



محاسبه حساسیت هندسه طراحی برای مدل المان محدود با استفاده از روش نیمه تحلیلی بهبود یافته

مهدی حسن زاده *

مربی، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گرگان، مرکز کردکوی، کردکوی

* کردکوی، صندوق پستی 4915686166، m.hassanzadeh@kordkuyiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 تیر 1394

پذیرش: 28 شهریور 1394

ارائه در سایت: 14 مهر 1394

کلید واژگان:

روش حساسیت گسسته

روش متغیر مختلط

روش نیمه تحلیلی

روش های آنالیز حساسیت

چکیده

آنالیز حساسیت در مدل المان محدود برای بهینه سازی سازه و اصلاح طرح سودمند است. در طی بهینه سازی عددی اغلب روش نیمه تحلیلی برای تخمین مشتقات تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی مورد استفاده قرار می گیرد. عموماً محاسبه حساسیت به صورت عددی با عدم دقت ناشی از اندازه گام همراه است و یافتن روشی که نسبت به اندازه گام حساس نباشد از موضوعات مورد مطالعه است. یکی از روش هایی که نسبت به اندازه گام حساسیت بسیار کمی دارد روش متغیر مختلط است. روش اعداد مختلط برای محاسبه حساسیت، نسبت به سایر روش ها چندین مزیت بالقوه دارد. پیاده سازی المان محدود برای مشتقات اول حساسیت با استفاده از اعداد مختلط سراسر است و فقط نیاز به اختلال در شبکه بندی المان محدود در طول محور موهومی دارد. این مقاله از متغیر مختلط برای محاسبه آنالیز حساسیت بهره می برد و آن را با روش آنالیز حساسیت مستقیم ترکیب کرده و بدین ترتیب روشی جدید برای بدست آوردن آنالیز حساسیت سازه های خطی ارائه می دهد. مزیت روش ارائه شده سرعت، دقت و سادگی پیاده سازی آن است. رویه ارائه شده با استفاده از مدل دو بعدی المان محدود مسائل خطی با حل تحلیلی معلوم تشریح می شود. نتایج مشتقات حساسیت با حل دقیق و حل های تفاضل محدود مقایسه می شود و نشان داده می شود که روش پیشنهادی کارا بوده و نتایج بدست آمده دقیق و پایدار است.

Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method

Mahdi Hassanzadeh*

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Gorgan Branch, Kordkuy Center, Golestan, Iran

*P.O.B. 49156-86166, kordkuy, Iran, m.hassanzadeh@kordkuyiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 July 2015
Accepted 19 September 2015
Available Online 06 October 2015

Keywords:

Discrete sensitivity method (DSM)
complex variable method (CVM)
Semi-analytical method
finite element method (FEM)

ABSTRACT

Shape sensitivity analysis of finite element models is useful for structural optimization and design modifications. Within numerical design optimization, semi-analytical method for sensitivity analysis is frequently applied to estimate the derivative of an objective function with respect to the design variables. Generally, numerical sensitivity analysis commonly suffers from severe error due to the perturbation size, and finding a method which is not sensitive to the perturbation size is a topic under study. Complex variable methods for sensitivity analysis have some potential advantages over other methods. For first order sensitivities using the complex variable method, the implementation is straightforward, only requiring a perturbation of the finite element mesh along the imaginary axis. This paper uses a complex variable and combines it with discrete sensitivity analysis, thus a new method is presented to obtain derivatives for linear structure. The advantages of this method are that it is quick, accurate and simple to implement. The methodologies are demonstrated using two dimensional finite element models of linear elasticity problems with known analytical solutions. Obtained sensitivity derivatives are compared to the exact solution and also finite difference solutions and it is shown that the proposed method is effective and can predict the stable and accurate sensitivity results.

1- مقدمه

زمینه های مختلفی از جمله مهندسی سازه، بهینه سازی سازه، آنالیز قابلیت اعتماد و ... است را ارائه می دهد.

چندین روش برای محاسبه آنالیز حساسیت وجود دارد: روش تفاضل محدود¹ (FDM)، روش های تحلیلی شامل روش مشتق مستقیم² (DSM) [1-

تحلیل حساسیت سازه برای بدست آوردن اطلاعات گرایان کمیت های پاسخ نسبت به پارامترهای طراحی که شامل متغیرهای ذاتی مثل خواص ماده، ضخامت و همچنین متغیرهای کنترل هندسه (که اندازه و شکل سازه را در برمی گیرد) مورد استفاده قرار می گیرد. حساسیت در پاسخ المان محدود، اطلاعات ضروری برای روش های بهینه سازی بر پایه مشتقی، که مورد نیاز

1- Finite Difference Method
2- Direct Sensitivity Method

Please cite this article using:

M. Hassanzadeh, Computation of shape design sensitivities for linear FEM using modified semi-analytical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 73-80, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ارال [27] از سری نیومن برای بهبود دقت بهره برده است. کولن و بور [29,28]، حساسیت‌های طراحی نیمه تحلیلی اصلاح شده را معرفی کردند و آن را برای سازه خطی، مسائل کمانش خطی [30] و مسائل غیرخطی هندسی [31] به کار بردند. این اصلاح بر پایه مشتق گیری دقیق از مود جسم صلب است. لاند و الهف [32] مشتق گیری عددی دقیق را برای آنالیز حساسیت شکل برای مسائل مقادیر ویژه به کار بردند. اخیرا چو و کیم [33] رویه تکراری ارائه دادند که ترکیب تکنیک جداسازی مود و بسط سری برای حذف خطاهای برشی ناشی از گام بزرگ و همین طور خطاهای گرد کردن ناشی از گام کوچک است.

متأسفانه مطالعه آنالیز حساسیت در المان محدود در ایران نادر است و تقریبا بررسی خاصی در این زمینه انجام نشده است. در این مقاله SAM بهبود یافته جدید برای محاسبه آنالیز حساسیت پیشنهاد می شود که علاوه بر داشتن دقت و کارایی به سادگی پیاده سازی می شود و وابسته به اندازه گام نیست. روش تحلیلی DSM با روش متغیر مختلط ترکیب شده تا خطاهای برش و گرد کردن را از بین ببرد بدین ترتیب از مزیت دقت روش تحلیلی و کارایی روش CVM استفاده شده است تا روش ساده و قابل اطمینان در محاسبه آنالیز حساسیت روی کد المان محدود بدست آید. روش پیشنهادی را می توان روی کدهای المان محدود به راحتی پیاده سازی کرد و وابسته به نوع المان و اندازه گام نیست. برای پیاده سازی روش مذکور کد المان محدود به همراه تحلیل حساسیت در نرم افزار متلب⁴ تدوین شده و دقت و کارایی روش حاضر برای مثال هایی با آن مدل شده و با روش FD و دقیق مقایسه شده است.

