



بررسی شکست نمونه دارای شیار U-شکل ساخته شده از ماده مرتبه‌ای مس-فولاد تحت مود اول بارگذاری

محمد رضا مصدقی¹، هادی صلواتی^{2*}، یونس علیزاده³، امیر عبدالله³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهنر کرمان، کرمان

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* کرمان، صندوق پستی 76175-133، hadi_salavati@uk.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 مهر 1395

پذیرش: 13 دی 1395

ارائه در سایت: 10 بهمن 1395

کلید واژگان:

بار شکست

ماده مرتبه‌ای

انتگرال J

ذوب دوباره سرباره‌ای

شیار U-شکل

چکیده

در این مقاله اندازه‌گیری بار بحرانی شکست در نمونه‌های مرتبه‌ای ساخته شده از مس و فولاد ابزار به دو روش حل عددی و تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا نمونه‌های مرتبه‌ای دارای شیار U-شکل در حالت توقف‌گر شیار با استفاده روش ذوب دوباره سرباره‌ای ساخته شدند. سپس جهت مشخص کردن محل لایه‌های مرتبه‌ای، نمونه‌ها مورد آزمون سختی راکول A قرار گرفتند. در این نمونه‌ها خواص مکانیکی از جمله مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در عرض نمونه با توجه به مرتبه‌ای بودن آن‌ها، متغیر می‌باشند. در ادامه نمونه‌ها تحت آزمون خمش سه‌نقطه در مود اول بارگذاری قرار گرفته و بار بحرانی شکست آن‌ها از طریق نمودار نیرو جابجایی به‌دست آمد. همچنین با شبیه‌سازی این آزمون در نرم‌افزار المان محدود، ابتدا مقدار بحرانی انتگرال J برای هر یک از نمونه‌ها به‌دست آمده و با استفاده از آن، مقدار بار بحرانی شکست نیز ارزیابی شد. در این تحقیق به ازای عمق‌های مختلف نوک شیار، اثر تغییر شعاع شیار بر روی مقدار بحرانی انتگرال J و بار بحرانی شکست نمونه مرتبه‌ای و نمونه همگن متناظر آن اندازه‌گیری شده و مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. میانگین اختلاف بار شکست پیش‌بینی شده توسط معیار انتگرال J با نتایج تجربی برابر با 17.84 درصد است. در پایان تأثیر تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای بر روی انتگرال J بحرانی و بار شکست بررسی شده و نشان داده شد که اگر تعداد لایه‌ها بیشتر از 20 باشد، تعداد لایه‌ها تأثیری بر روی نتایج ندارد.

Fracture assessment of specimens weakened by U-notch made of functionally graded materials under mode I loading

Mohammad Reza Mosadeghi¹, Hadi Salavati^{2*}, Yoness Alizadeh¹, Amir Abdullah¹

1- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

* P.O.B. 76175-133, Kerman, Iran, hadi_salavati@uk.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 October 2016
Accepted 02 January 2017
Available Online 29 January 2017

Keywords:
Critical load
Functionally graded material
Integral J
Electro slag remelting
U-notch

ABSTRACT

In this paper, fracture behavior of functionally graded material weakened by U-notches under mode I loading has been investigated. Electro slag remelting process has been used to produce functionally graded specimens in a notch arrester configuration. Hardness test has been utilized to define the position of each layer. Mechanical properties, including elastic modulus and poisson's ratio, vary along the width of U-notched specimens. The critical fracture load (F_{cr}) was achieved by performing three point bending examination and using force-displacement curve. Then, the process simulation was done by finite element software. Firstly, Jcr of each specimen was calculated by using critical value of strain energy averaged over a well-defined control volume. Then the critical fracture load was evaluated by means of the J Integral criterion. In this research, the effect of the notch root radius, for a fixed notch depth, on the Jcr value as well as the critical fracture load has been studied. To compare fracture behavior of the FG specimens with the corresponding homogeneous ones, have the same properties with the notch root layer in FG specimen, F_{cr} and Jcr value of each have been investigated. The average difference between the predicted F_{cr} by J integral criteria and experimental results is 17.84%. Finally, the effect of number of graded area layers on Jcr and F_{cr} has been investigated. The results shows, the value of Jcr and F_{cr} do not be affected though the number of layers is more than 20.

Please cite this article using:

M. R. Mosadeghi, H. Salavati, Y. Alizadeh, A. Abdullah, Fracture assessment of specimens weakened by U-notch made of functionally graded materials under mode I loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 1-9, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

1- مقدمه

پیشرفت و توسعه ماشین‌آلات و ابزارهای صنعتی استفاده از فلزات با خواص معمول را با محدودیت مواجه کرده است. در بسیاری از صنایع پیشرفته از جمله هوافضا، موادی که مقاومت به دمای بالایی دارند و در کنار آن خصوصیات مکانیکی بارزی نیز از خود نشان می‌دهند، به‌شدت مورد نیاز است. برای اولین بار محققان ژاپنی در سال 1984 توانستند موادی به نام ماده مدرج تابعی را بسازند که مقاومت به حرارت بالایی را داشتند و برای ایجاد سپر حرارتی در سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفتند [1]. مواد مرتبه‌ای نوعی کامپوزیت هستند که خواص آن‌ها به‌صورت تدریجی و پیوسته در طول آن‌ها تغییر می‌کند. این تغییر تدریجی در خواص، ناشی از تغییر در درصد حجمی دو ماده‌ی موجود در ساختار ماده مرتبه‌ای است. از آن‌جا که در این مواد یک پیوستگی در لایه‌ها ایجاد می‌شود، بنابراین پدیده تورق دیگر امکان‌پذیر نیست و در نتیجه این مواد خواص مکانیکی بهتری را نسبت به کامپوزیت‌های لایه‌ای فراهم می‌کنند. یکی از مهمترین روش‌های تولید مواد مرتبه‌ای، فرایند ذوب دوباره سرباره‌ای¹ است. پس از تولید فولاد مرتبه‌ای به روش ذوب دوباره سرباره‌ای توسط آقازاده و شاه‌حسینی [2] در سال 2005، تحقیقات زیادی بر روی رفتار مکانیکی این مواد صورت گرفته است. آقازاده و همکاران [3] رفتار کششی فولاد مرتبه‌ای تولید شده به روش ذوب دوباره سرباره‌ای را به‌صورت تجربی بررسی کردند. در این تحقیق با استفاده از قانون مخلوط فازها نمونه‌های مرتبه‌ای مدل‌سازی شده و رفتار مکانیکی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌داد که استحکام کششی این مواد به ترکیب شیمیایی و تعداد لایه وابسته است و طبق رفتار کششی تک‌تک لایه‌ها به دست می‌آید.

هم‌زمان با به‌کارگیری مواد نو و پیشرفته در ماشین‌آلات صنعتی، باید شرایط طراحی ایده‌آل آن‌ها نیز میسر شود که در این‌جا علم مکانیک شکست نقش به‌سزایی را ایفا می‌کند. بسیاری از حوادثی که در صنعت هوابیمایی و هوافضا در دهه‌های گذشته اتفاق افتاده است را به عدم پایبندی بر اصول طراحی براساس معیارهای شکست نسبت می‌دهند. وجود شیار در یک نمونه باعث ایجاد تمرکز تنش در اطراف آن می‌شود که این مسئله، به‌ویژه در مواد ترد، می‌تواند عمر سازه را از مقدار پیش‌بینی شده کمتر کرده و در حالت بحرانی زمینه‌ساز پدیده شکست می‌شود. ویلیامز [4] میدان تنش اطراف شیار V-شکل را مورد بررسی قرار داد و متوجه شد که به ازای تمامی حالت‌های شرایط مرزی، تنش در نوک شیار به بی‌نهایت میل می‌کند. در سال 1996 لازارین و همکاران [5]، روابط توزیع میدان تنش شیار V-شکل نوک تیز را تقریب زدند. در ادامه فیلیپی [6]، این روابط توزیع تنش را برای شیار V-شکل نوک‌گرد نیز گسترش داد.

