مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1395، دوره 16، شماره 4، ص‌ص 119-128

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بهبود تابع شکل تقریب جهت محاسبه حالت‌های پایدار و فرکانس طبیعی صفحه‌های مرکب دوپایا با چینش $[0/90]_T$

احمد فیروزیان نژاد[1]، سعید ضیایی راد[2*] و مسیح مر[3]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
3- مربی، مهندسی دریا، دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر، خرمشهر
* اصفهان، صندوق پستی 84156-83111، szrad@cc.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 18 دی 1394
پذیرش: 21 اسفند 1394
ارائه در سایت: 24 فروردین 1395

کلید واژگان:
ورق مرکب دوپایا
روش ریلی-ریتز
پاسخ گرمایی، فرکانس طبیعی
شبیه‌سازی اجزای محدود

چکیده

در این پژوهش پاسخ گرمایی و مشخصه ارتعاشی صفحه‌های مرکب دوپایا با چینش $[0/90]_T$ با استفاده از روش نیمه-تحلیلی و اجزای محدود بررسی شده است. به‌منظور ارزیابی نتایج روش نیمه-تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود، یک ورق مرکب دوپایا بر اساس دستورالعمل ویژه ساخته و مشخصات هندسی و جابجایی نقاط مختلف ورق در یکی از حالت‌های پایدار آن در دمای محیط به‌صورت تجربی تعیین گردید. در روش نیمه-تحلیلی با استفاده از اصل همیلتون و تابع شکل بهبود یافته برای جابجایی خارج از صفحه، حالت‌های پایدار و فرکانس طبیعی اول ورق بر حسب طول جانبی آن محاسبه گردید. به‌منظور بهبود و کاهش خطاهای موجود در روش نیمه-تحلیلی، تابع شکل بهبود یافته بر خلاف تابع شکل پیشنهادی هایر انحنای ورق در راستای طولی و عرضی را متغیر در نظر می‌گیرد. حالت‌های پایدار به‌دست آمده از روش نیمه-تحلیلی با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود در نرم افزار آباکوس و همچنین آزمایش‌های تجربی بر ورق مرکب دوپایا ساخته شده، مقایسه و نشان داده شد که فرض انحناهای متغیر در تابع شکل پیشنهادی جهت محاسبه حالت‌های پایدار، انحناها و فرکانس طبیعی ورق مناسب‌تر است و سازگاری بهتری با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود و آزمایش‌های تجربی دارد. تابع شکل پیشنهادی همچنین می‌تواند در تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشی به‌منظور مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده پرش ناگهانی و محاسبه نیروی پرش بکار رود.

A modified shape function for calculating stable configurations and natural frequencies of bi-stable $[0/90]_T$ composite laminates

Ahmad Firouzian-Nejad[1], Saeed Ziaei-Rad[1*], Masih Moore[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.
2-Department of Marine Engineering, Khorramshahr University of Marine Science and Technology, Khorramshahr, Iran
* P.O.B. 84156-83111 Isfahan, Iran, szrad@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 January 2016
Accepted 11 March 2016
Available Online 12 April 2016

Keywords:
Bi-stable Composite Laminate
Rayleigh-Ritz Method
Thermal Response
Natural frequency
Finite Element Simulation

ABSTRACT

In this paper, thermal and vibration response of cross-ply bi-stable composite laminated plates was studied using semi-analytical, finite element and experimental method. In order to evaluate the semi-analytical and finite element results, a bi-stable composite plate was manufactured using a special procedure. Next, geometrical characteristics and displacement of different paths on the plate were measured experimentally at room temperature. In semi-analytical approach, the two stable states and the first natural frequency of cross-ply laminates are calculated based on Rayleigh–Ritz approach combined with Hamilton's principle. In this study, a modified shape function was introduced that allows the curvatures to vary in both longitudinal and transverse directions. Using the modified shape function, the displacement of the plate in its stable configuration and the first natural frequency of the plate can be more accurately predicted compared to the Hyer's shape functions. The obtained results from the proposed shape function are in good agreement with the finite element and experimental data. The proposed shape functions can also be used in dynamic and vibration analysis to determine the snap-through load of the cross-ply laminates.

1- مقدمه

امروزه سازه‌های مورفینگ و گسترده شونده به‌عنوان راه حلی برای عملکرد بهتر سازهای هوایی در نظر گرفته می‌شوند. هندسه و خواص این سازه‌ها با توجه به شرایط محیطی و بار اعمالی متفاوت بوده و بر حسب نیاز تغییر می‌کند. طرح‌های فعلی استفاده شده در سازهای مورفینگ معمولا شامل مجموعه پیچیده‌ای از اجزای مکانیکی به‌هم متصل شده و محرک‌های مختلف می‌باشند. سازه‌های مرکب دوپایا[1] دسته‌ای از سازه‌های گسترده شونده

[1] Bi-stable Composite Structures

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Firouzian-Nejad, S. Ziaei-Rad, M. Moore, A modified shape function for calculating stable configurations and natural frequencies of bi-stable $[0/90]_T$ composite laminates, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 119-128, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

هستند که به خاطر داشتن دو حالت پایدار، نسبت استحکام به وزن بالا و سادگی می‌توانند جایگزین خوبی برای طرح‌های مرسوم در سازهای مورفینگ باشند [1-2]. یک ورق مرکب که لایه‌های آن به‌صورت غیرمتقارن حول صفحه مرکزی قرار گرفته اگر تحت بارهای گرمایی و تغییرات دما قرار گیرد، به علت اختلاف خواص مکانیکی و ضرایب انبساط گرمایی در لایه‌های مختلف، تنش‌های پسماند در آن ایجاد می‌شود که این تنش‌ها در نهایت مطابق شکل 1 حالت‌های پایدار ورق در دمای محیط را ایجاد می‌کنند. نظریه لایه‌ای کلاسیک به علت خطی بودن کرنش‌های گرین، حالت تغییر شکل یافته ورق را زین اسبی[1] پیش‌بینی می‌کرد که با مشاهدات تجربی هایر، وجود دو شکل استوانه‌ای کاملا پایدار، تناقض داشت. بعدها هایر با افزودن جمله‌های غیرخطی کرنش گرین به نظریه لایه‌ای کلاسیک و استفاده از اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل کل و روش ریلی- ریتز به تحلیل حالت‌های پایدار ورق‌های مرکب مستطیلی با چینش $[0_n/90_n]_T$ تحت بارهای گرمایی پرداخت و روش او به نظریه توسعه یافته هایر شهرت یافت [3-4]. نظریه هایر با دقت قابل قبولی جابجایی‌های خارج از صفحه را به‌جز در نقاط نزدیک به گوشه‌ها و لبه‌های ورق پیش‌بینی می‌کند اما به دلیل ثابت در نظر گرفتن انحناهای تابع شکل پیشنهادی قادر به نمایش اثرات لبه و انحنای پیچشی در تحلیل استاتیکی نیست [5]. علاوه بر این، فرض انحنا ثابت می‌تواند در مدل‌سازی دیگر مشخصه‌های ورق مانند نیروی لازم برای پرش، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر با آن ناموفق و باعث خطاهای نسبتا قابل توجهی گردد. پارامترهای بسیاری از قبیل نسبت ابعاد هندسی ورق، ضخامت لایه‌ها و غیره بر شکل نهایی ورق‌های دوپایا اثر می‌گذارند که توسط محققان زیادی بررسی شده است [6-8]. طول متناظر با شروع حالت دوپایا را نقطه انشعابی[2] گویند. هاماموتو و هایر با استفاده از نظریه هایر به بررسی اثر نقص‌های هندسی در یک صفحه مرکب مستطیلی با چینش $[0_n/90_n]_T$ پرداختند. آن‌ها موفق به بهبود جواب‌های حاصل از حل نظری به‌ویژه در اطراف نقطه انشعابی شدند [9]. توفیق و همکاران با استفاده از نرم‌افزار آباکوس به بررسی نسبت طول به عرض و نسبت طول به ضخامت صفحات مستطیلی مرکب غیرمتقارن تحت بارهای گرمایی پرداخته و نقاط تعادل پایدار سازه را به‌دست آوردند و دریافتند که ورق در نسبت طول به ضخامت کم یک حالت پایدار زین اسبی و در نسبت طول به ضخامت زیاد دو حالت پایدار استوانه‌ای و یک حالت ناپایدار زین اسبی خواهد داشت [10]. در زمینه پاسخ دینامیکی و ارتعاشی صفحات مرکب دوپایا مطالعات محدودتری انجام شده است که از مهم‌ترین آن‌ها دیاکانو و همکاران بر اساس نظریه توسعه یافته هایر و با استفاده از اصل همیلتون رفتار استاتیکی و دینامیکی یک صفحه مرکب دوپایا مستطیلی تحریک شده با نیروی متمرکز را بررسی نمودند [11]. وگل و هایر ارتعاش آزاد ورق مرکب دوپایا مستطیلی $[0_n/90_n]_T$ حول نقاط تعادل بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از روش ریلی- ریتز، اصل همیلتون و اغتشاش خطی حول حالت‌های پایدار، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر آن‌ها را به‌دست آورند و نتایج خود را با نتایج نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس مقایسه کردند [12]. یکی از معایب روش هایر در محاسبه فرکانس‌های طبیعی افزایش تعداد مجهولات و در نتیجه افزایش زمان حل مسئله است علاوه بر این به دلیل ثابت در نظر گرفتن انحناها، فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده از این روش خطای قابل توجهی نسبت به نتایج حاصل از شبیه‌سازی اجزای محدود دارد. با اعمال نیرو و یا گشتاور از طریق وصله‌های پیزوالکتریک، آلیاژهای حافظه‌دار و یا ماکرو فایبرهای کامپوزیت پیزوالکتریک، ورق می‌تواند از یک حالت پایدار به حالت پایدار دیگر تغییر شکل دهد.

