مجله مهندسی مکانیک مدرس، آذر 1396، دوره 17، شماره 9، ص‌ص 301-308

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه برشی با استفاده از توابع بلاک پالس و مدل آی آر ایکس

یاسر حسینی آجرلو[1]، حسین غفارزاده[2*]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

2- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز

* تبریز، صندوق پستی 51666، ghaffar@tabrizu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 اردیبهشت 1396

پذیرش: 24 مرداد 1396

ارائه در سایت: 17 شهریور 1396

کلید واژگان:

شناسایی سیستم

توابع بلاک پالس

فضای حالت پیوسته زمان

ماتریس عملگر

مقادیر ویژه

چکیده

شناسایی سیستم با پیشرفت آزمایش‌های دینامیکی سازه، یکی از روش‌های مفید جهت پایش سلامتی، اکتشاف خرابی سازه‌ها و به روزرسانی مدل المان محدود به حساب می‌آید. شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه براساس اطلاعات تحریک و پاسخ سازه صورت می‌گیرد و شامل تخمین پارامترهای فیزیکی همانند ماتریس‌های جرم، سختی، میرایی و یا پارامترهای مودال از جمله فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و شکل مودهای سازه می‌شود. توابع بلاک پالس از جمله توابع متعامد هستند که از آن‌ها می‌توان برای تقریب انواع توابع استفاده کرد. این توابع با توجه به تعاریف صریح و ساده‌ای که دارند می‌توانند فرمول بندی ساده‌ای از مسائل پیچیده ارائه دهند. در این پژوهش معادلات دینامیکی سازه به معادلات فضای حالت تبدیل شده و براساس ضرایب بلاک پالس ورودی و ضرایب بلاک پالس پاسخ جابجایی، یک تابع انتقال به ازای هر درجه آزادی استخراج شده است. توابع انتقال شامل اطلاعاتی از قبیل مقادیر ویژه سیستم می باشند که معادل سازی آن‌ها با مدل آی آر ایکس منجر به تخمین مقادیر ویژه سیستم شده و شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه براساس این مقادیر ویژه صورت گرفته است. به منظور ارزیابی دقت روش پیشنهادی قاب برشی سه طبقه با پاسخ های مشخص در تمام درجات آزادی و تحت ارتعاش در تراز پایه به عنوان شبیه‌سازی عددی ارائه شده است. همچنین دقت فرایند شناسایی با اعمال نویز در سطوح مختلف به پاسخ سازه، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاکی از آن هستند که الگوریتم پیشنهادی ضمن کاهش هزینه محاسباتی از دقت مناسبی برخوردار است.

Dynamical parameters identification of shear structure using block pulse functions and ARX model

Yaser Hosseini Ajorloo, Hosein Ghaffarzadeh*

Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 51666, Tabriz, Iran, ghaffar@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 April 2017
Accepted 15 August 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
System identification
Block pulse functions
Continuous time state space
Operational matrix
Eigenvalues

ABSTRACT

System identification with the development of dynamic testing of structures has become one of the useful methods for structural health monitoring and damage detection and also finite element model updating. Identification of structural dynamic parameters is done by using excitation-responses data and includes physical parameters such as mass, stiffness and damping matrices and/or modal parameters such as natural frequencies, damping ratios and modal shapes. Block pulse functions (BPFs) are a set of orthogonal functions that are used to approximate the variety of functions. These functions have explicit definition and provide simple formulation of complex problems. In this research, structural dynamic equations have been converted to state space equations and based on input BP coefficients and BP coefficients of displacement responses, a transfer function is extracted for each degree of freedom. Transfer functions include important information such as the eigenvalues of plant matrix. The equalization of transfer functions with ARX model led to estimation of the eigenvalues of plant matrix, and identification of dynamical parameters of structure is done based on these eigenvalues.To prove the validity and feasibility of proposed method, numerical simulation of the three-story shear frame with determined responses at all degrees of freedom and excited on base level is presented. Also, the accuracy of the identification process by applying noise at different levels to the structure response is investigated. The results reveal the proposed method can be beneficial in structural identification with less computational expense and high accuracy.

1- مقدمه

شناسایی سیستم فرآیندی است که طی آن پارامترهای حاکم بر یک پدیده مانند سیستم دینامیکی براساس اطلاعات حاصل از آزمایش‌های تجربی تخمین زده می‌شود. واژه شناسایی سیستم در سال 1962 توسط پرفسور

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Y. Hosseini Ajorloo, H. Ghaffarzadeh, Dynamical parameters identification of shear structure using block pulse functions and ARX model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 301-308, 2017 (in Persian)

لطفی‌زاده در تئوری سیستم‌ها مطرح گردید و مورد توجه محققین قرار گرفت و گسترش یافت. این تکنیک در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی تحت عنوان مسئله معکوس نیز مطرح می‌شود و در اصل یکی از موضوعات مورد بررسی در مهندسی کنترل می‌باشد. امروزه شناسایی سیستم براساس آنالیز دینامیکی تجربی به دانشی فراگیر با هدف تعیین مشخصات دینامیکی سازه‌های مهندسی تبدیل شده است و کاربردهای متنوعی از این مسئله در مهندسی مکانیک، عمران، هوا فضا و برق مورد توجه قرار گرفته است.

مسئله شناسایی سیستم که در تئوری سیستم‌ها بیان گردیده بود پس از برگزاری اولین دوره ی شناسایی سازه های ارتعاشی[1] توسط مرکز تحقیقات بین المللی علوم مکانیک[2] در سال 1982 زمینه کاربردی ویژه در مهندسی سازه و مکانیک پیدا کرد. در خلال این سال‌ها آنالیز مودال تجربی نیز به عنوان ابزاری قدرتمند جهت تعیین مدل‌های رفتاری سازه براساس داده‌های حاصل از آزمایش‌های تجربی مطرح گردید. در سه دهه‌ی اخیر، با پیشرفت های تکنولوژیک در حوزه آزمایشگاهی، شناسایی سیستم و آنالیزهای مودال تجربی در زمینه‌های مختلف مهندسی سازه از جمله پایش سلامتی، اکتشاف خرابی سازه‌ها تحت بارهای دینامیکی، به‌روزرسانی مدل المان محدود، کنترل فعال ارتعاشات سازه و ارزیابی ایمنی سازه پس از بارگذاری‌های شدید مورد استفاده قرار گرفته است [1].

چنانچه سیستم موردنظر یک سیستم سازه‌ای باشد و داده‌های تحریک و پاسخ سازه به عنوان اطلاعات ورودی - خروجی سیستم تلقی شوند، در این صورت پارامترهای دینامیکی حاکم بر سیستم شامل پارامترهای فیزیکی همانند ماتریس‌های جرم، سختی، میرایی و پارامترهای مودال از جمله فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و اشکال مودی سازه خواهند بود.

آزمایش‌های دینامیکی مورد استفاده در شناسایی سیستم عبارت است از: آزمایش‌های ارتعاش اجباری، آزمایش‌های ارتعاش آزاد و آزمایش‌های ارتعاش محیطی. در آزمایش‌های اول و دوم برخلاف آزمایش‌های ارتعاش محیطی، تحریک سازه غالباً توسط لرزاننده‌های مصنوعی انجام می‌شود و قابل اندازه‌گیری است. با توجه به این‌که یکی از دلایل اصلی ایجاد خطا در آنالیز مودال عملیاتی[3] عدم اعمال ورودی‌ها در فرآیند شناسایی سیستم است، بنابراین با اعمال ورودی‌های سیستم می‌توان مشخصات دینامیکی سازه را با دقت بیشتری استخراج کرد [2].

