x) \delta w - k_{\text{w}} \delta w + k_G \nabla^2 w \, \delta w \right] dx \qquad (۱۱\text{- ج})$$

انرژی جنبشی از عبارت (۱۲ الف) بدست می‌آید.

$$T = 1/2 \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \qquad (۱۲\text{- الف})$$

با استفاده از حساب تغییرات، انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۲- ب) نوشته می‌شود.

$$\delta T = \int_0^L \rho A \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \, \delta\left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right) dx \qquad (۱۲\text{- ب})$$

پس از بکارگیری حساب تغییرات، رابطه (۱۲- ب) به صورت رابطه (۱۲- ج) بیان می‌شود.

$$\delta T = -\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \, \delta W(x,t) dx \qquad (۱۲\text{- ج})$$

با استفاده از جداسازی متغیرها، عبارت خیز $W(x,t)$ به صورت عبارت (۱۲- د) در نظر گرفته می‌شود.

$$W(x,t) = w(x) \times e^{i\omega t} \qquad (۱۲\text{- د})$$

با جایگذاری رابطه (۱۲ د) در رابطه (۱۲ ج)، انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۲- ه) ارائه می‌شود [۷].

$$\delta T = \int_0^L \rho A \, \omega^2 w(x) \delta w(x) \, dx \qquad (۱۲\text{- ه})$$

L و A به ترتیب طول و سطح مقطع، ω و ρ به ترتیب فرکانس طبیعی و چگالی تیر هستند.

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۱۰) تغییرات انرژی کرنشی به صورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود.

$$\delta U = \int_0^L \int_A \left(\sigma_{xx} \delta\left(-z \frac{d^2 w}{\partial x^2}\right)\right) dA \, dx \qquad (۱۳)$$

نیروی محوری و گشتاور خمشی منتجه برحسب تنش به صورت روابط (۱۴) و (۱۵) تعریف می‌شوند [۷،۵].

$$N_x = \int_A \sigma_{xx} dA \qquad (۱۴)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \qquad (۱۵)$$

رابطه (۱۶) با جایگذاری رابطه (۱۵) در رابطه (۱۳) بدست می‌آید.

$$\delta U = \int_0^L \left(-M_x \frac{d^2 \delta w}{\partial x^2}\right) dx \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری روابط (۱۱- ج)، (۱۲- ه) و (۱۶) در رابطه

(۹)، تغییرات انرژی پتانسیل کل با استفاده از اصل هامیلتون بدست می‌آید.

$$\delta\prod=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L[\rho A\omega^2 w\,\delta w+(M_x\frac{d^2\delta w}{dx^2})+p_t\frac{dw}{\partial x}\frac{d\delta w}{\partial x}+q(x)\delta w-k_w w\,\delta w+k_G\nabla^2 w\,\delta w]dxdt=0 \quad (۱۷)$$

که با استفاده از روش انرژی رابطه (۱۷) به صورت رابطه (۱۸) ساده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\Big[\rho A\omega^2 w\,\delta w+(\frac{d^2M_x}{dx^2}\delta w)-p_t\frac{d^2w}{dx^2}\delta w+q(x)\delta w-k_w w\,\delta w+k_G\nabla^2 w\,\delta w\Big]dxdt=0 \quad (۱۸)$$

معادله تعادل با استفاده از رابطه (۱۸) به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}=-\rho A\omega^2 w+p_t\frac{d^2w}{dx^2}-q(x)+k_w w-k_G\nabla^2 w \quad (۱۹)$$

p_t در رابطه (۱۹) شامل نیروی محوری (بار کمانش بحرانی) و نیروی ناشی از حرارت است. نیروی ناشی از حرارت زمانی وجود دارد که تیر سر آزاد ندارد و در نتیجه امکان افزایش طول پیدا نمی‌کند، به همین دلیل در جهت محور تیر نیرو ایجاد می‌شود. این نیرو بر اساس رابطه (۲۰) قابل محاسبه است.

$$p_t=N_x+p_{thermal} \quad (۲۰)$$

که N_x بار کمانش بحرانی محوری و $p_{thermal}$ نیروی ناشی از حرارت هستند.

$$p_{thermal}=\alpha' TEA \quad (۲۱)$$

در رابطه (۲۱) α' ضریب انبساط طولی تیر، T تغییرات دما و E مدول الاستیسیته تیر است.

مساله را با شرایط مرزی مختلف می‌توان حل کرد. در ابتدا شرایط مرزی به صورت یک سر گیردار- یک سر مفصل در نظر گرفته می‌شود که به صورت روابط (۲۲) و (۲۳) بیان می‌شود.

$$w\big|_{x=0}=0\ ,\quad \frac{dw}{dx}\big|_{x=0}=0 \quad (۲۲)$$

$$M\big|_{x=L}=0\ ,\quad v\big|_{x=L}=(p\frac{dw}{dx}-\frac{dM}{dx})\big|_{x=L}=0 \quad (۲۳)$$

برای تیر اویلر- برنولی رابطه (۱) به صورت رابطه (۲۴) ساده می‌شود.

$$\sigma_{xx}-(e_0a)^2\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2}=E\,\varepsilon_{xx} \quad (۲۴)$$

با جایگذاری معادله (۴) در معادله (۲۴) رابطه (۲۵) بدست می‌آید.

$$\sigma_{xx}-(e_0a)^2\frac{d^2\sigma_{xx}}{dx^2}=-Ez\frac{d^2w}{dx^2} \quad (۲۵)$$

گشتاور دوم سطح به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$I_{xx}=\int z^2dA \quad (۲۶)$$