انتگرال J به‌عنوان یک انتگرال خطی برای ارزیابی ترک و شیار توسط رایس [7] معرفی شد. این انتگرال بین دو نقطه که هر یک از آن‌ها بر روی یکی از لبه‌های ترک (یا شیار) و روبروی هم قرار دارند، گرفته می‌شود. اگر مقدار انتگرال J برابر با مقدار بحرانی خود یعنی J_{IC} شود، در آن صورت شکست رخ می‌دهد. متوینکو [8] در سال 2004 روابطی را به‌منظور ارزیابی انتگرال J در نمونه‌های دارای شیار U-شکل و با توجه به رفتار الاستیک و الاستیک-پلاستیک مواد ارائه نمود. در این تحقیق، کل نیم‌دایره نوک شیار به‌عنوان مرز انتگرال‌گیری استفاده شده و روابط بر پایه آنالیز تمرکز تنش به دست آمد.

در سال 2010 براتی و همکاران [9] انتگرال J فولاد مرتبه‌ای

آستنیت-مارتنزیت را مورد ارزیابی قرار دادند و موفق به اندازه‌گیری انتگرال J فولاد مرتبه‌ای بر روی دو مسیر انتگرال‌گیری (مرز شیار و مرز حجم کنترل) شدند. نتایج نشان می‌داد که مستقل از مسیر بودن انتگرال J در فولادهای مرتبه‌ای نیز معتبر است. در کار دیگری [10] اثر عمق شیار بر روی مقدار انتگرال J و بار بحرانی توسط براتی بررسی شد. در سال 2013 منجم، اثر اندازه شعاع انحنای شیار بر روی مقدار انتگرال J را در نمونه فولاد مرتبه‌ای باینیتی کرد و نشان داد با افزایش شعاع انحنای مقدار انتگرال J بحرانی (J_{IC}) نیز افزایش می‌یابد [11, 12]. همچنین در مقاله دیگری [13] اثر عمق شیار بر روی مقدار انتگرال J نمونه فولاد مرتبه‌ای مورد ارزیابی قرار گرفت و نشان داده شد افزایش عمق باعث بالا رفتن انتگرال J بحرانی می‌شود.

در این تحقیق به بررسی شکست نمونه‌های مرتبه‌ای تشکیل شده از فازهای مس خالص و فولاد ابزار پرداخته می‌شود. برای این منظور ابتدا نمونه‌های مرتبه‌ای دارای شیار U با روش ذوب دوباره سرباره‌ای تولید شده و تحت آزمون خمش سه نقطه در مود اول بارگذاری قرار گرفته و بار شکست آن‌ها به‌دست می‌آید. در این نمونه‌ها تمامی خواص مکانیکی از قبیل مدول الاستیسیته (E)، ضریب پواسون (ν)، تنش تسلیم (σ_y)، تنش نهایی (σ_t) و چقرمگی شکست (K_{IC}) در عرض نمونه متغیر است که تغییرات این خواص با استفاده از تابع نمایی تقریب زده می‌شود. در ادامه با مدل‌سازی نمونه‌ها در نرم‌افزار المان محدود و با استفاده از معیار انتگرال J و انتخاب مرز حجم کنترل به‌عنوان ناحیه انتگرال‌گیری، تأثیر عمق و شعاع شیار بر روی بار بحرانی شکست بررسی شده و با نتایج تجربی مقایسه می‌شود. بررسی شکست نمونه‌های همگن متناظر با نمونه‌های مرتبه‌ای و بررسی تأثیر تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای بر نتایج، از دیگر موضوعات مطرح شده در این پژوهش است.

2- کارهای تجربی

2-1- تولید نمونه مرتبه‌ای

ترکیب عناصر موجود در ساختار فولاد ابزار و مس به‌کار رفته در این تحقیق، در جدول 1 و 2 آورده شده است. در "شکل 1" مراحل ساخت نمونه مرتبه‌ای مس-فولاد با استفاده از روش ذوب دوباره سرباره‌ای برای آزمون خمش سه‌نقطه نشان داده شده است. برای تولید شمش مرتبه‌ای مس-فولاد از روش ذوب دوباره سرباره‌ای، ابتدا باید الکترودی شامل دو میلگرد مس و فولاد ساخته شود. برای این کار، پس از تهیه میلگردهایی از جنس مس و فولاد که به ترتیب دارای قطر 40 و 45 میلی‌متر و ارتفاع 100 میلی‌متر بودند، عملیات ماشین‌کاری و برش بر روی آن‌ها انجام شد. پس از اتصال میلگردهای مس و فولاد به یکدیگر، باید آن‌ها را به میله دستگاه ذوب دوباره سرباره‌ای به ارتفاع دو متر که به یک قطب منبع تغذیه وصل است، اتصال نمود. این میله در هنگام عملیات ذوب به‌صورت پیوسته و کنترل‌شده به سمت پایین قالب هدایت شده و شرایط ذوب شدن لایه‌لایه الکترود را فراهم می‌کند. در ادامه عملیات ذوب دوباره سرباره‌ای بر روی الکترود صورت گرفته و یک شمش مرتبه‌ای مس-فولاد به‌دست آمد (شکل 2 و 3). برای انجام عملیات ذوب دوباره سرباره‌ای باید با توجه به جنس الکترود مصرفی، سرباره مناسبی انتخاب شود. برای ذوب الکترود مس-فولاد از یک کیلوگرم سرباره با ترکیب 60 درصد کلسیم فلوراید (CaF_2)، 20 درصد کلسیم اکسید (CaO) و 20 درصد آلومینیوم اکسید (Al_2O_3) استفاده شد. این سرباره (60/20/20) مشخصات ذوب خوبی را فراهم می‌کند و دارای مقاومت متوسطی است. همچنین حضور 20 درصد کلسیم اکسید در این ترکیب، باعث می‌شود

¹ Electro Slag Remelting

2-3- آزمون سختی سنجی

برای مشخص کردن محدوده ناحیه همگن و ناحیه مرتبه‌ای از آزمون سختی سنجی راکول A استفاده شده است. در "شکل 8" نتایج حاصل از این آزمون بر روی 12 نقطه که به فاصله یک میلی‌متر بر روی عرض نمونه مرتبه‌ای مس-فولاد قرار گرفته‌اند، نشان داده شده است. مطابق "شکل 8"، سه میلی‌متر ابتدایی عرض نمونه شامل فولاد همگن است. در فاصله 3 تا 10 میلی‌متری از لبه نمونه، ناحیه مرتبه‌ای فولاد-مس حضور دارد و در نهایت 2 میلی‌متر انتهایی نمونه دارای مس خالص است.

2-4- بارگذاری مود اول نمونه‌ها توسط آزمون خمش سه نقطه

تعداد نمونه‌های تست شده 6 عدد می‌باشد. در واقع مقدار بار بحرانی شکست نمونه‌های به ازای دو عمق شیار (3.5 و 4.5 میلی‌متر) و شعاع شیار (0.5، 1 و 2 میلی‌متر) بررسی شده است. هر یک از نمونه‌های مرتبه‌ای شیاردار تحت آزمون خمش سه نقطه با سرعت بارگذاری 0.5 میلی‌متر بر دقیقه قرار گرفته و بار شکست آن‌ها محاسبه می‌شود (شکل 9). خروجی این آزمایش یک نمودار نیرو برحسب جابجایی محل اثر نیرو است که با استفاده از آن می‌توان مقدار بار بحرانی شکست نمونه‌ها رو به صورت تجربی به دست آورد. در "شکل 10" نمودار بار جابجایی نمونه‌ای با عمق شیار 4.5 میلی‌متر و شعاع شیار 1 میلی‌متر نشان داده شده است. همچنین نتایج اندازه‌گیری بار بحرانی نمونه‌ها در جدول 5 آورده شده است.