روش‌های متعددی جهت تعیین پارامترهای دینامیکی سازه براساس داده‌های ورودی- خروجی و یا خروجی- تنها در حوزه های زمان و فرکانس ارائه شده است. روش‌هایی همچون الگوریتم تحقق سیستم ویژه، فیلتر مشاهده‌گر کالمن و الگوریتم تحقق تعمیم یافته از جمله روش‌های شناسایی در حوزه زمان می‌باشند که مسئله شناسایی را با استفاده از داده‌های ورودی-خروجی سیستم و تخمین ماتریس‌های معادله فضای حالت انجام می دهند. پایه و اساس این روش‌ها تئوری تحقق کمینه می‌باشد که در آن از پاسخ های ضربه‌ای سیستم موسوم به پارامترهای مارکو [4] برای تشکیل ماتریس هانکل[5] استفاده می‌شود و شناسایی پارامترهای مودال سیستم با تجزیه مقادیر تکین ماتریس هانکل صورت می‌گیرد [3].

روش‌هایی همانند تکنیک تحریک طبیعی، دامنه زمانی ابراهیم، شناسایی براساس مدل آرما و روش‌های زیرفضا از جمله روش‌های شناسایی در حوزه زمان می‌باشند که در آن‌ها مسئله شناسایی سیستم براساس داده‌های خروجی-تنها و با فرض نویز سفید بودن ورودی سیستم، انجام می‌شود.

توابع بلاک پالس از جمله توابع متعامد هستند که از آن‌ها همچون توابع والش، هار، چیبیشف، لژاندر، ژاکوبی، هرمیت و فوریه برای تقریب انواع تابع استفاده می‌شود. توابع بلاک پالس، به دلیل ماهیت ساده و سرعت عملیاتی بالا و در عین حال توان تقریب دقیق در مقایسه با سایر توابع متعامد از اهمیت ویژه برخوردارند. بسیاری از مزایایی توابع بلاک پالس در کاهش حجم محاسبات مسائل مختلف ناشی از ویژگی‌های اولیه این توابع همانند ناپیوستگی، کامل بودن و تعامد می‌باشد. انتگرال‌گیری از توابع بلاک پالس به یک ماتریس عملگر منتهی می‌شود که از جمله ویژگی‌های مهم این توابع، بخصوص در این پژوهش می باشد. توابع بلاک پالس در زمینه‌های مختلف مهندسی سیستم و پردازش سیگنال از جمله آنالیز، شبیه‌سازی، تبدیل، کنترل، تحلیل حساسیت، طراحی مشاهده گر، تحلیل سیستم‌های دارای تاخیر زمانی، تحلیل انواع سیستم‌های دیفرانسلی خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته و توانایی این توابع در کاهش حجم عملیات محاسباتی در مسائل مختلف به اثبات رسیده است. توابع بلاک پالس توسط هارموس در سال 1969 در زمینه مهندسی برق معرفی شد. حدود هفت سال بعد سانوتی و تیک، با استفاده از توابع متعامد بلاک پالس یک روش انتگرال‌گیری عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی ارائه کردند. روند محاسباتی روش ارائه شده به محاسبات روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای شباهت زیادی داشت و در تقریب مساله کنترل و یا ماتریس بهره سیستم‌های دینامیکی روش ساده‌تری نسبت به سایر توابع متعامد بخصوص توابع والش به حساب می‌آمد [4]. علاوه بر سانوتی در مطالعات دیگر محققین قابلیت و مزایای محاسباتی این توابع در کاهش حجم عملیات محاسباتی در زمینه کنترل به اثبات رسید [5]. در دو دهه اخیر، توابع بلاک پالس به‌عنوان پایه تحقیقات در برخی از حوزه‌های ریاضیات کاربردی و مهندسی مورد مطالعه قرار گرفته است. پاچکو و استیفن در سال 2002 با انتگرال‌گیری از معادلات دینامیکی سازه و بهره جستن از تکنیک‌های عددی و خواص ویژه توابع بلاک پالس معادله جبری برحسب متغیرهای سری بلاک پالس به‌دست آوردند که منجر به شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه، تحلیل حساسیت و شناسایی شرایط اولیه سازه‌های مکانیکی گردید [6]. بوافورا و همکاران در سال 2011 روش تحلیلی برای مدل‌سازی غیرمرکب فضای حالت کسری ارائه کردند. این محققین از خواص ویژه توابع بلاک پالس بخصوص ماترس عملگر تعمیم‌یافته انتگرال توابع بلاک پالس برای شناسایی فضای حالت سیستم‌هایی با مرتبه غیرصحیح استفاده نمودند [7].

غفارزاده و یونس‌پور در سال 2014 از توابع بلاک پالس برای به‌دست آوردن ماتریس بهره سیستم کنترلی استفاده کردند. در الگوریتم پیشنهادی، توابع بلاک پالس برای کنترل سازه‌های مجهز به کابل‌های فعال [8] و سازه‌های مجهز به میراگر جرمی فعال [9] به‌کار گرفته شده است. با مدل‌سازی سازه برشی 10 طبقه دقت روش معرفی شده با نتایج حاصل از الگوریتم تنظیم کننده خطی درجه دو مقایسه شده است. نتایج ارائه شده، حاکی از آن است که به‌کارگیری توابع بلاک پالس در مسئله کنترل سازه می‌تواند ضمن کاهش هزینه محاسباتی از دقت بالایی نیز برخوردار باشد و به عنوان یک ابزار مناسب در کنترل فعال ارتعاشات سازه مورد استفاده قرارگیرد. تانق و همکاران در سال 2015 الگوریتم جدیدی به منظور شناسایی ضرایب و مرتبه معادلات دیفرانسیلی با مرتبه غیرصحیح براساس توابع بلاک پالس و داده‌های ورودی- خروجی سیستم، معرفی کردند. در این روش معادله

[1] Identification of vibrating structures
[2] International Centre for Mechanical Sciences
[3] Operational modal Analysis
[4] Markov parameters
[5] Hankel matrix

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.13.9]

دیفرانسیلی سیستم با مرتبه غیرصحیح با استفاده از ماتریس تعمیم یافته انتگرال بلاک پالس به یک عبارت جبری تبدیل شده است. در این پژوهش فرآیند شناسایی به یک مسئله بهینه‌سازی چند بعدی منتهی می شود که هدف آن کمینه کردن خطا بین خروجی سیستم و مقادیر تخمین زده شده آن می‌باشد. روش پیشنهاد شده به‌طور هم زمان پارامترها و مرتبه‌های غیر صحیح معادلات دیفرانسلی خطی را شناسایی می‌کند [10].

غفارزاده و یونس پور در سال 2016 از تبدیل بلاک پالس برای خطی سازه سیستم‌های دینامیکی غیرخطی برای سازه یک درجه آزادی استفاده نمودند. در الگوریتم پیشنهادی از تبدیل بلاک پالس برای خطی‌سازی معادله دافینق[1] [11] و معادله ون دیر پل [2] [12] استفاده شده است. در این روش سیستم غیرخطی یک درجه آزادی با یک سیستم خطی معادل‌سازی شده است. پس از اعمال تبدیل بلاک پالس بر طرفین معادلات خطی و غیرخطی، خطای مجموع مربعات بین جمله غیرخطی و سیستم معادل خطی درفضای تبدیل بلاک پالس تعریف شده است که کمینه‌سازی آن منجر به تعیین میرایی و سختی معادل سیستم خطی یک درجه آزادی شده است.

2- توابع بلاک پالس

توابع بلاک پالس برای تحلیل و شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی به عنوان یک ابزار مفید شناخته شده‌اند. این توابع ضمن آن که تعریف ساده‌ای دارند در عین حال از قدرت تخمین بالایی نیز برخوردار هستند.