با به کارگیری روابط (۱۵)، (۲۵) و (۲۶) رابطه (۲۷) بیان می‌شود:

$$M_x-(e_0a)^2\frac{d^2M_x}{dx^2}=-EI_{xx}\frac{d^2w}{dx^2} \quad (۲۷)$$

رابطه (۲۸) با جایگذاری رابطه (۲۷) در رابطه (۱۹) بدست می‌آید:

$$M_x+EI_{xx}\frac{d^2w}{dx^2}+(e_0a)^2(\rho A\omega^2 w-p_t\frac{d^2w}{dx^2}+q(x)-k_w w+k_G\nabla^2 w)=0 \quad (۲۸)$$

معادله حاکمه حرکت نانو تیر اویلر- برنولی بر بستر الاستیک تحت بارگذاری حرارتی با جایگذاری رابطه (۲۸) در رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۹) ساده می‌شود.

$$EI_{xx}\frac{d^4w}{dx^4}+p_t\frac{d^2w}{dx^2}\left(1-(e_0\alpha)^2\frac{d^2}{dx^2}\right)-k_G\frac{d^2w}{dx^2}\left(1-(e_0\alpha)^2\frac{d^2}{dx^2}\right)+k_W w\left(1-(e_0\alpha)^2\frac{d^2}{dx^2}\right)-\rho A\omega^2 w\left(1-(e_0\alpha)^2\frac{d^2}{dx^2}\right)-q(x)\left(1-(e_0\alpha)^2\frac{d^2}{dx^2}\right)=0 \quad (۲۹)$$

۵- بی‌بعدسازی معادله حاکم حرکت

پارامترهای بی‌بعد هندسی و مکانیکی به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شوند.

$$\bar{x}=\frac{x}{L}\ ,\quad k=\frac{p_tL^2}{EI_{xx}}\ ,\quad \bar{q}=\frac{q(x)L^3}{EI_{xx}}$$
$$\bar{k}_G=\frac{k_GL^2}{EI_{xx}}\ ,\quad \bar{k}_w=\frac{k_wL^4}{EI_{xx}}\ ,\quad \gamma=\frac{\alpha' TAL^2}{I_{xx}}$$
$$\bar{w}=\frac{w}{L}\ ,\quad \alpha=\frac{e_0a}{L}\ ,\quad \lambda=\omega\sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI_{xx}}} \quad (۳۰)$$

با جایگذاری رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) معادله حاکمه حرکت تیر اویلر- برنولی بدون بعد تحت بارگذاری حرارتی و بر بستر الاستیک پاسترناک به صورت رابطه (۳۱) نوشته می‌شود:

$$R(x)=\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4}+k\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)+\bar{k}_{\mathrm{w}}\bar{w}\times\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\bar{k}_{\mathrm{G}}\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)+\gamma\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\lambda^2\bar{w}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\bar{q}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)=0 \qquad (۳۱)$$

که $R(x)$ تابع باقی‌مانده است.

۶- شکل ضعیف شده معادله حاکم

در روش گالرکین، تابع باقیمانده در تابع وزنی ضرب شده و از حاصل آن انتگرال گیری می‌شود که به صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شود [۱۳].

$$\int_0^1 R(x)\psi(x)dx=0 \qquad (۳۲)$$

که $\psi(x)$ تابع باقیمانده وزنی است.

با جایگذاری رابطه (۳۱) در رابطه (۳۲)، رابطه (۳۳) حاصل می‌شود [۱۳].

$$\int_0^1\psi\left[\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4}+k\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)+\bar{k}_w\bar{w}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\bar{k}_G\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)+\gamma\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\lambda^2\bar{w}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)-\bar{q}\left(1-\alpha^2\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\right)\right]d\bar{x}=0 \qquad (۳۳)$$

شکل ضعیف شده معادله دیفرانسیل، یک عبارت انتگرال- وزنی است که معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی را ارضا می‌کند. برای حل رابطه (۳۳)، با دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء و به کارگیری شرایط مرزی رابطه (۳۴) بدست می‌آید.

که رابطه (۳۴)، شکل ضعیف شده معادله دیفرانسیل رابطه (۳۱) را نشان می‌دهد.

$$\Pi=\int_0^1[(1-\alpha^2(k+\gamma-\bar{k}_{\mathrm{G}})\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\frac{d^2\psi}{d\bar{x}^2}-(k+\gamma)\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}\frac{d\psi}{d\bar{x}}+(\alpha^2(\lambda^2-\bar{k}_{\mathrm{w}})-\bar{k}_{\mathrm{G}})\bar{w}\frac{d^2\psi}{d\bar{x}^2}-(\lambda^2-\bar{k}_{\mathrm{w}})\bar{w}\psi+\alpha^2\bar{q}\frac{d^2\psi}{d\bar{x}^2}-\bar{q}\psi]\,dx=0 \qquad (۳۴)$$

در رابطه (۳۴) اگر $\alpha=0$ قرار داده شود، معادله تیر اویلر- برنولی در حالت محلی بدون در نظر گرفتن پارامتر ثابت (غیرمحلی) ارینگن بدست می‌آید. همچنین می‌توان با صفر قرار دادن هر کدام از پارامترها شامل $\bar{q}$، $\bar{k}_{\mathrm{w}}$، $\bar{k}_{\mathrm{G}}$، λ، γ و k به ترتیب بارگسترده، ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نوع پاسترناک، فرکانس طبیعی، تأثیر دمای محیط و نیروی محوری را حذف کرد سپس تأثیر تک تک پارامترها را بررسی کرد.