این پدیده غیرخطی که در زمان بسیار کوتاهی اتفاق می‌افتد، پرش ناگهانی[3] نامیده می‌شود [13-15]. اسماعیلی و همکاران با استفاده از نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس و فیروزیان نژاد و همکاران با انجام آزمایش‌های تجربی پدیده پرش ناگهانی ورق‌های مرکب دوپایا مستطیلی را در حالت استاتیکی بررسی نمودند [16-17]. بیشترین کاربرد ورق‌های مرکب دوپایا در برداشت انرژی، جداساز ارتعاشی، سازه‌های مورفینگ و صنایع هوا و فضا است [18-21]. در این زمینه فیروزیان نژاد و همکاران کاربرد ورق‌های مرکب دوپایا در جداسازهای ارتعاشی غیرفعال را به‌صورت تحلیلی بررسی نمودند [22]. نمونه‌هایی از کاربرد ورق‌های مرکب دوپایا در شکل 2 نشان داده شده است.

در این پژوهش به‌منظور بهبود روش نیمه-تحلیلی در بررسی استاتیکی و ارتعاشی ورق مرکب دوپایا، تابع شکل جدیدی برای جابجایی خارج از صفحه پیشنهاد شده است و نتایج به‌دست آمده به‌صورت کمی و کیفی با تابع شکل مرسوم (تابع شکل پیشنهادی هایر) مقایسه گردید و نشان داده شده است که با کمک تابع شکل پیشنهادی، نتایج روش نظری به نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود و آزمون عملی نزدیک‌تر می‌گردد.

2- فرمول بندی مسئله

در این مقاله برای استخراج معادلات استاتیکی و دینامیکی ورق روش ریلی- ریتز به همراه اصل همیلتون استفاده شده است:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U) \, \mathrm{d}t = 0 \qquad (1)$$

در رابطه (1)، T انرژی جنبشی و U انرژی کرنشی ورق است. انرژی کرنشی یک ورق مرکب مستطیلی مطابق شکل 3 متشکل از n لایه، تحت اثر $T\Delta$ تغییرات دمایی از رابطه (2) به‌دست می‌آید [23]:

$$U = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \int_{\frac{-L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{\frac{-L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mathrm{T}} \bar{Q}^{\mathrm{k}} \varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{T}} \bar{Q}^{\mathrm{k}} \alpha^{\mathrm{k}} \Delta T \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \qquad (2)$$

در رابطه (2)، L_x و L_y به ترتیب طول و عرض ورق، h_k-h_{k-1} ضخامت هر لایه از ورق هستند. $\bar{Q}^k$ و α^{k} نیز به ترتیب ماتریس سختی کاهش یافته و بردار ضرایب انبساط گرمایی در لایه k ام بوده که جمله‌های آن در پیوست الف آورده شده است. همان‌طور که در مقدمه بیان گردید نظریه لایه‌ای کلاسیک به دلیل خطی بودن کرنش گرین قادر به پیش‌بینی حالت‌های استوانه‌ای ورق مرکب دوپایا نخواهد بود.

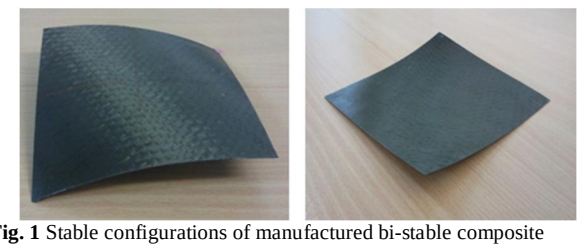


Fig. 1 Stable configurations of manufactured bi-stable composite laminate with $[60/-30]_T$ stacking sequence

شکل 1 حالت‌های پایدار ورق مرکب دوپایا ساخته شده با چینش $[60/-30]_T$

[1] Saddle shape
[2] Bifurcation point
[3] Snap-through

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

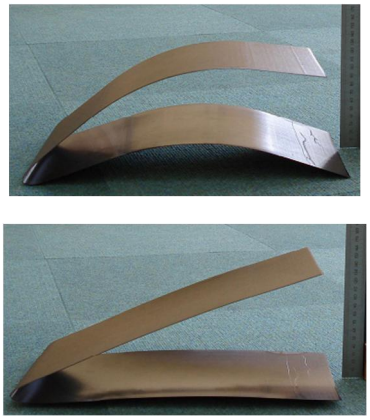


Fig. 2 Application of bi-stable composite laminate in variable camber trailing edge [21]

شکل 2 کاربرد ورق مرکب دوپایا در لبه فرار با کمبر متغیر [21]

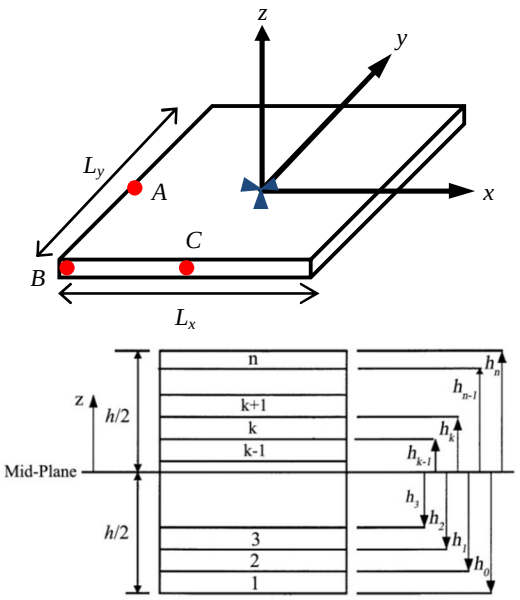


Fig.3 Schematic of the plate and its geometrical parameters

شکل 3 طرح‌واره ورق بررسی شده و پارامترهای هندسی آن

به‌منظور برطرف کردن این نقیصه از معادلات کرنش ون-کارمن استفاده شده است که در آن بردار کرنش کلی ε به‌صورت (3) تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z\kappa^0 \tag{3}$$

در رابطه (3)، ε^0 و κ^0 به ترتیب بردار کرنش و انحنا در صفحه میانی می‌باشند.

$$\varepsilon^0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \kappa^0 = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

در مجموعه روابط (4)، u_0، v_0 و w_0 تغییر مکان نقطه‌ای دلخواه در صفحه میانی به ترتیب در راستاهای x، y و z می‌باشند. در روش ریلی-ریتز انتخاب میدان جابجایی متناسب با شرایط مرزی سیستم، به‌منظور استخراج نتایج با دقت قابل قبول بسیار مهم است. در این تحقیق به‌منظور مقایسه نتایج با کارهای پیشین انجام شده، تنها پاسخ گرمایی و مشخصه ارتعاشی ورق مربعی $_T$[0/90] با لبه‌های آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. لذا با در نظر گرفتن تقارن‌های هندسی برای این نوع ورق، جابجایی‌های درون صفحه‌ای صفحه میانی ورق به‌صورت رابطه (5) حدس زده می‌شوند:

$$u_0 = \sum_{i=0}^{\frac{O_u-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{O_u-1}{2}-i} \hat{u}_{2i+1,2j} \left(\frac{x}{L_x}\right)^{2i+1} \left(\frac{y}{L_y}\right)^{2j}$$

$$v_0 = \sum_{i=0}^{\frac{O_v-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{O_v-1}{2}-i} \hat{v}_{2j,2i+1} \left(\frac{x}{L_x}\right)^{2j} \left(\frac{y}{L_y}\right)^{2i+1} \tag{5}$$

مرتبه جابجایی‌های درون صفحه‌ای یعنی O_u و O_v برای ارضای شرایط هندسی باید عددی فرد باشد. همان‌گونه که در مقدمه ذکر شد در نظریه توسعه یافته هایر و دیگر مطالعات انجام شده، جابجایی خارج از صفحه به‌گونه‌ای انتخاب شده است که انحناها ثابت و مستقل از مختصات باشند بنابراین قادر به نمایش اثرات لبه و انحناهای پیچشی نخواهند بود. علاوه بر این چنانچه قرار باشد این ورق‌ها در کاربردهای عملی نظیر ایده بال مورفینگ مورد استفاده قرار گیرند، مدل کردن با فرض انحنا ثابت می‌تواند منجر به خطای زیاد در مشخصه‌های استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشی ورق دوپایا شود. در تحقیق کنونی مطابق جدول 1 از دو تابع شکل برای جابجایی خارج از صفحه ورق استفاده شده است. در مدل 1 مانند تابع شکل هایر انحناها ثابت در نظر گرفته شده‌اند. مدل 2 درجه آزادی بیشتری به ورق داده به‌گونه‌ای که تغییر انحناها را به‌صورت توابعی درجه 2 از x و y فراهم می‌سازد. در روش ریلی-ریتز انتظار می‌رود با افزایش تعداد جمله‌ها، خطا کاهش یافته و دقت نتایج بیشتر شود. اگر چه باید در نظر داشت افزایش تعداد مجهولات، با توجه به ماهیت غیرخطی مسئله زمان حل آن را به نحو بسیار چشمگیری افزایش می‌دهد. لذا با در نظر گرفتن دقت نتایج و زمان حل مسئله، مدل 2 به عنوان مدل بهینه شده برای جابجایی خارج از صفحه معرفی شده است.

