مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1394، دوره 15، شماره 9، ص‌ص 116-124

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

اثر کوپلینگ دمایی-انتشاری بر روی ضریب میرایی بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده درمیکرو رزوناتورها

علی خوانچه‌گردان[1]، احد امیری[2]، قادر رضازاده[3*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه
3- استاد، مهندسی مکانیک دانشگاه ارومیه، ارومیه
* ارومیه، صندوق پستی 5718783625، g.rezazadeh@urmia.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 05 اردیبهشت 1394
پذیرش: 09 تیر 1394
ارائه در سایت: 24 مرداد 1394

کلید واژگان:
سیستم های میکرو-الکترو-مکانیکی
نفوذ جرم
انتقال حرارت غیرفوریه
انتقال جرم غیر فیک
تئوری کوپل تنش اصلاح شده

چکیده

در این مقاله اثر نفوذ جرم بر روی ضریب میرایی در میکرو تیرهای تشدید کننده بر اساس تئوری کوپل تنش و فرضیات تیر اویلر-برنولی تحقیق شده است. تئوری کوپل تنش یک تئوری الاستیسیته غیر کلاسیک است که می‌تواند اثرات اندازه را در ریز ساختارها بررسی کند. معادله حاکم بر خیز تیر با استفاده از اصل همیلتون بدست آمد و نیز معادله حاکم بر میرایی دمایی نفوذی ارتجاعی توسط معادله انتقال حرارت غیر فوریه دو بعدی و معادله نفوذ جرم غیرفیک تحقیق شده است. ارتعاشات آزاد میکرو تیرهای تشدید کننده با استفاده از مدل کاهش مرتبه گالرکین برای مد اول ارتعاشی تحلیل شده است. یک میکرو تیر دو سر گیردار با فرض شرایط مرزی هم دمایی در هر دو انتها مطالعه شده است. علاوه بر این اثر نفوذ جرم بر روی ضریب میرایی برای مقادیر مختلف ضخامت میکرو تیر، دمای محیط و پارامتر طول مشخصه مطالعه شد. نتایج بدست آمده مشخص کردند که در ناحیه قابل‌قبول بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی و قبل از ضخامت بحرانی نتایج مربوط به مدل میرایی نفوذ جرم و مدل میرایی دمایی ارتجاعی اختلافی ندارند و همچنین نتایج نشان دادند که با افزایش پارامتر طول مشخصه ضریب میرایی کاهش می‌یابد.

Thermo-diffusive Coupling Effect on the Damping Ratio Based on Modified Couple Stress Theory in Micro-beam Resonators

Ali Khanchehgardan, Ahad Amiri, Ghader Rezazadeh*

Department of Mechanical Engineering, Urmia University, Urmia, Iran.
* P.O.B. 5718783625 Urmia, Iran, g.rezazadeh@urmia.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 25 April 2015
Accepted 30 June 2015
Available Online 15 August 2015

Keywords:
MEMS
Mass diffusion
Non-Fourier heat conduction
Non-Fickian mass diffusion
Modified Couple Stress Theory

ABSTRACT

In this work effect of mass diffusion on the damping ratio in micro-beam resonators is investigated based on modified couple stress theory and the Euler-Bernoulli beam assumptions. The couple stress theory is a non-classical elasticity theory which is able to capture size effects in small-scale structures. The governing equation of a micro-beam deflection is obtained using Hamilton's principle and also the governing equations of thermo-diffusive elastic damping are established using two dimensional non-Fourier heat conduction and non-Fickian mass diffusion models. Free vibration of the micro-beam resonators is analyzed using Galerkin reduced order model formulation for the first mode of vibration. A clamped-clamped micro-beam with isothermal boundary conditions at both ends is studied. The obtained results are compared with the results of a model in which the mass diffusion effect is ignored. Furthermore, the mass diffusion effects on the damping ratio are studied for the various micro-beam thicknesses, ambient temperature and length scales parameters. The results show that in the valid region, based on Euler-Bernoulli beam theory and before the critical thickness there is no difference between the results of mass diffusion and thermo-elastic damping and also the results indicate that by increasing the length scale parameter damping ratio decreases.

1- مقدمه

سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی[1] و نانو الکترومکانیکی[2] در توسعه میکرو ساختارهای پیشرفته بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در واقع سیستم های میکرو الکترو مکانیکی تلفیقی از اجزاء مکانیکی و الکترونیکی است. امروزه توسعه و ساخت تجهیزات همراه با مصرف انرژی محدود اجتناب‌ناپذیر است و این مهم نیازمند آنالیز و بررسی تمام عوامل دخیل در مصرف انرژی این تجهیزات است. به منظور بدست آوردن کارایی بالا در

1- MEMS
2- NEMS

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
A. Khanchehgardan, A. Amiri, Gh. Rezazadeh, Thermo-diffusive Coupling Effect on the Damping Ratio Based on Modified Couple Stress Theory in Micro-beam Resonators, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 116-124, 2015 (In Persian)

رزوناتورها[1]، کاهش اتلاف انرژی و یا به عبارت دیگر افزایش فاکتور کیفیت مهم است. فاکتور کیفیت رزوناتور معیاری از مقدار اتلاف انرژی است. اتلاف انرژی ناشی از میرایی ارتجاعی دمایی[2] مهمترین عامل اتلاف انرژی است [1-4].

ابتدا زینر [5] به اهمیت میرایی دمایی ارتجاعی در رزوناتورها پی برد و روابط تحلیلی برای این نوع میرایی ارائه نمود. در سال 2006 سان و فانگ [6] میرایی دمایی ارتجاعی را در میکرو رزوناتورها با ترکیب روش تبدیل فوریه سینوسی و تبدیلات لاپلاس بررسی کردند. وحدت و رضازاده [7] اثر تنش‌های پسماند و محوری را بر روی میرایی دمایی ارتجاعی در میکرو رزوناتورها بررسی کردند. سپس رضازاده و همکاران [8] یک رابطه تحلیلی برای فاکتور کیفیت میرایی دمایی ارتجاعی بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده[3] ارائه نمودند.

نفوذ جرم[4] به صورت حرکت تصادفی توده‌ای از جرم از ناحیه‌ای با تراکم بالا به ناحیه با تراکم پایین تعریف می‌شود. نواکی [9] تئوری ارتجاعی انتشاری را با در نظر گرفتن مدل دمایی ارتجاعی توسعه داد. شریف و همکاران [10] تئوری دمایی ارتجاعی انتشاری تعمیم‌یافته را با در نظر گرفتن یک زمان آرمیدگی[5] توسعه دادند.

نتایج آزمایشگاهی نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی ریزساختارها به اندازه‌ی آن‌ها وابسته است و تئوری کلاسیک الاستیسیته نمی‌تواند رفتار مکانیکی این ریزساختارها را به طور دقیق پیش‌بینی کند. برای این منظور، تئوری‌های غیرکلاسیک که پارامترهای مقیاس طول ماده‌ی سازنده‌ی ریزساختار را در نظر می‌گیرند گسترش یافتند. در سال 1909 میلادی برادران کوسرات تئوری الاستیسیته‌ی غیرکلاسیک خود را ارائه کردند که بر اساس آن تئوری الاستیسیته‌ی میکروقطبی شکل گرفت [12،11]. در این تئوری، گشتاور بر واحد سطح یا تنش‌کوپل نیز علاوه بر نیرو بر واحد سطح یا تنش که در الاستیسیته‌ی کلاسیک لحاظ می‌گردد در نظر گرفته می‌شود. وابستگی به اندازه‌ی میکروتیرها با تئوری تنش‌کوپل کلاسیک مدل شد که شامل چهار ثابت مربوط به ماده‌ی سازنده‌ی ریزساختار است (دو ثابت کلاسیک و دو ثابت افزون[6])، محاسبه‌ی ثابت‌های افزون بر ثابت‌های لامه[7] در تئورهای الاستیسیته‌ی غیرکلاسیک حتی در ساده‌ترین حالت آن که دارای دو ثابت افزون است کار پیچیده‌ای است. از این روی، تئورهای الاستیسیته‌ی غیرکلاسیک که دارای تنها یک ثابت افزون می‌باشند گسترش یافتند [14،13].