3- تحلیل المان محدود

3-1- مدل سازی نمونه در نرم افزار آباکوس

از آن جا که خواص مکانیکی در عرض نمونه متغیر است، باید نمونه را لایه بندی کرده و خواص هر یک از لایه‌ها به صورت جداگانه در نرم افزار تعریف شود. در "شکل 11" نمونه مرتبه‌ای لایه بندی شده نشان داده شده است. همچنین شرایط تکیه گاهی (ساده، مقاوم در برابر جابجایی عمودی $u_y=0$) و محل بارگذاری در این شکل مشاهده می‌شود. "شکل 12" نمونه شیاردار مشرری شده را نشان می‌دهد. المان‌ها چهاروجهی بوده و از خانواده کرنش صفحه‌ای انتخاب شده‌اند. همچنین برای حل دقیق تر از المان‌هایی با تابع شکل مرتبه دوم استفاده شده است.

3-2- تعیین حجم کنترل

یوسیباش [17] رابطه مقدار شعاع کنترل R_c برای حالت کرنش صفحه‌ای را به صورت رابطه (1) پیشنهاد داده است.

$$R_c = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (1)$$

در این رابطه ν ضریب پواسون، K_{IC} چقرمگی شکست و σ_t استحکام کششی ماده را نشان می‌دهد. در مواد مرتبه‌ای مقادیر K_{IC} و σ_t در جهت

خاصیت گوگردزدایی سرباره در حد بسیار خوبی بالا رود. پس از ساخت شمش مرتبه‌ای مس- فولاد برای از بین بردن حفره‌های ریز موجود در آن و همچنین فشردن ناحیه مرتبه‌ای شمش، باید آن را تحت عملیات پرس گرم قرار داد. فرایند پرس کاری در دمای 900 درجه سانتی‌گراد صورت پذیرفت. طی این عملیات، ارتفاع نمونه از 70 میلی‌متر به 12 میلی‌متر رسانده شد. در نهایت برطبق استاندارد ASTM E1820 [14] نمونه‌هایی به طول، عرض و ضخامت به ترتیب 60، 12 و 6 میلی‌متر با استفاده از دستگاه وایرکات از شمش مرتبه‌ای بریده شدند (شکل 4).

2-2- اندازه‌گیری خواص مکانیکی مس و فولاد

برای اندازه‌گیری مدول الاستیسیته (E) مس و فولاد از آزمون کشش طبق استاندارد ASTM E8 [15] استفاده شد. ابتدا نمونه‌های آزمون کشش از مس و فولاد ساخته شد و با انجام آزمون کشش ساده و استخراج دیاگرام تنش- کرنش، مقدار مدول الاستیسیته محاسبه شد. از طرفی داده‌های مرجع [16] به عنوان مقدار ضریب پواسون فولاد و مس در نظر گرفته شد. برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست (K_{IC}) و تنش نهایی (σ_{UT}) مواد، باید نمونه کشش یا خمش از آن‌ها ساخته شود و تحت آزمون قرار گیرند. در این پروژه از آن‌جا که برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست مس در حالت کرنش صفحه‌ای، باید ضخامت نمونه تحت آزمون خمش سه نقطه بسیار بزرگ باشد تا شرایط کرنش صفحه‌ای ایجاد شود، در نتیجه با توجه به محدودیت‌های موجود در ساخت چنین نمونه‌ای به ناچار از نتایج موجود در مرجع [16] استفاده شده است. برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست و تنش نهایی فولاد از طریق آزمون خمش سه نقطه، به ترتیب از تیرهایی با شیار V-نوک تیز و شیار U-شکل استفاده شد. "شکل 5 و 6" به ترتیب نمودار بار-جابجایی حاصل از آزمون خمش سه نقطه بر روی نمونه‌های همگن فولاد برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست و تنش نهایی را نشان می‌دهد. پس از به دست آوردن بار شکست نمونه‌های فولادی دارای شیار U-شکل و V-شکل، باید این نمونه‌ها را در نرم افزار اجزای محدود آباکوس مدل سازی کرده و در قسمت تعیین بار وارده، این مقادیر بار شکست گذاشته شود. برای به دست آوردن مقدار K_{IC} نوک شیار که همان چقرمگی شکست نمونه است، ابتدا باید با انتخاب چند نود بالاتر از نوک شیار و در راستای نیمساز آن، نمودار K_I برحسب فاصله از نوک شیار رسم شود. سپس با مشاهده روند تغییرات، مقدار تقریبی آن در نوک شیار به دست می‌آید (شکل 7). مانند مراحل که برای محاسبه K_{IC} طی شد، در اینجا نیز برای به دست آوردن σ_{UT} فولاد ابزار، نمونه دارای شیار U-شکل در نرم افزار آباکوس مدل سازی شد و مقدار بار وارد بر آن، همان بار شکست حاصل از آزمون تجربی گذاشته شد. استحکام شکست فولاد برابر با حداکثر تنش مماسی در نوک شیار است. خواص مکانیکی مس و فولاد در جدول 3 آورده شده است. همچنین خواص مکانیکی ناحیه مرتبه‌ای بین دو فاز همگن مس و فولاد، با استفاده از تابع نمایی تقریب زده شده است.

جدول 1 ترکیب شیمیایی فولاد ابزار

Table 1 Chemical composition of tool steel

C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Mo	Cu	V	W	Ti	Co	Al	Sn	Pb	As	Fe
0.57	0.65	0.38	0.02	0.005	0.97	0.04	0.06	0.04	0.14	1.7	0.003	0.006	0.042	0.005	0.002	0.005	Base

جدول 2 ترکیب شیمیایی مس خالص

Table 2 Chemical composition of pure copper

Zn	Pb	Sn	P	Mn	Fe	Ni	Si	Ag	Co	Be	Cu
< 0.01	< 0.01	< 0.01	0.007	0.01	0.02	0.01	< 0.005	0.005	0.01	< 0.001	> 99.9