انرژی جنبشی کل ورق از رابطه (6) به‌دست می‌آید:

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho\left\{(\dot{u}_0 - z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x})^2 + (\dot{v}_0 - z\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y})^2 + \dot{w}_0^2\right\} \mathrm{d}v \tag{6}$$

که ρ چگالی صفحه بوده و می‌تواند تابعی از مکان باشد، در این مطالعه چگالی در کل ورق ثابت فرض شده است.

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (1) به‌منظور جداسازی جابجایی مجازی از عملگرهای دیفرانسیلی، جمله انرژی جنبشی در این رابطه به‌صورت (7) ساده خواهد شد [11]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\frac{-L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \int_{\frac{-L_x}{2}}^{\frac{L_x}{2}} \rho h \left[\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}\right) - \ddot{w}_0\right] \delta w_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

جدول 1 توابع شکل بررسی شده برای جابجایی خارج از صفحه

Table 1 Shape functions for out of plane displacement

مدل	تابع شکل
یک	$0.5 \times \left[\hat{w}_{2,0}\left(\frac{x}{L_x}\right)^2 + \hat{w}_{0,2}\left(\frac{y}{L_y}\right)^2\right]$
دو	$0.5 \times \left[\hat{w}_{2,0}\left(\frac{x}{L_x}\right)^2 + \hat{w}_{0,2}\left(\frac{y}{L_y}\right)^2 + \hat{w}_{2,2}\left(\frac{xy}{L_xL_y}\right)^2 + \hat{w}_{4,0}\left(\frac{x}{L_x}\right)^4 + \hat{w}_{0,4}\left(\frac{y}{L_y}\right)^4\right]$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

از آنجایی که ورق در مرکزش ثابت شده (به شکل 3 رجوع شود) به دلیل تقارن مؤلفه‌های شتاب درون صفحه (یعنی $\ddot{u}$ و $\ddot{v}$)، نیروهای اینرسی ناشی از آن‌ها همدیگر را خنثی می‌کنند. با جایگذاری عبارت‌های میدان‌های جابجایی در رابطه انرژی کرنشی و انرژی جنبشی می‌توان تابع لاگرانژ را به‌صورت تابعی از ضرایب میدان‌های جابجایی و تغییرات دما محاسبه کرد.

2-1- استخراج معادلات استاتیکی ورق

حالت‌های پایدار ورق با صرفنظر کردن از جمله‌های اینرسی در تابع لاگرانژ و مساوی صفر قرار دادن تغییرات تابع لاگرانژ نسبت به ضرایب میدان‌های جابجایی به‌صورت (8) به‌دست می‌آید:

$$\delta L = \delta U = \frac{\partial U}{\partial \hat{u}_{i,j}}\delta\hat{u}_{i,j} + \frac{\partial U}{\partial \hat{v}_{i,j}}\delta\hat{v}_{i,j} + \frac{\partial U}{\partial \hat{w}_{i,j}}\delta\hat{w}_{i,j} = 0 \qquad (8)$$

برای برقراری رابطه (8) لازم است که تک‌تک جملات آن برابر صفر باشند در نتیجه یک دستگاه معادله به تعداد ضرایب میدان‌های جابجایی به‌دست می‌آید. معادلات حاصل از تغییرات انرژی کرنشی کل نسبت به ضرایب جابجایی‌های درون صفحه‌ای توابع خطی از این ضرایب بوده در نتیجه این ضرایب می‌توانند به‌صورت توابعی از ضرایب جابجایی خارج از صفحه به‌دست آیند بنابراین با جایگذاری آن‌ها در معادلات باقی مانده، تعداد معادلات به تعداد ضرایب جابجایی خارج از صفحه کاهش خواهد یافت به‌عنوان مثال برای مدل 1 معادلات به‌صورت (9) ساده خواهد شد:

$$\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{W}}) - \mathrm{F}(\widehat{\mathrm{W}}, \Delta T) = \left\{\frac{\partial U}{\partial \widehat{w}_{0,2}}, \frac{\partial U}{\partial \widehat{w}_{2,0}}\right\}^{\mathrm{T}} = 0 \qquad (9)$$

در رابطه (9) $\mathrm{K}(\widehat{\mathrm{W}})$ و $\mathrm{F}(\widehat{\mathrm{W}}, \Delta T)$ به ترتیب سختی غیرخطی ورق و بردار نیرویی ناشی از تنش‌های پسماند گرمایی هستند و از تغییرات مرتبه اول عبارت اول و دوم انرژی کرنشی به‌دست آمده‌اند. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی تعادل از برنامه ویژه نوشته شده در نرم افزار متلب و روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. با توجه به آنکه در بیشتر موارد بیش از یک جواب برای دستگاه معادلات یافت می‌شود، جهت ارزیابی جواب‌ها لازم است تغییرات دوم تابع انرژی کرنشی کل و یا به عبارتی ماتریس ژاکوبین دستگاه به‌صورت رابطه (10) تشکیل گردد:

$$J_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (10)$$

ماتریس ژاکوبین در نقاط متناظر با جواب‌های حالت پایدار باید مثبت معین باشد. زمانی که یکی از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین صفر و یا منفی باشد، ماتریس ژاکوبین مثبت معین نبوده و جواب به‌دست آمده نشان دهنده حالت ناپایدار سیستم است.

2-2- استخراج معادلات ارتعاشات ورق

معادلات ارتعاش ورق در راستای خارج از صفحه با مرتب سازی معادله (1) به‌صورت (11) به‌دست خواهد آمد:

$$\mathrm{M}\ddot{\widehat{\mathrm{W}}} + \mathrm{C}\left(\dot{\widehat{\mathrm{W}}}\right) + \mathrm{K}(\widehat{\mathrm{W}}) = \mathrm{F}(\widehat{\mathrm{W}}, \Delta T) \qquad (11)$$

در رابطه (11)، M ماتریس جرمی و معرف جمله‌های اینرسی است که با جایگذاری تابع شکل دلخواه برای جابجایی خارج از صفحه و انتگرال گیری از معادله (7) به‌دست می‌آید. ماتریس جرمی برای مدل 1:

$$\mathrm{M} = \frac{\rho h}{32}\begin{bmatrix} \frac{L_x^2}{10} - \frac{h^2}{9} & \frac{L_x^2}{18} - \frac{h^2}{9} \\ \frac{L_x^2}{18} - \frac{h^2}{9} & \frac{L_y^2}{10} - \frac{h^2}{9} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

و برای مدل 2 با فرض ورق مربعی (L_x=L_y) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{M} = \rho h \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_2 & c_1 & c_3 & c_5 & c_4 \\ c_6 & c_6 & c_7 & c_8 & c_8 \\ c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{10} & c_9 & c_{11} & c_{13} & c_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{L_x^2}{320} - \frac{h^2}{288}, \quad c_2 = \frac{L_x^2}{576} - \frac{h^2}{288},$$
$$c_3 = \frac{L_x^2}{3840} - \frac{7h^2}{8640}, \quad c_4 = \frac{L_x^2}{1792} - \frac{h^2}{320},$$
$$c_5 = \frac{L_x^2}{3840} - \frac{h^2}{576}, \quad c_6 = \frac{L_x^2}{3840} - \frac{h^2}{3456},$$
$$c_7 = \frac{L_x^2}{25600} - \frac{h^2}{11520}, \quad c_8 = \frac{L_x^2}{21504} - \frac{h^2}{3840},$$
$$c_9 = \frac{L_x^2}{1792} - \frac{h^2}{1920}, \quad c_{10} = \frac{L_x^2}{3840} - \frac{h^2}{1920},$$
$$c_{11} = \frac{L_x^2}{21504} - \frac{11h^2}{80640}, \quad c_{12} = \frac{L_x^2}{9216} - \frac{h^2}{1792},$$
$$c_{13} = \frac{L_x^2}{25600} - \frac{h^2}{3840} \qquad (13)$$

برای در نظر گرفتن اثرات میرایی در مدل و اجتناب از پرش مداوم بین دو حالت پایدار، میرایی تناسبی ریلی فرض شده است.

$$\mathrm{C}\left(\dot{\widehat{\mathrm{W}}}\right) = a\mathrm{M}\dot{\widehat{\mathrm{W}}} + b\mathrm{K}\dot{\widehat{\mathrm{W}}} \qquad (14)$$