یانگ و همکارانش [15] با اصلاح تئوری تنش‌کوپل کلاسیک با واردکردن یک رابطه‌ی تعادل اضافه‌ی حاکم بر رفتار کوپل‌ها، در سال 2002 میلادی تئوری تنش کوپل پیراسته را ارائه نمودند. این رابطه‌ی تعادل اضافه، تانسور تنش‌کوپل را به یک تانسور لزوماً متقارن[8] تبدیل می‌کند در این تئوری یانگ با معرفی بردار گشتاور آنرا به عنوان معادله سوم تعادل فرض کرد با این فرض تانسور کوپل تنش متقارن شده و تئوری کوپل تنش که در حالت کلی سه مقدار طول مشخصه دارد به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود که تنها با یک مقدار طول مشخصه توصیف می‌شود.

هدف تحقیق حاضر بررسی اثر نفوذ جرم در میکرو رزوناتورها بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده است. در این مقاله برای مطالعه معادلات از روش کاهش مرتبه گلرکین استفاده شده است. معادلات انتقال حرارت از رابطه انتقال حرارت غیر فوریه و اصل بقا انرژی استخراج شده است و به طریق مشابه معادله حاکم بر نفوذ جرم از رابطه انتقال جرم غیر فیک و اصل بقا جرم استخراج شده است.

2-مدل مورد بررسی و فرضیات حاکم

در شکل 1 مدل تیر مورد بررسی مشاهده می‌شود. مدل مورد مطالعه برای بررسی اثر نفوذ جرم در میکروتیرها یک تیر دوسرگیردار الاستیک به طول L با سطح مقطع مستطیلی به ابعاد b (عرض) و h (ضخامت) است.

در مدل مورد بررسی محورهای مختصات بدین شکل است که در آن محور x ها در جهت طول تیر ($0\leq x\leq L$) ، محور y ها در جهت عرض تیر ($b/2\leq y\leq b/2$) و محور z ها در جهت ضخامت تیر ($-h/2\leq z\leq h/2$) است. فرض می‌شود که نسبت طول به ضخامت تیر به اندازه کافی بزرگ بوده به طوری که می‌توان در معادلات از اثر تغییر مکان‌های ناشی از تنش‌های برشی صرف‌نظر کرد. همچنین دمای اولیه تیر برابر با دمای محیط T_0 فرض شده است. در این پژوهش برای بررسی ارتعاشات میکرو تیرها از فرضیات تیر اویلر-برنولی استفاده کرده‌ایم. بنابراین در ارتعاشات عرضی تیر فرض می‌شود که تمامی سطوح عمود بر محور تیر به شکل اولیه صفحه‌ای و عمود بر محور تیر باقی بماند که در نهایت جابجایی‌ها را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت.

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

بر اساس تئوری الاستیسیته کلاسیک معادله پیوستگی برای یک جامد الاستیک همگن ایزوتروپیک با در نظر گرفتن نفوذ جرم و انتقال حرارت به شکل زیر است [10]:

$$\sigma_{ij}=2\mu e_{ij}+\delta_{ij}(\lambda e_{kk}-\beta_1 T-\beta_2 C)$$
$$\beta_1=\frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_t\ ,\beta_2=\frac{E}{(1-2\nu)}\alpha_c \tag{2}$$

در روابط بالا μ و λ ثوابت لامه می‌باشند، α_t ضریب انبساط حرارتی خطی است، α_c ضریب انبساط دیفیوژن خطی است، σ_{ij} مؤلفه‌های تنسور تنش و e_{ij} مؤلفه‌های تنسور کرنش است و ν ضریب پواسون و δ_{ij} دلتای کرونیکر است. همچنین e_{kk} نشان‌دهنده مجموع مؤلفه‌های قطر اصلی ماتریس کرنش است. u جابجایی تیر در راستای x است $T=T_1-T_0$، T_1 دمای مطلق میکروتیر و T_0 دمای میکروتیر در شرایط عادی است و فرض می‌شود که با دمای محیط برابر باشد و C مربوط به تراکم جرم است. کرنش‌های حرارتی در جامدات الاستیک به علت انبساط گرمایی و کرنش‌های دیفیوژن به علت انبساط حاصل از نفوذ جرم بوجود می‌آیند. بنابراین مجموع کرنش ها می‌تواند به شکل مجموع کرنش‌های مکانیکی، حرارتی و دیفیوزیویتی بیان شود:

$$e_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}+\alpha_t T\delta_{ij}+\alpha_c C\delta_{ij} \tag{3}$$

بر اساس کارهای قبلی که توسط خوانچه‌گردان [1-4] و رضازاده و همکاران [8] انجام شده است زمانی که ضخامت و پهنای تیری به اندازه کافی نسبت به طول تیر کوچک باشند بر اساس حالت تنش صفحه‌ای می‌توان نتیجه

شکل 1 مدل مورد مطالعه

1- Resonator
2- Thermo-elastic damping (TED)
3- Modified couple stress theory
4- Mass diffusion
5- Relaxation time
6- Additional constant
7- Lame constants
8- Symmetric

گرفت که مؤلفه‌های تنسور تنش در راستای z و y صفر هستند ($\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = 0$). بنابراین مؤلفه‌های تنسور کرنش را می‌توان به شکل زیر محاسبه نمود:

$$e_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_t T + \alpha_c C$$
$$e_{yy} = \nu z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu)\alpha_t T + (1+\nu)\alpha_c C$$
$$e_{zz} = \nu z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu)\alpha_t T + (1+\nu)\alpha_c C$$
$$e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0 \tag{4}$$
$$e_{kk} = (2\nu-1)z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(1+\nu)\alpha_t T + 2(1+\nu)\alpha_c C \tag{5}$$
$$\sigma_{xx} = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E\alpha_t T - E\alpha_c C \tag{6}$$

اما زمانی که ضخامت تیر به اندازه کافی در مقایسه با طول آن کوچک باشد ولی پهنای آن قابل ملاحظه باشد بر اساس شرایط کرنش صفحه‌ای می‌توان نتیجه گرفت که مؤلفه‌های تنسور تنش در جهت z و مؤلفه‌های تنسور کرنش در جهت y صفر می‌شود ($\sigma_{zz} = e_{yy} = 0$). بنابراین مؤلفه‌های غیر صفر تنسور تنش و کرنش به شکل توابعی از جابجایی‌ها برای تیر اویلر برنولی را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$e_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} + \alpha_t T + \alpha_c C$$
$$e_{zz} = \frac{\nu}{(1-\nu)}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_c C \tag{7}$$
$$e_{kk} = \frac{2\nu-1}{1-\nu}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_c C \tag{8}$$
$$\sigma_{xx} = -\frac{E}{(1-\nu^2)}\left(z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{E\alpha_t}{(1-\nu)}T - \frac{E\alpha_c}{(1-\nu)}C$$
$$\sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx} - E\alpha_t T - E\alpha_c C \tag{9}$$

بنابراین برای تیرهای نازک و تیرهای پهن می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\sigma_{xx} = -\tilde{E}z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta_t T - \beta_c C \tag{10}$$

در اینجا β_t و β_c به ترتیب ضریب دمایی و ضریب دیفیوژن در معادله متشکله هستند که به ترتیب برابر با $E\alpha_t$ و $E\alpha_c$ برای حالت تنش صفحه‌ای (تیرهای نازک) و برابر با $E\alpha_t/(1-\nu)$ و $E\alpha_c/(1-\nu)$ برای حالت کرنش صفحه‌ای (تیرهای پهن) هستند. توجه شود که برای تیرهای پهن که در آنها $b \geq 5h$ است ضریب تأثیر $\tilde{E}$ را با ضریب صفحه[1] می‌توان تخمین زد $E/(1-\nu^2)$ در غیر این صورت برای تیرهای نازک $\tilde{E}$ همان مودول یانگ[2] است.