2- آنالیز حساسیت

2-1- آنالیز حساسیت گسسته⁵

آنالیز حساسیت گسسته مشتقات فضای طراحی را با استفاده از بردار باقیمانده معادلات حاکم، $R(u, h)$ تخمین می زند که u بردار متغیرهای میدان و h بردار متغیرهای طراحی است.

فرض، پاسخ ϕ تابعی از پارامترهای طراحی $h_p, p = 1, \dots, P$ و وابسته به صورت صریح و از طریق میدان جابجایی که بصورت بردار جابجایی گره ای u است نشان داده می شود:

$$\phi = \phi(u(h_p), h_p) \quad (1)$$

وابستگی $u(h_p)$ فقط بصورت ضمنی است به عبارت دیگر از طریق وابستگی طرح در ضرایب سیستم معادلات تعادل که حل آن u است، وابسته است.

مشتق پاسخ ϕ نسبت به پارامتر طراحی h_p بصورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{d\phi}{dh_p} = \frac{\partial \phi}{\partial h_p} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{du}{dh_p} \quad (2)$$

همه کمیت ها جز یک کمیت در معادله بالا بصورت صریح قابل محاسبه است. تنها مجهول در معادله (2)، $\frac{du}{dh_p}$ است برای محاسبه آن باید سیستم معادلات اضافی استخراج و حل شود.

معادله تعادل در مسئله طراحی سازه با فرض الاستیک خطی به صورت گسسته شده به شکل زیر است [34]:

$$Ku = F \quad (3)$$

که K ماتریس سفتی کل، u بردار جابجایی گره ای و F بردار نیروی گره ای است.

با مشتق گیری ضمنی از (3) نسبت به متغیرهای طراحی h_p و منظم

[5] و روش متغیر الحاقی¹ (AVM) [9-6]، روش متغیر مختلط² (CVM) [10-11] و روش های نیمه تحلیلی³ (SAM) [17-15].

روش های تحلیلی نسبت به روش عددی دارای چندین مزیت هستند. حساسیت محاسبه شده به وسیله روش های تحلیلی دقیق و مستقل از اندازه گام هستند اما پیاده سازی روش های تحلیلی در برنامه المان محدود مشکل است زیرا همیشه محاسبه تحلیلی ماتریس سفتی امکان پذیر نیست.

روش تفاضل محدود نسبت به روش تحلیلی به سادگی پیاده سازی می شود و مستقل از نوع المان و نوع تحلیل است اما این روش به شدت حساس به اندازه گام بوده و نیاز به حجم محاسباتی بالا برای بدست آوردن جواب قابل اطمینان دارد. به همین علت روش های نیمه تحلیلی برای بدست آوردن دقت و کارایی مناسب پیشنهاد شده است زیرا پیاده سازی روش نیمه تحلیلی راحت بوده و دقت روش تحلیلی را نیز دارد و حساسیت کمتری نسبت به روش FD دارد.

اخیرا مقالات مختلفی برای معرفی دوباره روش متغیر مختلط (CVM) ارائه شده است [21-18]. مزیت این روش نسبت به روش تفاضل محدود این است که محاسبه عددی مشتق، در برابر خطای ناشی از گرد کردن حساس نیست. در نتیجه حساس به اندازه گام های کوچک نیست و می توان آن را به شیوه جعبه سیاه پیاده سازی کرد. بنابراین برای توابع غیرخطی عمومی می تواند کارا باشد. متأسفانه روش CVM همانند روش FD هزینه بر بوده و نیازمند انجام حل کامل برای هر متغیر طراحی است.

روش نیمه تحلیلی به منظور ایجاد توازن بین دقت و کارایی پیشنهاد شده است زیرا این روش به راحتی پیاده سازی می شود و دقت روش های تحلیلی را دارد. برای پیاده کردن آنالیز حساسیت در کد المان محدود، محاسبه حساسیت شامل مشتقات ماتریس سفتی، ماتریس جرم، بردار نیرو نسبت به متغیرهای طراحی است. در روش تحلیلی این مشتقات به صورت تحلیلی محاسبه می شوند. اما در بسیاری از موارد خصوصا برای مشتق نسبت به متغیرهای کنترل هندسه، محاسبه مشتقات مشکل است. در روش نیمه تحلیلی مشتقات ماتریس سفتی، بردار نیرو و غیره به صورت عددی تفاضل محدود محاسبه می شود اما حل نهایی به روش تحلیلی انجام می پذیرد. بدین ترتیب می توان به سادگی روش FD پیاده سازی کرد و با دقت روش تحلیلی به نتایج قابل قبول رسید (روش نیمه تحلیلی مرسوم).

اما روش نیمه تحلیلی مرسوم نیز همانند روش FD به دور از خطاهای برش و گرد کردن نیست و باید در انتخاب اندازه گام دقت کرد. برای کاوش منبع خطا چنگ و الهف آزمایش حرکت صلب گونه جسم را معرفی کردند [22]. در طی این آزمایش آنها دریافتند هنگامی که حرکت جسم صلب نسبتا بزرگی در المان ها پدیدار شود روش نیمه تحلیلی دقت نامطمئن از خود نشان می دهد که به دلیل آن است که حرکت جسم صلب شدیداً به خطای برش مرتبط است. بارسلمی و همکاران دریافتند که این خطاها به سبب مشتق گیری عددی ماتریس سفتی در المان محدود است [23]. محاسبه مشتقات به صورت عددی ممکن است باعث تولید خطاهای برش و خطاهای گرد کردن شود که البته وابسته به اندازه گام است.

برای غلبه بر مشکل بی دقتی در روش نیمه تحلیلی مرسوم الهف و راسموسن [24] و الهف و همکاران [25] مشتق گیری عددی دقیقی را که به وسیله ضریب تصحیح، خطا را حذف می کرد، معرفی کردند. چنگ و الهف [26] از جابجایی جسم صلب استفاده کردند تا خطا را کاهش دهند.

1- Adjoint Variable Method
2- Complex Variable Method
3- Semi-Analytical Methods

4- MATLAB
5- Discrete sensitivity analysis

کردن معادله (4) بدست می آید:

$$K \frac{\partial u}{\partial h_p} = -\frac{\partial K}{\partial h_p} u + \frac{\partial F}{\partial h_p} \quad (4)$$

معادله (4) شبیه معادله (3) است و تنها طرف راست معادله جدید است که بردار شبه نیرو نامیده می شود و باید محاسبه شود.

بیشترین چالش در اینجا محاسبه مشتقات ماتریس سفتی و بردار نیرو نسبت به پارامترهای طراحی است.

مشتقات $\frac{\partial K}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial F}{\partial h_p}$ بصورت عادی در رده المان محاسبه می شود:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial h_p} \right\} = \sum_{e=1}^{NE} \left\{ \frac{\partial F^e}{\partial h_p} \right\} \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{\partial K}{\partial h_p} \right\} = \sum_{e=1}^{NE} \left\{ \frac{\partial K^e}{\partial h_p} \right\} \quad (6)$$

که K^e ماتریس سفتی المان و NE تعداد المان ها می باشد.