که a و b ضرایب میرایی جرمی و سختی هستند. بر اساس مطالعات انجام شده، پرش ناگهانی معمولا در محدوده فرکانس پایین اتفاق می‌افتد لذا می‌توان فرض نمود $b=0$ است [24]. بنابراین تنها لازم است نسبت میرایی ζ مشخص گردد که با ضریب میرایی جرمی به‌صورت (15) ارتباط دارد.

$$a = 4\pi\zeta\omega_n \qquad (15)$$

3- ساخت ورق مرکب دوپایا

در این پژوهش به‌منظور مقایسه مدل‌های ارائه شده، ورقی دوپایا از جنس گرافیت–اپوکسی T300/5208 با چینش $_T[0/90]$ و مشخصات ذکر شده در جدول 2 مطابق دستورالعمل زیر ساخته شده است:

- بریدن پانل‌های مرکب تک جهته با ابعاد دلخواه.
- مالیدن رزین اپوکسی نارمکو 5208 و چیدن لایه‌ها با زاویه‌های 0 و 90 درجه روی یکدیگر.
- قرار دادن ورق در یک اتوکلاو صنعتی جهت انجام فرآیند پخت رزین.
- افزایش دما از دمای 25 °C به دمای 135 °C با نرخ 3 °C تا 5 °C در هر دقیقه.
- از دمای 130 °C افزایش دما به آرامی انجام می‌شود و در دمای 135 °C به مدت یک ساعت ثابت نگه داشته می‌شود.
- اعمال فشار 85 psi (586 kPa) و افزایش دما به 180 °C با نرخ 3 °C تا 5 °C در هر دقیقه.
- نگه‌داشتن در دمای 180 °C و فشار 85 psi به مدت 2 ساعت.
- به آرامی سرد کردن ورق تا دمای محیط.

در تمام مدت فرآیند پخت، ورق در کیسه خلأ قرار داده می‌شود. پس از اتمام فرآیند پخت، ورق دارای دو حالت استوانه‌ای پایدار خواهد بود. از آنجایی که عدم یکسان بودن ضخامت لایه‌ها در ورق‌های مرکب دوپایا تأثیر بسزایی در انحناها و مشخصه‌های ارتعاشی آن دارد، در این مقاله از بین

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

ورق‌های ساخته شده، نمونه‌ای انتخاب و بررسی شده که کمترین عیب هندسی را داشته باشد. بدین منظور با استفاده از میکروسکوپ نوری (INSIZE MODEL ISM-PM200S) از مقاطع مختلف ورق ساخته شده عکس برداری کرده و ضخامت واقعی لایه‌ها با تحلیل عکس‌ها تعیین شده است. در شکل 4 مقطع ورق بررسی شده با بزرگنمایی 50 برابر نشان داده شده است. لازم به ذکر است به دلیل ناچیز بودن ضخامت لایه رزین در قیاس با لایه‌های دیگر در مدل بررسی شده از اثرات لایه‌های رزین صرفنظر شده است لذا به دلیل تساوی ضخامت لایه‌ها، ورق دو حالت پایدار با انحناهایی مساوی و علامت متفاوت خواهد داشت. با این تفاوت که مولد استوانه در حالت پایدار اول موازی محور طولی و در حالت دوم موازی محور عرضی است. از این رو نتایج به‌دست آمده تنها برای یکی از حالت‌های پایدار آورده شده است.

4- شبیه‌سازی اجزای محدود

به‌منظور بررسی نتایج به‌دست آمده ورقی با مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه جدول 2 در نرم افزار اجزای محدود آباکوس مدل‌سازی شده است. برای حل مسئله از شبکه‌بندی خودکار و المان پوسته مربعی چهار نقطه‌ای با انتگرال‌گیری کاهش یافته استفاده شده است که هر نقطه آن شش درجه آزادی (سه درجه آزادی جابجایی و سه درجه آزادی چرخش) دارد. همچنین گزینه مربوط به غیرخطی بودن تغییرات هندسه برای بررسی جابجایی‌های بزرگ مورد استفاده قرار گرفته است. در پایان با استفاده از تحلیل استاتیک عمومی و تعریف گام‌های زیر، حالت‌های پایدار ورق به‌دست آمده‌اند:

- در گام 1 با توجه به یکسان بودن ضخامت لایه‌ها، برای آنکه ورق پس از ایجاد تنش‌های پسماند، وارد یکی از حالت‌های پایداری گردد در بازه دمایی 175 °C تا 180 °C، نیروی کوچکی در جهت مناسب به چهار گوشه ورق اعمال می‌شود، در غیراینصورت ورق به حالت پایدار زین اسبی تغییر شکل خواهد داد.
- در گام 2، نیروهای کوچک اعمال شده در گام نخست برداشته شده و کاهش دما از 175 °C تا 25 °C ادامه پیدا می‌کند. در پایان این گام، ورق به یکی از حالت‌های پایدار (وابسته به جهت نیروی اعمال شده در ابتدای گام 1) همگرا می‌شود.

لازم به ذکر است در گام‌های 1 و 2 بالا نقطه مرکزی ورق (یعنی $x=y=0$) مقید و شرایط مرزی زیر بر آن اعمال شده است:

$$u_0 = v_0 = w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (16)$$

جدول 2 مشخصات ماده گرافیت – اپوکسی T300/5208 [22]

Table 2 Properties of T300/5208 Graphite-Epoxy [22]

مشخصه	مقدار
مدول کشسان طولی (GPa)	146.95
مدول کشسان عرضی (GPa)	10.702
مدول برشی (GPa)	6.977
ضریب انبساط گرمایی طولی (1/°C)	5.028×10^{-7}
ضریب انبساط گرمایی عرضی (1/°C)	2.65×10^{-5}
ضریب پواسون طولی	0.3
ضریب پواسون عرضی	0.0219
ضخامت هر لایه (mm)	0.365
چینش	$[0/90]_T$

فرکانس‌های طبیعی ورق نیز در گامی مجزا و با استفاده از تحلیل اغتشاش خطی و حل گر لانکزوس به‌دست آمده‌اند.

5- نتایج

در ابتدا با در نظر گرفتن مدل 1 برای جابجایی خارج از صفحه، اثر مرتبه میدان‌های جابجایی درون صفحه بر حالت‌های پایدار ورق بررسی و نتایج آن در جدول 3 نشان داده شده است. همان‌طور که از نتایج مشاهده می‌شود با افزایش مرتبه جابجایی‌های درون صفحه، مقدار جابجایی نقطه A ($x=\pm0.5L_x$, $y=0$) و همچنین اختلاف جابجایی نقطه B ($x=\pm0.5L_x$, $y=\pm0.5L_y$) با جابجایی نقطه C ($x=0$, $y=\pm0.5L_y$) در شکل 5 بیشتر می‌شود. با توجه به نتایج به‌دست آمده، افزایش مرتبه‌های میدان‌های جابجایی درون صفحه با وجود افزایش تعداد ضرایب مجهول مسئله تأثیر چندانی در نتایج ندارند، از این رو در این پژوهش مرتبه میدان‌های جابجایی درون صفحه یکسان و برابر 5 در نظر گرفته شده است.

در ادامه به‌منظور بررسی و مقایسه دقیق‌تر مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود، جابجایی وسط لبه‌های ورق یعنی نقاط A ($x=\pm0.5L_x$, $y=0$) و C ($x=0$, $y=\pm0.5L_y$) و گوشه ورق یعنی نقطه B ($x=\pm0.5L_x$, $y=\pm0.5L_y$) در حالت پایدار دوم و بازه دمایی 25 تا 145 درجه سلسیوس به‌دست آمده و نتایج آن در شکل‌های 6، 7 و 8 نشان داده شده است.

بر اساس این نمودارها با کاهش دما از دمای پخت مقدار جابجایی نقطه A کاهش و نقاط B و C افزایش می‌یابد این امر با افزایش مقدار میانگین انحنای طولی κ_{xx} و کاهش انحنای عرضی κ_{yy} همراه است. همان‌طور که از شکل 6 مشاهده می‌شود مدل 1 در قیاس با مدل 2 و اجزای محدود جابجایی

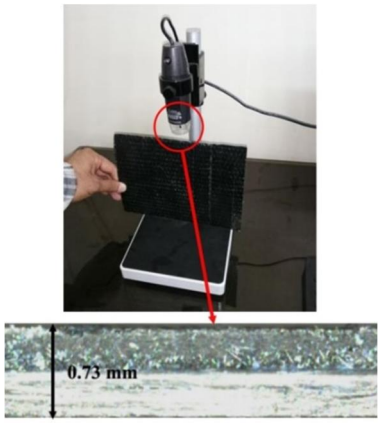


Fig.4 Typical images from optical microscopy of thickness of manufactured laminate with 50X magnification

