مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1397، دوره 18، شماره 02، ص‌ص 264-272

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

رفتار آشوبناک نانوتیر بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی تحت تحریک هارمونیک با استفاده از تئوری غیرموضعی

مسعود میر[1]، مسعود طهانی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی 91775-1111، mtahani@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 04 آبان 1396

پذیرش: 23 دی 1396

ارائه در سایت: 12 بهمن 1396

کلید واژگان:

نانوتیر

الاستیسیته غیر موضعی

بستر ویسکوالاستیک

آشوب

آنالیز ملنیکوف

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی یک نانوتیر اویلر برنولی واقع بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که نانو تیر در معرض یک نیروی هارمونیک قرار دارد که می تواند تخمینی از یک میدان الکتروستاتیک باشد. بستر ویسکوالاستیک غیرخطی برای دو حالت دارای سخت شوندگی و نرم شوندگی درنظر گرفته می‌شود. با توجه به مدل‌سازی در مقیاس نانو، معادلات دینامیک غیرخطی نانوتیر مورد نظر از روش تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن و با صرف‌نظر از اینرسی درون صفحه‌ای به‌دست می‌آید. با استفاده از روش گالرکین و شکل مود اول، معادله دیفرانسیل مشتقات پاره‌ای به‌دست آمده به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. پس از محاسبه نقاط تعادل سیستم و مشاهده دوشاخگی هیتروکلنیک، مدارهای هیتروکلنیک تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از روش انتگرال ملنیکوف حرکت آشوبناک سیستم به‌صورت تحلیلی بررسی شده و محدوده امن رفتار سیستم با توجه به فضای پارامتری مساله مشخص می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که وقتی بستر ویسکوالاستیک دارای خاصیت سخت شوندگی باشد، بروز رفتار آشوبناک در سیستم نمی‌تواند مورد انتظار باشد. مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای بررسی رفتار آشوبناک نانوتیرها ضروری بوده و عدم استفاده از این تئوری نتایج متفاوتی می‌دهد و ممکن است سیستم را در ناحیه غیرامن قرار دهد.

Chaotic behavior of nonlocal nanobeam resting on a nonlinear viscoelastic foundation subjected to harmonic excitation

Massoud Mir, Masoud Tahani*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, mtahani@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 October 2017
Accepted 13 January 2018
Available Online 01 February 2018

Keywords:
Nanobeam
Nonlocal elasticity
Viscoelastic foundation
Chaos
Melnikov analysis

ABSTRACT

In this paper, the nonlinear vibration of a Euler–Bernoulli nanobeam resting on a non-linear viscoelastic foundation is investigated. It is assumed that the nanobeam is subjected to a harmonic excitation that can be representative of an electrostatic field. The non-linear viscoelastic foundation is considered for both hardening and softening cases. By neglecting of the in-plane inertia, Eringen's nonlocal elasticity theory is used to model and derive the equation of motion of the nanobeam. Using the Galerkin method and the first mode shape, the obtained partial differential equation is reduced to the ordinary differential equation. Calculating the system's equilibrium points lead to heteroclinic bifurcation and the heteroclinic orbits are obtained. Then, using the Melnikov integral method, the chaotic motion of the system is studied analytically, and the safe region of the system is determined respect to the parametric space of the problem. When the viscoelastic foundation has a hardening characteristic, the chaotic behavior in the system does not occur. It has been observed that the use of nonlocal elasticity theory is necessary to investigate the chaotic behavior of nanobeam, and using the classical theory of elasticity may place the system in the chaotic region.

1- مقدمه

با گذشت چند دهه از ظهور علوم و تکنولوژی نانو، هنوز هم نانوتکنولوژی به عنوان یکی از زمینه‌های علمی مورد علاقه محققین مطرح بوده و تحقیقات جدید و شایسته‌ای در این حوزه صورت می‌گیرد. به‌دلیل خواص شگفت‌آور نانومواد و نانوساختارها تلاش‌های زیادی جهت ساخت و به‌کارگیری آن‌ها در حال انجام است. با توجه به خواص جالب شیمیایی، الکتریکی و مکانیکی نانوساختارها، درک رفتار و تعیین خواص مختلف نانوساختارها و همچنین مدل‌سازی رفتار آن‌ها بسیار مورد توجه محققین می‌باشد. به تبع پیشرفت‌ها در حوزه نانوتکنولوژی، کاربرد سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیکی نیز به‌دلیل خواص منحصر به فردشان رو به گسترش است. تیرهای نانومقیاس، اصلی‌ترین جزء ساختاری سیستم‌های نانوالکترومکانیکی بوده که در نانوعملگرها[1]، نانوسوئیچ‌ها، سنسورهای زیستی و به طور کلی در بیشتر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی به‌کار می‌روند [1-3].