۷- حل با روش ریتز

برای حل رابطه (۳۴) به روش ریتز، باید معادله تغییر مکان عرضی را حدس زد به طوری که شرایط مرزی را ارضا کند. لازم به ذکر است برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده رابطه خیز به صورت سینوسی در نظر گرفته می‌شود. ولی در این مقاله برای اینکه خیز تیر بطور همزمان شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد را ارضا کند، نمی‌توان تغییر مکان را به صورت سینوسی در نظر گرفت چون شرایط مرزی گیردار و آزاد را ارضا نمی کند. لذا تغییر مکان عرضی تیر اویلر- برنولی بصورت حاصل‌ضرب سری‌های چندجمله‌ای چبیشف در تابع مرزی $f(\bar{x})$ به صورت رابطه (۳۵) نوشته می‌شود [۷].

$$w(\bar{x})=\underbrace{\prod_{m=1}^{n_s}(\bar{x}_m-\bar{x})^{n_m}}_{f(\bar{x})}\sum_{j=1}^{n_t}a_jP_{j-1}(\bar{x}) \qquad (۳۵)$$

در این رابطه a_j ماتریسی است که در هر کدام از حالت‌های کمانش و ارتعاشات تیر نقش بردار ویژه را دارد، n_s تعداد تکیه‌گاه‌ها در طول تیر، n_t تعداد جملات سری، $\bar{x}_m$ فاصله بدون بعد تکیه‌گاه m ام از ابتدای تیر می‌باشد n_m به نوع تکیه‌گاه وابسته است که این مقدار (n_m) برای تکیه‌گاه ساده برابر ۱ و برای تکیه‌گاه سرگیردار برابر ۲ است. لازم به ذکر است استفاده از سری چند جمله‌ای چبیشف دارای دو مزیت می‌باشد: یکی این که $P_{j-1}(\bar{x})$ مجموعه‌ای از سری‌های کامل

و متعامد است که سرعت هم‌گرایی آن در مقایسه با دیگر سری‌ها بیشتر است. مزیت بعدی سری چبیشف این است که بصورت ساده بیان شده و سه شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد را ارضا می‌کند که این امر، اولاً حجم محاسبات را کاهش داده و ثانیاً حالت کلی داشته و نیازی به حدس تابع برای هر شرط مرزی به صورت مجزا نیست. P_j نیز یک سری چند جمله‌ای است که به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) تعریف می‌شود [۷].

$$\begin{cases} P_0(\bar{x}) = 1 \\ P_1(\bar{x}) = \bar{x} \end{cases} \tag{۳۶}$$

$$P_{j+1}(\bar{x}) = 2\bar{x}P_j(\bar{x}) - P_{j-1}(\bar{x}) \quad j = 1,2,3,... \tag{۳۷}$$

رابطه (۳۷) رابطه‌ای بازگشتی بر حسب $\bar{x}$ بوده که برای جملات بالاتر برحسب جملات قبلی محاسبه می‌شود.

تابع مجهول ψ نیز به صورت رابطه (۳۸) بیان می‌شود [۷].

$$\psi(\bar{x}) = \prod_{m=1}^{n_s} (\bar{x}_m - \bar{x})^{n_m} \sum_{j=1}^{n_t} a_i P_{i-1}(\bar{x}) \tag{۳۸}$$

روش ریتز که به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \tag{۳۹}$$

با جایگذاری روابط (۳۵) و (۳۸) در رابطه (۳۴) و با استفاده از در روش ریتز مشتقات Π نسبت به ضرایب مجهول بدست می‌آید.

ماتریس‌های سختی، میرایی و جرم به صورت رابطه (۴۰) محاسبه می‌شوند.

$$\sum_{j=1}^{n_t} (K_{ij} - \beta B_{ij} - \lambda^2 M_{ij})\, a_j - Q_i = 0 \tag{۴۰}$$

که K_{ij}، B_{ij} و M_{ij} به ترتیب ماتریس سختی، ماتریس سختی کمانشی و ماتریس جرم می‌باشند و Q_i بار عرضی وارد بر تیر است.

برای ساده‌تر شدن عبارات (۴۱) و (۴۲) تعریف می‌شوند.

$$\bar{k} = \frac{\bar{p}L^2}{EI} \tag{۴۱}$$

$$\beta = \frac{k}{\bar{k}} \tag{۴۲}$$

فرم ماتریسی رابطه (۴۲) نیز به شکل رابطه (۴۳) ارائه می‌شود:

$$([K] - \beta[B] - \lambda^2[M])\{a\} = \{Q\} \tag{۴۳}$$

که ماتریس‌های سختی، میرایی و جرم و بار عرضی وارد بر تیر به صورت رابطه (۴۴) نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} K_{ij} = \int_0^1 \Bigg\{ & \left(1 - \alpha^2(\bar{k}_G + \gamma)\right)\left(\left(\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}\right)^2 P_{i-1}P_{j-1} + 2 \right. \\ & \times \frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}\left(\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}P_{j-1} + P_{i-1}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\right) + f\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} \\ & \times \left(\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}P_{j-1} + P_{i-1}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\right) + 4\left(\frac{df}{d\bar{x}}\right)^2 \frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} \\ & \times \frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}} + 2f\frac{df}{d\bar{x}}\left(\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}} + \frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\right) \\ & \left. + f^2\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\right) - (\alpha^2\bar{k}_w + \bar{k}_G)\left(f\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}P_{i-1} \right. \\ & \left. + 2f\frac{df}{d\bar{x}}\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} + f^2\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\right)P_{j-1} + \bar{k}_w\left(f^2 P_{i-1}P_{j-1}\right) \\ & + \gamma\left(\left(\frac{df}{d\bar{x}}\right)^2 P_{i-1}P_{j-1} + f\frac{df}{d\bar{x}}\left(\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}P_{j-1} + P_{i-1} \right.\right. \\ & \left.\left. \times \frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\right) + f^2\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\right)\Bigg\} d\bar{x} \end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned} M_{ij} = \int_0^1 \Bigg[& \left(f^2 P_{i-1}P_{j-1}\right) - \alpha^2\left(f\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}P_{i-1} \right. \\ & \left. + 2f\frac{df}{d\bar{x}}\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} + f^2\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\right)P_{j-1}\Bigg] d\bar{x} \end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned} Q_i = \int_0^1 \bar{q}\Bigg[& \left(f\, P_{i-1}\right) - \alpha^2\left(\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}P_{i-1} \right. \\ & \left. + 2\frac{df}{d\bar{x}}\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} + f\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\right)\Bigg] d\bar{x} \end{aligned} \tag{۴۶}$$