توابع بلاک پالس در بازه زمانی $[0,T)$ طبق معادله (1) تعریف می‌شوند [14,13]:

$$\varphi_i(t)=\begin{cases}1 & \dfrac{(i-1)T}{m}\leqslant t\leqslant\dfrac{iT}{m}\\ 0 & \text{سایر مقادیر } t\end{cases}\tag{1}$$

که در آن $\varphi_i(t)$، i امین تابع بلاک پالس به ازای $i=1,2,\dots,m$ (m نشانگر تعداد بلوک‌ها می‌باشد که همواره یک مقادیر مثبت صحیح است) و $h=T/m$ به عنوان عرض بلوک‌ها در نظر گرفته می‌شود.

این توابع شامل ویژگی‌های مختلفی هستند که سه ویژگی اصلی آن‌ها عبارتند از: ناپیوستگی، تعامد و کامل بودن.

توابع بلاک پالس نسبت به یکدیگر ناپیوسته هستند این ویژگی از معادله (1) قابل اثبات است و باعث کاهش حجم محاسبات در مسائل مختلف خواهد شد. خاصیت ناپیوستگی توابع بلاک پالس طبق معادله (2) بیان می‌شود:

$$\varphi_i(t)\varphi_j(t)=\begin{cases}\varphi_i(t) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad i,j=1,2,\dots,m\tag{2}$$

خاصیت تعامد، از مهمترین ویژگی این توابع می‌باشد که تعریف آن طبق معادله (3) ارائه می‌شود:

$$\int_0^T\varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt=h\delta_{ij}\qquad i,j=1,2,\dots,m\tag{3}$$

که در آن δ_{ij} تابع دلتای کرونیکر می‌باشد. این ویژگی که از خاصیت ناپیوستگی توابع بلاک پالس حاصل می‌شود و اساس بسط تابع $f(t)$ به سری بلاک پالس می‌باشد.

خاصیت کامل بودن توابع بلاک پالس براساس اتحاد پارسوال طبق معادله (4) تعریف می‌شود:

$$\int_0^T f^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}f_i^2\|\varphi_i(t)\|^2\tag{4}$$

[1] Duffing oscillator
[2] Van der pol oscillator

که در آن f_i، i امین ضریب بلاک پالس می‌باشد. براساس این ضرایب، هر تابع محدود را که در بازه $t\in[0,T)$ انتگرال‌پذیر باشد می‌توان براساس سری بلاک پالس بسط داد:

$$f(t)\simeq\hat{f}_m(t)=\sum_{i=1}^{m}f_i\,\varphi_i(t)\tag{5}$$

معادله (5) در قالب فرم برداری نیز بیان می‌شود:

$$f(t)\simeq\hat{f}_m(t)=F^{\mathrm{T}}\Phi(t)\tag{6}$$

که در آن $\Phi(t)=\left(\varphi_1(t)\;\;\varphi_2(t)\dots\varphi_m(t)\right)$ و $F=(f_1\;\;f_2\dots f_m)$ بردار ضرایب بلاک پالس می‌باشند. معادله (5) حاکی از آن است که هر تابع حقیقی پیوسته، با استفاده از توابع بلاک پالس قابل تقریب است. اساس این تقریب بر پایه مجموع مربعات خطا بین تابع اصلی و مقدار تخمین زده شده آن $\hat{f}_m(t)$ در بازه $t\,\epsilon\,[0,\;T)$ می‌باشد:

$$\varepsilon=\frac{1}{T}\int_0^T\left(f(t)-\sum_{j=1}^{m}f_j\,\varphi_j(t)\right)^2dt\tag{7}$$

با کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا$(\partial\varepsilon/\partial f_i=0)$ و با بهره‌گیری از خاصیت تعامد، ضرایب بلاک پالس طبق معادله (8) محاسبه می‌شود:

$$f_i=\frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih}f(t)\,dt\tag{8}$$

انتگرال گیری از توابع بلاک پالس به یک ماتریس عملگر منتهی می‌شود که یکی از مهم ترین ویژگی‌های این توابع، بخصوص در این پژوهش می‌باشد و مطابق معادله (9) بیان می‌شود [15]:

$$\int_0^t\varphi_i(t)dt\simeq\frac{h}{2}\varphi_i+h\sum_{j=i+1}^{m}\varphi_j(t)=\left(0\;\;0\;\;\underbrace{\frac{h}{2}}_{i\text{ امین ورودی}}\;\;h\;\;h\right)\Phi(t)\tag{9}$$

با فرض ماتریس ضرایب تابع بلاک پالس در معادله (9) به‌عنوان ماتریس عملگر، انتگرال تابع بلاک پالس را می‌توان به یک عبارت جبری برحسب ماتریس عملگر تبدیل نمود. بر این اساس انتگرال هر تابع انتگرال‌پذیر را نیز می‌توان برحسب ماتریس عملگر P در حوزه بلاک پالس بیان نمود:

$$\int_0^t f(t)dt\simeq F^{\mathrm{T}}\int_0^t\Phi(t)dt\simeq F^{\mathrm{T}}P\Phi(t)\tag{10}$$

که در آن:

$$\mathrm{P}=\frac{h}{2}\begin{bmatrix}1&2&2&\dots&2\\0&1&2&\dots&2\\0&0&1&\dots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}\tag{11}$$

3- فرمول‌بندی فرایند شناسایی

معادلات حرکت سازه چند درجه آزادی طبق معادلات (12) و (13) به فرم ماتریسی نشان داده می‌شود:

$$M\ddot{X}(t)+C\dot{X}(t)+KX(t)=Bu(t)\tag{12}$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix}c_{\mathrm{p}}X(t)\\c_{\mathrm{v}}\dot{X}(t)\\c_{\mathrm{a}}\ddot{X}(t)\end{bmatrix}\tag{13}$$

که در آن $X(t)$ ، $\dot{X}(t)$ و $\ddot{X}(t)$ به ترتیب بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب درجات آزادی سازه می‌باشند. M ، K و C ماتریس‌های $n\times n$ شامل جرم، سختی و میرایی هستند و n نشان‌دهنده درجات آزادی سازه می‌باشد.

$u(t)$ بردار تحریک خارجی و B ماتریس ورودی نامیده می‌شوند. بردار $Y(t)$ نشان‌گر پاسخ‌های طبقات سازه تحت ضرایب $c_{\mathrm{p}}, c_{\mathrm{v}}, c_{\mathrm{a}}$ که به‌ترتیب نشانگر ماتریس‌های موقعیت خروجی جابجایی، سرعت و شتاب می‌باشند.

با تعریف بردار حالت $Z(t) = \left[X(t)^{\mathrm{T}} \quad \dot{X}(t)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ معادله (12) به فرم فضای حالت پیوسته زمان مرتبه اول بیان می‌شود:

$$\dot{Z}(t) = A_{\mathrm{c}}\, Z(t) + B_{\mathrm{c}} u(t) \tag{14}$$

به ترتیب A_{c} و B_{c} ماتریس سیستم و ماتریس ورودی فضای حالت نامیده می‌شوند و مطابق با معادلات (15) و (16) می‌باشند:

$$A_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} [0]_{n\times n} & [I]_{n\times n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$B_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} [0]_{n\times 1} \\ M^{-1}B \end{bmatrix} \tag{16}$$

بردار پاسخ سازه نیز براساس ماتریس خروجی C_{c} بیان می‌شود:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{p}} & C_{\mathrm{v}} \end{bmatrix} Z(t) = C_{\mathrm{c}} \quad Z(t) \tag{17}$$

برای هر سیستم پیوسته زمان خطی با جرم متمرکز با مقادیر ویژه مجزا، معادله (14) را به فرم قطری نیز می‌توان بیان کرد. در این مدل ماتریس‌های A_c و B_{c} برحسب مقادیر ویژه آن به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\Lambda_{\mathrm{A}} = \mathrm{diag}[\lambda_1\, \lambda_2\, \ldots\, \lambda_{2n}] \quad \mathcal{B}^{\mathrm{T}} = \left[\bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \ldots \quad \bar{b}_{2n}\right] \tag{18}$$

که در آن $(\lambda_1\, \lambda_2, \ldots\, \lambda_{2n-1}\, \lambda_{2n})$ مقادیر ویژه ماتریس سیستم به‌صورت مختلط مزدوج می باشند.