[1] Nano-actuators

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Mir, M. Tahani, Chaotic behavior of nonlocal nanobeam resting on a nonlinear viscoelastic foundation subjected to harmonic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 264-272, 2018 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.40.9]

به‌علت مشکلات زیادی که در انجام آزمایش در مقیاس نانو وجود دارد، عمده مطالعات رفتار مواد با استفاده از روش‌های مدل‌سازی و شبیه‌سازی اتمی و یا تئوری‌های محیط پیوسته انجام می‌شوند. زمان‌بر بودن و هزینه محاسباتی بالا، باعث شده است تا در بسیاری موارد روش‌های شبیه‌سازی دینامیک مولکولی جای خود را به روش‌های محیط پیوسته بدهد. روش‌های محیط پیوسته کلاسیک، در غالب موارد کارآیی لازم در مقیاس نانو را نداشته و بهتر است از تئوری‌های بهبود یافته استفاده شود. برای بررسی رفتار مواد در مقیاس نانو و مدل‌سازی نانوساختارها می‌توان از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن[1] که دارای پارامتر مقیاس طول است، به جای تئوری الاستیسیته کلاسیک استفاده نمود. در تئوری الاستیسیته غیرموضعی که توسط ارینگن ارایه شده است بر خلاف تئوری الاستیسیته کلاسیک، تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط محیط پیوسته است [4-6]. ردی [7]، تئوری‌های مهم تیر که شامل تیرهای اویلر-برنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون[2] است را با الاستیسیته غیرموضعی مجددا فرمولبندی کرد. وی همچنین حل تحلیلی برای خمش، کمانش و ارتعاش نانوتیرها را با بررسی اثر پارامتر غیرموضعی ارایه داد. محققین بسیاری از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن جهت مدل‌سازی خمش، کمانش و ارتعاشات تیرهای نانومقیاس استفاده کرده و تاکید نموده‌اند که برای مدل‌سازی در مقیاس نانو، باید از تئوری‌های غیرکلاسیک دارای پارامتر مقیاس طول نظیر تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن استفاده نمود [8-11]. کریم‌پور و همکاران [12]، با استفاده از تئوری تنش کوپل به بررسی ناپایداری فروکشیدگی[3] در یک نانوعملگر پرداخته و تاثیر اندازه و نیروی کازمیر بر ناپایداری کشیدگی را مورد بررسی قرار دادند. طادی‌بنی و همکاران [13]، با استفاده از تئوری گرادیان کرنش بهبود یافته به بررسی اثر اندازه بر ناپایداری تیر یکسر گیردار نانو پرداختند. آن‌ها اثر نیروی مولکولی، جاذبه الکترواستاتیک و ولتاژ اعمالی بر رفتار نانوتیر را تحلیل و بررسی نمودند. انصاری و همکاران [14]، به بررسی ارتعاشات اجباری غیرخطی یک تیر متحرک پرداختند. در این مطالعه، تیر تحت اثر نیروی هارمونیک و در محیط حرارتی قرار گرفته است و پاسخ فرکانسی آن از روش تعادل هارمونیک به‌دست آمده است. انصاری و نوروززاده [15]، به آنالیز کمانش نانوصفحه هدفمند با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی پرداختند. در این مطالعه، اثر پارامترهای تنش سطحی و پارامتر مقیاس کوچک بر بار کمانش بحرانی بررسی شد. انصاری و همکاران [16]، به بررسی پایداری دینامیکی یک نانولوله کربنی چند جداره که دارای بارگذاری حرارتی می‌باشد، پرداختند. در این تحقیق، نانولوله به‌صورت یک نانوتیر غیر موضعی مدل شده و بر یک بستر پسترناک واقع است. همچنین انصاری و همکاران [17]، به بررسی ارتعاشات آزاد یک نانولوله برن نیترید[4] حاوی سیال پرداختند. در این تحقیق از تئوری بهبود یافته گرادیان کرنشی استفاده شد و نانولوله به‌صورت یک نانوتیر مدل گردید. تای [18]، مدلی برای خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارایه داد. وی با حل تحلیلی، تغییرشکل، بار کمانش و فرکانس طبیعی را برای تیر با تکیه‌گاه ساده به‌دست آورد. شیمشک [19]، به بررسی ارتعاشات آزاد نانوتیرهای اویلر-برنولی در شرایط مرزی مختلف پرداخت. وی با استفاده از روش گالرکین و روش هی[5] فرکانس غیرخطی نانوتیر را محاسبه کرد. ونگ و لی [20]، به بررسی دینامیک غیرخطی یک نانوتیردارای بارگذاری محوری بر روی بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی پرداختند. نجار و همکاران [21]، یک نانوعملگر میکروالکترومکانیکی را به‌صورت یک نانوتیر اویلر-برنولی و با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مدل کرده و با درنظرگرفتن نیروهای کازیمیر[6] و وان‌دروالس[7]، دینامیک غیرخطی آن را مورد بررسی قرار دادند. حسینی و همکاران [22]، ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای نانومقیاس را با در نظرگرفتن اثرات سطحی با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با حل دقیق معادلات حرکت، فرکانس‌های طبیعی نانوتیر را محاسبه نموده و تاثیر اثرات سطحی بر فرکانس طبیعی را بررسی کردند. البورگی و همکاران [23]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری نانوتیرهای هدفمند را با تکیه‌گاه ساده بر روی بستر الاستیک غیرخطی مورد بررسی قرار دادند. تیر اویلر-برنولی در نظرگرفته شده براساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی جهت مدل‌سازی استفاده شده و اثرات پارامترهای غیرموضعی و پارامترهای بستر الاستیک غیرخطی بر فرکانس‌های غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. وثوقی [24]، به مطالعه ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوتیر هدفمند بر بستر الاستیک پرداخت. وی از تئوری الاستیسیته غیرموضعی جهت محاسبه فرکانس غیرخطی سیستم بهره برد. سلطان پور و همکاران [25]، به بررسی ارتعاشات عرضی نانوتیر هدفمند با تئوری تیر تیموشنکو مبتنی بر الاستیسیته غیرموضعی پرداختند. این نانوتیر بر بستر الاستیک قرار داشته و دارای ترک می‌باشد. تگان [26]، به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانوتیر اویلر-برنولی بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی پرداخت. سپس تاثیر پارامتر غیرموضعی و پارامترهای مربوط به بستر الاستیک را بر ارتعاشات نانوتیر مورد بررسی قرار داد.