$$\begin{aligned} B_{ij} = \int_0^1 \bar{k}\Bigg(& \left(\left(\frac{df}{d\bar{x}}\right)^2 P_{i-1}P_{j-1} + f\frac{df}{d\bar{x}}\left(\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} \right.\right. \\ & \left.\left. \times P_{j-1} + P_{i-1}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\right) + f^2\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\right) + \alpha^2 \\ & \times \left(\left(\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}\right)^2 P_{i-1}P_{j-1} + 2\frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}\left(\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}} \right.\right. \end{aligned}$$

$$\times P_{j-1} + P_{i-1}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}}\Bigg) + f\,\frac{d^2 f}{d\bar{x}^2}\Bigg(\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}P_{j-1} + P_{i-1}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\Bigg) + 4\left(\frac{df}{d\bar{x}}\right)^2\frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}} + 2f \times \frac{df}{d\bar{x}}\left(\frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\frac{dP_{j-1}}{d\bar{x}} + \frac{dP_{i-1}}{d\bar{x}}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\right)f^2 \times \frac{d^2 P_{i-1}}{d\bar{x}^2}\frac{d^2 P_{j-1}}{d\bar{x}^2}\Bigg)d\bar{x} \qquad (۴۷)$$

۸- بحث روی نتایج

برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، ابتدا می‌بایست تعداد عبارت‌های لازم برای تغییر مکان عرضی و تابع مجهول جهت همگرایی پارامترهای خیز ماکزیمم، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد بررسی شود، که مشخص شد با $n_t = ۸$ جواب‌ها همگرا شده و در حل مسأله از این عدد استفاده می‌شود. نتایج خیز ماکزیمم، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد برای تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار-تکیه گاه ساده در جدول ۱ مشاهده می‌شود. در این جدول، برای مقایسه کار حاضر با نتایج بدست آمده توسط قناد پور و همکاران [۷] باید اثرات بستر الاستیک و حرارت برابر صفر قرار داده شده و مقادیر بدون بعد به صورت روابط (۴۸) در نظر گرفته شده‌اند.

$$\alpha = 0.5,\ \bar{k} = \bar{q} = 1,\ \bar{k}_{\mathrm{w}} = 0,\ \bar{k}_{\mathrm{G}} = 0,\ \gamma = 0 \qquad (۴۸)$$

نتایج فرکانس طبیعی، بار کمانش بحرانی و خیز ماکزیمم بدون بعد کار حاضر با نتایج بدست آمده توسط مراجع [۱۴،۹،۷-۱۶] در جداول ۲، ۳ و ۴ به ترتیب مقایسه شده است.

جدول ۱ مقادیر بدون بُعد خیز ماکزیمم، بارکمانش بحرانی و فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی یک سرگیردار- یک سر لولا

n_t	$\bar{w}_{\max}$		k		λ	
	[۷]	نتایج جدید	[۷]	نتایج جدید	[۷]	نتایج جدید
۲	۰/۰۱۴۵	۰/۰۱۴۵	۳/۳۵۷۹	۳/۳۵۷۹	۷/۸۷۵۲۹	۷/۸۷۵۲۹
۴	۰/۰۱۴۵	۰/۰۱۴۵	۳/۳۳۸۶	۳/۳۳۸۶	۷/۷۸۴۰۶	۷/۷۸۴۰۶
۶			۳/۳۳۸۵	۳/۳۳۸۵	۷/۸۷۵۲۹	۷/۸۷۵۲۹
۸			۳/۳۳۸۵	۳/۳۳۸۵	۷/۸۷۵۲۹	۷/۸۷۵۲۹

جدول ۲ مقدار بدون بعد فرکانس طبیعی (λ) برای تیر غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف و ضریب تأثیر مختلف

α	شرایط مرزی	مرجع [۱۴]	مرجع [۹]	نتایج جدید
۰	دو سر ساده	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۷	۹/۸۶۹۶
	گیردار- ساده	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲
	دو سر گیردار	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳
۰/۵	دو سر ساده	-	۵/۳۰۰۱	۵/۳۰۰۳
	گیردار- ساده	-	۷/۷۸۳۵	۷/۷۸۳۷
	دو سر گیردار	-	۱۰/۹۹۱۲	۱۰/۹۹۱۴

جدول۳ مقدار بدون بعد بار کمانش بحرانی (k) برای تیر غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف و ضریب تأثیر مختلف

α	شرایط مرزی	مرجع [۷]	مرجع [۱۴]	مرجع [۱۵]	نتایج جدید
۰	دو سر ساده	-	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۵	۹/۸۶۹۶
	گیردار- ساده	-	۲۰/۱۹۰۷	۲۰/۱۹۹۷	۲۰/۱۹۰۷
	دو سر گیردار	-	۳۹/۴۷۸۴	۳۹/۴۷۸۶	۳۹/۴۷۸۴
۰/۲	دو سر ساده	۷/۰۷۶	-	-	۷/۰۷۶
	گیردار- ساده	۱۱/۱۶۹۷	-	-	۱۱/۱۶۹۷
	دو سر گیردار	۱۵/۳۰۶۸	-	-	۱۵/۳۰۶۸