شکل 4 عکس برداری از مقطع ورق ساخته شده با میکروسکوپ نوری با بزرگنمایی 50 برابر

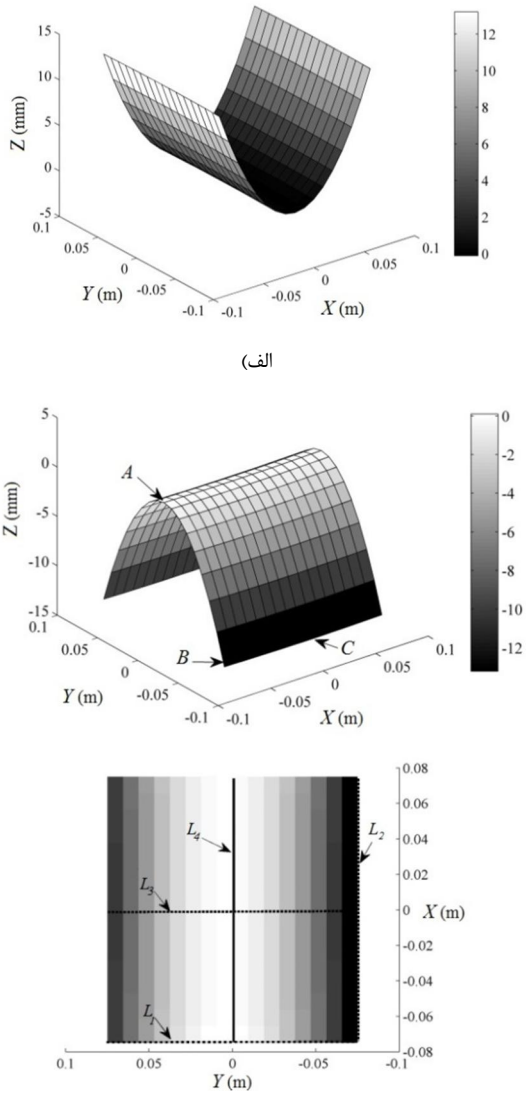
جدول 3 اثر مرتبه جابجایی درون صفحه بر حالت پایدار دوم ورق در دمای 25 °C

Table 3 The effect of the order of in plane displacements on stable configuration of the laminate at 25 °C

C (mm)	B (mm)	A (mm)	κ_{yy} (m^{-1})	κ_{xx} (m^{-1})	تعداد ضرایب	مرتبه $O_v = O_u$
-13.24	-13.17	0.07	4.71	-0.03	6	3
-13.21	-13.10	0.11	4.70	-0.04	12	5
-13.2	-13.09	0.11	4.69	-0.04	20	7
-13.2	-13.09	0.11	4.69	-0.04	30	9

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]



الف)

ب)

Fig.5 Stable configurations of the laminate at room temperature for model 1 assuming O_u=O_v=5: (a) first stable configuration, (b) second stable configuration and its top view

شکل 5 حالت‌های پایدار ورق در دمای محیط برای مدل 1 با فرض O_u=O_v=5: الف) حالت پایدار اول، ب) حالت پایدار دوم و نمای بالای آن

بیشتری برای نقطه A پیش‌بینی می‌کند. میزان جابجایی به‌دست آمده برای نقطه B در مدل‌های 2 و اجزای محدود تقریبا یکسان است. مدل 1 در قیاس با دو مدل دیگر جابجایی بیشتری برای نقطه B پیش‌بینی می‌کند و با کاهش دما اختلاف آن با مدل‌های دیگر بیشتر می‌شود.

جابجایی یکسانی برای نقطه C در هر سه مدل به‌دست آمده است و نتایج تقریبا بر هم منطبق می‌باشند. میزان اختلاف جابجایی گوشه ورق (نقطه B) با جابجایی وسط لبه (نقطه C) ناشی از تغییرات انحناها در طول ورق است. این اختلاف در مدل 2 و شبیه‌سازی اجزای محدود به‌مراتب بیش‌تر از مدل 1 است.

به‌منظور بررسی و ارزیابی دقیق‌تر مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود در دمای محیط، جابجایی خارج از صفحه ورق ساخته شده در لبه منحنی ورق (مسیر L_1)، لبه نسبتا تخت ورق (مسیر L_2) و خطوط تقارن ورق (مسیرهای L_3 و L_4 به شکل 5 (ب) مراجعه شود) با استفاده از دستگاه ارتفاع سنج

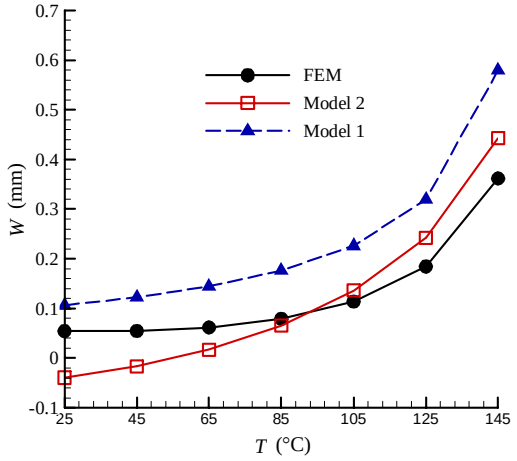


Fig.6 Displacement of point A versus temperature for second stable configuration

شکل 6 جابجایی نقطه A بر حسب دما در حالت پایدار دوم

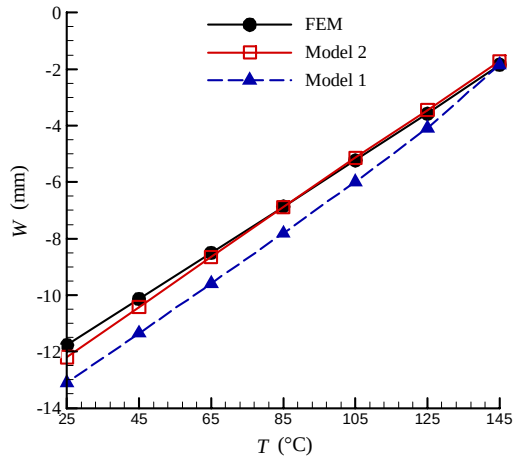


Fig.7 Displacement of point B versus temperature for second stable configuration

شکل 7 جابجایی نقطه B بر حسب دما در حالت پایدار دوم

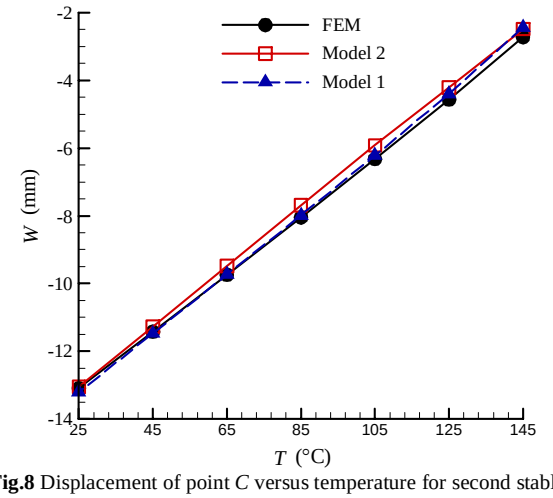


Fig.8 Displacement of point C versus temperature for second stable configuration

شکل 8 جابجایی نقطه C بر حسب دما در حالت پایدار دوم

دیجیتالی با دقت 0.01 میلی‌متر اندازه گیری شده (شکل 9) و به‌صورت جداگانه در شکل‌های 10 تا 13 رسم شده است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

در مسیر L_1 (x=-0.5L_x , -0.5L_y<y<0.5L_y) جابجایی به‌دست آمده برای مدل 2 و اجزای محدود تقریبا بر هم منطبق بوده و در قیاس با مدل 1 اختلاف آن‌ها با نتایج آزمون عملی کمتر است، این اختلاف با افزایش فاصله از مرکز ورق در مدل 1 بیش‌تر می‌شود (شکل 10).

در مسیر L_2 (y=-0.5L_y , -0.5L_x<x<0.5L_x)، با حرکت از وسط لبه به سمت گوشه‌های ورق مقدار جابجایی‌ها کمتر شده و هر چهار مدل این امر را نشان می‌دهند که لبه ورق صاف نبوده و حالت خمیده دارد (شکل 11). اگرچه در مدل 1 اختلاف جابجایی کمتری بین نقطه وسط لبه و گوشه‌ها مشاهده می‌شود و جابجایی لبه ورق تقریبا یکنواخت به نظر می‌رسد. اختلاف زیادی بین جابجایی گوشه‌های ورق در مدل 1 و سایر مدل‌ها وجود دارد که ناشی از ثابت بودن انحناهای طولی و عرضی تابع شکل ارائه شده برای جابجایی خارج از صفحه در مدل 1 است.

در مسیر L_3 (x=0 , -0.5L_y<y<0.5L_y) که یکی از خطوط تقارن ورق و موازی محور عرضی بوده، تغییرات انحناهای طولی کمترین اثر را بر جابجایی خارج از صفحه ورق خواهد داشت، علاوه بر این تغییرات انحناهای طولی و عرضی در این مسیر محدود است. از این رو تمامی مدل‌ها جابجایی یکسانی برای این مسیر پیش بینی می‌کنند (شکل 12).