علاوه بر مدل‌سازی ریاضی و بررسی رفتار غیرخطی سیستم‌های میکرو و نانو الکترومکانیکی، بررسی رفتار آشوبناک سیستم‌های غیرخطی نیز مورد توجه محققین می‌باشد. یاگاساکی [27]، دینامیک میکروتیر یک سر گیردار را در مد ضربه‌ای مورد مطالعه قرار داد و با استفاده از روش ملنیکوف[8] به بررسی آشوب در این سیستم پرداخت. بررسی رفتار غیرخطی میکروتشدیدگر مکانیکی یکی از مباحث مورد علاقه محققین می‌باشد. میکروتشدیدگر مکانیکی، با حرکت به واسطه نیروهای الکترواستاتیک دو طرف آن، رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد که با روش‌های تحلیلی همانند روش ملنیکوف مورد ارزیابی قرار گرفته است [28-30]. معانی و همکاران [31]، به بررسی رفتار غیرخطی تشدیدگر میکروالکترومکانیکی پرداختند که بروز آشوب می‌تواند روی عملکرد بهینه آن تاثیر گذارد. آن‌ها روش جدیدی برای پیش‌بینی آشوب ارایه دادند که بسیار ساده بوده و هزینه محاسباتی کمی نسبت به روش ملنیکوف دارد. آورجیکس و همکاران [32]، به مدل‌سازی ریاضی و تحلیل دینامیک آشوبناک تیر اویلر-برنولی انعطاف‌پذیر پرداختند. تجددیان‌فر و همکاران [33]، به بررسی ارتعاشات آشوبناک میکرو و نانو تشدیدگر الکترومکانیکی تحت تحریک‌های ترکیبی متناوب AC و مستقیم DC پرداختند. مالکی و نحوی [34]، به بررسی رفتار دینامیک غیرخطی نانوتشدیدگر مکانیکی پرداخته و از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای پیش‌بینی آشوب در این نانوتشدیدگر استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از روش تحلیلی ملنیکوف، مقدار بحرانی ولتاژ تحریک AC را که منجر به حرکت

[1] Eringen
[2] Levinson
[3] Pull-in instability
[4] Boron nitride nanotube
[5] He
[6] Casimir
[7] Van der Waals
[8] Melnikov

آشوبناک می‌شود، تعیین کردند.

محققین بسیاری به مطالعه رفتار ارتعاشی تیرها بر بستر الاستیک خطی و غیرخطی و همچنین بستر ویسکوالاستیک پرداخته‌اند [35,36]. شیمشک [37]، به بررسی ارتعاشات میکروتیرها بر روی بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از تئوری تنش-کوپل بهبودیافته پرداخت. همچنین مطالعه رفتار ارتعاشی نانوتیرها با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی بر روی بسترهای مختلف نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [23-26].

همان‌طور که پیشتر ذکر شد، مدل‌سازی نانوتیرها مورد علاقه محققین می‌باشد. یکی از مناسب‌ترین تئوری‌ها جهت مدل‌سازی نانوتیرها، تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن می‌باشد. بررسی کمی[1] ارتعاشات نانوتیرها با تئوری الاستیسته مذکور به فراوانی مورد بررسی قرار گرفته است اما بررسی رفتار غیرخطی این سیستم‌ها به‌طور کیفی[2] و همچنین پیش‌بینی وقوع آشوب در سیستم‌های نانو بسیار ناشناخته است. تاکنون بررسی کیفی رفتار غیرخطی یک نانوتیر که بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی قرار دارد با استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک الاستیسیته مورد مطالعه قرار نگرفته است. این تحقیق می‌تواند در طراحی و شناخت رفتار نانورزوناتورها و دیگر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی مورد استفاده قرار گیرد.

در این مقاله رفتار کیفی ارتعاشات غیرخطی نانوتیرها بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این نانوتیر با استفاده از تئوری اویلر-برنولی و براساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن مدل می‌گردد. پس از تعیین معادله حرکت، معادله دیفرانسیل مشتق پاره‌ای با استفاده از روش گالرکین به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. سپس معادله دیفرانسیل معمولی به‌دست آمده برای بررسی رفتار آشوبناک و دوشاخگی هیتروکلینیک[3] مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین جهت بررسی بهتر آشوب، بزرگترین نمای لیاپانف[4] نیز برای سیستم مورد نظر محاسبه می‌شود.

2- تئوری الاستیسیته غیرموضعی

تئوری الاستیسیته غیرموضعی اولین بار توسط ارینگن ارایه شد [4-6]. براساس این تئوری تنش (σ) در یک نقطه (x) از ماده الاستیک نه تنها به میدان کرنش در آن نقطه بلکه به کرنش در تمامی نقاط دیگر ماده وابسته است. تانسور تنش σ در نقطه x از محیط مادی Ω در معادله ساختاری تئوری الاستیسیته غیرموضعی به‌صورت زیر با تانسور کرنش ε تمام نقاط محیط مادی ارتباط پیدا می‌کند:

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega}^{u} \alpha(|x-\acute{x}|,\tau)\, \sigma_{ij}^{c}(\acute{x})\, d\Omega(\acute{x}) \qquad (1)$$

که σ_{ij} تانسور تنش و $\alpha(|x-\acute{x}|,\tau)$ تابع کرنل[5] و $\tau=e_0a/l$، که e_0 ثابت مادی مربوط به هر ماده است، a یک مشخصه طولی داخلی (برای مثال طول پیوند اتمی یا پارامتر شبکه) و l یک طول مشخصه خارجی (برای مثال طول ترک یا طول موج) می‌باشد. تابع کرنل بیانگر مدول غیرموضعی یا تابع فرسایش انرژی موج است که اثرات کرنش نقاط مختلف جسم را بر روی تنش نقطه موردنظر توصیف می‌کند. مقدار e_0 هم می‌تواند به‌صورت تجربی محاسبه شود و هم می‌تواند با انطباق منحنی‌های انتشار موج‌های صفحه‌ای با آن‌هایی که از دینامیک شبکه اتمی به‌دست آمده‌اند، تقریب زده شود. برای مقادیر مختلف فرکانس مقدار e_0a در بازه‌های متفاوتی قرار می‌گیرند.