3- معادله حاکم بر ارتعاش میکرو رزوناتور

انرژی کرنشی کل با در نظر گرفتن تئوری کوپل تنش برای خمش تیرها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$U_T = \frac{1}{2}\iiint(\sigma_{ij}e_{ij} + m_{ij}\chi_{ij})\,dV \tag{11}$$

که در رابطه اخیر V حجم تیر، m_{ij} و χ_{ij} به ترتیب قسمت انحرافی تنسور کوپل تنش و قسمت متقارن تنسور پیچش می‌باشند که با روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$m_{ij} = 2l^2\mu\chi_{ij}$$
$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\Theta_{i,j} + \Theta_{j,i}) \tag{12}$$

μ مدول برشی و l پارامتر طول مشخصه مربوط به تئوری کوپل تنش اصلاح شده می‌باشند. رابطه بین بردار چرخش Θ_i و تنسور ω به شکل زیر است:

$$\Theta_i = -\frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}\,\omega_{jk}) \tag{13}$$

ϵ_{ijk} تنسور جای گشت است. رابطه بین تنسور ω و تنسور جابجایی به شکل رابطه (14) است و بدین ترتیب تنسور چرخش بر حسب جابجایی‌ها به صورت رابطه (15) بدست می‌آید:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{14}$$
$$\Theta_i = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk}\,u_{k,j}) \tag{15}$$

بسط قسمت انحرافی تنسور کوپل تنش به نتایج زیر منجر می‌شود:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{4}(\epsilon_{imn}\,u_{n,mj} + \epsilon_{jmn}\,u_{n,mi})$$
$$m_{ij} = \frac{\mu l^2}{2}(\epsilon_{imn}\,u_{n,mj} + \epsilon_{jmn}\,u_{n,mi}) \tag{16}$$
$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{xz} = 0;$$
$$m_{xy} = -\mu l^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$
$$m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{xz} = 0; \tag{17}$$

حال با در نظر گرفتن اثر نفوذ جرم انرژی کرنشی به شکل زیر است:

$$u_{\mathrm{CLA}} = \int\sigma_{xx}de = \frac{1}{2}\tilde{E}e_{xx}^2 - \beta_t T e_{xx} - \beta_c C e_{xx}$$
$$u_{\mathrm{MCST}} = \frac{1}{2}m_{ij}\chi_{ij} \tag{18}$$
$$U_T = \iiint u_{\mathrm{CLA}} + u_{\mathrm{MCST}} \tag{19}$$

انرژی جنبشی:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \tag{20}$$

معرفی لاگرانژین و استفاده از حساب تغییرات برای استخراج معادله حرکت:

$$\mathcal{L} = K - U = \int_0^L F dx; \tag{21}$$
$$F = \frac{1}{2}\rho A\dot{w}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{E}I + \mu A l^2)w''^2 - (M_T + M_c)w'' \tag{22}$$

شرایط زیر بر اساس حساب تغییرات بایستی ارضا شود:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\delta F(w'', \dot{w}, M_T, M_C)dxdt = 0$$
$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial\dot{w}}\delta\dot{w} + \frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' \tag{23}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{w}}\right)\right]\delta w dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right)\delta w\Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'\Big|_0^L dt + \int_0^L\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{w}}\right)\delta w\Big|_{t_1}^{t_2}dx = 0 \tag{24}$$

معادله نهایی ارتعاشات تیر :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{w}}\right) = (\tilde{E}I + \mu A l^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_C}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{25}$$

1- plate modulus
2- Young's modulus

معادلات دیگر بدست آمده از حساب تغییرات برای شرایط اولیه و شرایط مرزی:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{w}}\right)\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} = \dot{w}(x,t_2)\,\delta w(x\,,t_2) - \dot{w}(x,t_1)\,\delta w(x\,,t_1) = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'\Big|_0^L = (EIw'' + M_T + M_C)\delta w'\Big|_0^L = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right)\delta w\Big|_0^L = \left(EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial M_T}{\partial x} + \frac{\partial M_C}{\partial x}\right)\delta w\Big|_0^L = 0 \qquad (27)$$

4-معادله ترموالاستیسیته با در نظر گرفتن نفوذ جرم

معادله ترمو الاستیسیته بر اساس معادله انتقال حرارت غیرفوریه توسط لورد و شولمان [16] پیشنهاد شد که خود معادله انتقال حرارت غیر فوریه نیز برای اولین بار توسط ماکسول [17] با در نظر گرفتن سرعت محدود برای انتقال حرارت معرفی شد که در قالب مکانیک محیط‌های پیوسته به شکل زیر در می‌آید:

$$\rho C_v\left(\dot{T} + \tau_{0t}\ddot{T}\right) + \beta_1 T_0(\dot{e} + \tau_{0t}\ddot{e}) + aT_0\left(\dot{C} + \tau_{0t}\ddot{C}\right) = KT_{,ii} \qquad (28)$$

در این روابط τ_{0t} زمان آرمیدگی مربوط به معادله ترموالاستیک است، این ثابت یک تفسیر فیزیکی ساده دارد و آن اینکه مدت زمانی است که طول می‌کشد تا یک المان که تحت گرادیان حرارتی ناگهانی قرار گرفته است به حالت پایا برسد. C_v گرمای ویژه در حجم ثابت و a یک ضریب اندازه از ترمودیفیوزیویتی و k ضریب انتقال حرارت است.

با جایگذاری کرنش‌ها در رابطه (28) و با صرف نظرکردن از انتقال حرارت در راستای y معادله نهایی کوپل شده ترموالاستیک دوبعدی بانفوذ جرم استخراج می‌شود:

$$\left(\rho C_v + \gamma E\alpha_t{}^2 T_0\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\rho C_v\tau_{0t} + \gamma E\alpha_t{}^2 T_0\tau_{0t}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \left(aT_0 + \gamma E\alpha_t\alpha_c T_0\right)\frac{\partial C}{\partial t} + \left(aT_0\tau_{0t} + \gamma E\alpha_t\alpha_c T_0\tau_{0t}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - (\beta_t T_0)z\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t} - (\beta_t T_0\tau_{0t})z\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (29)$$

در رابطه (29) γ برای حالت تنش صفحه‌ای برابر $2(1+\nu)/(1-2\nu)$ و برای حالت کرنش صفحه‌ای برابر $(1+\nu)/((1-2\nu)(1-\nu))$ است.