در حوزه بلاک پالس و در بازه زمانی $t \in [0, T)$ با انتگرال‌گیری از طرفین فرم قطری معادله (14) و صفر فرض نمودن شرایط اولیه، معادله (19) حاصل می‌شود:

$$Z(t) - Z(0) = \Lambda_{\mathrm{A}} \int_0^t Z(t)\, dt + \mathcal{B} \int_0^t u(t)\, dt \tag{19}$$

پس از بسط دو انتگرال ظاهر شده در معادله (19) در حوزه بلاک پالس و همچنین بسط بردار حالت به سری بلاک پالس معادله (20) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\left(Z_1^{\mathrm{BP}} \;\; Z_2^{\mathrm{BP}} \ldots Z_m^{\mathrm{BP}}\right)\Phi(t) - \left(Z^{\mathrm{BP}}(0) \quad Z^{\mathrm{BP}}(0) \ldots Z^{\mathrm{BP}}(0)\right)\, \Phi(t) \\ &\cong \Lambda_{\mathrm{A}}\left(Z_1^{\mathrm{BP}} \;\; Z_2^{\mathrm{BP}} \ldots Z_m^{\mathrm{BP}}\right) P \Phi(t) - \mathcal{B}\left(\, U_1^{\mathrm{BP}} \quad U_2^{\mathrm{BP}} \ldots U_m^{\mathrm{BP}}\right) P\, \Phi(t) \end{aligned} \tag{20}$$

که در آن Z_m^{BP} و U_m^{BP} ، m امین ضریب بلاک پالس بردار حالت و تحریک می‌باشد.

با توجه به این که توابع بلاک پالس از طرفین معادله (20) قابل حذف می‌باشد بنابراین با جایگذاری ماتریس عملگر بالا مثلثی معادله (11) در معادله (20) m معادله جبری برحسب ضرایب بلاک پالس به‌دست می‌آید که k امین معادله آن تحت عنوان $E_{(K)}$ طبق معادله (21) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} Z_k^{\mathrm{BP}} - Z^{\mathrm{BP}}(0) = \frac{h}{2}\left(\Lambda_{\mathrm{A}} Z_k^{\mathrm{BP}} + \mathcal{B} U_k^{\mathrm{BP}}\right) \\ + h \sum_{j=1}^{k-1} \left(\Lambda_{\mathrm{A}} Z_j^{\mathrm{BP}} + \mathcal{B} U_j^{\mathrm{BP}}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

در معادله (21) محاسبه هر Z_k براساس Z_1 تا Z_{k-1} صورت می‌گیرد بنابراین حجم محاسباتی زیادی موردنیاز می‌باشد بخصوص در مواقعی که تعداد بلوک‌های m زیاد باشد بنابراین با هدف اجتناب از این حالت، عملگر $E_{(k)} - E_{(k-1)}$ به معادله (21) اعمال می‌شود تا معادلات بازگشتی بلاک پالس طبق معادله (22) حاصل شود:

$$Z_k^{\mathrm{BP}} - Z_{k-1}^{\mathrm{BP}} = \frac{h}{2} \Lambda_{\mathrm{A}}\left(Z_k^{\mathrm{BP}} + Z_{k-1}^{\mathrm{BP}}\right) + \frac{h}{2} \mathcal{B}\left(U_k^{\mathrm{BP}} + U_{k-1}^{\mathrm{BP}}\right) \tag{22}$$

طبق معادله (22) محاسبه k امین حالت با در نظر گرفتن ماتریس قطری Λ_{A} می تواند به‌صورت زیر صورت بگیرد:

$$Z_k^{\mathrm{BP}} = \mathrm{diag}[d_1 \;\; d_2 \;\; \ldots \;\; d_{2n}] Z_{k-1}^{\mathrm{BP}} + G\left[U_k^{\mathrm{BP}} + U_{k-1}^{\mathrm{BP}}\right] \tag{23}$$

که در آن:

$$d_i = \left(1 - \frac{h\, \lambda_i}{2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{h\, \lambda_i}{2}\right) \tag{24 – الف}$$

$$G^{\mathrm{T}} = [g_1 \quad g_2 \quad \ldots \quad g_{2n}\;\;] \tag{24 – ب}$$

$$g_i = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h\, \lambda_i}{2}\right)^{-1} \; \bar{b}_i \tag{24 – پ}$$

با بیان معادله (17) برحسب ضرایب بلاک پالس و جایگذاری معادله (23) در آن می‌توان رابطه‌ای به‌دست آورد که در آن ضرایب بلاک پالس پاسخ جابجایی درجات آزادی سازه برحسب مقادیر ویژه ماتریس سیستم و ضرایب بلاک پالس تحریک خارجی بیان می‌شود:

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{BP}}(k) = \begin{Bmatrix} y_1^{\mathrm{BP}} \\ y_2^{\mathrm{BP}} \\ \vdots \\ y_3^{\mathrm{BP}} \end{Bmatrix} = \mathrm{C} \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{diag}[(1 - d_i\, z^{-1})^{-1}]\; G \;\; w^{\mathrm{BP}}(k) \tag{25}$$

که در آن z^{-1} اپراتور تاخیر و $w^{\mathrm{BP}}(k) = U_k^{\mathrm{BP}} + U_{k-1}^{\mathrm{BP}}$ می‌باشند. با در نظر گرفتن ماتریس ضرایب خروجی به‌صورت:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2n \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 2n \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\; 1 & 1 \end{bmatrix}_{n\times 2n} \tag{26}$$

معادله (25) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{BP}}(k) = \begin{Bmatrix} \dfrac{g_1}{1 - d_1\, z^{-1}} + \dfrac{g_2}{1 - d_2\, z^{-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{g_{j+1}}{1 - d_{j+1}\, z^{-1}} + \dfrac{g_{j+2}}{1 - d_{j+2}\, z^{-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{g_{j+n-1}}{1 - d_{j+n-1}\, z^{-1}} + \dfrac{g_{j+n}}{1 - d_{j+n}\, z^{-1}} \end{Bmatrix} w^{\mathrm{BP}}(k) \tag{27}$$

که در آن $(j = 1, \ldots n)$ نشان‌دهنده درجات آزادی سازه می‌باشد.

هر سطر از مجموعه ضرایب معادله (27) را می‌توان به‌عنوان یک تابع انتقال $H_j(z^{-1})$ در نظر گرفت و براساس ورودی $w^{\mathrm{BP}}(k)$ و خروجی y_j^{BP} با استفاده از یک مدل آی آر ایکس مرتبه دو آن را تخمین زد:

$$H_j(z^{-1}) = \frac{b_{0j+} b_{1j} z^{-1}}{1 + a_{1j} z^{-1} + a_{2j} z^{-2}} \tag{28}$$

در این مقاله از جعبه شناسایی سیستم نرم‌افزار متلب برای تعیین ضرایب a_{j1} و a_{j2} استفاده شده است. به منظور ساده‌سازی در فرایند تخمین مقادیر ویژه ماتریس سیستم در ادامه پارامترهای σ_j و γ_j به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_j = -\frac{\hat{a}_{1j}}{2} \qquad\qquad \gamma_j = \sqrt{\hat{a}_{2j} - \sigma_j^2} \tag{29}$$

به‌طوری که:

$$\begin{cases} d_1, d_2 = \sigma_1 \pm i\gamma_1 \\ \qquad\vdots \\ d_{2n-1}, d_{2n} = \sigma_n \pm i\gamma_n \end{cases} \tag{30}$$