ارینگن رابطه انتگرالی (1) را به‌صورت یک رابطه مرتبه دوم دیفرانسیلی به‌صورت زیر ساده نمود [5]:

$$(1-\mu\nabla^2)\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{c} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad (2)$$

که σ_{ij}^{c} تانسور تنش کلاسیک، ε_{kl} تانسور کرنش، C_{ijkl} تانسور مدول الاستیک بوده و $\mu=(e_0a)^2$ به پارامتر ابعاد کوچک مشهور است. با توجه به شرایط هندسی تیر، نوع تیر و شرایط بارگذاری، پاسخ فرم‌های انتگرالی و دیفرانسیلی (رابطه‌های (1) و (2)) تقریبا منطبق بوده [38-40] و در ادامه از فرم دیفرانسیلی استفاده می‌شود. معادله ساختاری غیرموضعی[6] برای نانوتیر به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_{xx} - \mu\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} = E\,\varepsilon_{xx} \qquad (3)$$

که E مدول یانگ، σ_{xx} تنش محوری عمودی و ε_{xx} کرنش محوری می‌باشد.

3- معادلات حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی

براساس تئوری تیر اویلر-برنولی، میدان جابه‌جایی یک نقطه از تیر به‌صورت زیر است:

$$u_x(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \qquad (4)$$

$$u_y(x,z,t) = 0 \qquad (5)$$

$$u_z(x,z,t) = w(x,t) \qquad (6)$$

که u و w به ترتیب جابه‌جایی محوری و عرضی هر نقطه روی محور خنثی می‌باشند. روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی ون-کارمن[7] بر پایه فرضیات جابه‌جایی عرضی بزرگ، چرخش نسبتا کم و کرنش کوچک به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{0} - z\kappa_x \qquad (7)$$

$$\varepsilon_{xx}^{0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 \qquad (8)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \qquad (9)$$

به طوری که ε_{xx}^{0} کرنش غیرخطی سطح میانی و κ_x انحنای تیر است.

در این تحقیق، یک نانوتیر ایزوتروپیک مستقیم به طول l، ضخامت h و پهنای b بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی و بار هارمونیک $q(x,t)$ مطابق "شکل 1" درنظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، نانوتیر بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی با ثابت‌های فنری K_L، K_P و K_{NL} به‌ترتیب برای بستر الاستیک وینکلر، بستر الاستیک پسترناک و بستر الاستیک غیرخطی و

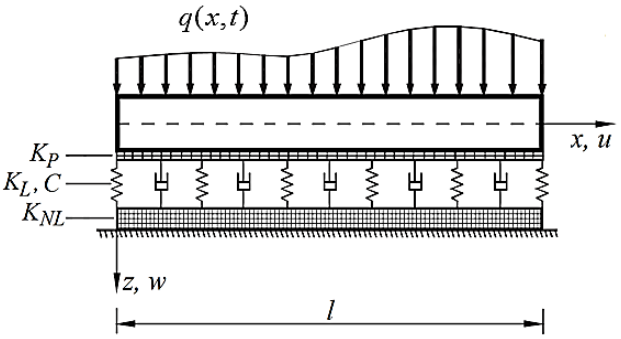

Fig. 1. The isotropic nanobeam on the nonlinear viscoelastic foundation

شکل 1 نانوتیر ایزوتروپیک بر روی بستر ویسکوالاستیک غیرخطی

[1] Quantitative
[2] Qualitative
[3] Heteroclinic
[4] Largest lyapunov exponent
[5] Kernel function
[6] Nonlocal constitutive equation
[7] Von Kármán

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.40.9]

همچنین میراگر با ثابت C قرار دارد. در این تحقیق، از اصل همیلتون به‌صورت زیر برای تعیین معادلات حرکت استفاده می‌شود:

$$\delta \int_0^t (K - W_I - W_E) dt = 0 \tag{10}$$

به‌طوری‌که، K، W_I و W_E به ترتیب، انرژی جنبشی، کار نیروهای داخلی و کار نیروهای خارجی می‌باشند.

وردش (تغییر) اول کار نیروهای داخلی (انرژی کرنشی) در بازه زمانی $[0,t]$ به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}\delta \int_0^t W_I\, dt &= \int_0^t \int_\Omega^u \sigma_{xx}\, \delta\varepsilon_{xx}\, dv\, dt \\ &= \int_0^t \int_\Omega^u \sigma_{xx}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} - z\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right) dv\, dt \\ &= \int_0^t \int_0^l \left[N\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} - M\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right)\right] dx\, dt\end{aligned} \tag{11}$$

که l طول نانوتیر است و منتجه‌های نیرو و ممان برابر است با:

$$N = \int_A^u \sigma_{xx}\, dA = EA\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{12}$$

$$M = \int_A^u z\, \sigma_{xx}\, dA = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{13}$$

که A، سطح مقطع تیر و I، ممان اینرسی مقطع تیر است.