5-معادله نفوذ جرم با در نظر گرفتن انتقال حرارت

در پی کارهای شریف و همکاران [10] مشابه رابطه انتقال حرارت معادله مشابهی را برای شار جرم می‌توان در نظر گرفت:

$$D\beta_2 e_{,ii} + DaT_{,ii} + \left(\dot{C} + \tau_{0c}\ddot{C}\right) - D\mathscr{b}C_{,ii} = 0 \qquad (30)$$

D ثابت معادله فیک است، $\mathscr{b}$ ضریب اثر دیفیوزیویتی است. τ_{0c} زمان آرمیدگی معادله نفوذ جرم است و تعریفی مشابه زمان آرمیدگی معادله انتقال حرارت غیر فوریه دارد و انتقال جرم با سرعت محدود را نشان می‌دهد. با جایگذاری کرنش ها در رابطه و با صرف‌نظر کردن از انتقال جرم در راستای y بالا به رابطه اصلی نفوذ جرم دوبعدی با یک زمان آرمیدگی می‌توان رسید:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \tau_{0c}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + (Da + \gamma DE\alpha_t\alpha_c)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (-D\mathscr{b} + \gamma DE\alpha_c{}^2)\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + (-D\mathscr{b} + \gamma DE\alpha_c{}^2)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + (Da + \gamma DE\alpha_t\alpha_c)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (D\beta_c)z\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (31)$$

با در نظر گرفتن مقدارهای بی بعد زیر معادلات به شکل بی بعد در می‌آید:

$$\hat{w} = \frac{w}{h},\quad \hat{x} = \frac{x}{L},\quad \hat{z} = \frac{z}{h},\quad \hat{T} = \frac{T}{T_o},\quad \hat{C} = \alpha_c C,\quad \hat{t} = \frac{t}{t^*},\quad t^* = L\sqrt{\frac{\rho}{\tilde{E}}}, \qquad (32)$$

شکل بی بعد معادلات:

$$S_1\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} + \frac{\partial^2\hat{M}_T}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{M}_c}{\partial\hat{x}^2} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2} = 0 \qquad (33)$$

$$\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{x}^2} + S_2\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{z}^2} - S_3\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{t}} + S_4\hat{z}\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{t}} - S_5\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{t}^2} + S_6\hat{z}\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{t}^2} - S_7\frac{\partial\hat{C}}{\partial\hat{t}} - S_8\frac{\partial^2\hat{C}}{\partial\hat{t}^2} = 0 \qquad (34)$$

$$S_9\frac{\partial\hat{C}}{\partial\hat{t}} + S_{10}\frac{\partial^2\hat{C}}{\partial\hat{t}^2} + S_{11}\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{z}^2} + S_{12}\frac{\partial^2\hat{C}}{\partial\hat{z}^2} + S_{13}\frac{\partial^2\hat{C}}{\partial\hat{x}^2} + S_{14}\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\hat{x}^2} - S_{15}\hat{z}\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4} = 0 \qquad (35)$$

که ضرایب معادلات به شکل زیر است:

$$S_1 = \frac{h^2}{12L^2} + \frac{\mu l^2}{El^2}\ ;\ S_2 = \frac{L^2}{h^2}\ ;$$
$$S_3 = (\rho C_v + \gamma E\alpha_t{}^2 T_0)\frac{L}{k}\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\rho}}\,;\ S_4 = \frac{h^2\beta}{kL}\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\rho}}\ ;$$
$$S_5 = (\rho C_v\tau_{0t} + \gamma E\alpha_t{}^2 T_0\tau_{0t})\frac{\tilde{E}}{\rho}\ ;S_6 = \frac{\tau_{0t}\beta\tilde{E}h^2}{\rho kL^2}\ ;$$
$$S_7 = (a + \gamma E\alpha_t\alpha_c)\frac{L}{\alpha_c k}\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\rho}}\ ;$$
$$S_8 = (a\tau_{0t} + \gamma E\alpha_t\alpha_c\tau_{0t})\frac{\tilde{E}}{\alpha_c k\rho}\ ;$$
$$S_9 = \frac{1}{\alpha_c L}\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\rho}}\ ;\ S_{10} = \frac{\tau_{0c}\tilde{E}}{\alpha_c\rho L^2}\ ;$$
$$S_{11} = (Da + \gamma DE\alpha_t\alpha_c)\frac{T_0}{h^2};$$
$$S_{12} = (-D\mathscr{b} + \gamma DE\alpha_c{}^2)\frac{1}{\alpha_c h^2}\ ;$$
$$S_{13} = (-D\mathscr{b} + \gamma DE\alpha_c{}^2)\frac{1}{\alpha_c L^2}\ ;$$
$$S_{14} = (Da + \gamma DE\alpha_c\alpha_t)\frac{T_0}{L^2}\ ;\quad S_{15} = D\beta_c\frac{h^2}{L^4}\ ; \qquad (36)$$

برای حل معادلات بالا از روش گلرکین استفاده می‌کنیم. روش گلرکین، یک روش گسسته سازی برای مسائل مقدار مرزی است که می‌تواند به معادلات دیفرانسیل خطی اعمال شود. در این روش، یک ترکیب خطی از توابع پایه با توابع شکل مناسب به رفتار فیزیکی مسئله تحت بررسی نسبت داده می‌شود. پس از حل دستگاه معادلات جبری، ضرایب مربوط به هر یک از توابع شکل

به دست می‌آید. در نتیجه، می‌توان تقریبی از رفتار فیزیکی مسئله را پیش‌بینی کرد.

$$\hat{\mathrm{w}}(\hat{\mathrm{x}},\hat{\mathrm{t}}) = \sum_{k=1}^{p} \varpi_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k(\hat{\mathrm{x}}) \tag{37}$$

$$\hat{\mathrm{T}}(\hat{\mathrm{x}},\hat{\mathrm{z}},\hat{\mathrm{t}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\phi_j(\hat{\mathrm{z}}) \tag{38}$$

$$\hat{\mathrm{C}}(\hat{\mathrm{x}},\hat{\mathrm{z}},\hat{\mathrm{t}}) = \sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \varsigma_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) \tag{39}$$

با جایگذاری معادلات بالا در روابط مربوط به ممان های حرارتی و دیفیوزیویتی این روابط به شکل بی بعد زیر در خواهند آمد:

$$\hat{\mathrm{M}}_T = \frac{M_T}{\tilde{E}bh^2} = \frac{T_0\beta_t}{\tilde{E}}\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{z}}d\hat{\mathrm{z}} = \frac{T_0\beta_t}{\tilde{E}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{z}}\phi_j(\hat{\mathrm{z}})d\hat{\mathrm{z}} \tag{40}$$

$$\hat{\mathrm{M}}_c = \frac{M_c}{\tilde{E}bh^2} = \frac{\beta_c}{\alpha_c\tilde{E}}\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{C}}\hat{\mathrm{z}}d\hat{\mathrm{z}} = \frac{\beta_c}{\alpha_c\tilde{E}}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \varsigma_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{z}}\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}})d\hat{\mathrm{z}} \tag{41}$$

با جایگذاری روابط (37-41) معادلات بی بعد به شکل زیر تبدیل می‌شوند و به دلیل اینکه مقادیر بالا حل تقریبی می‌باشند معادلات را برابر با باقیمانده غیر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} S_1\sum_{k=1}^{p}\varpi_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k^{(IV)}(\hat{\mathrm{x}}) &+ \frac{T_0\beta_t}{\tilde{E}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\,\varphi_i''(\hat{\mathrm{x}})\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{z}}\phi_j(\hat{\mathrm{z}})d\hat{\mathrm{z}} \\ &+ \frac{\beta_c}{\alpha_c\tilde{E}}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\varsigma_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e''(\hat{\mathrm{x}})\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\mathrm{z}}\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}})d\hat{\mathrm{z}} \\ &+ \sum_{k=1}^{p}\ddot{\varpi}_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k(\hat{\mathrm{x}}) = \epsilon_1 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i''(\hat{\mathrm{x}})\phi_j(\hat{\mathrm{z}}) &+ S_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\phi_j^{\circ\circ}(\hat{\mathrm{z}}) \\ &- S_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \dot{u}_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\phi_j(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_4\hat{z}\sum_{k=1}^{p}\dot{\varpi}_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k''(\hat{\mathrm{x}}) \\ &- S_5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \ddot{u}_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\phi_j(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_6\hat{\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{p}\dddot{\varpi}_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k''(\hat{\mathrm{x}}) \\ &- S_7\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\dot{\varsigma}_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) \\ &- S_8\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\ddot{\varsigma}_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) = \epsilon_2 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} S_9\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\dot{\varsigma}_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) &+ S_{10}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\ddot{\varsigma}_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i(\hat{\mathrm{x}})\phi_j^{\circ\circ}(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_{12}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\varsigma_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d^{\circ\circ}(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_{13}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\varsigma_{ed}(\hat{\mathrm{t}})\lambda_e''(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_d(\hat{\mathrm{z}}) \\ &+ S_{14}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}(\hat{\mathrm{t}})\varphi_i''(\hat{\mathrm{x}})\phi_j(\hat{\mathrm{z}}) \\ &- S_{15}\hat{\mathrm{z}}\sum_{k=1}^{p}\varpi_k(\hat{\mathrm{t}})\psi_k^{(IV)}(\hat{\mathrm{x}}) = \epsilon_3 \end{aligned} \tag{44}$$

که در اینجا $\phi_j^{\circ\circ}(\hat{\mathrm{z}}) = \partial^2\phi_j/\partial\hat{\mathrm{z}}^2\,;\,\Lambda_d^{\circ\circ}(\hat{\mathrm{z}}) = \partial^2\Lambda_d/\partial\hat{\mathrm{z}}^2$.