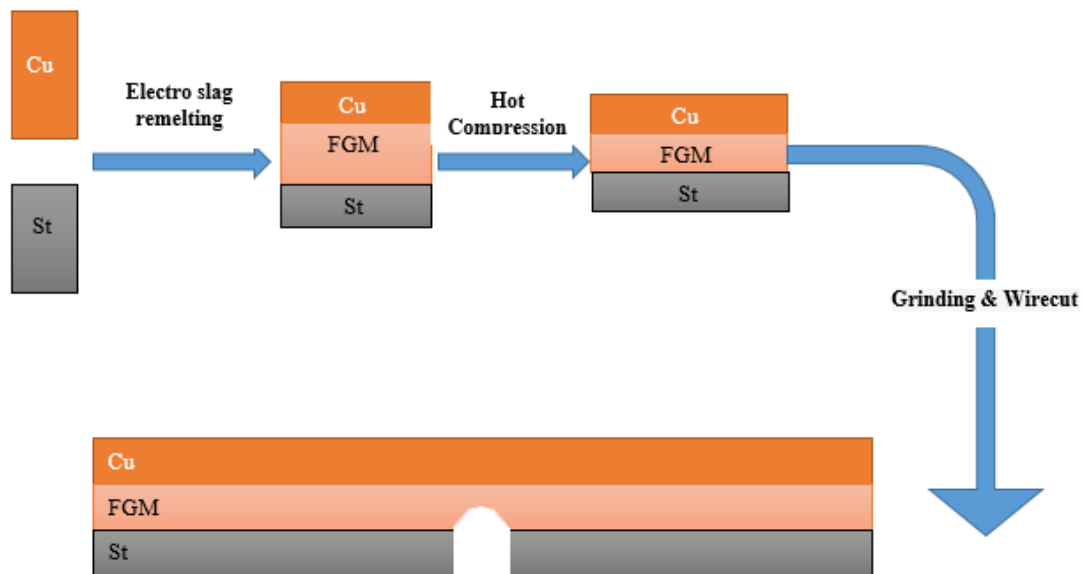


Fig. 1 The steps of manufacturing graded copper-steel specimen

شکل 1 مراحل ساخت نمونه مرتبه‌ای مس-فولاد

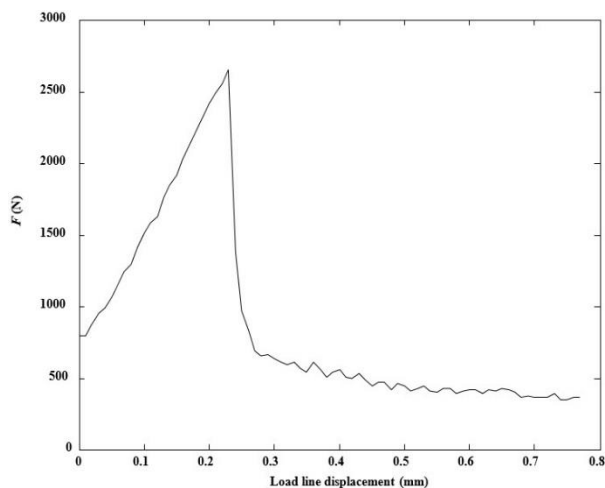


Fig. 5 Experimental load-displacement curve of a V-notched specimen under three point bending test to measure K_{IC}

شکل 5 نمودار بار-جابجایی نمونه دارای شیار V برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست فولاد

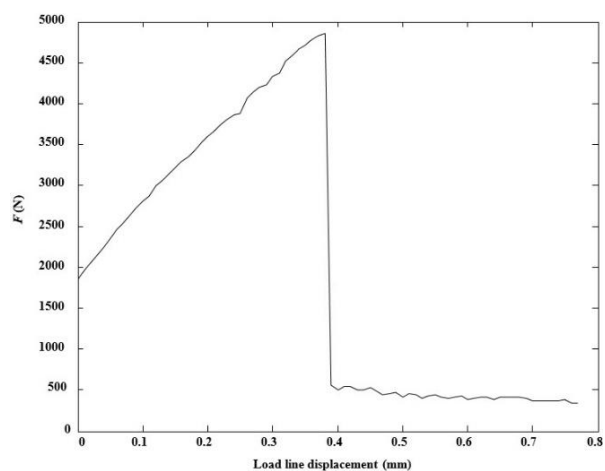


Fig. 6 Experimental load-displacement curve of a U-notched specimen under three point bending test to measure σ_{UT}

شکل 6 نمودار بار-جابجایی نمونه دارای شیار U برای اندازه‌گیری تنش نهایی فولاد



Fig. 2 Top view of mold immediately after the melting operation

شکل 2 نمای بالای قالب بلافاصله بعد از اتمام عملیات ذوب



Fig. 3 Solidified copper-steel ingot

شکل 3 شمش انجماد یافته مس-فولاد



Fig. 4 A graded Copper-steel Specimen weakened by U-notch

شکل 4 نمونه مرتبه‌ای شیاردار مس-فولاد

I به سمت بیرون از آن و u بردار جابجایی را نشان می‌دهد. مسیر انتگرال‌گیری را می‌توان بر روی لبه آزاد (مرز داخلی حجم کنترل) انتخاب کرد. با توجه به این که مقدار انتگرال بر روی مسیر بسته صفر می‌باشد، بنابراین مطابق "شکل 13"، مقدار انتگرال J بر روی مسیر بسته ABCA صفر می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت:

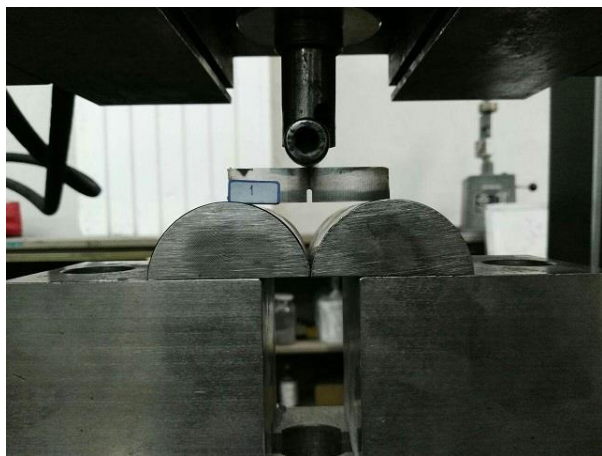


Fig. 9 A graded copper-steel specimen under three-point bending test
شکل 9 نمونه مرتبه‌ای مس-فولاد تحت آزمون خمش سه نقطه

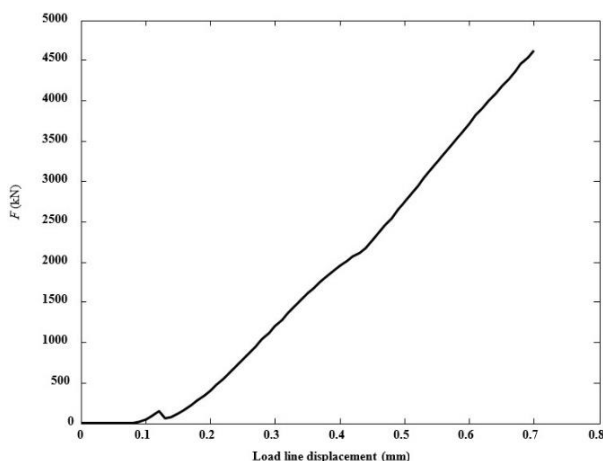


Fig. 10 Load-displacement curve of copper-steel specimen under three-point bending

شکل 10 نمودار بار-جابجایی نمونه مرتبه‌ای مس-فولاد تحت آزمون خمش سه نقطه

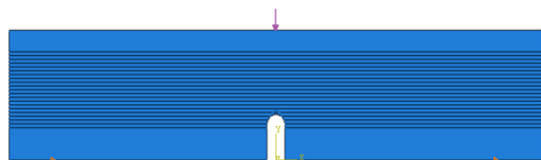


Fig. 11 Modeling of FG specimen weakened by U-notch in ABAQUS
شکل 11 نمونه مرتبه‌ای شیاردار مدل سازی شده در نرم افزار آباکوس

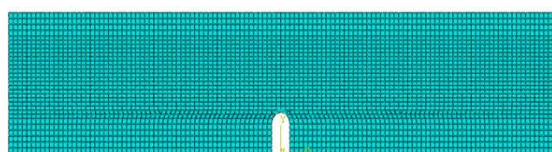


Fig. 12 A meshed sample of FG specimen
شکل 12 نمونه مرتبه‌ای مش زده شده

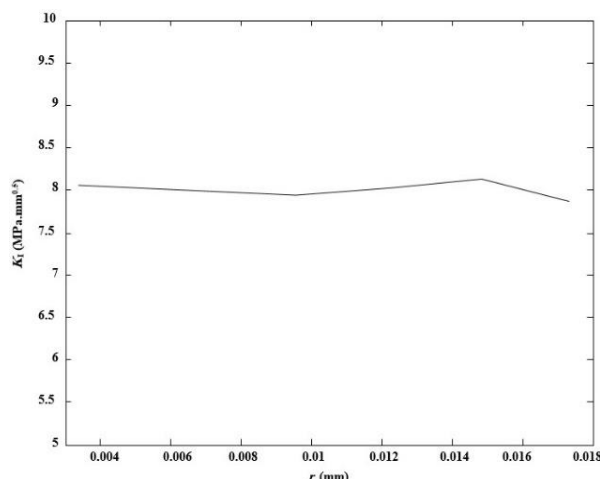


Fig. 7 Stress intensity factor vs distance from V-notch tip

شکل 7 نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول برحسب فاصله از نوک شیار V-شکل