بنابراین طرف راست معادله (4) در رده المان بصورت زیر محاسبه می شود:

$$-\frac{\partial K}{\partial h_p} u + \frac{\partial F}{\partial h_p} = \sum_{e=1}^{NE} \left(-\frac{\partial K^e}{\partial h_p} u^e + \frac{\partial F^e}{\partial h_p} \right) \quad (7)$$

2-2- مشتق گیری از ماتریس سفتی

ماتریس سفتی المان با فرمول زیر داده می شود [35]:

$$k = \int_{\Omega} B^T E B |J| d\Omega \quad (8)$$

که دامنه المان محدود توصیف شده در مختصات منحنی و بدون بعد $\xi - \eta - \zeta$ ، $|J|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین J که در هر نقطه انتقال دیفرانسیلی dx, dy, dz را به $d\xi, d\eta, d\zeta$ تعریف می کند، E ماتریس مشخصه و B ماتریس کرنش - جابجایی است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_i \ \dots \ b_n] \quad (9)$$

که:

$$b_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

مشتقات تابع شکل N_i نسبت به x, y و z به صورت زیر داده می شود:

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{Bmatrix} = \Gamma \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

که ماتریس Γ معکوس

$$\Gamma = J^{-1} \quad (12)$$

ژاکوبین است:

$$J = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_{i,\xi} x_i & N_{i,\xi} y_i & N_{i,\xi} z_i \\ N_{i,\eta} x_i & N_{i,\eta} y_i & N_{i,\eta} z_i \\ N_{i,\zeta} x_i & N_{i,\zeta} y_i & N_{i,\zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

یادآوری می شود که برای فرمول بندی ایزوپارامتریک در المان محدود با تعداد اختیاری n نقاط گره ای، توابع شکل یکسان

$$N_i = N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (14)$$

برای میان یابی مختصات کلی x, y, z از x_i, y_i, z_i و توابع جابه جایی u, v, w از مقادیر گره ای u_i, v_i, w_i استفاده می شود یعنی:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^n N_i z_i \quad (15)$$

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i v_i \quad (16)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i w_i$$

از آنجایی که $\Gamma J = I$ که I ماتریس همانی است، مشتق Γ نسبت به هر یک از متغیر طراحی شکل h_p با رابطه زیر نشان داده می شود:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial h_p} = -\Gamma \frac{\partial J}{\partial h_p} \Gamma \quad (17)$$

مشتق معادله 8 نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی h_p منجر به رابطه زیر می شود:

$$\frac{\partial k}{\partial h_p} = \int_{\Omega} B^T E \frac{\partial B}{\partial h_p} |J| + \frac{\partial B}{\partial h_p} E B^T |J| + B^T E B \frac{\partial |J|}{\partial h_p} d\Omega \quad (18)$$

برای مشتق گیری از B باید از تابع شکل به صورت زیر مشتق گرفت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_p} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{Bmatrix} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial h_p} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{Bmatrix} = -\Gamma \frac{\partial J}{\partial h_p} \Gamma \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{Bmatrix} \\ &= -J^{-1} \frac{\partial J}{\partial h_p} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

بردار نیروی المان f با رابطه زیر داده می شود:

$$f = \int_{\Omega} N^T F_B |J| d\Omega + \int_{\omega} N^T F_s |J| d\omega \quad (20)$$

که F_B نشان دهنده نیروهای حجمی، ω سطح توصیف شده در مختصات منحنی و بدون بعد $\xi - \eta - \zeta$ یا $\xi - \zeta$ برای المانی که نیروهای F_s اعمال شده است و N شامل توابع شکل N_i است، در انتگرال سطح N و روی ω محاسبه می شود.

مشتق گیری نسبت به متغیرهای طراحی شکل h_p منجر می شود به:

$$\frac{\partial f}{\partial h_p} = \int_{\Omega} N^T F_B \frac{\partial |J|}{\partial h_p} d\Omega + \int_{\omega} N^T F_s \frac{\partial |J|}{\partial h_p} d\omega \quad (21)$$

بنابراین برای محاسبه حساسیت $\frac{\partial J}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial |J|}{\partial h_p}$ باید محاسبه شود.

در مطالعات گذشته برای سادگی از روش تفاضل محدود برای محاسبه $\frac{\partial |J|}{\partial h_p}$ استفاده شده است (روش نیمه تحلیلی مرسوم) که نسبت به اندازه گام حساس هستند و به دور از خطاهای برش و گرد کردن نیستند ولی در این مقاله از متغیر مختلط برای محاسبه عددی این ترم ها استفاده شده است تا حساس بودن نتایج نسبت به اندازه گام از بین برود. مزیت دیگر این روش این است که چون در تمامی کد پیاده سازی شده از اعداد مختلط استفاده نمی شود حافظه اشغال شده و همچنین زمان محاسبه پایین است در نتیجه این روش منجر به نتایج مطمئن در زمان پایین خواهد شد. در بخش بعد (بخش 2-3) محاسبه مشتقات با استفاده از متغیر مختلط شرح داده می شود.

2-3- مشتق های حساسیت با استفاده از اعداد مختلط

روش متغیرهای مختلط (CVM) اولین بار توسط لینس و مولر [36] توسعه داده شد. سپس لینس [37] برای تعیین مشتقات بعضی توابع پیچیده، از آن استفاده کرد. اسکوی و ترپ [38] با بهره گیری از CVM مشتقات توابع حقیقی را تعیین کردند. در زمینه هوافضا مارتین و همکاران [19] از حلگر CVM در سازه های هوایی سه بعدی جهت تعیین حساسیت برای استفاده در بهینه سازی طراحی استفاده کردند. مارتین و همکاران [39] همچنین CVM را برای محاسبه حساسیت در دینامیک سیالات محاسباتی دوبعدی بکار گرفتند. اندرسون و همکاران [12] از CVM برای تعیین مشتقات حساسیت برای جریان های توربولانس استفاده کردند. رودریگز [40] از روش متغیرهای مختلط به منظور بدست آوردن گرادیان های مورد استفاده ای الگوریتم بهینه سازی، برای الگوریتم بهینه سازی غیرخطی کوپله با معادلات ناویراستوکس جریان، جهت طراحی دریچه ورودی هواپیما استفاده کرده است. تا به امروز، در آنالیز المان محدود سازه از CVM بطور گسترده بهره برداری نشده است. وانگ و آبه [13] کاربردهایی از روش متغیرهای