بر اساس روش گلرکین روابط زیر بایستی ارضا شوند:

$$\int_0^1 \varphi_f(\hat{\mathrm{x}})\epsilon_1 d\hat{\mathrm{x}} = 0 \quad ; \qquad f = 1,\dots,p \tag{45}$$

$$\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\varphi_q(\hat{\mathrm{x}})\phi_g(\hat{\mathrm{z}})(\hat{\mathrm{z}})\epsilon_2 d\hat{\mathrm{z}}d\hat{\mathrm{x}} = 0 \qquad q = 1,\dots,n \quad ; \quad g = 1,\dots,m \tag{46}$$

$$\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\lambda_r(\hat{\mathrm{x}})\Lambda_s(\hat{\mathrm{z}})\epsilon_3 d\hat{\mathrm{z}}d\hat{\mathrm{x}} = 0 \qquad r = 1,\dots,l \quad ; \quad s = 1,\dots,h \tag{47}$$

با اعمال روابط (45-47) به معادلات اصلی به روابط زیر می‌توان رسید:

$$S_1\sum_{k=1}^{p}\varpi_k K_{fk}^{(1)} + \frac{T_0\beta_t}{\tilde{E}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}\;K_{fi}^{(2)}K_j^{(3)} + \frac{\beta_c}{\alpha_c\tilde{E}}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\varsigma_{ed}\,K_{ef}^{(4)}K_d^{(5)} + \sum_{k=1}^{p}\ddot{\varpi}_k K_{fk}^{(6)} = 0 \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}G_{qi}^{(2)}G_{gj}^{(4)} &+ S_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij}G_{qi}^{(1)}G_{gj}^{(5)} \\ &- S_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\dot{u}_{ij}G_{qi}^{(1)}G_{gj}^{(4)} + S_4\sum_{k=1}^{p}\dot{\varpi}_k G_{qk}^{(3)}G_g^{(6)} \\ &- S_5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\ddot{u}_{ij}G_{qi}^{(1)}G_{gj}^{(4)} + S_6\sum_{k=1}^{p}\dddot{\varpi}_k G_{qk}^{(3)}G_g^{(6)} \\ &- S_7\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\dot{\varsigma}_{ed}G_{eq}^{(7)}G_{gd}^{(8)} - S_8\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h}\ddot{\varsigma}_{ed}G_{eq}^{(7)}G_{gd}^{(8)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

$$
\begin{aligned}
&S_9 \sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \dot{\varsigma}_{ed} Q_{re}^{(1)} Q_{sd}^{(2)} + S_{10}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \ddot{\varsigma}_{ed} Q_{re}^{(1)} Q_{sd}^{(2)} \\
&+S_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij} Q_{ri}^{(3)} Q_{js}^{(4)} + S_{12}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \varsigma_{ed} Q_{re}^{(1)} Q_{sd}^{(5)} \\
&+S_{13}\sum_{e=1}^{l}\sum_{d=1}^{h} \varsigma_{ed} Q_{re}^{(6)} Q_{sd}^{(2)} + S_{14}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_{ij} Q_{ri}^{(7)} Q_{js}^{(8)} \\
&-S_{15}\sum_{k=1}^{p} \varpi_k Q_{ik}^{(9)} Q_{j}^{(10)} = 0
\end{aligned}
\tag{50}
$$

برای معادله اول:

$$
\begin{aligned}
&K_{fk}^{(1)} = \int_0^1 \psi_f(\hat{x})\psi_k^{(IV)}(\hat{x})\,d\hat{x}; \\
&K_{fi}^{(2)} = \int_0^1 \psi_f(\hat{x})\varphi_i''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&K_{j}^{(3)} = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{z}\phi_j(\hat{z})\,d\hat{z}\,;\;\; K_{ef}^{(4)} = \int_0^1 \psi_f(\hat{x})\lambda_e''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&K_{d}^{(5)} = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{z}\Lambda_d(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&K_{fk}^{(6)} = \int_0^1 \psi_f(\hat{x})\psi_k(\hat{x})\,d\hat{x}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

و همین طور برای معادله دوم:

$$
\begin{aligned}
&G_{qi}^{(1)} = \int_0^1 \varphi_q(\hat{x})\varphi_i(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&G_{qi}^{(2)} = \int_0^1 \varphi_q(\hat{x})\varphi_i''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&G_{qk}^{(3)} = \int_0^1 \varphi_q(\hat{x})\psi_k''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&G_{gj}^{(4)} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_g(\hat{z})\phi_j(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&G_{gj}^{(5)} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_g(\hat{z})\phi_j^{\circ\circ}(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&G_{g}^{(6)} = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{z}\phi_g(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&G_{eq}^{(7)} = \int_0^1 \lambda_e(\hat{x})\varphi_q(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&G_{gd}^{(8)} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_g(\hat{z})\Lambda_d(\hat{z})\,d\hat{z}
\end{aligned}
\tag{52}
$$

وبرای معادله آخر:

$$
\begin{aligned}
&Q_{re}^{(1)} = \int_0^1 \lambda_r(\hat{x})\lambda_e(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&Q_{sd}^{(2)} = \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda_s(\hat{z})\Lambda_d(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&Q_{ri}^{(3)} = \int_0^1 \lambda_r(\hat{x})\varphi_i(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&Q_{sj}^{(4)} = \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda_s(\hat{z})\phi_j^{\circ\circ}(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&Q_{sd}^{(5)} = \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda_s(\hat{z})\Lambda_d^{\circ\circ}(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&Q_{re}^{(6)} = \int_0^1 \lambda_r(\hat{x})\lambda_e''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&Q_{ri}^{(7)} = \int_0^1 \lambda_r(\hat{x})\varphi_i''(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&Q_{sj}^{(8)} = \int_{-1/2}^{1/2} \Lambda_s(\hat{z})\phi_j(\hat{z})\,d\hat{z} \\
&Q_{rk}^{(9)} = \int_0^1 \lambda_r(\hat{x})\psi_k(\hat{x})\,d\hat{x} \\
&Q_{s}^{(10)} = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{z}\Lambda_s(\hat{z})\,d\hat{z}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

با در نظر گرفتن توابع شکل مناسب که شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌کنند و با حل معادلات (48-50) به طور همزمان و با توجه به اینکه $\varpi_k = \bar{\varpi}_k e^{i\Omega_k\tau}; u_{ij} = \bar{u}_{ij} e^{i\Omega_{ij}\tau}; \varsigma_{ed} = \bar{\varsigma}_{ed} e^{i\Omega_{ed}\tau};$ فرکانس‌های مختلط به دست می‌آیند. توجه شود که $\widehat{T}, \widehat{C}$ و $\widehat{w}$ با یک فرکانس ارتعاش می‌کنند بنابراین $\Omega_k = \Omega_{ij} = \Omega_{ed} = \Omega$. با توجه به فرکانس‌های مختلط ضریب میرایی به شکل زیر محاسبه می‌شود [6]:

$$
\zeta = \left|\frac{\Im(\Omega)}{\sqrt{\Re^2(\Omega) + \Im^2(\Omega)}}\right|
\tag{54}
$$

که در این رابطه $\Re(\Omega)$ قسمت حقیقی فرکانس مختلط و $\Im(\Omega)$ قسمت موهومی آن است.