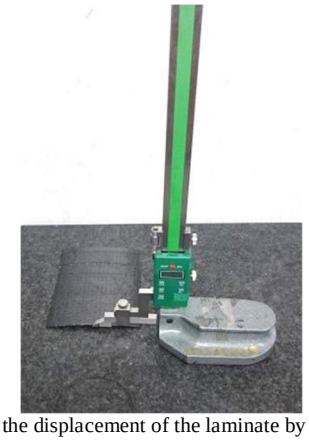


Fig.9 Measuring the displacement of the laminate by a height gauge

شکل 9 اندازه گیری جابجایی خارج از صفحه ورق توسط دستگاه ارتفاع سنج

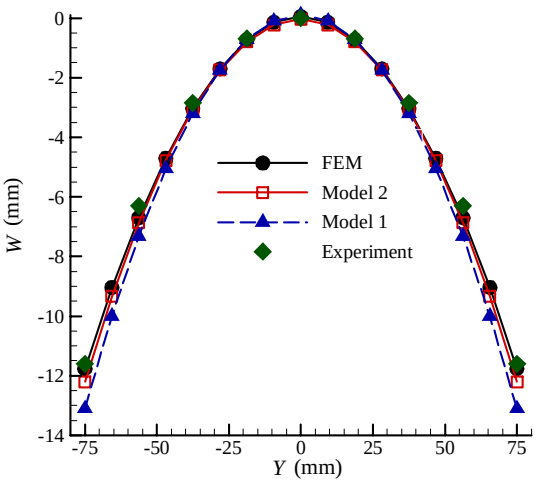


Fig.10 Out of plane displacement of the path L_1 at 25 °C

شکل 10 جابجایی خارج از صفحه ورق در مسیر L_1 در دمای 25 °C

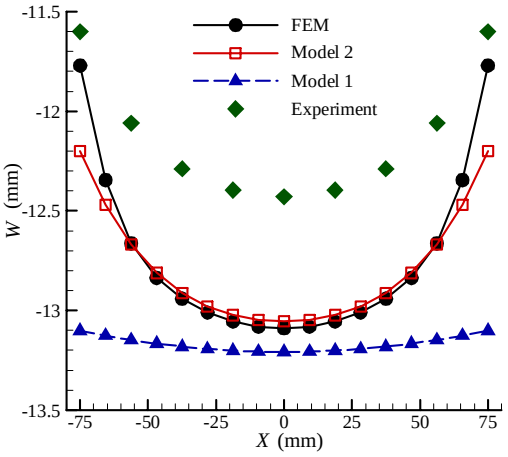


Fig.11 Out of plane displacement of the path L_2 at 25°C

شکل 11 جابجایی خارج از صفحه ورق در مسیر L_2 در دمای 25 °C

در مسیر L_4 (y=0 , -0.5L_x<x<0.5L_x) که موازی محور طولی بوده، با توجه به تغییرات انحنای طولی و عرضی ورق که در ادامه به بررسی آن پرداخته شده است، مدل 2 سازگاری بیشتری با شبیه‌سازی اجزای محدود و نتایج آزمایش عملی داشته و هر سه مدل یک روند مشابه (داشتن سه نقطه اکسترمم) را دنبال می‌کنند. در مدل 1 تغییرات جابجایی خارج از صفحه ورق به‌صورت تابعی درجه دو بوده و با افزایش فاصله از مرکز ورق اختلاف بین نتایج مدل 1 و شبیه‌سازی اجزای محدود بیش‌تر می‌گردد که ناشی از ثابت بودن انحناها در این مدل است (شکل 13). باید در نظر داشت علت کمتر بودن جابجایی خارج از صفحه نمونه ساخته شده در قیاس با مدل‌های نظری و شبیه‌سازی اجزای محدود، اثرات رطوبت و عیوب احتمالی در فرآیند ساخت و پخت این ورق‌ها بوده که موجب کاهش تنش‌های پسماند و در نتیجه کاهش جابجایی خارج از صفحه ورق می‌شود.

انحناهای طولی، عرضی و پیچشی ورق در دمای محیط برای مدل 2 و مدل اجزای محدود به ترتیب در شکل‌های 14 و 15 نشان داده شده است. همانطور که در مقدمه بیان گردید مدل 1 قادر به نمایش تغییرات انحناهای طولی و عرضی نیست در صورتی که مطابق شکل‌های 14 (الف) و 15 (الف) در مدل 2 و مدل اجزای محدود، انحنای طولی در هر دو راستای x و y تغییر

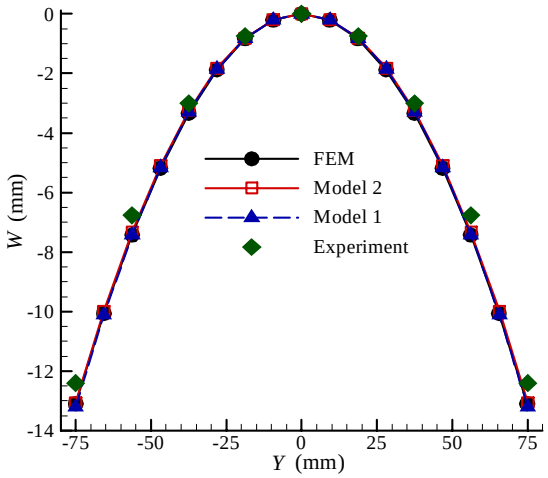


Fig.12 Out of plane displacement of the path L_3 at 25 °C

شکل 12 جابجایی خط خارج از صفحه ورق در مسیر L_3 در دمای 25 °C

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

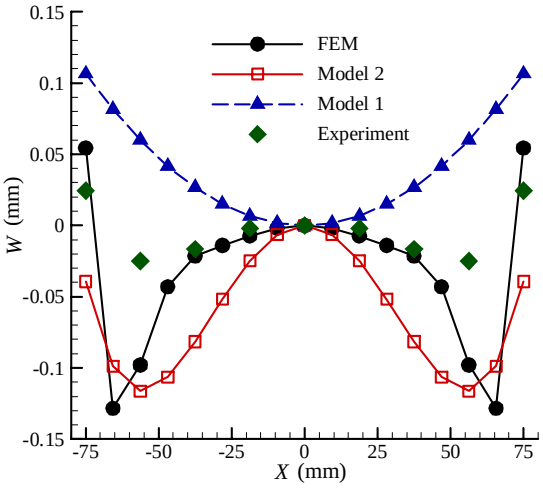


Fig.13 Out of plane displacement of the path L_4 at 25 °C

شکل 13 جابجایی خارج از صفحه ورق در مسیر L_4 در دمای 25 °C

کرده و بیشترین تغییرات آن نیز در راستای x صورت می‌گیرد. کمترین مقدار انحنای طولی از لحاظ اندازه در مرکز ورق بوده که با نزدیک شدن به لبه‌ها در راستای x (به‌ویژه در گوشه‌های ورق) این مقدار بیشتر می‌شود. مشابه انحنای طولی و مطابق شکل‌های 14 (ب) و 15 (ب)، انحنای عرضی در مدل اجزای محدود و مدل 2، در هر دو راستای x و y تغییر می‌کند و بیشترین مقدار آن در نواحی نزدیک به مرکز ورق بوده که با نزدیک شدن به لبه‌ها در راستای x این مقدار کاهش می‌یابد. همانطور که گفته شد نظریه توسعه یافته هایر قادر به نمایش انحنای پیچشی برای صفحه مرکب با چینش $[0/90]_T$ نیست و هیچ همخوانی با مدل اجزای محدود ندارد. درحالی‌که مطابق شکل‌های 14 (ج) و 15 (ج) انحنای پیچشی در مدل 2 و اجزای محدود غیر صفر و متغیر بوده و بیشترین و کمترین مقدار آن در گوشه‌های ورق مشاهده می‌شود. مدل 2 در قیاس با مدل 1 که هیچ انحنای پیچشی پیش‌بینی نمی‌کند، بیشترین همخوانی را با شبیه‌سازی اجزای محدود در انحناهای پیچشی از خود نشان می‌دهد با این وجود به علت درجه آزادی بیشتر شبیه‌سازی اجزای محدود نسبت به مدل نظری هنوز خطای قابل توجهی وجود دارد. به‌منظور مقایسه کمی تابع شکل پیشنهاد شده، مقادیر بیشینه و کمینه انحناهای محاسبه شده در حالت پایدار دوم برای مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود در جدول 4 ارائه شده است.

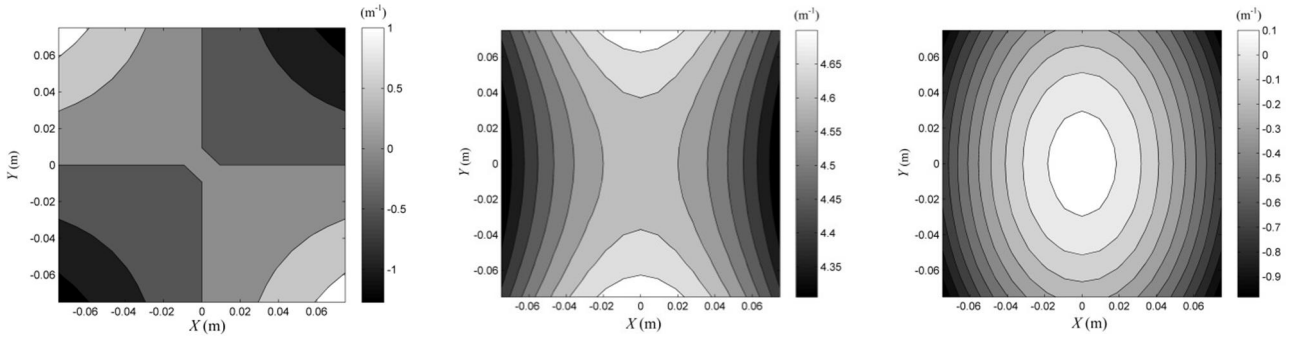
در گام بعدی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق مربعی بر حسب طول جانبی آن بعد از نقطه انشعابی برای مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود بررسی شده است. فرکانس طبیعی اول ورق (متناظر با شکل مود استوانه‌ای) با استفاده از تبدیل سریع فوریه محاسبه و نتایج آن در شکل 16 نشان داده شده است.