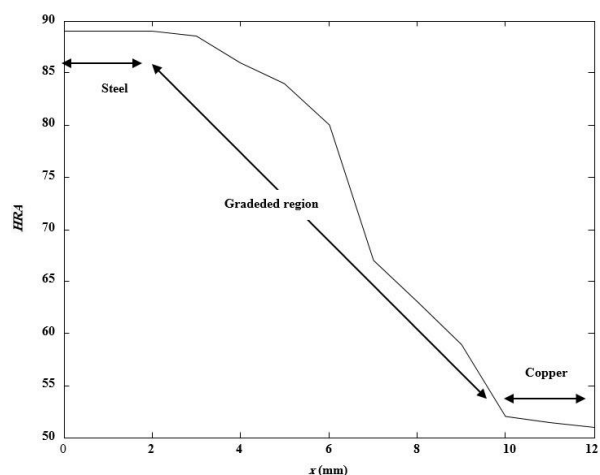


Fig. 8 Rockwell A hardness vs distance from the edge of specimen

شکل 8 نمودار سختی برحسب فاصله از لبه عرضی نمونه

x متغیر است، در نتیجه مقدار R_c ثابت نیست؛ بنابراین رابطه شعاع حجم کنترل برای ماده مرتبه‌ای به صورت رابطه درمی‌آید.

$$R_c(x) = \frac{(1 + \vartheta(x))(5 - 8\vartheta(x))}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}(x)}{\sigma_t(x)} \right)^2 \quad (2)$$

برای محاسبه مرز حجم کنترل باید حل عددی R_c را در پیش گرفت. به صورتی که ابتدا از زاویه صفر درجه (زاویه بین محور x و نقاط روی حجم کنترل) شروع کرده و $(R_c)_{initial}$ را محاسبه نموده، در ادامه با افزایش زاویه، R_c جدید محاسبه می‌شود. این فرایند تا جایی که مرز حجم کنترل، لبه شیار را قطع کند ادامه پیدا می‌کند (شکل 13). باید توجه داشت که شعاع مرز بیرونی حجم کنترل برابر با $r_0 + R_c$ بوده و r_0 نصف شعاع نوک شیار (ρ) است.

3-3- محاسبه انتگرال J شیار با استفاده از تحلیل المان محدود

رایس [7] برای محاسبه مقدار انتگرال J حول ترک یا شیار، رابطه (3) را پیشنهاد داده است.

$$J = \int \left(W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (3)$$

انتگرال بر روی یک مسیر حول نوک شیار (I) و در خلاف جهت عقربه ساعت گرفته می‌شود. W چگالی انرژی کرنشی، T بردار کشش عمود بر مسیر

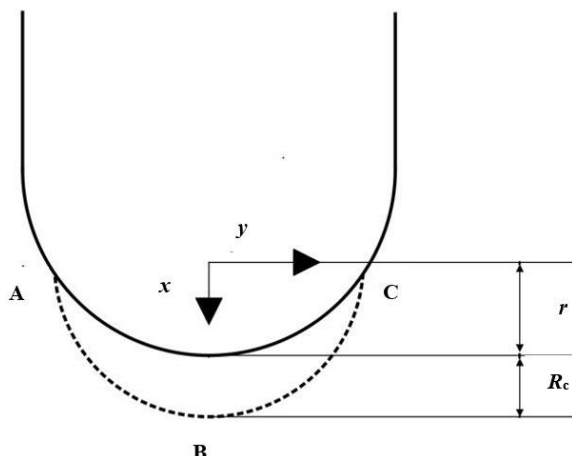


Fig. 13 Control volume for U shape notch

شکل 13 حجم کنترل شیار U-شکل

4- نتایج

4-1- تحلیل بار بحرانی شکست توسط معیار انتگرال J

در جدول 4 مقادیر انتگرال J بحرانی و بار بحرانی شکست حاصل از تحلیل المان محدود نمونه‌های مرتبه‌ای مس-فولاد ابزار و نمونه‌های همگن متناظر آورده شده است. هر یک از نمونه‌های همگن در مقایسه با نمونه مرتبه‌ای متناظر خود دارای ابعاد هندسی یکسانی بوده و خواص مکانیکی آن‌ها همان خواص لایه‌ای که نوک شیار نمونه مرتبه‌ای در آن قرار دارد، است.

مطابق داده‌های جدول 4 هر چه عمق شیار و شعاع انحنا آن بیشتر باشد، مقدار J_{cr} نیز افزایش می‌یابد. طبق رابطه (8)، وابسته به مقادیر W_{cr} (چگالی انرژی کرنشی بحرانی) و $\text{arc}(\text{ABC})$ (طول مرز حجم کنترل روی لبه شیار) است. در نمونه‌های مرتبه‌ای مس-فولاد با افزایش عمق شیار، مقدار استحکام شکست و مدول الاستیسیته کم می‌شود و در نتیجه طبق رابطه (9)، مقدار W_{cr} با کاهش اندکی مواجه می‌شود. ولی از طرفی دیگر افزایش عمق شیار باعث افزایش چقرمگی شکست نمونه می‌شود که نتیجه آن بزرگ‌تر شدن حجم کنترل و همین‌طور بزرگ شدن مرز حجم کنترل روی لبه شیار است؛ بنابراین با افزایش عمق، حاصل‌ضرب W_{cr} در $\text{arc}(\text{ABC})$ بیشتر شده و در نتیجه J_{cr} بزرگ‌تر می‌شود. همچنین انتگرال J بحرانی نمونه‌های همگن به‌صورت میانگین 13.8 درصد از نمونه‌های مرتبه‌ای متناظر بیشتر است. "شکل 14 و 15" به ترتیب چگونگی تغییرات انتگرال J بحرانی را نسبت به شعاع انحنا و عمق شیار نشان می‌دهند.

افزایش عمق شیار و شعاع انحنا نوک شیار در نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن، مانند انتگرال J بحرانی، باعث افزایش بار بحرانی شکست می‌شود. از آن‌جا که با افزایش عمق شیار در نمونه‌های مرتبه‌ای، چقرمگی شکست افزایش می‌یابد، می‌توان دلیل افزایش بار بحرانی را توجیه نمود. همچنین در نمونه‌های همگن با افزایش عمق به‌صورت پیوسته انرژی شکست افزایش می‌یابد که نتیجه آن بالا رفتن بار بحرانی شکست است. از طرفی با افزایش شعاع انحنا نوک شیار، ضریب تمرکز تنش کاهش یافته و عملاً شکست ترد به شکست نرم نزدیک می‌شود؛ در نتیجه بار بحرانی افزایش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که به‌طور کلی مقدار بار بحرانی نمونه‌های همگن از نمونه‌های مرتبه‌ای متناظر بیشتر است. هرچند با افزایش عمق شیار بار بحرانی نمونه همگن و مرتبه‌ای به یکدیگر نزدیک شده و در نمونه با عمق شیار 4.55 میلی‌متر و شعاع انحنا 2 میلی‌متر، مقدار بار بحرانی نمونه مرتبه‌ای از همگن بیشتر می‌شود.

$$J_{ABC} + J_{CA} = 0 \quad (4)$$

پس برای اندازه‌گیری انتگرال J هم مرز شیار و هم مرز حجم کنترل را می‌توان انتخاب کرد. در حالتی که لبه آزاد شیار به‌عنوان مسیر انتگرال‌گیری انتخاب شود، به‌دلیل صفر شدن بردار تنش عمود بر مسیر، مقدار ترم دوم رابطه (3)، صفر می‌شود. بنابراین رابطه انتگرال J به‌صورت رابطه (5) درمی‌آید.

$$J = \int W dy \quad (5)$$

حل عددی این رابطه به‌صورت رابطه (6) است

$$J = \int W dy \approx \sum_{i=1}^n W_i \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (6)$$

در این تحقیق برای محاسبه انتگرال J از روش حل عددی استفاده شده است؛ در واقع در ابتدا نمونه‌ها در نرم‌افزار المان محدود مدل‌سازی شده‌اند و پس از بارگذاری، با استفاده از رابطه (6) و گذاشتن مقادیر به‌دست آمده از نرم‌افزار در این رابطه، مقدار انتگرال J محاسبه شده است.