شده است. هدف مسئله محاسبه حساسیت جابه‌جایی عمودی نوک u نسبت به طول تیر L است. جابه‌جایی تحلیلی u_{exact} و حساسیت $\frac{du}{dL}$ با رابطه زیر نشان داده می‌شوند [41]:

$$u_{\text{exact}} = \frac{4FL^3}{Ew^3t} \quad (29)$$

$$\frac{du}{dL} = \frac{12FL^2}{Ew^3t} \quad (30)$$

که L طول تیر، E مدول الاستیسیته، w عرض تیر و t ضخامت تیر است. حل دقیق از تئوری الاستیسیته بدست آمده است. حال برای حل عددی همان‌طور که در شکل 1 ب دیده می‌شود تیر به شبکه المان محدود تقسیم شده است. در این مطالعه، یک شبکه یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای عددی مورد استفاده $t = 0.12$, $w = 1$, $L = 10$, $F = 100$ و $E = 2000000$ است (ابعاد بصورت واحد هستند). در جدول 1 حساسیت جابه‌جایی با استفاده از روش نیمه تحلیلی (SAM) (روش ارائه‌شده) داده شده است. علاوه بر روش نیمه تحلیلی، روش تفاضل محدود (FDM) نیز برای محاسبه حساسیت به کار بسته شده است.

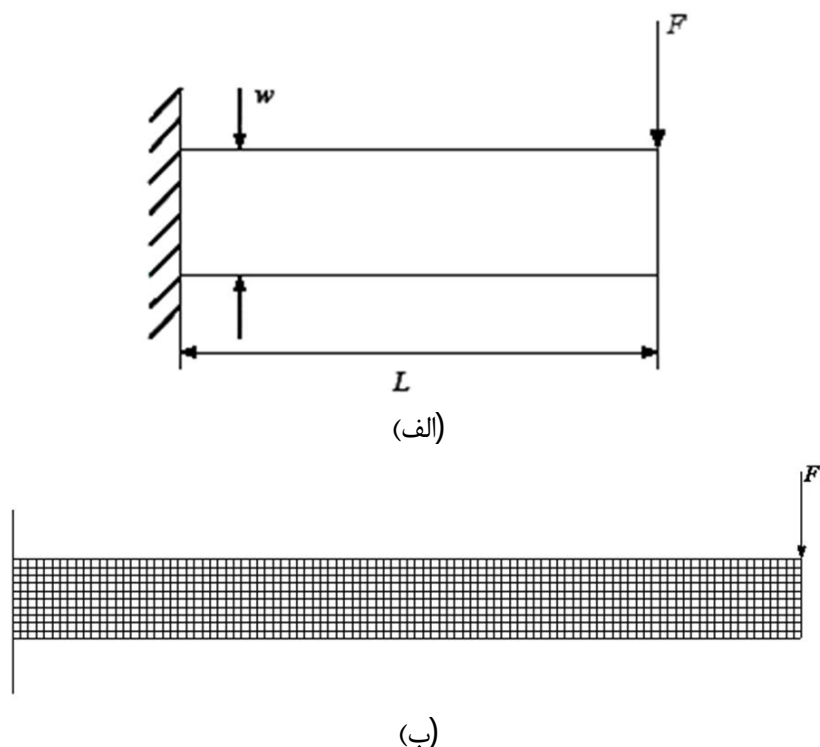
نتایج در شکل 2 رسم شده است. دیده می‌شود که روش تفاضل محدود همگرایی قابل اطمینانی در هر گام ندارد. کارایی مناسب تنها در محدوده 10^{-5} تا 10^{-8} دیده می‌شود خصوصاً در محدوده کوچکتر از 10^{-10} همگرایی بسیار نامنظم است و نشان‌دهنده تمایل به واگرایی است. در عوض روش ارائه‌شده در این مقاله همگرایی پایداری را در طول گام کوچکتر از 10^{-2} نشان می‌دهد. دیده می‌شود که روش تفاضل محدود حساس به اندازه گام است ولی ترکیب روش نیمه تحلیلی با متغیر مختلط حساس به اندازه گام نیست. علاوه بر آن زمان محاسبه نیز برای روش ارائه‌شده به طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به روش تفاضل محدود کمتر است.

3-2- مسئله گرمایی

صفحه مستطیلی در شکل 3 را در نظر بگیرید. سه طرف این صفحه در دمای ثابت T_1 نگه داشته می‌شود و روی مرز بالا توزیع دمای سینوسی اعمال می‌شود بنابراین:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_1 \\ T(0, y) &= T_1 \\ T(W, y) &= T_1 \\ T(x, H) &= T_m \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \end{aligned} \quad (31)$$

که T_m دامنه تابع سینوسی است.



شکل 1 (الف) مسئله تیر (ب) گسسته سازی المان محدود

مختلط برای مقدار ویژه و بردار آنالیز حساسیت ارائه کردند.

CVM بر پایه بسط سری تیلور است که یک گام مختلط در ابعاد موهومی را می‌گیرد. برای استخراج تقریب تفاضل محدود به منظور محاسبه مشتقات می‌توان سری تیلور تابع را در نقطه x با استفاده از گام پیشرو و گام پسرو توسعه داده و سپس با تفریق این دو فرمول زیر را بدست آورد:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (22)$$

این عبارت برای مشتق خطای $O(h^2)$ دارد. عیب این روش زمان محاسباتی آن و عدم دقت احتمالی مشتقات است. اولی از این واقعیت نشأت می‌گیرد که معادله (22) نیاز به دو حل با همگرایی خوب برای محاسبه توابع دارد. دومی به علت این است که مشتقات به اندازه گام حساس هستند. برای کمینه کردن خطای گرد کردن اندازه گام کوچک انتخاب می‌شود. اما اندازه گام بیش از اندازه کوچک ممکن است باعث تولید خطای از بین رفتن ارقام بامعنی شود. مقدار بهینه برای اندازه گام از قبل مشخص نیست و ممکن است از یک تابع به تابع دیگر و از یک متغیر طراحی به متغیر دیگر تغییر کند.