در نهایت مقادیر ویژه ماتریس سیستم طبق معادله (32) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 = \;\alpha_1 \pm i\beta_1 \\ \qquad\vdots \\ \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n} = \alpha_n \pm i\beta_n \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2}{h}\left(\dfrac{\sigma_1^2 + \gamma_1^2 - 1}{(1+\sigma_1)^2 + \gamma_1^2}\right) & \beta_1 = \dfrac{4}{h}\left(\dfrac{\gamma_1}{(1+\sigma_1)^2 + \gamma_1^2}\right) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \alpha_n = \dfrac{2}{h}\left(\dfrac{\sigma_n^2 + \gamma_n^2 - 1}{(1+\sigma_n)^2 \; + \gamma_n^2}\right) & \beta_n = \dfrac{4}{h}\left(\dfrac{\gamma_n}{(1+\sigma_n)^2 + \gamma_n^2}\right) \end{cases} \tag{32}$$

در ادامه با استفاده از بردارهای ویژه ماتریس سیستم (ψ)، می‌توان تبدیل $Z(t) = \psi\,\hat{Z}(t)$ را انجام داد. با توجه به این‌که $\psi^{-1}A_{\mathrm{c}}\psi$ برابر با مقادیر ویژه ماتریس A_{c} می‌باشد بنابراین معادله فضای حالت پیوسته زمان (14) را می‌توان در مدل مودال بازنویسی کرد:

$$\dot{\hat{Z}}(t) = \Lambda_{\mathrm{A}}\,\hat{Z}(t) + \psi^{-1}B_{\mathrm{c}}\,u(t) \tag{33}$$

$$y(t) = C_{\mathrm{c}}\psi\hat{Z}(t) \tag{34}$$

همچنین معادله حرکت (12) را می‌توان به فرم معادله حالت مرتبه دوم بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\dot{z}(t) + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} z(t) = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{35}$$

هدف از نمایش این مدل به کارگیری فرم مشابه برای مسئله مقادیر ویژه سیستم دینامیکی می‌باشد $\left(I\Lambda_{\mathrm{A}_i}^{2} + M^{-1}C\Lambda_{\mathrm{A}_i} + M^{-1}K\right)\psi_i^{\mathrm{d}} = 0$. مسئله مقادیر ویژه برای معادله ارتعاشی سازه را می‌توان به‌شکل فضای حالت مرتبه دوم همانند معادله (35) ولی به شکل مودال فرمول‌بندی نمود:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}\Lambda_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

که در آن $\psi_{n\times 2n}^{\mathrm{d}} = \left[\psi_1^{\mathrm{d}} \;\; \psi_2^{\mathrm{d}} \ldots \psi_{2n}^{\mathrm{d}}\right]$ بردارهای ویژه معادله حرکت می‌باشند که به‌صورت ستونی منظم شده‌اند معادله (36) را می‌توان طبق معادلات (37) و (38) مقیاس نمود [16]:

$$\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} = I \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{d}} \\ \psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} = \Lambda_{\mathrm{A}} \tag{38}$$

با استفاده از دو رابطه مقیاس شده (37) و (38) با تعریف معادله تبدیل $Z(t) = \left[(\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}} \quad (\psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}})^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\varsigma(t)$ معادله (35) به فرم مودال بیان می‌شود:

$$\dot{\varsigma}(t) = \Lambda_{\mathrm{A}}\,\varsigma(t) + (\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}Bu(t) \tag{39}$$

$$y(t) = C_{\mathrm{p}}\psi^{\mathrm{d}}\varsigma(t) \tag{40}$$

با توجه به این‌که معادلات (33)، (34) و (39)، (40) دو فرمول‌بندی متفاوت از یک سیستم دینامیکی هستند بنابراین با استفاده از یک ماتریس تبدیل دو معادله را می‌توان به یک دیگر مرتبط نمود:

$$T\Lambda = \Lambda T \;\;.\;\; T\,\psi^{-1}B_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}} = (\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{E}} \;\;.\;\; C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}\,\psi\,T^{-1} = C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{E}}\psi^{\mathrm{d}} \tag{41}$$

با توجه به این‌که تحریک در تراز پایه به سازه اعمال می شود و کلیه پاسخ‌های درجات آزادی سازه مشخص می‌باشند درایه‌های مربوط به ردیف و ستون jام $(j = 1,2, \ldots n)$ ماتریس‌های B و c_{p} برابر 1 می‌باشد. بنابراین برای ایجاد چنین حالتی فرم گسترده ماتریس‌های B، B_{c}، C_{c} و C_{p} به ترتیب به‌صورت B^{E}، $B_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}$، $C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}$ و $C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{E}}$ نشان داده شده‌اند.

ماتریس تبدیل T به‌صورت زوج مختلط و با آرایش قطری می‌باشد. در صورت مشخص بودن ماتریس‌های B^{E} و خروجی $C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{E}}$ ماتریس مقادیر ویژه سیستم دینامیکی ψ^{d} و همچنین ماتریس تبدیل T طبق معادلات زیر محاسبه می شوند [17]:

$$C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}(i\,,:)\psi = \left(\psi^{-1}B_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}(:\,,i)\right)^{\mathrm{T}}T^{2} \tag{42}$$

$$(C_{\mathrm{p}}^{\mathrm{E}})^{-1}C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{E}}\psi T^{-1} = \psi^{\mathrm{d}} \tag{43}$$

در نهایت ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی براساس شرایط تعامد معادلات مقیاس (37) و (38) شناسایی می‌شوند:

$$M = \left(\psi^{\mathrm{d}}\,\Lambda_{\mathrm{A}}\,(\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \qquad \text{(44-الف)}$$

$$C = -M\,\psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}}^{2}(\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}M \qquad \text{(44-ب)}$$

$$K = -\left(\psi^{\mathrm{d}}\Lambda_{\mathrm{A}}^{-1}(\psi^{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \qquad \text{(44-پ)}$$

شناسایی نسبت میرایی و فرکانس‌های طبیعی براساس مقادیر ویژه ماتریس سیستم A_{c} صورت گرفته است. این مقادیر ویژه به صورت زوج‌های مختلط هستند و شامل اطلاعات مودال سازه می‌باشند و طبق معادلات (45) نمایش داده می‌شوند [18]:

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j = -\xi_j\omega_j + i\omega_j\sqrt{1 - {\xi_j}^{2}} \tag{45}$$

که در آن α_j و β_j بخش حقیقی و موهومی از jامین مقدار ویژه ماتریس A_{c} می‌باشند. نسبت‌های میرایی و فرکانس‌های طبیعی سازه براساس معادله (46) استخراج می‌شوند:

$$\omega_j = \sqrt{(\alpha_j)^2 + (\beta_j)^2} \quad . \quad \xi_j = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{(\alpha_j)^2 + (\beta_j)^2}} \tag{46}$$

درنهایت اشکال مودی سازه $\{\emptyset\}$پس از شناسایی ماتریس‌های جرم و سختی با حل مسئله ویژه $|[k] - \omega^2[M]|\{\emptyset\} = 0$ شناسایی می‌شوند.

4- مطالعات عددی

به منظور ارزیابی دقت روش پیشنهادی قاب برشی سه طبقه که پاسخ تمام طبقات آن مشخص بوده و تحت ارتعاش در تراز پایه قرار دارد مطابق "شکل 1" مدل شده است.

دو سیگنال تصادفی با تاریخچه‌های زمانی متفاوت و با میانگین صفر و انحراف معیار 0.15 طبق جدول 1 به عنوان تحریک خارجی درنظر گرفته شده‌اند.