کار نیروهای خارجی شامل کار بار گسترده q و کار حاصل از نیروی بستر ویسکوالاستیک F_{Foun} می‌باشند. با توجه به پارامترهای نشان داده شده در "شکل 1"، نیروی بستر ویسکوالاستیک به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F_{\text{Foun}} = -K_L w - \lambda K_{NL} w^3 + K_P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C\frac{\partial w}{\partial t} \tag{14}$$

با توجه به این‌که بسترهای الاستیک غیرخطی دو نوع رفتار نرم شونده و سخت شونده دارند، علامت عبارت‌های رابطه (14) نشان‌دهنده جهت نیروی اعمالی بستر ویسکوالاستیک به نانوتیر می‌باشد و تمامی ضرایب بستر ویسکوالاستیک دارای مقدار مثبت می‌باشند [43-41]، پارامتر λ در رابطه (14) برای بستر نرم شونده به‌صورت $\lambda = -1$ و برای بستر سخت شونده، $\lambda = 1$ است. بار گسترده هارمونیک که به نانوتیر اعمال می‌گردد، به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$q(x,t) = f \sin \Omega t \tag{15}$$

که f و Ω به ترتیب، دامنه بار گسترده اعمالی و فرکانس متناظر آن می‌باشد.

وردش اول کار انجام شده به‌وسیله نیروهای خارجی در بازه زمانی $[0,t]$ به‌صورت زیر است:

$$\delta \int_0^t W_E\, dt = \int_0^t \int_0^l -(q + F_{\text{Foun}})\delta w\, dx\, dt \tag{16}$$

همچنین وردش اول انرژی جنبشی در بازه زمانی $[0,t]$ به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\int_0^t \delta K\, dt = \int_0^t \int_0^l \rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right) dx\, dt \tag{17}$$

با قراردادن رابطه‌های (11)، (16) و (17) در رابطه (10)، انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قراردادن ضرایب δu و δw، معادله‌های حرکت به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) + (q + F_{\text{Foun}}) = \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{19}$$

که شرایط مرزی متناظر در دو انتهای نانوتیر به‌صورت زیر است:

$$\delta u = 0 \text{ یا } N = 0 \tag{20}$$

$$\delta w = 0 \text{ یا } \frac{\partial M}{\partial x} + N\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ یا } M = 0 \tag{22}$$

با ضرب dA در طرفین رابطه (3) و انتگرال‌گیری روی سطح مقطع، نتیجه می‌شود:

$$N - \mu\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = EA\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{23}$$

به طور مشابه با ضرب zdA در طرفین رابطه (3) و انتگرال‌گیری روی سطح مقطع، نتیجه می‌شود:

$$M - \mu\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{24}$$

عبارت صریح نیروی عمودی در الاستیسیته غیرموضعی با قرار دادن مشتق دوم N از رابطه (18) در رابطه (23) قابل محاسبه است:

$$N = EA\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \mu\rho A\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \tag{25}$$

همچنین ممان خمشی در الاستیسیته غیرموضعی با استفاده از روابط (19) و (24) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\Bigg[&\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &- (q + F_{\text{Foun}})\Bigg]\end{aligned} \tag{26}$$

برای به‌دست آوردن معادله‌های غیرموضعی حاکم برحسب جابه‌جایی باید روابط (25) و (26) را در روابط (18) و (19) قرار داد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[EA\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{EA}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) = 0 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ + \rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ = (q + F_{\text{Foun}}) - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(q + F_{\text{Foun}})\end{aligned} \tag{28}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، روابط (27) و (28) با جابه‌جایی‌های u و w کوپل شده‌اند. برای ساده‌سازی معادله حاکم به‌دست آمده به یک معادله ساده برحسب تغییر شکل جانبی از اینرسی درون صفحه‌ای صرف‌نظر شده است [44]، بنابراین رابطه ای برحسب w به‌دست می‌آید. براساس این فرض و با توجه به شرایط مرزی مربوط به حرکت محوری $u(0,t)=u(l,t)=0$ و پس از کمی عملیات ریاضی، نیروی محوری N به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$N = \frac{EA}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{29}$$

با جایگذاری از رابطه (29) در رابطه (28)، معادله حرکت بر حسب w به‌دست می‌آید:

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.40.9]

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(\frac{EA}{2l}\int_0^l(\frac{\partial w}{\partial x})^2\,dx\right)\left(\mu\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$
$$+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-(q+F_{\text{Foun}})$$
$$+\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(q+F_{\text{Foun}})=0 \tag{30}$$

جهت عمومیت بخشیدن به بحث حاضر، بهتر است معادله دیفرانسیل حرکت به‌صورت بی‌بعد درآید. برای این منظور پارامترهای بی‌بعد لازم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{x}=\frac{x}{l},\bar{w}=\frac{w}{r}\ ,\bar{t}=\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}t\ ,k_l=\frac{l^4}{EI}K_L,$$
$$k_{nl}=\frac{r^2l^4}{EI}K_{NL},k_p=\frac{l^2}{EI}K_P,c=\frac{l^2}{\sqrt{\rho AEI}}C,$$
$$\bar{f}=\frac{l^4}{EIr}f,\bar{\mu}=\frac{e_0a}{l}=\frac{\sqrt{\mu}}{l},\omega=\sqrt{\frac{\rho Al^4}{EI}}\Omega \tag{31}$$