در عوض اگر سری تیلور تابع با استفاده از یک گام مختلط بسط داده شود معادله زیر بدست می‌آید [38]:

$$f(x + i\Delta x) = f(x) + i\Delta x \frac{df}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{i\Delta x^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \dots \quad (23)$$

حل این معادله برای قسمت موهومی تابع نتیجه می‌دهد:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\text{Im}[f(x+i\Delta x)]}{\Delta x} \quad (24)$$

این عبارت برای مشتق نیز خطای $O(h^2)$ را دارد. بنابراین با محاسبه تابع با آرگومان مختلط، بدون خطای تفریق، تابع و مشتق آن بدست می‌آید. قسمت حقیقی، مقدار تابع است. عیب تقریب متغیر مختلط این است که زمان اجرای برنامه با آرگومان مختلط بالا می‌رود. اما در این مقاله چون استفاده از متغیر مختلط محدود به محاسبه $\frac{\partial J}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial |J|}{\partial h_p}$ است زمان اجرای برنامه خیلی افزایش نمی‌یابد. محاسبه $\frac{\partial J}{\partial h_p}$ و $\frac{\partial |J|}{\partial h_p}$ بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial J}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[J(x+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (25)$$

$$\frac{\partial |J|}{\partial h_p} = \frac{\text{Im}[|J(x+i\Delta h_p)|]}{\Delta h_p} \quad (26)$$

زمانی که حساسیت جابه‌جایی پیدا شد حساسیت تابع اصلی $\frac{d\phi}{dh_p}$ با استفاده از معادله (2) یا فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d\phi}{dh_p} = \frac{\text{Im}[\phi(u+i\Delta u, h_p+i\Delta h_p)]}{\Delta h_p} \quad (27)$$

که:

$$\Delta u = \frac{du}{dh_p} \Delta h_p \quad (28)$$

3- مثال‌های عددی

در این قسمت از مثال‌هایی برای اعتبارسنجی روش ذکر شده در این مقاله برای محاسبه حساسیت استفاده می‌شود. برای پیاده‌سازی روش مذکور کد المان محدود به همراه تحلیل حساسیت در نرم‌افزار متلب تدوین شده است و برای مثال‌های زیر به کار برده شده است. نتایج بدست آمده با حساسیت بدست آمده از حل‌های تحلیلی مقایسه می‌شود. همچنین برای مقایسه، حساسیت‌ها با روش تفاضل محدود نیز محاسبه شده‌اند. برای تفاضل محدود نیز از همان کد بدون قسمت حساسیت استفاده شده است.

3-1- مسئله تیر یکسر درگیر

تیری با بار F در نوک بارگذاری شده است. هندسه مسئله در شکل 1 داده

جدول 1 محاسبه حساسیت جابه جایی نسبت به طول L

اندازه گام	$\frac{du}{dL}$ (SAM)	$\frac{du}{dL}$ (FDM)
-1E1	0/49291361992	-
-2E1	0/49291361999	0/49292130308
-3E1	0/49291361997	0/49291370002
-4E1	0/49291362008	0/49291364513
-5E1	0/49291361999	0/49291317166
-6E1	0/49291361997	0/49293119204
-7E1	0/49291362009	0/49301770843
-8E1	0/49291361998	0/49351688957
-9E1	0/49291361997	0/50866688638
-10E1	0/49291362009	0/38918379630
-11E1	0/49291362005	0/45609738208
-12E1	0/49291361997	21/597301724-
-13E1	0/49291362011	1/29496413592
-14E1	0/49291361999	292/388335765
-15E1	0/49291361997	13612/0448246-
-16E1	0/49291362010	0/00000000000
-17E1	0/49291361996	0/00000000000
-18E1	0/49291361997	0/00000000000
-19E1	0/49291361997	0/00000000000
-20E1	0/49291362007	0/00000000000

متوسط زمان
اجرای برنامه
مقدار دقیق
حساسیت

s3/6 s2/0 0/5

3-3- مسئله تیر یکسردرگیر تحت بار گشتاور

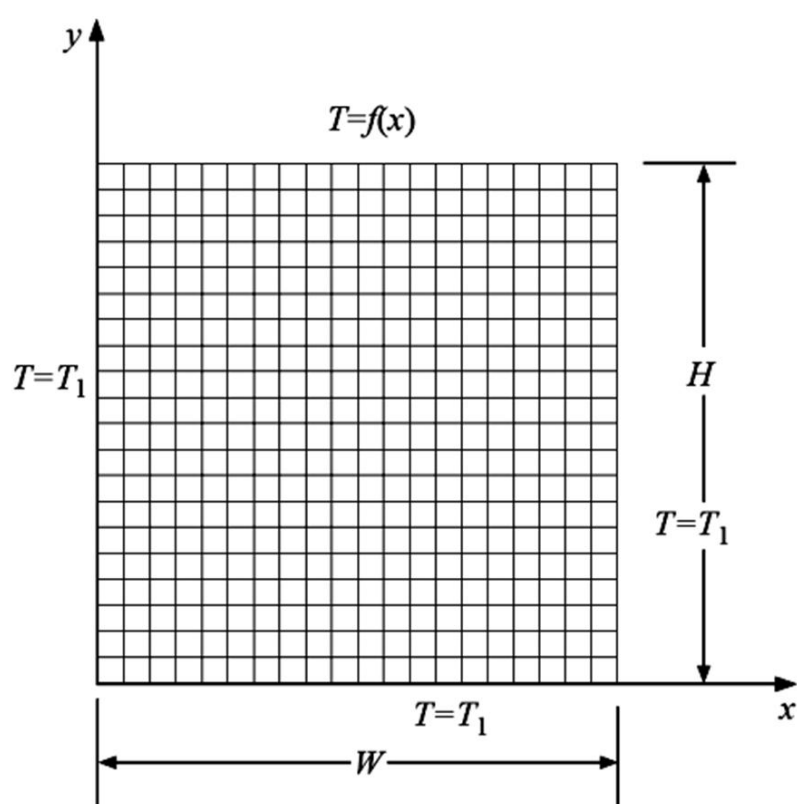
تیر یکسردرگیری با گشتاوری در انتها بارگذاری شده است. هندسه مسئله در شکل 5 الف داده شده است. تئوری خمش اوپلر برای این مسئله جابه جایی ماکزیمم تیر را بصورت زیر می دهد [41]:

$$u = \frac{ML^2}{2EI} \quad (34)$$

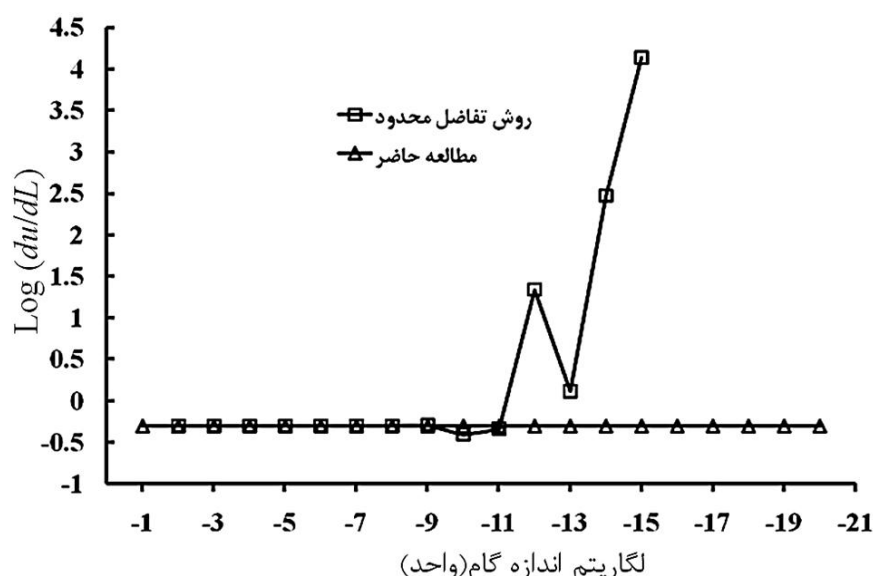
که M گشتاور اعمالی، L طول تیر، E مدول الاستیسیته و I ممان خمشی سطح مقطع تیر است. با مشتق گیری از عبارت بالا نسبت به L حساسیت $\frac{du}{dL}$ بدست می آید:

$$\frac{du}{dL} = \frac{ML}{EI} \quad (35)$$

معادله 35 برای مقایسه با نتایج بدست آمده از روش نیمه تحلیلی و روش تفاضل محدود به کار می رود. گسسته سازی تیر برای المان مثلث در شکل 5 ب نشان داده شده است. پارامترهای عددی مورد استفاده $M = 100, L = 10, W = 1, E = 2000, t = 0.5$ است (ابعاد بصورت واحد هستند). در جدول 3 حساسیت های جابه جایی با استفاده از روش نیمه تحلیلی و روش تفاضل محدود آمده است. نتایج عددی در شکل 6 نشان داده شده است. همان طور که در شکل 6 دیده می شود



شکل 3 صفحه مستطیلی در مواجهه با شرایط مرزی گرمایی



شکل 2 حساسیت جابه جایی عمودی نوک تیر u نسبت به طول تیر L (نتایج تحلیل تیر یکسردرگیر با بار متمرکز)

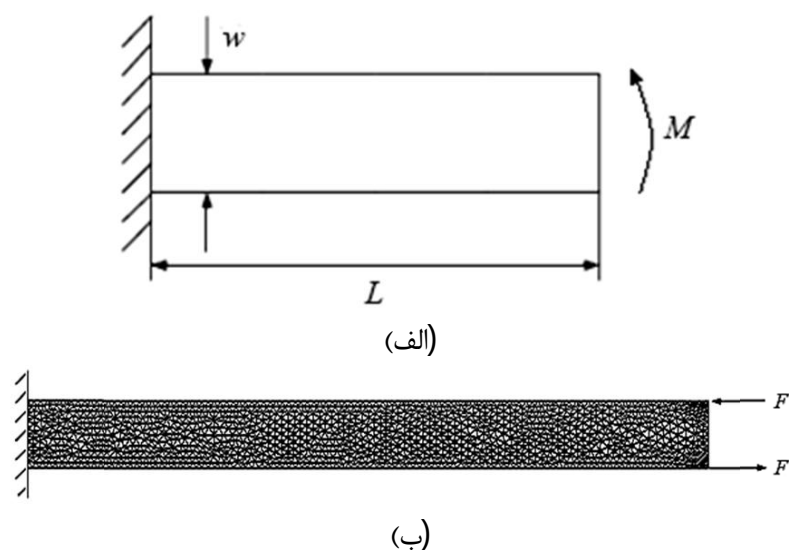
حل معادله لاپلاس با جداسازی متغیرها توزیع دما را برای کل صفحه به صورت زیر می دهد [42]:

$$T = T_m \frac{\sinh(\frac{\pi y}{W})}{\sinh(\frac{\pi H}{W})} \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (32)$$

با مشتق گیری از معادله 32 نسبت به H حساسیت $\frac{dT}{dH}$ بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{dT}{dH} = -\frac{\pi T_m}{W} \sinh\left(\frac{\pi y}{W}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) \frac{\cosh(\frac{\pi H}{W})}{(\sinh(\frac{\pi H}{W}))^2} \quad (33)$$

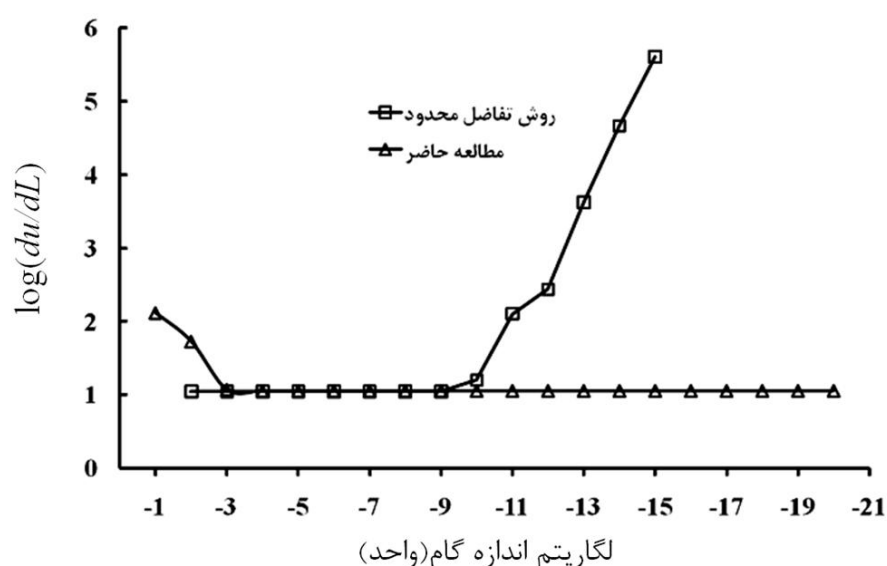
برای تحلیل عددی یک شبکه 20×20 با المان مربع (4- گره) انتخاب می شود. پارامترهای عددی مورد استفاده



شکل 5 الف) تیر یکسر درگیر تحت بار گشتاور (ب) گسسته سازی تیر با المان مثلث

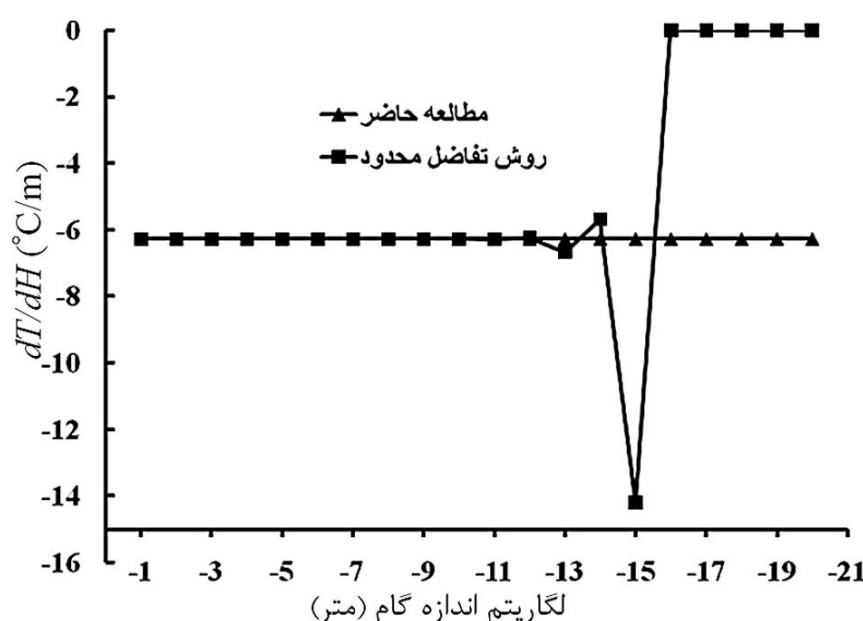
جدول 3 محاسبه حساسیت جابه جایی نسبت به طول L