جدول ۴ مقدار بدون بعد خیز ماکزیمم ($\bar{w}_{\max}$) برای تیر غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف و ضریب تأثیر مختلف

α	شرایط مرزی	مرجع [۱۴]	مرجع [۱۶]	نتایج جدید
۰	دو سر ساده	۰/۰۱۳۰	۰/۰۱۳۰	۰/۰۱۳۰
	گیردار- ساده	۰/۰۰۶۸	-	۰/۰۰۵۴
	دو سر گیردار	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۶

شاید به نظر رسد که بهتر است نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج بدست آمده از نرم‌افزارهایی مانند انسیس و آباکوس مقایسه شود. نکات ذیل در مورد مقایسه نتایج نرم‌افزار با تئوری ارائه شده حائز اهمیت است:

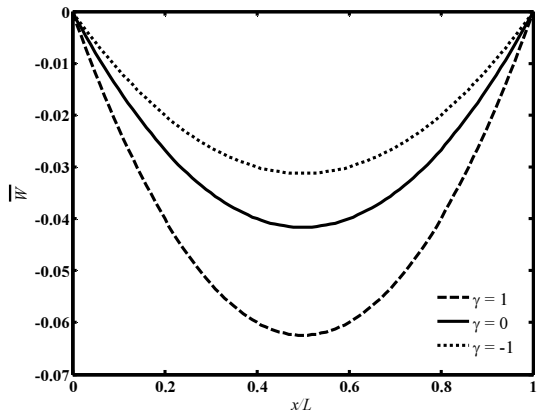
نخست این که مدل‌سازی مواد در ابعاد نانو و تعریف خواص آنها در این حالت (از جمله اثر مقیاس کوچک طول که در تئوری ارینگن معرفی شده‌است) هنوز در نرم‌افزارهای المان محدود امکان‌پذیر نبوده و تنها می‌توان مدل‌سازی المان محدود را برای حالتی که از تئوری محلی (بدون در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک طول) استفاده شود، بررسی کرد.

دوم این که اعتبارسنجی نتایج مقاله در حالت محلی با استفاده

از این نرم‌افزارها به دو دلیل معقول به نظر نمی‌رسد:
اولاً این که مقاله ارائه شده برای مواد نانو می‌باشد و ثانیاً این که در حالت محلی تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات تیرها به صورت دقیق قابل بررسی بوده و نتایج نیز در کتب معتبر مهندسی ارائه شده‌اند و در نتیجه نیازی به استفاده از نرم‌افزار برای تحلیل این مسأله نمی‌باشد.

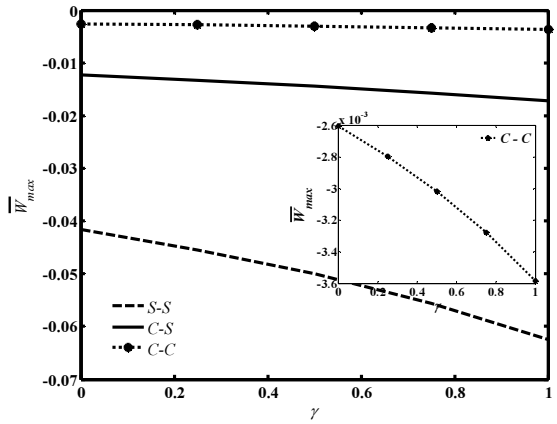
شکل ۱ تأثیر حرارت روی خیز تیر اویلر- برنولی غیرمحلی بر بستر الاستیک پاسترناک تحت شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهند. همان طور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش دما خیز تیر افزایش می‌یابد. در این شکل می‌توان مشاهده کرد که شرایط مرزی به خوبی ارضا می‌شوند.

شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب تأثیر حرارت روی خیز ماکزیمم بی-بعد، بار کمانش بحرانی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد را نشان می‌دهند. در این شکل‌ها با افزایش حرارت خیز ماکزیمم افزایش و بار کمانش بحرانی کاهش می‌یابند. در واقع می‌توان تیر را بصورت یک جرم و فنر در نظر گرفت که با افزایش دما سختی فنری آن کم شده و به همین دلیل خیز زیاد می‌شود. همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود خیز ماکزیمم بی بعد برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بیشتر از دو حالت دیگر است. درحالی که بار کمانش بحرانی برای شرایط مرزی دو سر گیردار بیشتر از دو حالت دیگر می‌باشد.

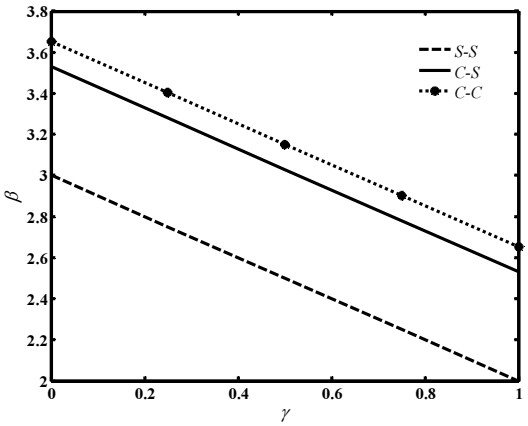


شکل ۱ تأثیر حرارت روی خیز بی‌بعد تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده (S-S)

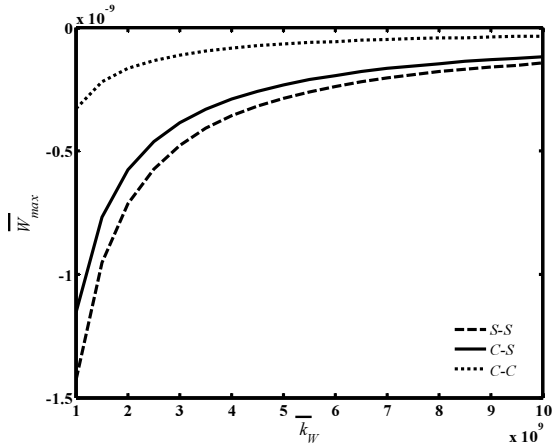
همان طور که در شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود، این شکل‌ها به ترتیب اثرات افزایش مقدار ثابت فنری وینکلر را بر روی مقدار ماکزیمم خیز و فرکانس طبیعی تیر اویلر- برنولی غیرمحلی تحت شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهند.