6- نتایج عددی

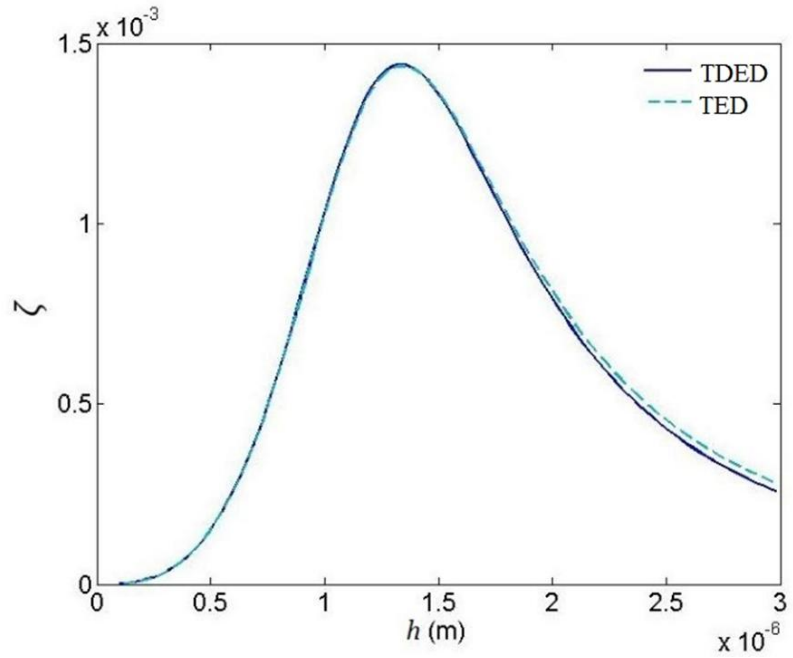
مقادیر مربوط به هندسه مدل و خصوصیات ماده مورد استفاده در جدول 1 آورده شده است.

نتایج عددی بدست آمده در بخش قبلی به شکل گرافیکی در این قسمت برای بررسی اثر نفوذ جرم بر روی ضریب میرایی میکرو تیرها ترسیم شده است، همان طور که در شکل 2 نشان داده شده است با افزایش ضخامت ابتدا ضریب میرایی نیز افزایش می‌یابد تا اینکه ضریب میرایی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که ضخامت مربوط به این میرایی را ضخامت بحرانی میرایی ترمودیفیوزیو الاستیک[1] می‌گویند، که پس از آن ضریب میرایی کاهش می‌یابد، با در نظر گرفتن اثر نفوذ جرم اندازه ضخامت بحرانی تغییری نمی‌کند. بایستی توجه شود که ضخامت بحرانی زمانی روی می‌دهد که زمان مشخصه گرمایی (زمانی که لازم است تا گرادیان‌های دمایی از بین برود و به اصطلاح آرام شود) با عکس فرکانس طبیعی تیر برابر می‌شود [6]. همان طور که از شکل 2 و شکل ۳ مشاهده می‌شود می‌توان نتیجه گرفت که اثر نفوذ

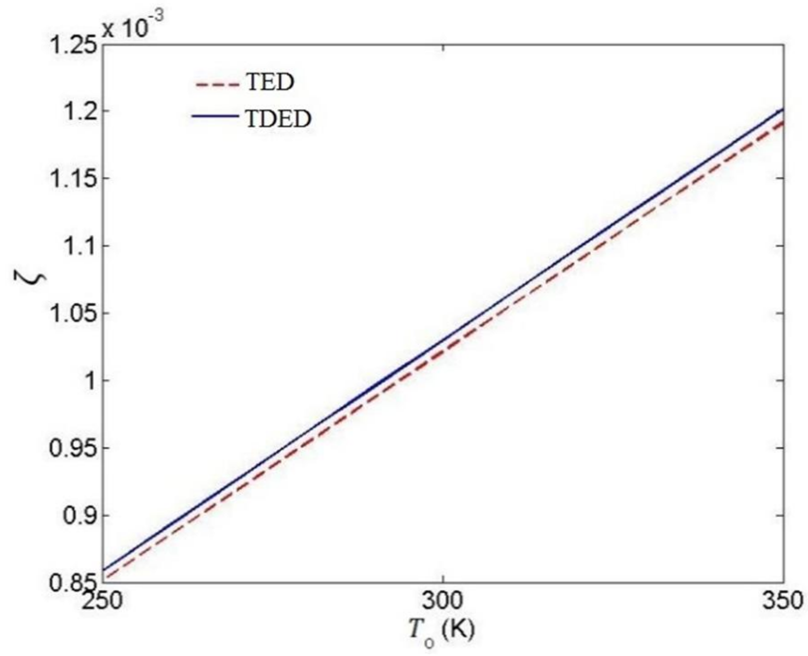
جدول 1 خصوصیات ماده مورد استفاده

نماد	پارامتر	مقدار کمیت
L	طول	10 (μm)
b	پهنا	1 (μm)
h	ضخامت	1 (μm)
E	مدول یانگ	71 (GPa)
ν	ضریب پواسون	0/3429
k	هدایت گرمایی	205 ($W\,m^{-1}\,K^{-1}$)
D	ضریب معادله فیک	$0/85\times10^{-10}$ ($kg\,s\,m^{-3}$)
ρ	چگالی	2700 ($kg\,m^{-3}$)
C_v	گرمای ویژه در حجم ثابت	900 ($J\,kg^{-1}\,K^{-1}$)
α_t	ضریب انبساط گرمایی	$2/4\times10^{-5}$ (K^{-1})
α_c	ضریب انبساط انتشار جرم	6×10^{-5} ($kg^{-1}\,m^{3}$)
T_0	دمای محیط	300 (K)
a	ضریب ثابت	5×10^{-7} ($m^{2}\,s^{-2}\,K^{-1}$)
$\mathscr{b}$	ضریب ثابت	5×10^{-9} ($kg^{-1}\,m^{5}\,s^{-2}$)

1- Thermo-diffusive-elastic damping (TDED)