اندازه گام	$\frac{du}{dL}$ (SAM)	$\frac{du}{dL}$ (FDM)
1E-1	138/061595069741	11/3536204069
1E-2	50/4625963464675	11/1316063819
1E-3	11/4777236507496	11/1284924433
1E-4	11/1319492589814	11/1284582938
1E-5	11/1284955435779	11/1285703223
1E-6	11/1284609999113	11/1290986453
1E-7	11/1284606565434	11/1306434646
1E-8	11/1284606487553	11/0992520063
1E-9	11/1284606526305	11/1061844165
1E-10	11/1284606494672	15/8959423401
1E-11	11/1284606518918	127/537447269
1E-12	11/1284606500383	-273/892908353
1E-13	11/1284606504937	-4197/14041299
1E-14	11/1284606517112	-473394840846
1E-15	11/1284606461989	406590/316970
1E-16	11/1284606513456	0/0000000000
1E-17	11/1284606498823	0/0000000000
1E-18	11/1284606517372	0/0000000000
1E-19	11/1284606478596	0/0000000000
1E-20	11/1284606498827	0/0000000000
متوسط زمان	1/71s	2/8s
اجرای برنامه		
مقدار دقیق		12
حساسیت		



شکل 6 حساسیت جابه جایی عمودی نوک تیر U نسبت به طول تیر L (نتایج تحلیل تیر یکسر درگیر تحت بار گشتاور)

اندازه گام	$\frac{dT}{dH}$ (SAM)	$\frac{dT}{dH}$ (FDM)
-1E1	6/27950984450-	6/280701577318-
-2E1	6/27950984450-	6/279521762882-
-3E1	6/27950984450-	6/279509963711-
-4E1	6/27950984450-	6/279509844092-
-5E1	6/27950984450-	6/279509834428-
-6E1	6/27950984450-	6/279509790375-
-7E1	6/27950984450-	6/279508966145-
-8E1	6/27950984450-	6/279525877062-
-9E1	6/27950984450-	6/279570641254-
-10E1	6/27950984450-	6/279918807195-
-11E1	6/27950984450-	6/285461040534-
-12E1	6/27950984450-	6/245670647331-
-13E1	6/27950984450-	6/679101716145-
-14E1	6/27950984450-	5/684341886081-
-15E1	6/27950984450-	14/21085471520-
-16E1	6/27950984450-	0/000000000000
-17E1	6/27950984450-	0/000000000000
-18E1	6/27950984450-	0/000000000000
-19E1	6/27950984450-	0/000000000000
-20E1	6/27950984450-	0/000000000000
متوسط زمان	0/40s	0/56s
اجرای برنامه		
مقدار دقیق		-6/28371254
حساسیت		



شکل 4 حساسیت دمای T نسبت به طول صفحه H

کارایی خوبی برای محاسبه حساسیت طراحی با استفاده از ترکیب روش نیمه تحلیلی با متغیر مختلط دیده می شود. نتایج نشان می دهد که همگرایی مطمئنی صرف نظر از اندازه گام وجود دارد، اما عملکرد تفاضل محدود شدیداً وابسته به اندازه گام انتخاب شده است. در اندازه گام کمتر از 10^{-9} افزایش شدید در خطا مشاهده می شود. به علاوه زمان اجرای برنامه برای روش نیمه تحلیلی نسبت به روش تفاضل محدود کمتر است. نتایج مشابهی که همانند مثال های قبل قابل مشاهده است.

4- نتیجه گیری

این مقاله روشی را برای محاسبه حساسیت شکل با ترکیب روش حساسیت گسسته با روش متغیر مختلط در مسائل سازه‌ای توسعه می‌دهد.

روش حساسیت گسسته (DSM) کاراست و در زمان محاسبه نسبت به دیگر روش‌ها صرفه جویی می‌کند زیرا مقادیر حساسیت را تنها در جاهایی که تحلیل گر می‌خواهد، محاسبه می‌کند. اما روش‌های رایج از شیوه دقیق برای مشتق‌گیری ماتریس سفتی و ماتریس جرم بهره می‌برد. مشتق‌گیری به این شیوه برای هر نوع المان محدود می‌تواند طاقت‌فرسا باشد.

برای بهبود کارایی روش DSM، مشتق‌گیری دقیق می‌تواند با شیوه‌ی عددی تفاضل محدود جایگزین شود. اما شیوه‌های محاسبه حساسیت مرسوم شدیداً وابسته به مقادیر انحراف می‌باشند. بنابراین با بهره‌گیری از مزایای روش DSM و متغیر مختلط که تحت تأثیر اندازه طول گام قرار نمی‌گیرد این مقاله رویه محاسباتی جدید برای محاسبه عددی حساسیت بر پایه DSM ارائه می‌دهد.

با بررسی چندین مثال برتری روش ارائه‌شده نسبت به روش‌های محاسباتی مرسوم نشان داده شده است. اگر تنها اندازه گام کوچک انتخاب شود خطای گرد کردن قابل اغماض است و این روش حل پایداری را برای حساسیت سازه فراهم می‌آورد. در ضمن زمان محاسبه نیز به صورت قابل‌ملاحظه‌ای پایین است. از دیگر مزایای این رویه حجم پایین حافظه اشغال شده و سادگی پیاده‌سازی آن است.

در خاتمه خطاهای حساسیت محاسبه شده در روش‌های محاسباتی مرسوم می‌تواند با کاربرد متغیر مختلط به صورت قابل‌توجهی کاهش یابد. محاسبه حساسیت به صورت عددی در چهارچوب روش حساسیت گسسته می‌تواند با بهره‌گیری از متغیر مختلط بهبود یابد. در مقایسه با رویه‌های مرسوم روش محاسباتی ارائه‌شده در این مقاله از دقت بالایی برخوردار است و کارایی خوبی را در تمام محدوده مقادیر گام تضمین می‌کند.