که $r=\sqrt{I/A}$، شعاع ژیراسیون مقطع تیر است. با توجه به معادله حرکت (30) و پارامترهای بی‌بعد رابطه (31)، می‌توان معادله حرکت را به‌صورت بی‌بعد بازنویسی کرد:

$$\frac{EIr}{l^4}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}+\left(\frac{EAr^3}{2l^4}\int_0^1(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\,d\bar{x}\right)\left(\bar{\mu}^2\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}-\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\right)$$
$$+\frac{EIr}{l^4}\frac{\partial^2}{\partial\bar{t}^2}\left(\bar{w}-\bar{\mu}^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\right)-(\bar{q}+\bar{F}_{\text{Foun}})$$
$$+\bar{\mu}^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}(\bar{q}+\bar{F}_{\text{Foun}})=0 \tag{32}$$

به‌طوری‌که

$$\bar{F}_{\text{Foun}}=\frac{EIr}{l^4}(-k_l\bar{w}-\lambda k_{nl}\bar{w}^3+k_p\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}-c\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}}) \tag{33}$$

$$\bar{q}(\bar{x},\bar{t})=\frac{EIr}{l^4}\bar{f}\sin\omega\bar{t} \tag{34}$$

براساس روش گالرکین، می‌توان معادله حرکت (32) که به‌صورت معادله دیفرانسیل مشتق پاره‌ای است به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل نمود. برای این کار $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$\bar{w}(\bar{x},\bar{t})=\sum_{n=1}^{\infty}v(\bar{x})\,\phi_n(\bar{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi\bar{x})\,\phi_n(\bar{t}) \tag{35}$$

که $\phi_n(\bar{t})$ یک ضریب تابع زمان و نامعلوم است و $v(\bar{x})$ تابعی است که باید شرایط مرزی سینماتیکی را ارضا نماید. از آن‌جا که درنظرگرفتن یک مد در حل معادله حرکت (32) فرق زیادی با درنظر گرفتن دو مد ندارد [36]، فقط حالت مد اول درنظرگرفته می‌شود. بنابراین برای یک تیر دو سر مفصل، $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\bar{w}(\bar{x},\bar{t})=\sin(\pi\bar{x})\,\phi(\bar{t}) \tag{36}$$

جایگذاری حل تقریبی (36) در معادله حرکت (32) و ضرب آن در $v(\bar{x})=\sin(\pi\bar{x})$ و انتگرال‌گیری در بازه [0,1] به معادله دیفرانسیل معمولی زیر منجر می‌شود:

$$\ddot{\phi}+\alpha\dot{\phi}+\beta\phi+\gamma\phi^3=F\sin\omega\bar{t} \tag{37}$$

بطوری‌که علامت نقطه (دات) در رابطه (37) مشتق‌گیری نسبت به $\bar{t}$ بوده و ضرایب این رابطه عبارتند از:

$$\alpha=c$$
$$\beta=k_l+k_p\pi^2+\frac{\pi^4}{1+\bar{\mu}^2\pi^2}$$
$$\gamma=\frac{3}{4}\lambda k_{nl}+\frac{A\pi^4r^2}{4I}$$
$$F=\frac{-4\bar{f}}{\pi(1+\bar{\mu}^2\pi^2)} \tag{38}$$

4- دوشاخگی هیتروکلنیک و پیش بینی آشوب

در بخش‌های قبل معادله ارتعاش نانوتیر به‌دست آمد و معادله دیفرانسیل مشتقات پاره‌ای حرکت به معادله دیفرانسیل معمولی (رابطه (37)) تبدیل شد. برای بررسی رفتار این سیستم دینامیکی، ابتدا باید رابطه (37) به شکل معادلات فضای حالت بازنویسی شود:

$$\dot{\phi}=\psi$$
$$\dot{\psi}=-\alpha\psi-\beta\phi-\gamma\phi^3+F\sin\omega\bar{t} \tag{39}$$

اگر رابطه (39) به‌صورت

$$\dot{X}=f(X)+\epsilon g(X,\bar{t}) \tag{40}$$

نوشته شود، که در آن

$$f(X)=\begin{pmatrix}\psi\\-\beta\phi-\gamma\phi^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$$
$$g(X,\bar{t})=\begin{pmatrix}0\\-\alpha\psi+F\sin\omega\bar{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix} \tag{41}$$

آنگاه سیستم غیرپرتورب به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\phi}=\psi$$
$$\dot{\psi}=-\beta\phi-\gamma\phi^3 \tag{42}$$

و همیلتونین سیستم غیرپرتورب به‌صورت زیر است:

$$H(\phi,\psi)=\frac{1}{2}\beta\phi^2+\frac{1}{4}\gamma\phi^4+\frac{1}{2}\psi^2 \tag{43}$$

سیستم غیرپرتورب رابطه (42)، به ازاء علامت پارامترهای β و γ رفتارهای دینامیکی مختلفی را نشان می‌دهد. با توجه به رابطه (38) مشاهده می‌شود که علامت پارامتر β همیشه مثبت است و پارامتر γ فقط به ازاء $\lambda=-1$ می تواند مقادیر منفی اختیار کند. با توجه به این که سیستم دینامیکی مورد نظر، فقط به ازاء γ های منفی می‌تواند رفتار آشوبناک داشته باشد [30]، بنابراین برای بستر ویسکوالاستیک غیرخطی که سخت‌شوندگی دارد، هیچگاه سیستم آشوبناک نخواهد شد.