شکل 2 ضریب میرایی بر حسب ضخامت

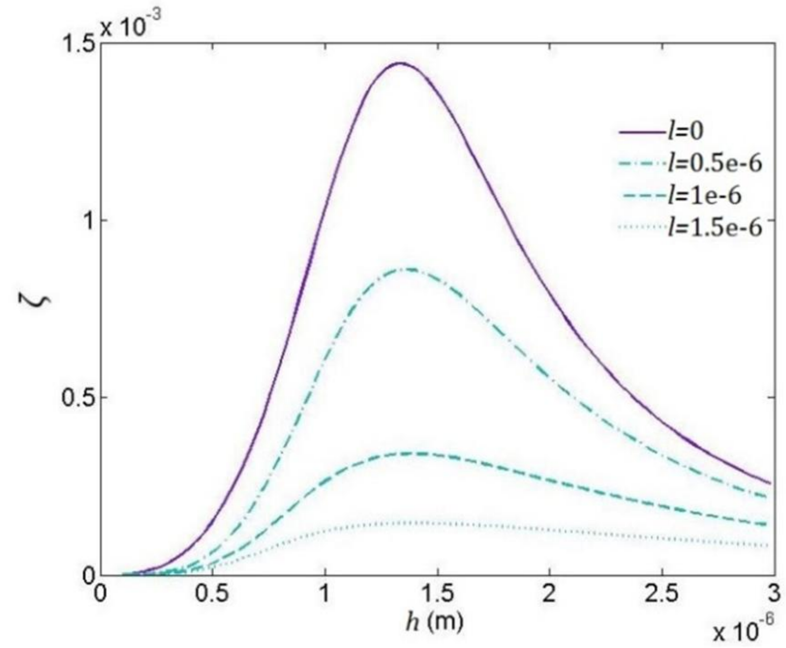


شکل 3 ضریب میرایی بر حسب دمای محیط

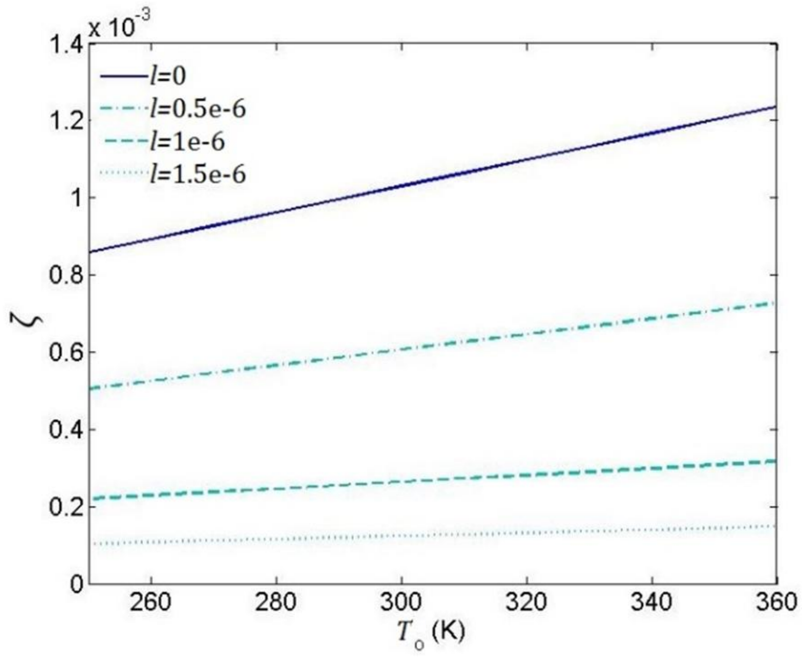
جرم بسیار کوچک بود و در اکثر موارد به خصوص قبل از ضخامت بحرانی می‌توان از آن صرف‌نظر کرد ولی در اندازه‌گیری‌های دقیق و در کاربردهایی که نیاز به دقت بالایی است بعد از ضخامت بحرانی بایستی اثر نفوذ جرم در نظر گرفته شود.

شکل 4 مقایسه نتایج محاسبه‌شده برای مدل کوپل تنش اصلاح شده به ازای مقادیر مختلف طول مشخصه $l = 0, l = 0.5, l = 1, l = 1.5$ (μm) بر حسب ضخامت میکروتیر است و همین طور شکل 5 نیز نتایج گرافیکی مقایسه ضریب میرایی بر حسب دمای محیط برای مقادیر مختلف طول مشخصه است. ضریب میرایی محاسبه‌شده برای تئوری کوپل تنش از ضریب میرایی تئوری کلاسیک کوچک‌تر است و همچنین ضخامت بحرانی برای هر دو تئوری یکسان است. نتیجه مهم دیگر که از شکل‌ها بدست می‌آید این واقعیت است که با افزایش طول مشخصه میزان ضریب میرایی به شدت کاهش می‌یابد، و زمانی که طول مشخصه برابر با صفر باشد نتایج مربوط به تئوری کلاسیک بدست می‌آید. کاهش ضریب میرایی با افزایش پارامتر طول مشخصه در شکل 6 بطور واضح نشان داده شده است.

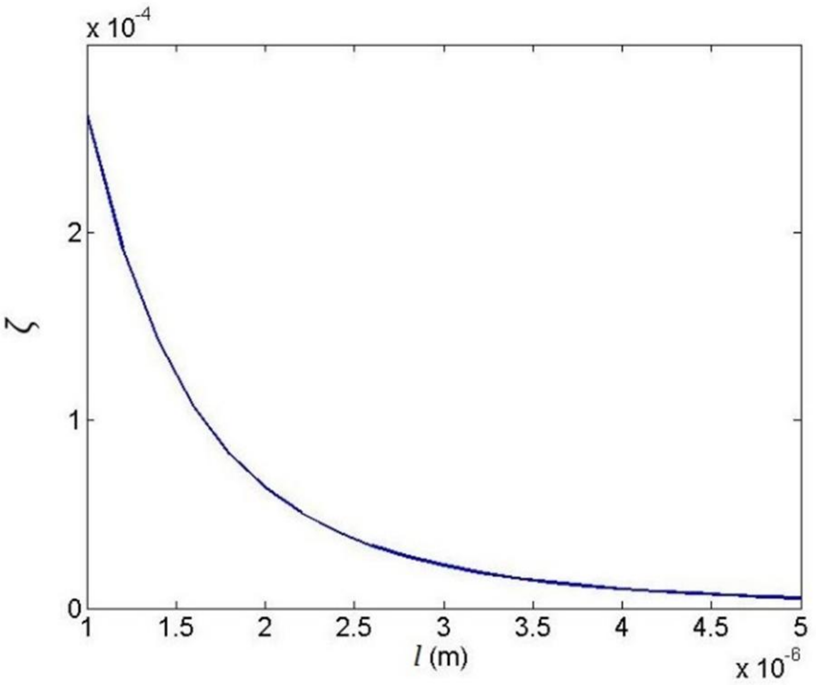
شکل 7 ضریب میرایی را بر حسب ضخامت میکرو تیر نشان می‌دهد. این شکل نتایج تئوری کوپل تنش اصلاح شده را برای مدل مورد مطالعه در این تحقیق و بر اساس طول مشخصه گزارش شده توسط هک و سایف [18] برای آلومینیوم با خلوص 99/99 درصد نشان می‌دهد. بر طبق نتایج آزمایشات هک و سایف [18] از ضخامت $h = 0.1$ (μm) تا ضخامت



شکل 4 ضریب میرایی بر حسب ضخامت

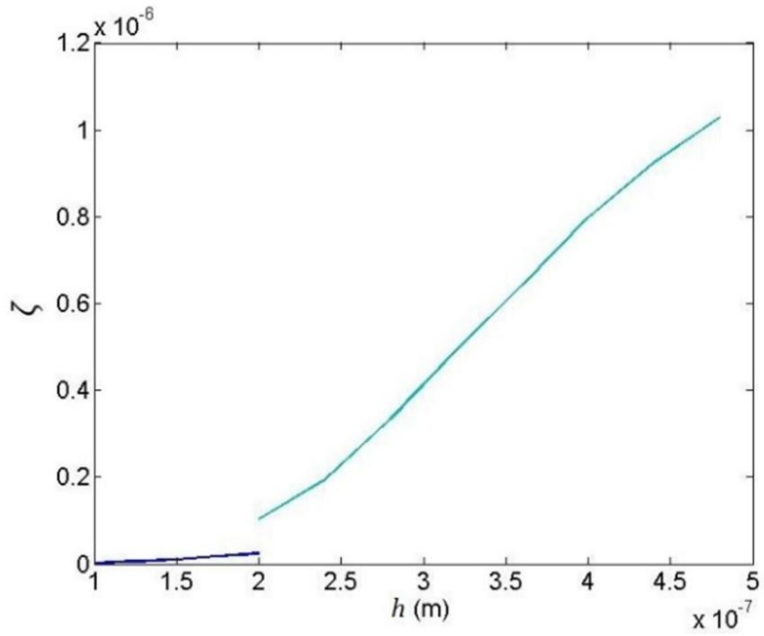


شکل 5 ضریب میرایی بر حسب دمای محیط



شکل 6 ضریب میرایی بر حسب پارامتر طول مشخصه

$h = 0.2$ (μm) مقدار طول مشخصه برابر $l = 23$(μm) و از ضخامت $h = 0.2$ (μm) تا ضخامت $h = 0.485$ (μm) مقدار طول مشخصه برابر $l = 8$(μm) و برای ضخامت‌های بیشتر از $h = 0.485$ (μm) مقدار طول مشخصه صفر است و نتایج بدست آمده بعد از این ضخامت با نتایج تئوری کلاسیک تفاوتی نمی‌کند.