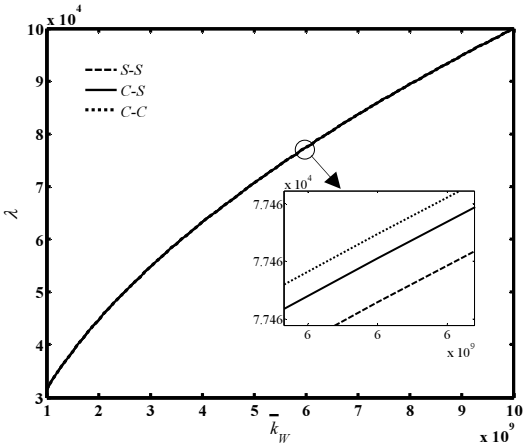
شکل ۲ تأثیر حرارت روی خیز ماکزیمم بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی برای شرایط مرزی مختلف



شکل ۳ تأثیر حرارت روی بار کمانش بحرانی بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف



شکل ۴ تأثیر ثابت فنری نوع وینکلر روی خیز ماکزیمم بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف



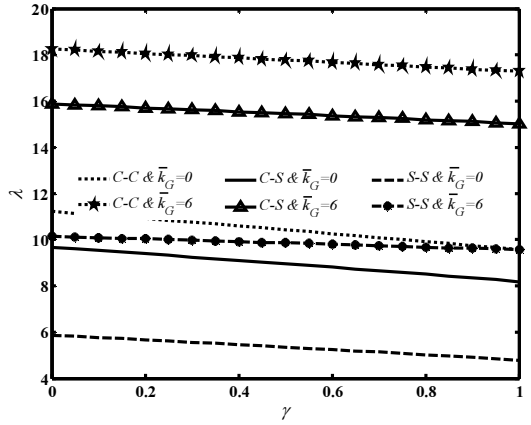
شکل ۵ تأثیر ثابت فنری نوع وینکلر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با شرایط مرزی مختلف

در این شکل‌ها مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت فنری وینکلر، خیز ماکزیمم تیر به صورت غیرخطی کاهش یافته، درحالی که فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه در این نمودار اختلاف بسیار کم فرکانس‌های تیر با شرایط مرزی مختلف است. به عبارت دیگر با اعمال مقدار $\bar{k}_w$ میزان تأثیر شرایط مرزی بر روی فرکانس بسیار ناچیز می‌شود.

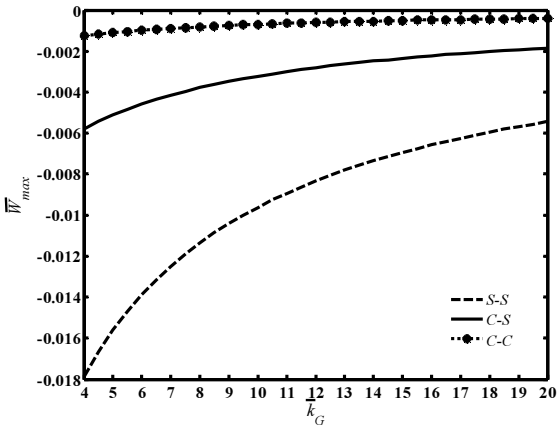
شکل ۶ تأثیر حرارت و ثابت برشی نوع پاسترناک روی فرکانس طبیعی بی‌بعد را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش حرارت فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش ثابت برشی نوع پاسترناک، فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد. فرکانس طبیعی بدون بعد برای شرایط مرزی دو سر گیردار بیشتر از دو حالت دیگر می‌باشد. از مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان دریافت که تاثیر ثابت برشی نوع پاسترناک نسبت به ثابت فنری نوع وینکلر برای فرکانس طبیعی بدون بعد روی شرایط مرزی مختلف بیشتر است.

در شکل ۷ اثر افزایش مقدار ثابت برشی نوع پاسترناک روی مقدار خیز ماکزیمم تیر اویلر- برنولی غیرمحلی تحت شرایط مرزی مختلف بررسی می‌شود. در این شکل مشاهده می‌شود که خیز ماکزیمم تیر با افزایش ثابت برشی نوع پاسترناک به صورت غیرخطی کاهش می‌یابد.

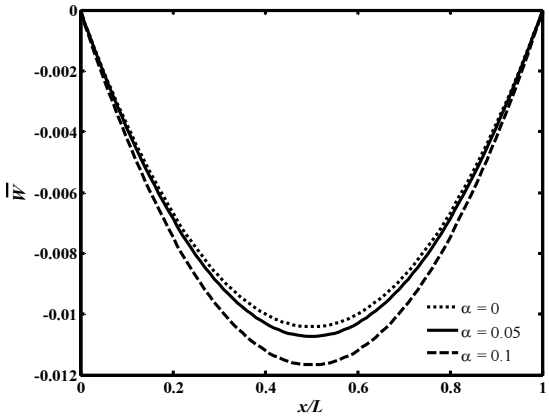
شکل ۸ تأثیر پارامتر غیرمحلی ارینگن روی خیز تیر اویلر- برنولی بر بستر الاستیک پاسترناک تحت شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش این پارامتر خیز تیر افزایش می‌یابد.