برای طول‌های کمتر از طول بحرانی (نقطه آغاز حالت دوپایا و متناظر با فرکانس طبیعی صفر) ورق تنها یک حالت پایدار زین اسبی و برای طول‌های بزرگتر دو حالت پایدار استوانه‌ای و یک حالت ناپایدار زین اسبی خواهد داشت.

جدول 4 مقادیر کمینه و بیشینه انحناها برای مدل‌های بررسی شده

Table 4 Minimum and maximum values of the curvatures for the investigated models

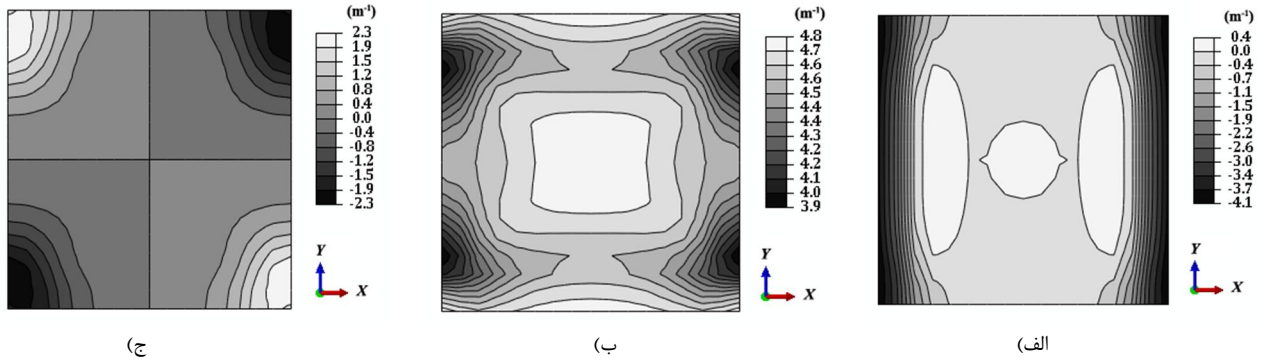
مدل	κ_{xx} (m^{-1})		κ_{yy} (m^{-1})		κ_{xy} (m^{-1})	
	کمینه	بیشینه	کمینه	بیشینه	کمینه	بیشینه
یک	-0.04	-0.04	4.70	4.70	0	0
دو	-1	0.15	4.30	4.73	-1.27	1.27
اجزای محدود	-4.11	0.38	3.95	4.78	-2.31	2.31



الف) ب) ج)

Fig.14 Curvatures of the laminate for model 2 at 25 °C: (a) κ_{xx}, (b) κ_{yy}, (c) κ_{xy}

شکل 14 انحناهای ورق در دمای 25 °C برای مدل 2: الف) انحنای طولی، ب) انحنای عرضی، ج) انحنای پیچشی



الف) ب) ج)

Fig.15 Curvatures of the laminate for FEM at 25 °C: (a) κ_{xx}, (b) κ_{yy}, (c) κ_{xy}

شکل 15 انحناهای ورق بررسی شده در دمای 25 °C برای شبیه‌سازی اجزای محدود: الف) انحنای طولی، ب) انحنای عرضی، ج) انحنای پیچشی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

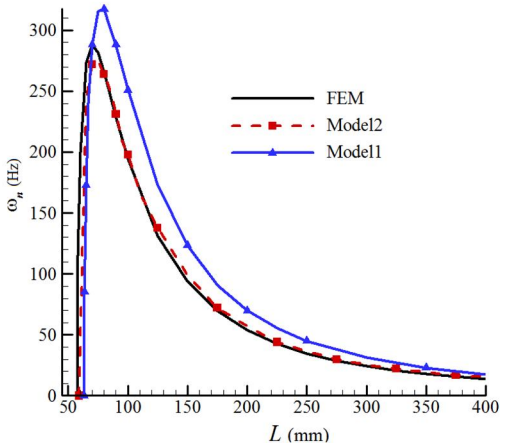


Fig.16 First natural frequency of the square laminate versus side length at 25 °C

شکل 16 فرکانس طبیعی اول ورق مربعی بر حسب طول جانبی در دمای 25 °C

همان‌گونه که از نتایج مشاهده می‌شود طول بحرانی محاسبه شده در شبیه‌سازی اجزای محدود در قیاس با مدل‌های 1 و 2 کمتر است. طول بحرانی برای مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود به ترتیب برابر 63.45، 59 و 57.5 میلی‌متر به‌دست آمده است. فرکانس طبیعی ورق با افزایش طول جانبی آن از نقطه انشعابی به سرعت افزایش یافته تا اینکه در طول جانبی 80 میلی‌متر برای مدل 1 و 75 میلی‌متر برای مدل 2 و 70 میلی‌متر برای شبیه‌سازی اجزای محدود به بیشینه مقدار ممکن می‌رسد. فرکانس طبیعی بیشینه برای مدل‌های 1، 2 و اجزای محدود به ترتیب 317، 274 و 284 هرتز محاسبه شده است پس از این نقطه در هر سه مدل، افزایش طول جانبی ورق کاهش مقدار فرکانس طبیعی را منجر خواهد شد.

مدل 2 در قیاس با مدل 1 همخوانی بسیار خوبی با شبیه‌سازی اجزای محدود دارد. بیشترین اختلاف مدل 1 با دو مدل دیگر در محدوده طول جانبی 80 تا 250 میلی‌متر مشاهده شده که این محدوده طول تقریبا برابر ابعاد قطعاتی نظیر فلپ و غیره در هواپیماهای بدون سرنشین است. فرکانس طبیعی محاسبه شده برای هر سه مدل در طول‌های زیاد تقریبا بر هم منطبق شده و از مقدار خطا کاسته می‌شود.

6- نتیجه گیری

مدل‌سازی ورق‌های مرکب دوپایا در کاربردهای عملی با فرض انحنای ثابت برای جابجایی برون صفحه ورق منجر به خطای قابل توجهی در نتایج به‌ویژه در فرکانس طبیعی اول و جابجایی نقاط نزدیک به گوشه‌های ورق خواهد شد. اگر چه مدل اجزای محدود نسبت به مدل‌های نظری جواب‌های با دقت بالاتر ارائه می‌دهد، اما به دلیل هزینه محاسباتی بالای آن، ارائه یک مدل نظری با دقت قابل قبول ضروری به نظر می‌رسد. از این رو به‌منظور بهبود نظریه توسعه یافته هایر و کاهش خطاهای موجود در مشخصات استاتیکی و ارتعاشی ورق، تابع شکل جدیدی برای جابجایی خارج از صفحه ارائه شده است. تابع شکل پیشنهادی (مدل 2) درجه آزادی بیشتری داشته و تغییرات انحناهای طولی و عرضی را در هر دو راستا x و y با چند جمله‌ای از درجه دو امکان پذیر می‌سازد. به‌منظور مقایسه تابع شکل پیشنهادی با تابع شکل هایر (مدل 1)، جابجایی خارج از صفحه، فرکانس طبیعی اول ورق و همچنین انحناهای طولی، عرضی و پیچشی ورق در دمای محیط به‌دست آمده و نشان داده شده تابع شکل پیشنهادی نسبت به تابع شکل هایر برای نمایش اثرات لبه مطلوب‌تر است و سازگاری بیشتری با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود و آزمایش‌های عملی دارد. لازم به ذکر است افزایش بیش‌تر مرتبه جابجایی خارج از صفحه اگرچه باعث کاهش خطا و دقت بیشتر نتایج می‌گردد اما با توجه به ماهیت غیرخطی مسئله زمان حل آن را نیز به میزان بسیار چشمگیری افزایش می‌دهد. لذا با در نظر گرفتن دقت نتایج و زمان حل مسئله، مدل 2 تابع شکلی مناسب برای جابجایی خارج از صفحه می‌باشد. از آنجایی که تابع شکل پیشنهادی امکان مدل نمودن تغییرات انحناهای طولی و عرضی را امکان پذیر می‌سازد این ایده می‌تواند در تحلیل‌های دینامیکی و ارتعاشی به‌منظور مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده پرش ناگهانی و محاسبه نیروی پرش نیز بکار گرفته شود.