پارامترهای فیزیکی سازه‌ی مدل (مقادیر تئوری) شامل جرم، سختی و میرایی در جدول 2 ارائه شده است. فرم ماتریسی این پارامترها مطابق معادلات (47) و (48) می‌باشند (توجه شود به ازای میرایی هر طبقه فرم ماتریس میرایی مشابه ماتریس سختی می‌باشد):

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \tag{48}$$

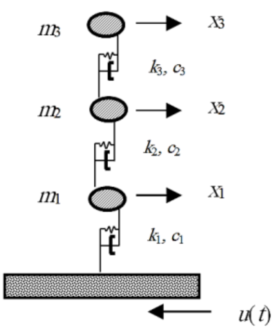

Fig. 1 Schematic view of three-story shear building equipped with sensor in all degrees of freedom and excited on base level

شکل 1 طرحواره سازه برشی سه طبقه مجهز به سنسور در کلیه درجات آزادی و تحت ارتعاش در تراز پایه

جدول 1 ویژگی سیگنال‌های تصادفی ورودی با توزیع نرمال

Table 1 Properties of normally distributed random signals

تحریک خارجی	زمان کل (ثانیه)	تعداد نمونه برداری (m)	گام زمانی نمونه برداری ($\Delta t = h$)
1	20	1000	0.02
2	20	4000	0.005

جدول 2 مقادیر جرم، سختی و میرایی سازه مدل (مقادیر تئوری)

Table 2 Mass, stiffness and damping values of the model.

شماره طبقات	جرم ($\mathbf{kN}\ s^2m^{-1}$)	سختی \($kN\ m^{-1}$)	میرایی ($kNs\ m^{-1}$)
1	8.50	1500	12.00
2	8.00	1200	9.00
3	7.50	1000	8.00

همچنین جدول 3 مشخصات مودال سازه مدل‌سازی شده را نشان می‌دهد. به‌طور عمومی، جهت به کارگیری ماتریس عملگر انتگرال، بایستی ضرایب بلاک پالس تابع موردنظر طبق معادله (8) محاسبه شوند و این امر زمانی امکان‌پذیر است که رابطه تحلیلی تابع معلوم باشد یا حداقل رفتار آن در بازه‌های زمانی کوچک مشخص باشد. در صورت فراهم نبودن چنین اطلاعاتی ضرایب بلاک پالس، بسته به نوع تابع می‌بایست به‌صورت عددی محاسبه شوند. با توجه به این‌که تابع موردنظر در این پژوهش سیگنال‌های تصادفی ورودی و پاسخ‌های سازه هستند و هیچ اطلاعاتی در مورد رفتار سیگنال بین گام‌های زمان نمونه‌برداری وجود ندارد از این‌رو ساده‌ترین تخمین، یعنی تقریب خطی دو نقطه‌ای به کار گرفته شده است. این تقریب برای تحریک ورودی و پاسخ‌های سازه طبق معادله (49) فرمول‌بندی می‌شود:

$$U_k^{\mathrm{BP}} = \frac{1}{h}\int_{(k-1)h}^{kh} u(t)\,dt \;\cong\; \frac{1}{2}(\bar{u}_{k-1} + \bar{u}_k) \qquad (49)$$

که در آن $\bar{u}_{k-1}$ و $\bar{u}_k$ مقادیر سیگنال پیوسته ورودی $u(t)$ در دو بازه زمانی کوچک (گام زمانی نمونه‌برداری) $t = (k-1)h$ و $t =$ kh می‌باشند. "شکل 2" تحریک اول و "شکل 3" ضرایب بلاک پالس این تحریک را نشان می‌دهد. همچنین رکورد تحریک دوم در "شکل 4" و ضرایب بلاک پالس متناظر آن در "شکل 5" ارائه شده است.

با توجه به این‌که کلیه پاسخ‌های درجات آزادی سازه مشخص می‌باشند بنابراین فرم‌های گسترده بردار خروجی و ماتریس ورودی به‌صورت $B^{\mathrm{E}} = c_{\mathrm{p}}^{\mathrm{E}}$ $= [I]_{3\times3}$ می‌باشند.

پس از محاسبه ماتریس انتقال و بردارهای ویژه مختلط طبق معادلات (42) و (43) ماتریس‌های فیزیکی-دینامیکی سازه طبق معادله (44) و همچنین پارامترهای مودال نیز طبق معادله (46) شناسایی شده، و نتایج در

جدول 3 پارامترهای مودال سازه برشی سه طبقه

Table 3 Modal characteristics of the three story shear structure

پارامترها	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی(rad/s)	5.7888	15.0198	21.6073
نسبت میرایی	0.0226	0.0599	0.0833
اشکال مودی	$\begin{Bmatrix}0.3720\\0.7487\\1.0000\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1.0000\\0.6520\\-0.9423\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}\mathbf{0.9460}\\\mathbf{-1.0000}\\\mathbf{0.3997}\end{Bmatrix}$

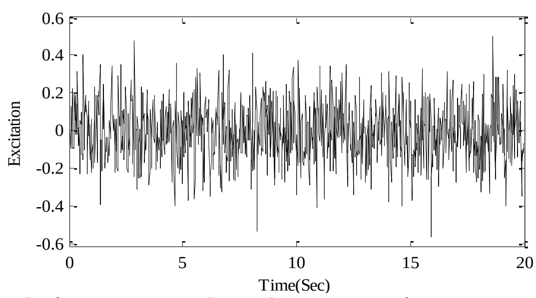

Fig. 2 The first excitation with sampling time step of 0.02 (Sec)

شکل 2 تحریک اول با گام زمانی نمونه برداری 0.02 ثانیه

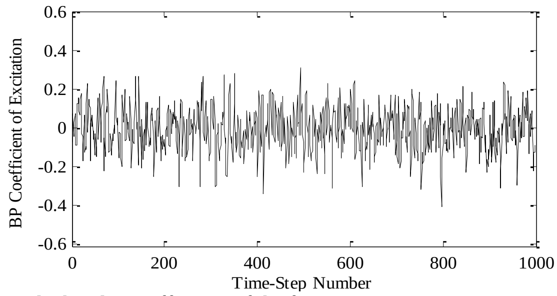

Fig. 3 Block pulse coefficients of the first excitation

شکل 3 ضرایب بلاک پالس تحریک اول

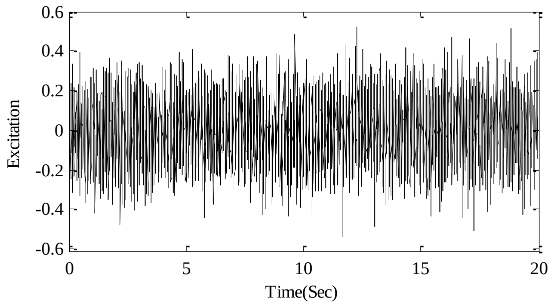

Fig. 4 The second excitation with sampling time step of 0.005 (Sec)

شکل 4 تحریک دوم با گام زمانی نمونه برداری 0.005 ثانیه

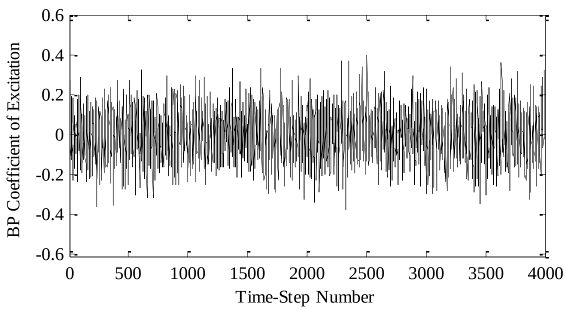

Fig. 5 Block pulse coefficients of the second excitation

شکل 5 ضرایب بلاک پالس تحریک دوم

جداول 4 و 5 ارائه شده است. به‌منظور ارزیابی میزان سازگاری مودهای شناسایی شده و مودهای تئوریک، معیار تطبیق مودال[1] به‌کار گرفته شده است. این معیار طبق معادله (50) تعریف می‌شود [19]:

$$\mathrm{mac} = (\{\O_{io}\},\{\O_{il}\}) = \frac{\left|\{\O_{io}\}^{\mathrm{T}}\{\O_{il}\}\right|^2}{\{\O_{io}\}^{\mathrm{T}}\{\O_{io}\}\{\O_{il}\}^{\mathrm{T}}\{\O_{il}\}} \qquad (50)$$

که در آن $\{\O_{io}\}$ و $\{\O_{il}\}$ *به ترتیب* i امین مود تئوری و شناسایی شده هستند. مقادیر معیار تطبیق مودال ما بین 0 و 1 متغیر است هنگامی که این معیار برابر 1 باشد دو بردار $\{\O_{io}\}$ و $\{\O_{il}\}$ دقیقاً یک شکل مودی را نشان می‌دهند و زمانی که برابر صفر است دو شکل مود، کاملا مستقل از هم هستند.