4-3- رابطه انتگرال J بحرانی (J_{cr}) در شیار U-شکل در مود اول بارگذاری

برخلاف مسئله ترک که مقدار بحرانی انتگرال J (J_{IC}) فقط به خصوصیات ماده بستگی دارد، در مورد شیار انتگرال J بحرانی (J_{cr}) علاوه بر ماده به مشخصات ابعادی نمونه و شیار نیز وابسته است. برتو و لازارین رابطه بین انتگرال J و مسیر انتگرال‌گیری با چگالی انرژی کرنشی را در شیار U-شکل و مود اول بارگذاری به‌صورت رابطه (7) به‌دست آوردند [19,18].

$$J_{arc} = \frac{J}{\text{arc}(\text{ABC})} = \bar{W} \quad (7)$$

در این‌جا $\text{arc}(\text{ABC})$ بیان‌گر طول مسیر انتگرال‌گیری است. با استفاده از رابطه (7) در بار بحرانی شکست داریم [20,18].

$$J_{cr} = W_{cr} \cdot \text{arc}(\text{ABC}) \quad (8)$$

در صورتی که رفتار ماده به‌صورت ایده‌آل ترد فرض شود، در آن صورت می‌توان مقدار W_{cr} را از رابطه (9) به‌دست آورد.

$$W_{cr} = \frac{\sigma_t^2}{2E} \quad (9)$$

که σ_t مقاومت نهایی کششی ماده است.

5-3- محاسبه بار بحرانی شکست با حل المان محدود با استفاده از معیار انتگرال J

با شبیه‌سازی آزمون خمش سه‌نقطه‌ای در نرم‌افزار المان محدود و اعمال نیروی دلخواه F_{ap} به نمونه، انتگرال J (J_{ap}) با استفاده از روش حل عددی (رابطه 5)، محاسبه می‌شود. از طرفی انتگرال J بحرانی (J_{cr}) نیز از رابطه (8) محاسبه می‌شود. در نهایت با استفاده از رابطه (10) مقدار بار بحرانی شکست (F_{cr}) با استفاده از معیار انتگرال J به‌دست می‌آید [21].

$$\frac{F_{ap}}{F_{cr}} = \sqrt{\frac{J_{ap}}{J_{cr}}} \quad (10)$$

جدول 3 خواص مکانیکی مس خالص و فولاد ابزار

Table 3 Mechanical properties of pure copper and tool steel

ماده	E (GPa)	K_{IC} (MPa.m ^{0.5})	σ (MPa)	ν
مس خالص	110	88.5	210	0.34
فولاد ابزار	210	8	452	0.28

توسط معیار انتگرال J با نتایج تجربی برابر با 17.84 درصد است.

3-4- تأثیر تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای بر نتایج تحلیل

به منظور بررسی تأثیر تعداد لایه‌ها بر نتایج تحلیل، نمونه‌هایی با تعداد لایه‌های 10، 20 و 35 لایه مدل‌سازی شدند. این نمونه‌ها همگی دارای شیار با شعاع انحنای 1 میلی‌متر بوده و اثر تغییر عمق شیار بر روی بار بحرانی بررسی شده است. در "شکل 18" نمودار تغییرات انتگرال J بحرانی و در

جدول 4 انتگرال J بحرانی و بار بحرانی شکست حاصل از تحلیل المان محدود

نمونه‌های مرتبه‌ای مس-فولاد و نمونه‌های همگن متناظر

Table 4 Critical J integral and fracture load of graded copper-steel specimens and corresponding homogeneous ones

$F_{cr,HOM}$ (kN)	$F_{cr,FGM}$ (kN)	$J_{cr,HOM}$ (MPa.mm)	$J_{cr,FGM}$ (MPa.mm)	ρ (mm)	a (mm)
2.564	2.279	0.41	0.36	0.5	3.5
3.218	2.906	0.53	0.48	1	3.5
3.714	3.372	0.63	0.57	1.5	3.5
4.106	3.732	0.73	0.66	2	3.5
2.671	2.425	0.48	0.41	0.5	3.85
3.247	3.001	0.60	0.54	1	3.85
3.705	3.476	0.72	0.65	1.5	3.85
4.172	3.853	0.85	0.75	2	3.85
2.895	2.636	0.57	0.47	0.5	4.2
3.359	3.204	0.69	0.60	1	4.2
3.768	3.657	0.83	0.71	1.5	4.2
4.129	4.034	0.93	0.81	2	4.2
3.200	2.928	0.70	0.53	0.5	4.55
3.546	3.464	0.82	0.67	1	4.55
3.930	3.927	0.95	0.79	1.5	4.55
4.259	4.328	1.07	0.89	2	4.55

جدول 5 مقایسه بار بحرانی شکست نمونه‌های مرتبه‌ای دارای شیار U-شکل با

استفاده از روش‌های تجربی و المان محدود

Table 5 The critical fracture load of graded specimens weakened by U-notch by using experimental and finite element method

Error (%)	$F_{cr,Exp}$ (kN)	$F_{cr,J int}$ (kN)	ρ (mm)	a (mm)
22.79	2.94	2.27	0.5	3.5
7.05	3.12	2.90	1	3.5
17.29	4.51	3.73	2	3.5
15.36	3.45	2.92	0.5	4.5
21.54	4.41	3.46	1	4.5
22.99	5.61	4.32	2	4.5

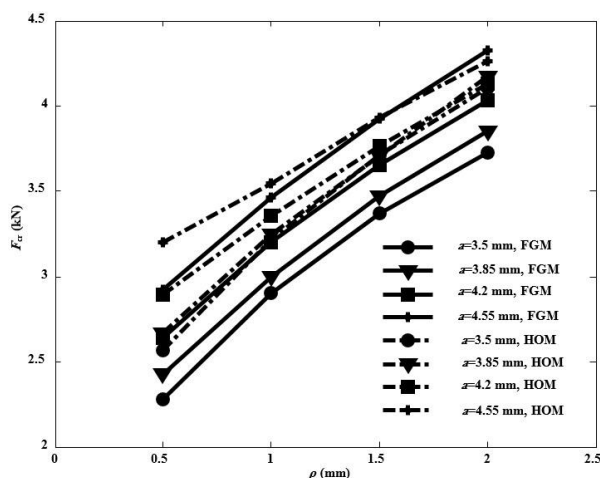


Fig. 16 Critical fracture load of graded specimens and corresponding homogeneous ones vs notch radius

شکل 16 نمودار تغییرات بار شکست نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن متناظر نسبت به

افزایش شعاع انحنای شیار با استفاده از معیار انتگرال J

"شکل 16" چگونگی تغییرات بار شکست نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن را نسبت به افزایش شعاع انحنای نوک شیار نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بار بحرانی نمونه‌های همگن به‌ازای عمق‌های کم، از نمونه‌های مرتبه‌ای متناظر بیشتر است. ولی با افزایش عمق شیار بار بحرانی نمونه مرتبه‌ای و همگن به یکدیگر نزدیک می‌شود و در ادامه بار بحرانی نمونه مرتبه‌ای از همگن بیشتر می‌شود. در "شکل 17" چگونگی تغییرات بار بحرانی شکست (با استفاده از معیار انتگرال J) نسبت به افزایش عمق شیار نشان داده شده است.

از مقایسه "شکل 16 و 17" نتیجه گرفته می‌شود که تغییرات شیب نمودار بار بحرانی نسبت به شعاع نوک شیار به‌صورت نزولی بوده درحالی که شیب نمودار تغییرات بار بحرانی نسبت به عمق شیار، به‌صورت صعودی تغییر می‌کند.