شکل ۶ تأثیر حرارت و ثابت برشی نوع پاسترناک روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی برای شرایط مرزی مختلف



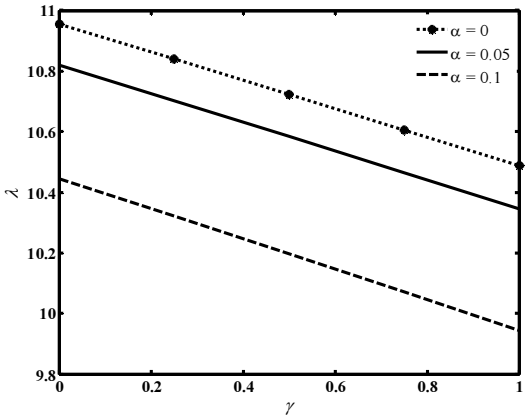
شکل ۷ تأثیر ثابت برشی نوع پاسترناک روی خیز ماکزیمم بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی برای شرایط مرزی مختلف



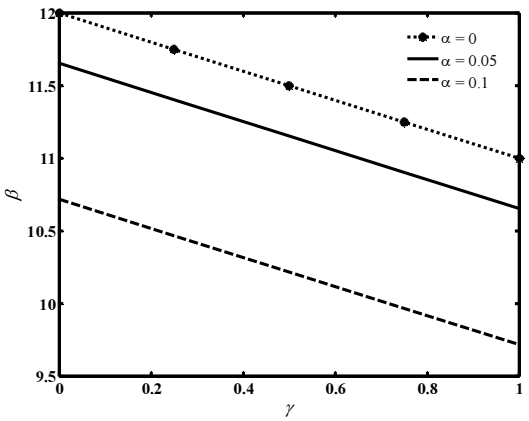
شکل ۸ تأثیر پارامتر غیرمحلی ارینگن روی خیز بی‌بعد تیر اویلر- برنولی با شرایط مرزی دو طرف تکیه‌گاه ساده (S-S)

شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب تأثیر حرارت روی بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بی‌بعد را به ازای پارامتر غیرمحلی ارینگن مختلف نشان می‌دهند. در این شکل‌ها مشاهده می‌شود بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی با افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن کاهش می‌یابند.

نمودار ۱۱ شکل مود کمانشی اول تیر اویلر برنولی را نمایش می‌دهد. در این نمودار تأثیر بستر الاستیک برای دو حالت مختلف بررسی شده است. نمودار نشان می‌دهد زمانی که $\bar{k}_{\mathrm{w}}$ و $\bar{k}_{\mathrm{G}}$ مخالف صفر هستند شکل مود اول کمانش در این حالت مانند شکل مود دوم برای تیر بدون بستر پاسترناک می‌شود.



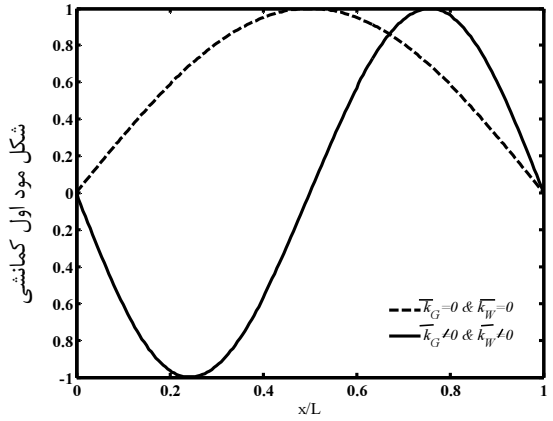
شکل ۹ تأثیر حرارت روی فرکانس طبیعی بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی برای ضرایب غیرمحلی مختلف



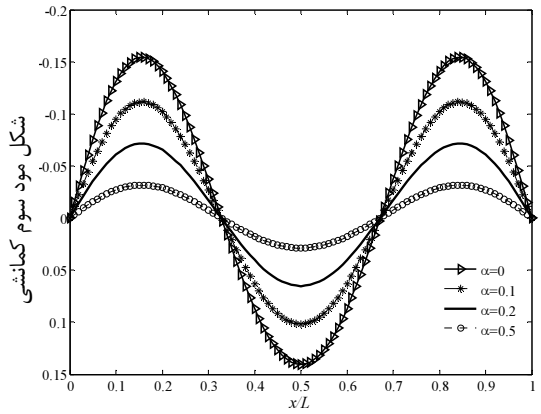
شکل ۱۰ تأثیر حرارت روی بار کمانش بحرانی بی‌بعد در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی با ضرایب غیرمحلی مختلف

شکل مود سوم کمانشی تیر اویلر- برنولی غیرمحلی در نمودار ۱۲ نشان داده شده است. در این شکل مود مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن دامنه شکل مود کمانشی کاهش می‌یابد.

در نمودار ۱۳ شکل مود سوم ارتعاشی تیر اویلر- برنولی غیرمحلی نشان داده شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود دامنه شکل مود ارتعاشی با افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن کاهش می‌یابد.