نتایج به‌دست آمده از جدول 4 نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی از دقت بسیار بالای برخوردار است و مقادیر خطاهای نسبی بسیار کم و ناچیز می‌باشند به‌طوری که حداکثر خطای شناسایی کمتر از 3 درصد می‌باشد و با کاهش گام زمان نمونه‌برداری از 0.02 ثانیه به 0.005 ثانیه مقادیر خطاهای نسبی کاهش یافته و دقت فرآیند شناسایی افزایش می‌یابد. به‌طوری که درگام زمان نمونه‌برداری برابر با 0.005 ثانیه مقادیر خطا نسبی تقریباً صفر

[1] Modal Assurance Criterion

جدول 4 مقادیر پارامترهای شناسایی شده جرم، سختی و میرایی

Table 4 Identified mass, stiffness and damping values

پارامترها		پارامترهای شناسایی			
		تحریک اول	خطا ٪	تحریک دوم	خطا٪
جرم $(kN\ s^2m^{-1})$	m_1	8.2461	2.99	8.4679	0.38
	m_2	7.7838	2.70	7.9691	0.39
	m_3	7.3659	1.79	7.4777	0.28
سختی $(kN\ m^{-1})$	k_1	1476.19	1.59	1496.15	0.26
	k_2	1172.63	2.28	1195.47	0.38
	k_3	977.54	2.25	996.31	0.37
میرایی $(kN\ s\ m^{-1})$	c_1	11.9624	0.31	11.9910	0.07
	c_2	8.9223	0.86	8.9738	0.33
	c_3	7.9257	1.06	7.9766	0.29

جدول 5 مقادیر شناسایی شده پارامترهای مودال

Table 5 Identified modal parameters values

پارامترها	مقادیر شناسایی شده تحت تحریک اول		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.7972	15.1531	22.0113
نسبت میرایی	0.0226	0.0600	0.0858
اشکال مودی	$\begin{Bmatrix}0.3720\\0.7487\\1.0000\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1.0000\\0.6525\\-0.9424\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}0.9466\\-1.0000\\0.3997\end{Bmatrix}$
mac	1.0000	1.0000	1.0000
پارامترها	مقادیر شناسایی شده تحت تحریک دوم		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.7900	15.0315	21.6439
نسبت میرایی	0.0226	0.0599	0.0837
اشکال مودی	$\begin{Bmatrix}0.3720\\0.7487\\1.0000\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}1.0000\\0.6521\\-0.9423\end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix}0.9458\\-1.0000\\0.3998\end{Bmatrix}$
mac	1.0000	1.0000	1.0000

می‌شود. علت این پدیده آن است که با افزایش تعداد بلوک‌ها وکاهش عرض آن‌ها (h) ضرایب دقیق‌تری طبق معادله (8) حاصل می‌شود در نتیجه دقت انتگرال حوزه بلاک پالس نیز طبق معادله (10) افزایش یافته و موجب افزایش دقت شناسایی می شود.

نتایج به‌دست آمده طبق جدول 5 نشان می‌دهند که در کلیه مودهای شناسایی شده معیار تطبیق مودال بسیار نزدیک به عدد یک می‌باشد که نشان از سازگاری بسیار بالای اشکال مودی شناسایی شده با مقادیر تئوریک می‌باشد.

5- اثر نویز

در کاربردهای واقعی داده های اندازه گیری شده غالباً آلوده به نویز می‌باشند. بنابراین برای ارزیابی اثرات نویز و شبیه‌سازی شرایط عملی، فرایند شناسایی در حضور نویز مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور نویز سفید به کمک یک سیگنال تصادفی با توزیع نرمال استاندارد دارای میانگین صفر و انحراف از معیار یک ایجاد و در سطح های مختلف به سیگنال پاسخ سازه اضافه شده است. سطح نویز به‌عنوان ضریبی از انحراف معیار بین نویز و سیگنال پاسخ سازه تعریف می‌شود [20]. برای نیل به این هدف، نویز سفید طبق معادله (51) به پاسخ تئوریک سازه اضافه می شود:

$$\{\bar{x}\}_t = \{x\}_t + E_p N_{noise}\,\sigma[\{x\}_t] \tag{51}$$

که در آن E_p نشانگر درصد سطح نویز، N_{noise} سیگنال تصادفی با توزیع نرمال استاندارد دارای میانگین صفر و انحراف از معیار یک و $\sigma[\{x\}_t]$ انحراف از معیار سیگنال پاسخ سازه می باشد.

به منظور ارزیابی اثرات نویز، نویز هایی با سطوح 5٪ و 10٪ به صورت تصادفی تولید شده و فرایند شناسایی براساس داده های آلوده به نویز صورت گرفته است. جداول 6 تا 9 پارامترهای شناسایی شده و خطای نسبی فرایند شناسایی را براساس سطوح مختلف نویز نشان می دهند.

جداول 6 و7 نشان می‌دهند که تخمین ضرایب میرایی حساسیت بیشتری نسبت به نویز دارد و حداکثر خطایی نسبی در شناسایی این پارامتر ایجاد شده است. در سطوح نویز کمتر از 5٪، پارامترهای شناسایی شده از دقت خوبی برخوردارند و با افزایش سطح نویز به 10٪ خطاهای نسبی نیز افزایش می یابند و حداکثر خطای نسبی در شناسایی ضریب میرایی برای تحریک اول به 22 ٪ رسیده است. طبق جداول 8 و 9 شناسایی فرکانس‌های طبیعی حساسیت کمتری نسبت به نویز دارد و حداکثر خطایی نسبی در تخمین فرکانس های طبیعی سازه در سطح نویز 10٪، برای تحریک اول کمتر از 4٪ می باشد.

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه‌های برشی چند درجه آزادی با استفاده از توابع بلاک پالس ارائه گردید. در الگوریتم پیشنهادی،

جدول 6 مقادیر پارامترهای شناسایی شده جرم، سختی و میرایی براساس تحریک اول و داده های آلوده به نویز

Table 6 Identified mass, stiffness and damping values based on excitation 1 and noisy output

پارامترها		سطح نویز			
		5%	خطا ٪	10%	خطا٪
جرم $(kN\ s^2m^{-1})$	m_1	8.1777	3.79	8.0034	5.84
	m_2	7.5078	6.15	7.2568	9.29
	m_3	8.0340	7.12	8.7701	16.93
سختی $(kN\ m^{-1})$	k_1	1636.27	9.08	1680.68	12.04
	k_2	1062.43	11.46	998.54	16.78
	k_3	964.91	3.51	954.35	4.56
میرایی $(kN\ s\ m^{-1})$	c_1	13.8867	15.72	14.6531	22.11
	c_2	8.1992	8.89	7.3867	17.93
	c_3	7.8106	2.37	7.4724	6.59

جدول 7 مقادیر پارامترهای شناسایی شده جرم، سختی و میرایی براساس تحریک دوم و داده های آلوده به نویز

Table 7 Identified mass, stiffness and damping values based on excitation 2 and noisy output