4-2- مقایسه نتایج تجربی و عددی بار شکست

نتایج حاصل از تحلیل المان محدود و آزمون تجربی نمونه‌های مرتبه‌ای دارای شیار U-شکل در جدول 5 آورده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که معیار انتگرال J به‌خوبی توانایی پیش‌بینی بار شکست نمونه‌های مرتبه‌ای مس-فولاد را داراست؛ چنان‌که میانگین اختلاف بار شکست پیش‌بینی شده

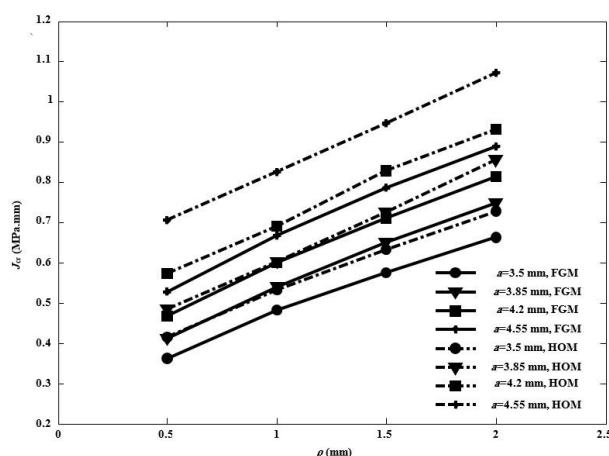


Fig. 14 Critical J integral of graded specimens and corresponding homogeneous ones vs notch radius

شکل 14 نمودار تغییرات انتگرال J بحرانی نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن متناظر نسبت به افزایش شعاع انحنای شیار

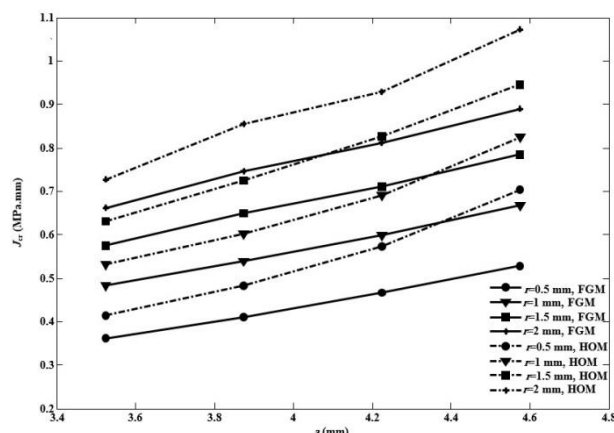


Fig. 15 Critical J integral of graded specimens and corresponding homogeneous ones vs notch depth

شکل 15 نمودار تغییرات انتگرال J بحرانی نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن متناظر نسبت به افزایش عمق شیار

"شکل 19" نمودار تغییرات بار بحرانی شکست نسبت به عمق شیار برای سه لایه‌بندی مختلف ناحیه مرتبه‌ای نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که اگر تعداد لایه‌ها از یک مقدار مشخص بیشتر باشد (در این جا 20 لایه)، تعداد لایه‌ها تاثیر بسیار کمی بر روی نتایج دارد؛ به‌طوری که نتایج حاصل از تحلیل نمونه‌های 20 و 35 لایه‌ای اختلاف بسیار کمی (کمتر از 0.1 درصد) دارند. در نتیجه می‌توان گفت ارزیابی بار شکست با استفاده از معیار انتگرال J و با انتخاب تعداد لایه‌های بیشتر از یک مقدار مشخص، مستقل از تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی تجربی و عددی شکست نمونه دارای شیار U-شکل ساخته شده از ماده مرتبه‌ای مس-فولاد تحت مود اول بارگذاری پرداخته شد. مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده از این تحقیق در ادامه بیان می‌شود.

- در این تحقیق برای اولین بار، شکست نمونه‌های مرتبه‌ای که دارای مدول الاستیسیته و ضریب پواسون متغیر در عرض خود هستند، مورد بررسی قرار گرفته است.

- نمونه‌های مرتبه‌ای مورد استفاده در این پژوهش از دو ماده مس خالص و فولاد ابزار تشکیل شده‌اند. نمونه‌ها با روش ذوب دوباره سرباره‌ای ساخته شدند. نتایج حاصل از آزمون سختی‌سنجی نمونه‌ها نشان داد که فاز بین مس خالص و فولاد ابزار دارای خواص ناحیه مرتبه‌ای است.

- نمونه‌های مرتبه‌ای تحت آزمون خمشی سه‌نقطه در مود اول بارگذاری قرار گرفتند. نتایج نشان داد که با افزایش شعاع انحنا شیار در یک عمق ثابت و همچنین با افزایش عمق شیار در یک شعاع ثابت، بار شکست افزایش می‌یابد.

- برای ارزیابی بار شکست نمونه‌ها با تحلیل المان محدود، از معیار انتگرال J استفاده شد. مقایسه نتایج حاصل از تحلیل المان محدود با نتایج حاصل از آزمون تجربی نشان داد که ارزیابی بار شکست توسط معیار انتگرال J به‌طور میانگین 17.84 درصد با نتایج تجربی اختلاف دارد.

- نتایج حاصل از ارزیابی بار شکست با استفاده از معیار انتگرال J نشان داد که افزایش عمق شیار و شعاع انحنای نوک شیار در نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن متناظر، باعث افزایش بار بحرانی می‌شود.

- طبق پیش‌بینی معیار انتگرال J ، در شیارهای کم‌عمق، بار بحرانی نمونه‌های همگن از نمونه‌های مرتبه‌ای متناظر بیشتر است؛ اما هر چه عمق شیار بیشتر می‌شود بار بحرانی نمونه همگن و نمونه مرتبه‌ای متناظر آن، به یکدیگر نزدیک می‌شود و در ادامه بار بحرانی نمونه مرتبه‌ای از همگن بیشتر می‌شود.

- رفتار تغییرات مقادیر انتگرال J بحرانی مانند بار بحرانی شکست است؛ یعنی هر چه عمق شیار و شعاع انحنای آن بیشتر باشد، مقدار J_{cr} نیز افزایش می‌یابد. همچنین انتگرال J بحرانی نمونه‌های همگن به‌صورت میانگین 13.8 درصد از نمونه‌های مرتبه‌ای متناظر بیشتر است.

- نتایج نشان داد که تغییرات شیب نمودار بار بحرانی نسبت به شعاع نوک شیار به‌صورت نزولی بوده درحالی‌که شیب نمودار تغییرات بار بحرانی نسبت به عمق شیار، به‌صورت صعودی تغییر می‌کند.

- نتایج ارزیابی معیار انتگرال J نشان داد که اگر تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای بیشتر از 20 باشد، ارزیابی بار شکست مستقل از تعداد لایه‌های ناحیه مرتبه‌ای می‌شود.