سیستم دینامیکی رابطه (42) دارای دو نقطه زینی $(\pm\sqrt{-\beta/\gamma},0)$ و یک مرکز در (0,0) می‌باشد. بنابراین سیستم دارای یک مدار هیتروکلنیک است که از نقاط زینی می‌گذرد. دوشاخگی هیتروکلنیک، یک دوشاخگی سراسری است که می‌تواند معیاری برای رفتار آشوبناک سیستم باشد. در این دوشاخگی، منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستم تداخل پیدا می‌کنند و پدیده نعل اسبی در نگاشت پوآنکاره که نشان دهنده رفتار آشوبناک است، روی می‌دهد. در این تحقیق، روش ملنیکوف جهت بررسی تحلیلی آشوب مورد استفاده قرار می‌گیرد. با اضافه نمودن جمله‌های اغتشاشی به همیلتونین سیستم، مدارهای هیتروکلنیک سیستم دچار اغتشاش شده و می‌توان با محاسبه فاصله بین منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستم، شرط تقاطع این منیفلدها را به‌دست آورد.

برای پیدا کردن مدارهای هیتروکلنیک، می‌توان همیلتونین را برابر با همیلتونین در نقطه زینی قرار داد، $H=H_{\text{saddle}}$. واضح است که $H_{\text{saddle}}=$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.40.9]

$-\beta^2/4\gamma$، بنابراین با توجه به رابطه (43) مدارهای هیتروکلنیک سیستم غیرپرتورب به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\Gamma_0^{\pm}(\bar{t}): (\phi_h(\bar{t}), \psi_h(\bar{t})) \tag{44}$$

به‌طوری‌که:

$$\phi_h(\bar{t}) = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{\gamma}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}\bar{t}\right)$$
$$\psi_h(\bar{t}) = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{2\gamma}}\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}\bar{t}\right) \tag{45}$$

مدارهای سیستم غیرپرتورب براساس رابطه (42) و با تابع همیلتونین مطابق رابطه (43) در "شکل 2" نشان داده شده است. در این شکل، مدار هیتروکلنیک یک دور جداساز[1] را تعریف می‌کند که از دو نقطه زینی $(\pm\sqrt{-\beta/\gamma}, 0)$ می‌گذرد.

پس از محاسبه پارامترهای مدار هیتروکلنیک سیستم می‌توان به محاسبه انتگرال ملنیکوف پرداخت [45-47]:

$$M(\bar{t}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Gamma_0(\bar{t}))\wedge g(\Gamma_0(\bar{t}), \bar{t}+\bar{t}_0)\, d\bar{t} \tag{46}$$

که $f\wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1$ حاصل‌ضرب تعریف شده برای این منظور است و f و g در رابطه (41) تعریف شده‌اند. انتگرال ملنیکوف به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$M(\bar{t}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_h(\bar{t}))[-\alpha(\psi_h(\bar{t})) + F\sin\omega(\bar{t} + \bar{t}_0)]d\bar{t}$$

$$= \frac{2\alpha\beta\sqrt{2\beta}}{3\gamma} \pm \frac{\sqrt{2}F\pi\omega\sin(\omega\bar{t}_0)\,\mathrm{csch}(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}})}{\sqrt{-\gamma}} \tag{47}$$

براساس آنالیز ملنیکوف، تغییر علامت $M(\bar{t}_0)$ شرط تقاطع منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستم است. بنابراین اگر $M(\bar{t}_0)$ براساس رابطه (47) صفر شود، سیستم می‌تواند از خود رفتار آشوبناک نشان دهد. در نتیجه فضای پارامتریک مربوط به حوزه‌ای که رفتار آشوبناک سیستم مورد انتظار می‌باشد به‌صورت زیر است:

$$\left|\frac{2\alpha\beta\sqrt{\beta}}{3F\pi\omega\sqrt{-\gamma}}\sinh\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}}\right)\right| \le 1 \tag{48}$$

بنابراین رفتار آشوبناک برای مسیرهایی که نزدیک سیستم غیرپرتورب جداکننده باشند مشهود است:

$$\frac{\alpha}{F} \le \left(\frac{\alpha}{F}\right)_{cr} = \left|\frac{3\pi\omega\sqrt{-\gamma}}{2\beta\sqrt{\beta}}\,\mathrm{csch}\left(\frac{\pi\omega}{\sqrt{2\beta}}\right)\right| \tag{49}$$

که $(\alpha/F)_{cr}$ حالت آستانه رفتار آشوبناک است که در "شکل 3" نمایش داده شده است. با توجه به شکل مذکور، مرز بین حوزه رفتارهای آشوبناک احتمالی و غیرآشوبناک سیستم مشخص شده است.

واضح است که برای مقادیر بالای منحنی آستانه حرکت آشوبناک (شکل3)، آشوب اتفاق نمی‌افتد ولی برای وضعیتی از سیستم که زیر این منحنی قرار می‌گیرد می‌توان انتظار رفتار آشوبناک را داشت. این به معنی این است که روش ملنیکوف، شرایط لازم و نه کافی را برای بروز آشوب ارایه می‌دهد. با دانستن ناحیه آشوبناک سیستم، می‌توان پارامترهای سیستم را طوری تنظیم نمود تا از بروز آشوب در سیستم خودداری گردد. در واقع رابطه (49) می‌تواند معیاری برای طراحی باشد تا طراح سیستم رزوناتور، با تغییر در هندسه، خواص مواد و همچنین تغییر پارامترهای بستر ویسکوالاستیک غیرخطی سیستم را از آشوب مصون نگاه دارد.