7- فهرست علائم

a	ضریب میرایی جرمی
b	ضریب میرایی سختی
$\mathrm{C}(\hat{\mathrm{W}})$	میرایی تناسبی ریلی
h	ضخامت لایه مرکب (m)
$J_{i,j}$	درایه‌های ماتریس ژاکوبین
$\mathrm{K}(\hat{\mathrm{W}})$	تابع سختی غیرخطی ورق
L	تابع لاگرانژ
L_x	طول ورق مرکب (m)
L_y	عرض ورق مرکب (m)
M	ماتریس جرمی
n	تعداد لایه‌های مرکب
O_u	مرتبه جابجایی u_0
O_v	مرتبه جابجایی v_0
$\bar{Q}$	ماتریس سختی کاهش یافته
t	زمان
T	انرژی جنبشی (J)
U	انرژی کرنشی (J)
u_0	جابجایی صفحه میانی در جهت x (m)
$\hat{u}_{i,j}$	ضرایب جابجایی u_0
v_0	جابجایی صفحه میانی در جهت y (m)
$\hat{v}_{i,j}$	ضرایب جابجایی v_0
w_0	جابجایی صفحه میانی در جهت z (m)
$\hat{w}_{i,j}$	ضرایب جابجایی w_0

علائم یونانی

α	بردار ضریب انبساط گرمایی
ε	بردار کرنش کلی
ε^0	بردار کرنش صفحه میانی
κ^0	بردار انحنا صفحه میانی (m^{-1})
ρ	چگالی ورق مرکب (kgm^{-3})
ΔT	اختلاف دمایی (°C)
ζ	نسبت میرایی
ω_n	فرکانس طبیعی (Hz)

بالانویس‌ها

k	شماره لایه

8- پیوست الف

نمونه‌ای از یک لایه صفحه مرکب در شکل پ-1 نشان داده شده است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود دستگاه مختصات عمومی x-y-z با دستگاه مختصات محلی x_1-x_2-x_3 که منطبق بر راستای الیاف و عمود بر آن است، زاویه θ می‌سازد. برای تحلیل رفتار یک لایه جهت‌های اصلی هر لایه را x_1 ، x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم؛ z و x_3 بر هم منطبق هستند.

در حالت تنش صفحه‌ای روابط تنش - کرنش با در نظر گرفتن کرنش‌های گرمایی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha_{xx}\\ \alpha_{yy}\\ 2\alpha_{xy}\end{Bmatrix}\Delta T\right) \qquad \text{(الف-1)}$$

درایه‌های ماتریس سختی کاهش یافته در حالت تنش - صفحه‌ای برای یک ماده ارتوتروپیک عبارت‌اند از :

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta\\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta\\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\end{aligned} \qquad \text{(الف-2)}$$

در مجموعه روابط (الف-2)، Q_{11}، Q_{12}، Q_{16}، Q_{22}، Q_{26} و Q_{66} جمله‌های ماتریس سختی در حالت تنش- صفحه‌ای می‌باشند و عبارت‌اند از :

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\\ Q_{22} &= G_{12}\end{aligned} \qquad \text{(الف-3)}$$

به‌طور مشابه ضرایب انبساط گرمایی در دستگاه مختصات عمومی بر حسب مقادیر آن‌ها در جهت‌های اصلی ماده عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\alpha_{xx} &= \alpha_1\cos^2\theta + \alpha_2\sin^2\theta\\ \alpha_{yy} &= \alpha_1\sin^2\theta + \alpha_2\cos^2\theta\\ \alpha_{xy} &= 2(\alpha_1-\alpha_2)\cos\theta\sin\theta\end{aligned} \qquad \text{(الف-4)}$$

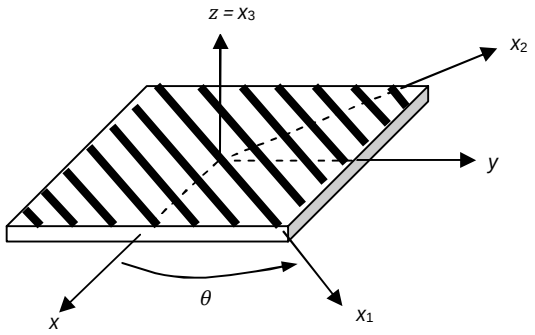


Fig.a-1 Schematic of a lamina in global and local coordinate systems

شکل الف-1 نمای طرحواره یک تک لایه در دستگاه مختصات عمومی و محلی

9- مراجع

[1] S. Daynes, P. M. Weaver, Stiffness tailoring using prestress in adaptive composite structures, *Composite Structures*, Vol. 106, No. 1, pp. 282-287, 2013.

[2] I. K. Kuder, A. F. Arrieta, W. E. Raither, P. Ermanni, Variable stiffness material and structural concepts for morphing applications. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 63, No. 1, pp. 33–55, 2013.

[3] M. W. Hyer, Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, No. 1,pp. 175-194, 1981.

[4] M. W. Hyer, Calculations of the room-temperature shapes of unsymmetric laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, No. 1, pp. 296-310, 1981.

[5] M. W. Hyer, The room-temperature shapes of four-layer asymmetric cross-ply laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 16, No. 1, pp. 318-340, 1982.

[6] M. Moore, S. Ziaei-Rad, H. Salehi, Thermal response and stability characteristics of bi-stable composite laminates by considering temperature dependent material properties and resin layers, *Applied Composite Materials*, Vol. 20, No. 1, pp. 87-106, 2013.

[7] M. Moore, S. Ziaei-Rad, A. Firouzian-Nejad, Temperature-curvature relationships in asymmetric angle ply laminates by considering the effects of resin layers and temperature dependency of material properties, *Journal of Composite Materials*, Vol. 48, No. 9, pp. 1071-1089, 2014.

[8] P. F. Giddings, C. R. Bowen, A. I. T. Salo, H. A. Kim, A. Ive, Bistable composite laminates: effects of laminate composition on cured-shape and response to thermal load. *Composite Structures*, Vol. 92, No. 9, pp. 2220–2225, 2010.

[9] A. Hamamoto, M. W. Hyer, Non-linear temperature-curvature relationships for unsymmetric graphite-epoxy laminates, *International Journal of Solids and Structures.*, Vol. 23, No. 7, pp. 919-935, 1987.

[10] S. Tawfik, T. Xinyuan, S. Ozbay, E. Armanios, Anticlastic stability modeling for cross-ply composites, *Journal of Composite Materials.*, Vol. 41, No. 11, pp. 1325-1338, 2007.

[11] C. G. Diaconu, P. M. Weaver, A. F. Arrieta, Dynamic analysis of bi-stable composite plate. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 322, No. 4, pp. 987–1004, 2009.

[12] G. A. Vogl, M. W. Hyer, Natural vibration of unsymmetric cross-ply laminates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 1, pp. 4764–4779, 2011.

[13] M. L. Dano, M. W. Hyer, SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates, *Journal of Solids Structure*, Vol. 40, No. 22, pp. 5949-5972, 2003.

[14] H. A. Kim, D. N. Betts, A. I. T. Salo, C. R. Bowen, Shape memory alloy – piezoelectric active structures for reversible actuation of bistable composites, *Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 48 , No. 6, pp. 1265-1268, 2010.

[15] M. Gude, W. Hufenbach, Design of novel morphing structures based on bistable composites with piezoceramic actuators, *Journal Mechanics of Composite Materials*, Vol. 42, No. 4, pp. 339-46, 2006.

[16] A. H. Esmaili, M. Salmani-Tehrani, H. Salehi, Analysis of snap through of bi-stable composite laminates using FEM, *The 20nd Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME*, Shiraz, Iran, May 16-18, 2012. (in Persian فارسی)

[17] M. Moore, A. Firouzian-Nejad, S. Ziaei-Rad, Snapping loads and deformations of angle ply bi-Stable laminates, *The 22nd Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME*, Ahwaz, Iran, April 22-24, 2014.

[18] A. F. Arrieta, P. Hagedorn, A. Erturk, D. J. Inman, A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting, *Applied Physics Letters*, Vol. 97, No. 10, pp. 104102, 2010.

[19] S. Daynes, P. M. Weaver, J. A. Trevarthen, A morphing composite air inlet with multiple stable shapes. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 22, No. 9, pp. 961–73, 2011.

[20] D. Fuhong, L. Hao, D. Shanyi, A multi-stable lattice structure and its snap-through behavior among multiple states, *Composite Structures*, Vol. 97, No. 1, pp. 56-63, 2013.

[21] F. Mattioni, P. M. Weaver, K. D. Potter, M. I. Friswell, The application of thermally induced multistable composites to morphing aircraft structures, *Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, Vol. 6930, No. 1, pp. 6930-6938, 2008.

[22] A. Firouzian-Nejad, S. Ziaei-Rad and M. Moore, Designing a passive vibration isolator incorporating a bistable composite plate, *The 22nd Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME*, Ahwaz, Iran, April 22-24, 2014. (in Persian فارسی)

[23] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, pp. 109-132, second edition, CRS press, 2004.

[24] C. Kyriazoglou, F. J. Guild, Finite element prediction of damping of composite GFRP and CFRP laminates - a hybrid formulation - vibration damping experiments and Rayleigh damping, *Composites Science and Technology*, Vol. 66, No. 11, pp. 487–498, 2006.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-03-28]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.4.34.3]