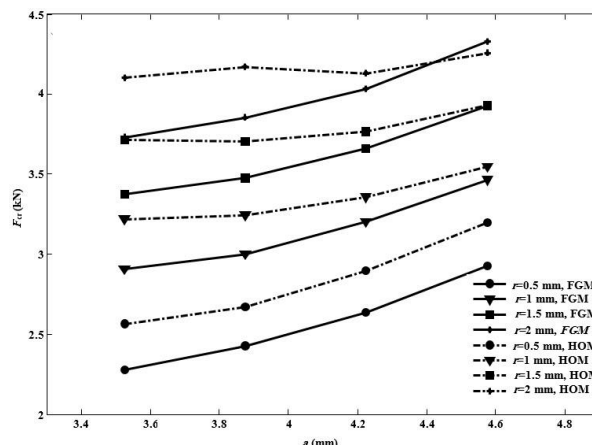


Fig. 17 Critical fracture load of graded specimens and corresponding homogeneous specimen vs notch depth

شکل 17 نمودار تغییرات بار شکست نمونه‌های مرتبه‌ای و همگن متناظر نسبت به افزایش عمق شیار با استفاده از معیار انتگرال J

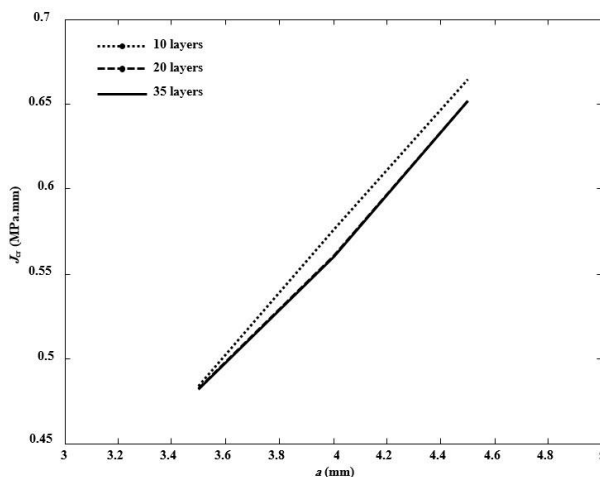


Fig. 18 Critical J integral of graded specimens with various layering vs notch depth ($\rho=1$ mm)

شکل 18 نمودار تغییرات انتگرال J بحرانی نمونه مرتبه‌ای (با شعاع یک میلی‌متر) با لایه‌بندی مختلف نسبت به افزایش عمق شیار

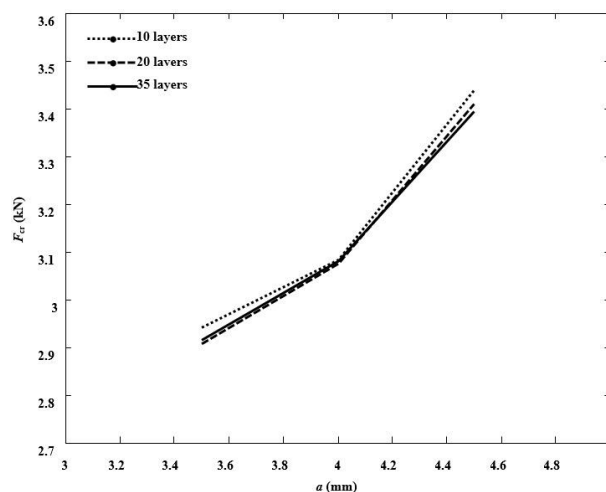


Fig. 19 Critical fracture load of graded specimens with various layering vs notch depth ($\rho=1$ mm)

شکل 19 نمودار تغییرات بار شکست نمونه مرتبه‌ای (با شعاع یک میلی‌متر) با لایه‌بندی مختلف نسبت به افزایش عمق شیار

6- فهرست علائم

a	عمق شیار (m)
E	مدول الاستیسیته (N/m^2)
F_{cr}	بار بحرانی (N)
J_{ap}	انتگرال J در بار دلخواه (N/m)
J_{cr}	انتگرال J بحرانی (N/m)
K_{IC}	چقرمگی شکست ($N/m^{3/2}$)
R_c	شعاع کنترل (m)
T	بردار ترکشن (N/m^2)
u	بردار جابجایی (m)
W	چگالی انرژی کرنشی (N/m^2)
W_{ap}	چگالی انرژی کرنشی در بار دلخواه (N/m^2)
W_c	چگالی انرژی کرنشی بحرانی (N/m^2)

علائم یونانی

ν	ضریب پواسون
ρ	شعاع انحنای شیار (m)
Γ	مسیر انتگرال گیری (m)
σ_t	استحکام کششی (N/m^2)
σ_y	استحکام تسلیم (N/m^2)

7- مراجع

- [1] N. Tejaswini, K. R. Babu, Functionally graded material: An overview, *International Conference on Advances in Engineering Science and Management*, Tamil Nadu, India, March 30-31, 2015
- [2] J. A. Mohandesi, M. H. Shahosseinie, Transformation characteristics of functionally graded steels produced by electroslag remelting, *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 36, No. 12, pp. 3471-3476, 2005
- [3] J. A. Mohandesi, R. P. Namin, M. H. Shahosseinie, Tensile behavior of functionally graded steels produced by electroslag remelting, *Metallurgical and Materials Transactions A*, Vol. 37, No. 7, pp. 2125-2132, 2006
- [4] M. L. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 4, pp. 526-528, 1952
- [5] P. Lazzarin, R. Tovo, A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches, *International Journal of Fracture*, Vol. 78, No. 1, pp. 3-19, 1996
- [6] S. Filippi, P. Lazzarin, R. Tovo, Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 17, pp. 4543-4565, 2002
- [7] J. R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 2, pp. 379-386, 1968
- [8] Y. G. Matvienko, E. M. Morozov, Calculation of the energy J-integral for bodies with notches and cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 125, No. 3, pp. 249-261, 2004
- [9] E. Barati, Y. Alizadeh, J. A. Mohandesi, J-integral evaluation of austenitic-martensitic functionally graded steel in plates weakened by U-notches, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 16, pp. 3341-3358, 2010
- [10] E. Barati, J. A. Mohandesi, Y. Alizadeh, The effect of notch depth on J-integral and critical fracture load in plates made of functionally graded aluminum-silicone carbide composite with U-notches under bending, *Materials & Design*, Vol. 31, No. 10, pp. 4686-4692, 2010
- [11] H. Monajjem, H. Salavati, Y. Alizadeh, The effect of U-notch radius on the J-integral for functionally graded steels in crack divider configuration, *21th International Conference on Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology*, Tehran, Iran, 7-9 May, 2013. (in Persian فارسی)
- [12] H. Monajjem, *Numerical solution of J-integral with-U notch for functionally graded material (FGM) under mode I loading considering the plasticity effects*, Msc thesis, Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, 2013.
- [13] H. Monajjem, Y. Alizadeh, H. Salavati, K. Madanipour, Determination of J-integral for specimen weakened by made of Bainitic and Martensitic functionally graded steel, *International Conference on Mechanical Engineering and Advanced Technology, Islamic Azad University (IAU), Majlesi Branch, Isfahan, Iran*, 10-12 October 2012. (in Persian فارسی)
- [14] ASTM International, Standard test method for measurement of fracture toughness, *ASTM International*, 2011.
- [15] Standard, A.S.T.M., *Standard test methods for water vapor transmission of materials*, Annual book of ASTM standards, Designation E96-E80, pp. 730-739, 1989
- [16] N. Hohenwarter, R. Pippan, Fracture and fracture toughness of nanopolycrystalline metals produced by severe plastic deformation, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol 373. No. 2038, 2015
- [17] Z. Yosibash, A. Bussiba, I. Gilad, Failure criteria for brittle elastic materials, *International Journal of Fracture*, Vol. 125, No. 3-4, pp. 307-333, 2004
- [18] F. Berto, P. Lazzarin, Relationships between J-integral and the strain energy evaluated in a finite volume surrounding the tip of sharp and blunt V-notches, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 14, pp. 4621-4645, 2007
- [19] F. Berto, P. Lazzarin, Y. G. Matvienko, J-integral evaluation for U-and V-blunt notches under Mode I loading and materials obeying a power hardening law, *International Journal of Fracture*, Vol. 146, No. 1-2, pp. 33-51, 2007
- [20] E. Barati, Y. Alizadeh, J. Aghazadeh, F. Berto, Some new practical equations for rapid calculation of J-integral in plates weakened by U-notches under bending, *Materials & Design*, Vol. 31, No. 6, pp. 2964-2971, 2010
- [21] H. Salavati, Y. Alizadeh, A. Kazemi, F. Berto, A new expression to evaluate the critical fracture load for bainitic functionally graded steels under mixed mode (I+II) loading, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 48, pp. 121-136, 2015