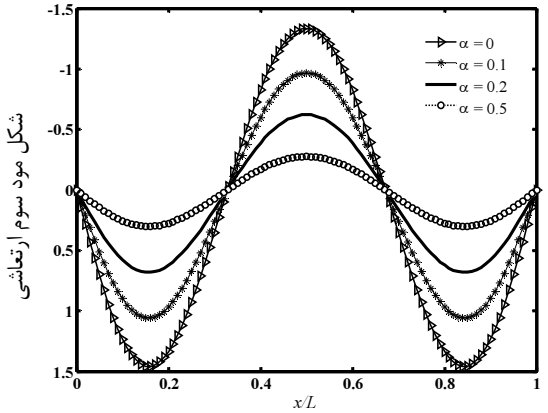
شکل ۱۱ تأثیر بستر الاستیک روی شکل مود اول کمانش تیر اویلر- برنولی برای شرایط مرزی S-S



شکل ۱۲ تأثیر ضریب غیر محلی ارینگن روی شکل مود سوم کمانش تیر اویلر- برنولی برای شرایط مرزی S-S

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله، خیز، بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی بدون بعد تیر اویلر- برنولی غیرمحلی بر بستر الاستیک وینکلر- پاسترناک تحت تأثیر حرارت مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حرکت تیر اویلر- برنولی بر بستر الاستیک پاسترناک تحت تأثیر بار حرارتی با استفاده از روش انرژی بدست آمد.



شکل۱۳ تأثیر ضریب غیر محلی ارینگن روی شکل مود سوم ارتعاشی تیر اویلر- برنولی برای شرایط مرزی S-S

نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان بصورت زیر جمع بندی کرد:

۱- پارامترهای بدون بعد ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نوع پاسترناک و بار حرارتی در تیر اویلر- برنولی بر بستر الاستیک پاسترناک غیرمحلی باعث تغییر در سختی فنری تیر می‌شوند. با افزایش ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نوع پاسترناک مقدار فرکانس طبیعی افزایش و خیز تیر کاهش می‌یابد.

۲- نتایج نشان داد که با افزایش بار حرارتی مقدار فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی کاهش و خیز تیر افزایش پیدا می‌کند.

۳- ثابت برشی نوع پاسترناک نسبت به ثابت فنری نوع وینکلر روی فرکانس طبیعی تیر تأثیر بیشتری دارد.

۴- با افزایش $\bar{k}_{\mathrm{w}}$ و $\bar{k}_{\mathrm{G}}$ شکل مودهای کمانشی مودهای پایین‌تر حذف شده و جای خود را به مودهای بالاتر می‌دهند.

۵- افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن دامنه شکل مودهای کمانشی و ارتعاشی را کاهش می‌دهد.

۶- نتایج نشان داد که بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی با افزایش پارامتر غیرمحلی ارینگن در تیر اویلر- برنولی غیرمحلی بر بستر الاستیک پاسترناک کاهش می‌یابد.

۱۰- تشکر و قدردانی

نویسندگان از ستاد ویژه توسعه فناوری نانو و معاونت پژوهشی دانشگاه کاشان طی قراردادی به شماره ۲۵۵۹۴۱/۱ به خاطر حمایت مالی تشکر و قدردانی می‌نمایند.

۱۱- مراجع

[1] Eringen A.C., "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *Journal of Applied Physics,* Vol. 54, 1983, pp. 4703-4710.

[2] Daneshjou K., Madoliat R., Talebitooti M., "Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure", *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 12, No. 6, 1391, pp. 80-94. (In Persian)

[3] Rafieipour H., Lotfavar A., Hamzeh Shalamzari S., "Nonlinear Vibration Analysis of Functionally Graded Beam on Winkler-Pasternak Foundation under Mechanical and Thermal Loading Via Homotopy Analysis Method", *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 12, No. 5, 1391, pp. 87-101. (In Persian)

[4] Civalek O., Demir C., "Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory", *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 35, 2011, pp. 2053-2067.

[5] Reddy J.N., "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, 2007, pp. 288-307.

[6] Eltaher M.A., Amal E., Alshorbagy F.F., "Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by usingfinite element Method", *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 37, 2013, pp. 4787-4799.

[7] Ghannadpour S.A.M., Mohammadi B., Fazilati J., "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method", *Composite Structures*,Vol. 96, 2013, pp. 584-589.

[8] Phadikar J.K., Pradhan S.C., "Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates", *Computational Materials Science*, Vol. 49, 2010, pp. 492-499.

[9] Wang CM., Zhang Y.Y., He X.Q., "Vibration of nonlocal Timoshenko beams", *Nanotechnology,* Vol. 18, 2007, pp. 9-18.

[10] Thai H.T., "A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52, 2012, pp. 56-64.

[11] Mohamadimehr M., saidi A.R., Ghorbanpour Arani A., Arefmanesh A., Han Q., "Torsional buckling of a DWCNT embedded on winkler and Pasternak foundations using nonlocal theory", *Journal of Mechanical Science and Technology,* Vol. 24, No. 6, 2010 , pp. 1289-1299.

[12] Mohamadimehr M., Rahmati A.H., "Small scale effect on electro-thermo-mechanical vibration analysis of single-walled boron nitride nanorods

under electric", *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences*, Vol. 37, 2013, pp. 1-15.

[13] Rao S.S., *The Finite Element Method in Engineering*, Fifth Ed., India, Elsevier, 2011, pp. 189-191.

[14] Pradhan S.C., Phadikar J.K., "Bending, buckling and vibration analyses of nonhomogeneous nanotubes using GDQ and nonlocal elasticity theory", *Struct Eng Mech- An Int J*, Vol. 33, 2009, p. 193.

[15] Wang CM, Zhang YY, Ramesh SS, Kitipornchai S. "Buckling analysis of micro and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory", *J Phys D Appl Phys*, Vol. 39, 2006, pp. 3904-3909.

[16] Wang C.M., Kitipornchai S., Lim C.W., Eisenberger M. "Beam bending solutionsbased on nonlocal Timoshenko beam theory", *J Eng Mech ASCE*, Vol. 134, 2008, pp. 475-481.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.11.11.3]