پارامترها		سطح نویز			
		5%	خطا ٪	10%	خطا٪
جرم $(kN\ s^2m^{-1})$	m_1	8.3019	2.33	8.2388	3.07
	m_2	7.6688	4.14	7.3755	7.81
	m_3	7.6136	1.51	7.7698	3.60
سختی $(kN\ m^{-1})$	k_1	1469.85	2.01	1355.69	9.62
	k_2	1112.45	7.29	1045.17	12.90
	k_3	984.93	1.52	963.34	3.66
میرایی $(kN\ s\ m^{-1})$	c_1	12.4251	3.54	12.9526	7.94
	c_2	8.2578	8.24	7.7254	14.16
	c_3	7.8535	1.83	7.6134	4.83

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.9.13.9]

جدول 8 مقادیر شناسایی شده پارامترهای مودال بر اساس تحریک اول و داده های آلوده به نویز

Table 8 Identified modal parameters values based on excitation 1 and noisy output

پارامترها	مقادیر شناسایی شده براساس داده های آلوده به نویز 5%		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.8217	15.2359	21.1315
نسبت میرایی	0.0229	0.0607	0.0862
mac	0.9974	0.9951	0.9968
پارامترها	مقادیر شناسایی شده براساس داده های آلوده به نویز 10%		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.6088	15.5735	22.3124
نسبت میرایی	0.0220	0.0618	0.0874
mac	0.9955	0.9812	0.9931

جدول9 مقادیر شناسایی شده پارامترهای مودال بر اساس تحریک دوم و داده های آلوده به نویز

Table 9 Identified modal parameters values based on excitation 2 and noisy output

پارامترها	مقادیر شناسایی شده بر اساس داده های آلوده به نویز5%		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.7739	14.9712	21.3815
نسبت میرایی	0.0227	0.0602	0.0823
mac	0.9999	0.9990	0.9998
پارامترها	مقادیر شناسایی شده بر اساس داده های آلوده به نویز10%		
	مود اول	مود دوم	مود سوم
فرکانس طبیعی (rad/s)	5.7039	14.8629	21.2608
نسبت میرایی	0.0222	0.0611	0.0857
mac	0.9983	0.9961	0.9976

شناسایی ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی سازه و پارامترهای مودال شامل فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و اشکال مودی سازه، براساس داده‌های ورودی- خروجی سیستم صورت گرفت. با تعریف توابع انتقال براساس ضرایب بلاک پالس تحریک-پاسخ و معادل‌سازی آن‌ها با مدل آی آر ایکس روابطی برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس سیستم ارائه شد و از مقادیر ویژه به‌دست آمده برای شناسایی پارامترهای فیزیکی-دینامیکی و پارامترهای مودال سازه استفاده شد. به منظور ارزیابی دقت فرآیند شناسایی، سازه برشی سه طبقه با پاسخ های مشخص در تمام درجات آزادی و تحت ارتعاش در تراز پایه مدل‌سازی شد. برای ارزیابی اثرات نویز، نویز سفید در دو سطح 5٪ و 10٪ به پاسخ‌های سازه اضافه شد و دقت پارامترهای شناسایی شده مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که در حالت بدون نویز، الگوریتم پیشنهادی عملکرد خوبی دارد و مقادیر شناسایی شده سازگاری بسیار بالایی با مقادیر تئوری دارند. مشخص شد که وجود نویز بیشترین اثر را در شناسایی ضرایب میرایی داشته و پارامترهای مودال از جمله فرکانس‌های طبیعی سازه حساسیت کمتری نسبت به حضور نویز دارند. در سطح نویز کمتر از 5٪ دقت پارامترهای شناسایی شده همچنان خوب می‌باشد و برای تحریک ورودی با گام زمانی نمونه‌برداری برابر با 0.005 ثانیه حداکثر خطای نسبی ایجاد شده در شناسایی ضریب میرایی کمتر از 9% می‌باشد. با افزایش سطح نویز به 10٪ و با افزایش گام زمانی تحریک ورودی به 0.02 ثانیه حداکثر خطای نسبی در تخمین ضریب میرایی به 22٪ می‌رسد و این در حالی است که حداکثر خطای نسبی در تخمین فرکانس‌های طبیعی سازه کمتر از 4٪ می‌باشد. درنهایت استفاده از توابع بلاک پالس می‌تواند ضمن ساده سازی و کاهش حجم عملیات محاسباتی، پارامترهای دینامیکی سازه را با دقت مناسبی شناسایی نماید و به عنوان یک روش جدید در مبحث شناسایی سیستم بر پایه توابع متعامد مطرح شود.

7- مراجع

[1] E. N. Chatzi, C. Papadimitriou, *Identification Methods for Structural Health Monitoring*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, pp. 1-34, Germany: Springer, 2016.

[2] R. Tarinejad, M. pourgholi, S. Yaghmaei, Signal processing of dynamic tests results using subspace identification based on orthogonal decomposition technique(SI-ORT), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 104-116, 2015. (in Persian فارسی)

[3] B. Moaveni, *System and Damage Identification of Civil Structures*, PhD Thesis, University of California, San Diego, 2007.

[4] P. Sannuti, B. E. Tech, Analysis and synthesis of dynamic systems via block-pulse functions, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, IEEE Xplore Digital Library, June 1977.

[5] V. Rao, K. Rao, Optimal feedback control via block-pulse functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, No. 2, pp. 372-374, 1979.

[6] R. P. Pacheco, J. R. Steffen, Using orthogonal functions techniques for identification and sensitivity analysis of mechanical system, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 8, No. 7, pp. 993-1021, 2002.

[7] M. K. Bouafoura, O. Moussi, N. B. Braiek, A fractional state space realization method with block pulse basis, *Signal Processing*, Vol. 91, No. 3, pp. 492-497, 2011.

[8] H. Ghaffarzadeh, A. Younespour, Active tendons control of structures using block pulse functions, *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 21, No. 12, pp. 1453–1464, 2014.

[9] A. Younespour, H. Ghaffarzadeh, Structural active vibration control using active mass damper by block pulse functions, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 21, No. 14, pp. 1–9, 2014.

[10] Y. Tang, H. Liu, W. Wang, Q. Lian, X. Guan, Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions, *Signal Processing*, Vol. 107, pp. 272–281, 2015.

[11] H. Ghaffarzadeh, A. Younespour, Block pulse transform method for linearization of nonlinear SDOF systems, *Nonlinear Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 77-82, 2016.

[12] A. Younespour, H. Ghaffarzadeh, On using block pulse transform to perform equivalent linearization for a nonlinear Van der Pol oscillator under stochastic excitation, *Nonlinear Engineering*, Vol. 5, No. 2, pp. 272–281, 2016.

[13] E. Babolian, Z. Masouri, Direct method to solve volterra integral equation of the first kind using operational matrix with block-pulse functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 220, No. 1, pp. 51-57, 2008.

[14] J. H. Park, Approximation algorithm for multi-input and multi-output system using generalized block pulse integrational matrices, *Control and Auomation*, Vol. 8, No. 6, pp. 317-326, 2015.

[15] Z. H. Jiang, W. Schaufelberger, *Block Pulse Functions and their Applications in Control Systems*, pp. 1-41, Germany: Springer, 1997.

[16] M. De-Angelis, H. Lus, R. Betti, R. W. Longman, Extracting physical parameters of mechanical models from identified state-space representations, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 5, pp. 617-625, 2002.

[17] H. Lus, M. De-Angelis, R. Betti, R. W. Longman, Constructing second-order models of mechanical systems from identified state space realizations. part I: theoretical discussions, *Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 5, pp. 477-488, 2003.

[18] R. Tarinejad, M. Pourgholi, Processing ambient vibration results using stochastic subspace identification based on canonical correlation analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 107-118, 2015. (in Persian فارسی)

[19] D. J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, second edition, pp. 424-427, England: Research Studies Press LTD, 2000.

[20] E. Khanmirza, N. Khaji, V. J. Majd, Model updating of multistory shear buildings for simultaneous identification of mass, stiffness and damping matrices using two different soft-computing methods, *Expert Systems with Applications*, Vol. 38, No. 5, pp. 5320–5329, 2011.