5- مراجع

- [10] H. Kim, M. Cho, Study on the design sensitivity analysis based on complex variable in eigenvalue problem, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, No. 12, pp. 892-900, 2009.
- [11] V. N. Vatsa, Computation of sensitivity derivatives of Navier-Stokes equations using complex variables, *Advances in Engineering Software*, Vol. 31, No. 8, pp. 655-659, 2000.
- [12] W. K. Anderson, J. C. Newman, D. L. Whitfield, E. J. Nielsen, Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables, *AIAA journal*, Vol. 39, No. 1, pp. 56-63, 2001.
- [13] B. P. Wang, A. P. Apte, Complex variable method for eigensolution sensitivity analysis, *AIAA journal*, Vol. 44, No. 12, pp. 2958-2961, 2006.
- [14] A. Voorhees, H. Millwater, R. Bagley, Complex variable methods for shape sensitivity of finite element models, *Finite elements in analysis and design*, Vol. 47, No. 10, pp. 1146-1156, 2011.
- [15] G. Cheng, Y. Gu, Y. Zhou, Accuracy of semi-analytic sensitivity analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 6, No. 2, pp. 113-128, 1989.
- [16] P. Pedersen, G. Cheng, J. Rasmussen, On accuracy problems for semi-analytical sensitivity analyses, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 17, No. 3, pp. 373-384, 1989.
- [17] B. Barthelemy, R. T. Haftka, Accuracy Analysis of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity Calculation*, *Mechanics of structures and machines*, Vol. 18, No. 3, pp. 407-432, 1990.
- [18] J. Martins, P. Sturdza, J. J. Alonso, The connection between the complex-step derivative approximation and algorithmic differentiation, *AIAA paper*, Vol. 921, pp. 2001, 2001.
- [19] J. R. Martins, P. Sturdza, J. J. Alonso, The complex-step derivative approximation, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, Vol. 29, No. 3, pp. 245-262, 2003.
- [20] J. Kim, D. G. Bates, I. Postlethwaite, Complex-step gradient approximation for robustness analysis of nonlinear systems, in *Proceeding of*, 4-8, 2005.
- [21] K.-L. Lai, J. Crassidis, Extensions of the first and second complex-step derivative approximations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 219, No. 1, pp. 276-293, 2008.
- [22] G. Cheng, N. Olhoff, Rigid body motion test against error in semi-analytical sensitivity analysis, *Computers & structures*, Vol. 46, No. 3, pp. 515-527, 1993.
- [23] B. Barthelemy, C. T. Chon, R. T. Haftka, Accuracy problems associated with semi-analytical derivatives of static response, *Finite elements in analysis and design*, Vol. 4, No. 3, pp. 249-265, 1988.
- [24] N. Olhoff, J. Rasmussen, Study of inaccuracy in semi-analytical sensitivity analysis—a model problem, *Structural optimization*, Vol. 3, No. 4, pp. 203-213, 1991.
- [25] N. Olhoff, J. Rasmussen, E. Lund, A Method of "Exact" Numerical Differentiation for Error Elimination in Finite-Element-Based Semi-Analytical Shape Sensitivity Analyses, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-66, 1993.
- [26] G. Cheng, N. Olhoff, *New method of error analysis and detection in semi-analytical sensitivity analysis*: Springer, 1993.
- [27] S. Oral, An improved semianalytical method for sensitivity analysis, *Structural optimization*, Vol. 11, No. 1-2, pp. 67-69, 1996.
- [28] H. De Boer, F. Van Keulen, Error analysis of refined semianalytical design sensitivities, *Structural optimization*, Vol. 14, No. 4, pp. 242-247, 1997.
- [29] F. Van Keulen, H. De Boer, Rigorous improvement of semi-analytical design sensitivities by exact differentiation of rigid body motions, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 71-91, 1998.
- [30] F. van Keulen, H. de Boer, Refined semi-analytical design sensitivities for buckling, In *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Vol. 2, pp. 2-4, 1998.
- [31] H. De Boer, F. Van Keulen, Refined semi-analytical design sensitivities, *International journal of solids and structures*, Vol. 37, No. 46, pp. 6961-6980, 2000.
- [32] E. Lund, N. Olhoff, Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using "exact" numerical differentiation of finite element matrices, *Structural optimization*, Vol. 8, No. 1, pp. 52-59, 1994.
- [33] M. Cho, H. Kim, A refined semi-analytic design sensitivity based on mode decomposition and Neumann series, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 62, No. 1, pp. 19-49, 2005.
- [34] P. Bakshi, P. Pandey, Semi-analytical sensitivity using hybrid finite elements, *Computers & Structures*, Vol. 77, No. 2, pp. 201-213, 2000.
- [35] E. Lund, Finite element based design sensitivity analysis and optimization, *Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark*, 1994.
- [1] J. Tsay, J. Arora, Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 1: General theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 2, pp. 183-208, 1990.
- [2] J. Tsay, J. Cardoso, J. Arora, Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 2: Analytical examples, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, No. 2, pp. 209-228, 1990.
- [3] D. A. Tortorelli, Sensitivity analysis for non-linear constrained elastostatic systems, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 33, No. 8, pp. 1643-1660, 1992.
- [4] L. Fourment, T. Balan, J. Chenot, optimal design for non-steady-state metal forming processes. Application of shape optimization in forging, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 39, pp. 51-65, 1996.
- [5] L. Fourment, J. Chenot, optimal design for non-steady-state metal forming processes—I. shape optimization method, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 39, No. 1, pp. 33-50, 1996.
- [6] T. H. Lee, An adjoint variable method for structural design sensitivity analysis of a distinct eigenvalue problem, *KSME International Journal*, Vol. 13, No. 6, pp. 470-476, 1999.
- [7] S. H. Chung, Y.-S. Kwon, S. J. Park, R. M. German, Sensitivity analysis by the adjoint variable method for optimization of the die compaction process in particulate materials processing, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, No. 11, pp. 836-844, 2009.
- [8] S. Cho, H.-S. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded non-linear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 22, pp. 2539-2553, 2003.
- [9] L. Wang, W. K. Anderson, Shape sensitivity analysis for the compressible Navier-Stokes equations via discontinuous Galerkin methods, *Computers & Fluids*, Vol. 69, pp. 93-107, 2012.

- [40] D. L. Rodriguez, A multidisciplinary optimization method for designing inlets using complex variables, *AIAA paper*, Vol. 4875, 2000.
- [41] F. P. Beer, E. Johnston, J. T. Dewolf, *Mechanics of Materials*. 3rd, McGraw-Hill, 2002.
- [42] J. Holman, *Heat transfer* 10th Edition, New York, Boston, McGraw-Hill, Inc, pp. 102-105, 2010.
- [36] J. N. Lyness, C. B. Moler, Numerical differentiation of analytic functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 4, No. 2, pp. 202-210, 1967.
- [37] J. Lyness, Numerical algorithms based on the theory of complex variable, in *Proceeding of*, ACM, pp. 125-133, 1967.
- [38] W. Squire, G. Trapp, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, *Siam Review*, Vol. 40, No. 1, pp. 110-112, 1998.
- [39] J. Martins, I. M. Kroo, J. J. Alonso, An automated method for sensitivity analysis using complex variables, *AIAA paper*, Vol. 689, pp. 2000, 2000.