شکل 7 ضریب میرایی بر حسب ضخامت

7-نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر اثر نفوذ جرم در میکرو رزوناتورها بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده بررسی شد، در این مقاله برای مطالعه معادلات از روش کاهش مرتبه گلرکین استفاده شد، معادلات انتقال حرارت از رابطه انتقال حرارت غیر فوریه و اصل بقا انرژی استخراج‌شده و به طریق مشابه معادله حاکم بر نفوذ جرم از رابطه انتقال جرم غیر فیک و اصل بقا جرم استحراج شد. مهم‌ترین نتایج حاصل از این تحقیق به شرح زیر خلاصه می‌شود: میزان میرایی بر اثر نفوذ جرم کوچک تر از میرایی ترموالاستیک است و قبل از ضخامت بحرانی در محاسبات انجام‌شده برای طراحی رزوناتورها می‌توان از اثر نفوذ جرم چشم‌پوشی کرد اما برای کاربردهای دقیق بعد از ضخامت بحرانی بایستی اثر نفوذ جرم لحاظ شود، دمای محیط در میزان میرایی تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای دارد و با افزایش دمای محیط میزان میرایی نیز افزایش می‌یابد از این رو در طراحی رزوناتورها دمای محیط بایستی لحاظ شود، ضریب میرایی محاسبه‌شده برای تئوری کوپل تنش از ضریب میرایی تئوری کلاسیک کوچک‌تر است و همچنین ضخامت بحرانی برای هر دو تئوری یکسان است، نتیجه مهم دیگر این واقعیت است که با افزایش طول مشخصه میزان ضریب میرایی به شدت کاهش می‌یابد.

8- فهرست علائم

A مساحت سطح مقطع (m^2)
a یک ضریب اندازه از ترمودیفیوزیویتی
b پهنای میکروتیر(m)
$\mathscr{b}$ ضریب اثر دیفیوزیویتی
C تراکم موضعی تیر(kgm^{-3})
C_v گرمای ویژه در حجم ثابت
D ثابت معادله نفوذ جرم(m^2s^{-1})
e_{ij} تانسور کرنش
e اثر تانسور کرنش
E مدول یانگ(Pa)
I گشتاور اینرسی
K انرژی جنبشی
k ضریب هدایت حرارتی$(WK^{-1}m^{-1})$
L طول تیر(m)
l پارامتر طول مشخصه(m)
M گشتاور خمشی کلاسیک
M_T گشتاور دمایی
M_C گشتاور دیفیوزیویتی
m_{ij} قسمت انحرافی تانسور تنش
T دما(K)
T_1 دمای مطلق(K)
T_0 دمای محیط(K)
U_{CLA} انرژی کرنشی (تئوری کلاسیک)
U_{MCST} انرژی کرنشی (تئوری کوپل تنش اصلاح شده)
u جابجایی تیر در راستای x (m)
u_i بردار جابجایی
V حجم تیر(m^3)
w جابجایی در راستای z (m)
x, y, z مختصات فضایی

علائم یونانی

α_T ضریب انبساط حرارتی(K^{-1})
α_C ضریب انبساط دیفیوزن(m^3kg^{-1})
β_T مدول دمایی
β_C مدول دیفیوژن
β_1, β_2 ضرایب ثابت
γ پارامتر ثابت
δ_{ij} دلتای کرونیکر
ϵ_{ijk} تانسور جای گشت
ζ ضریب میرایی
Θ بردار پرخش
ν ضریب پواسون
σ_{ij} تانسور تنش
σ_{Tij} تانسور تنش کل
ρ چگالی (kgm^{-3})
μ, λ ضرایب لامه
τ_{0t} زمان آرمیدگی دمایی(s)
τ_{0c} زمان آرمیدگی دیفیوژن(s)
χ_{ij} قسمت متقارن تانسور پیچش
Ω فرکانس

9-مراجع

[1] A. Khanchehgardan, G. Rezazadeh, R. Shabani, Effect of mass diffusion on the damping ratio in a functionally graded micro-beam, *Composite Structures*, Vol. 106 pp. 15–29, 2013.
[2] A. Khanchehgardan, G. Rezazadeh, R. Shabani, Effect of mass diffusion on the damping ratio in micro-beam resonators, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51 pp. 3147–3155, 2014.
[3] A. Khanchehgardan, A. Shah-Mohammadi-Azar, G. Rezazadeh, R. Shabani, Thermo-elastic damping in nano-beam resonators based on nonlocal theory, *International Journal of Engineering*, Vol. 26, No. 12, pp. 1505-1514, 2013.
[4] A. Shah-Mohammadi-Azar ,A. Khanchehgardan, G. Rezazadeh, R. Shabani, Mechanical Response of a Piezoelectrically Sandwiched Nano-beam Based on the NonlocalTheory, *International Journal of Engineering*, Vol. 26, No.12, pp. 1515-1524, 2013.
[5] C. Zener, Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds, *Physical Review*, Vol. 52, pp. 230–235, 1937.
[6] Y. Sun, D. Fang, A.K. Soh, Thermo-elastic damping in micro-beam resonators, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3213–3229, 2006.
[7] A.S. Vahdat, G. Rezazadeh, Effects of axial and residual stresses on

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.9.37.9]

thermo-elastic damping in capacitive micro-beam resonators, *Journal of The Franklin Institute,* Vol. 348, pp. 622–639, 2011.

[8] G. Rezazadeh, A. Saeedi Vahdat, S. Tayefeh-rezaei, C. Cetinkaya, Thermo-elastic damping in a micro-beam resonator using modified couple stress theory, *Acta Mechanica,* Vol. 223, pp. 1137-1152, 2012.

[9] W. Nowacki, Dynamical problems of thermodiffusion in solids I, *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Technol,* Vol. 22, pp. 55–64, 1974.

[10] H. Sherief, F. Hamza, H. Saleh, The theory of generalized thermo-elastic diffusion, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 42, pp. 591–608, 2004.

[11] W.T. Koiter, Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II Proc, *Koninklijke Nederlandse Akademie Van Weteschappen – Proceedings Series B – Physical Sciences,* Vol. 67, pp. 17–44, 1964.

[12] M. Asghari, Geometrically nonlinear micro-plate formulation based on the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science,* Vol. 51, pp. 292–309, 2012.

[13] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* Vol. 11, No. 1, pp. 415–448, 1962.

[14] G.C. Tsiatas, A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 46, pp. 2757–2764, 2009.

[15] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 39 No. 10, pp. 2731–2743, 2002.

[16] H. Lord, Y. Shulman, A generalized dynamical theory of thermo-elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 15, pp. 299–309, 1967.

[17] J.C. Maxwell, On the dynamic theory of gases, *Philosophical Transactions of the Royal Society,* Vol. 157 pp. 49–88, 1967.

[18] M.A. Haque, M.T.A. Saif, Strain gradient effect in nanoscale thin films, *acta materialia,* Vol. 51, pp. 3053–3061, 2003.