همان‌طور که در رابطه (48) مشاهده می‌شود، معیار ملنیکوف شامل پارامترهای β و F می‌باشد. این دو پارامتر براساس رابطه (38) تابع پارامتر بی‌بعد $\bar{\mu}$ می‌باشند و $\bar{\mu}$ نیز با توجه به رابطه (31) تابع μ می‌باشد. از آنجا که μ، پارامتر ابعاد کوچک در الاستیسیته غیرموضعی است، معیار ملنیکوف (رابطه (48)) تابعی از μ می‌شود. بنابراین می‌توان دریافت که در صورت استفاده از تئوری الاستیسیته کلاسیک نتیجه متفاوتی برای معیار ملنیکوف به‌دست می‌آید.

5- نتایج شبیه‌سازی سیستم

برای بررسی روش تحلیلی ملنیکوف، شبیه‌سازی کامپیوتری بر روی سیستم پرتورب انجام شده است. با انتگرال‌گیری عددی رابطه (39) می‌توان نمودار صفحه فاز سیستم را رسم نمود. نمودار صفحه فاز سیستم برای مقادیر مختلف پارامترهای رابطه (39) رسم شده است تا رفتار منظم و آشوبناک سیستم مورد بررسی قرارگیرد.

در "شکل‌های 4 تا 9"، نمودار صفحه فاز سیستم و نمودار مقطع پوآنکاره سیستم نشان داده شده است. "شکل 4" نمودار صفحه فاز را به ازای مقادیر مشخص شده نشان می‌دهد. براساس رابطه (49) مقدار $\alpha_{cr} = 0.40$ می‌باشد که در بخش بالایی منحنی انتقال به آشوب قرار دارد. با توجه به نمودار صفحه فاز (شکل 4) و نمودار مقطع پوآنکاره (شکل 5)، رفتار پریودیک سیستم کاملا مشخص است.

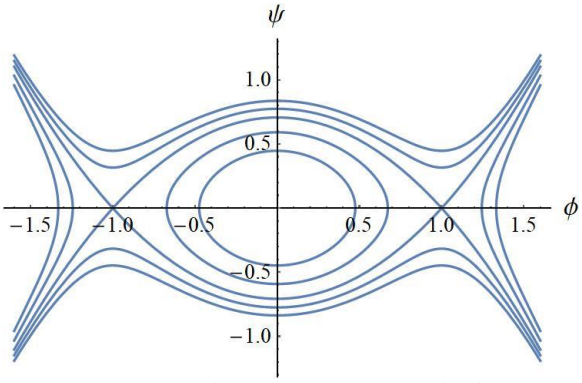

Fig. 2 Heterolinic orbit of the unperturbed system for $\beta = 1$ and $\gamma = -1$

شکل 2 مدار هیتروکلنیک سیستم غیرپرتورب به ازاء $\beta = 1$ و $\gamma = -1$ به همراه مدارهای اطراف آن

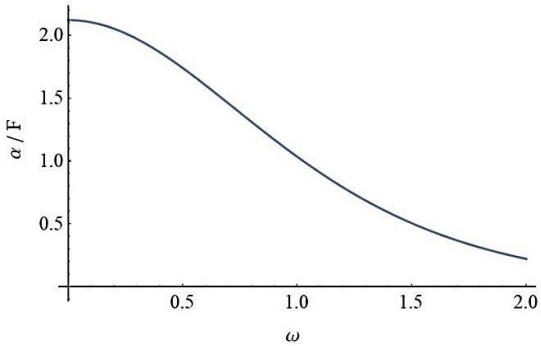

Fig. 3 Heteroclinic bifurcation in the $((\alpha/F), \omega)$ plane for $\beta = -\gamma = 1$

شکل 3 دوشاخگی هیتروکلنیک در صفحه $((\alpha/F), \omega)$، به ازاء $\beta = -\gamma = 1$

[1] Separatrix

"شکل‌های 6 و 8" نمودارهای صفحه فاز و "شکل‌های 7 و 9" نمودارهای مقطع پوآنکاره را برای حالت‌هایی از سیستم نشان می‌دهند که در نامساوی رابطه (49) صدق کرده و در پایین منحنی آستانه حرکت آشوبناک قرار دارند. بنابراین براساس پیش‌بینی روش ملنیکوف می‌توان رفتار آشوبناک را از سیستم انتظار داشت. از مقایسه "شکل‌های 6 تا 9" با "شکل‌های 4 و 5" بدیهی به نظر می‌رسد که سیستم رفتار پیچیده‌تر و نامنظم‌تری را از خود به نمایش می‌گذارد. برای نشان دادن بهتر رفتار آشوبناک سیستم می‌توان نمودار بزرگترین نمای لیاپانف را برای یکی از حالت‌هایی که سیستم در قسمت پایین منحنی آستانه حرکت آشوبناک قرار دارد رسم نمود. به کمک این معیار می‌توان وجود آشوب در پاسخ سیستم را بررسی نموده و این عدد نشانگر میزان حساسیت سیستم موردنظر به شرایط اولیه می‌باشد. نمای لیاپانف مثبت نمایان‌گر حساس بودن سیستم به شرایط اولیه و در نتیجه بروز رفتار آشوبناک است [48]. "شکل 10" بزرگترین نمای لیاپانف را به ازای شرایط اولیه مشخص شده نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر عددی شبیه‌سازی‌های "شکل‌های 6 تا 9" مشاهده می‌شود که وقتی ضریب مربوط به میرایی بستر ویسکوالاستیک (α) مقادیر کوچکتری اختیار می‌کند و از ضریب ویسکوالاستیک بحرانی (α_{cr}) فاصله بیشتری می‌گیرد، زمینه بروز رفتار آشوبناک در سیستم بیشتر فراهم می‌شود.

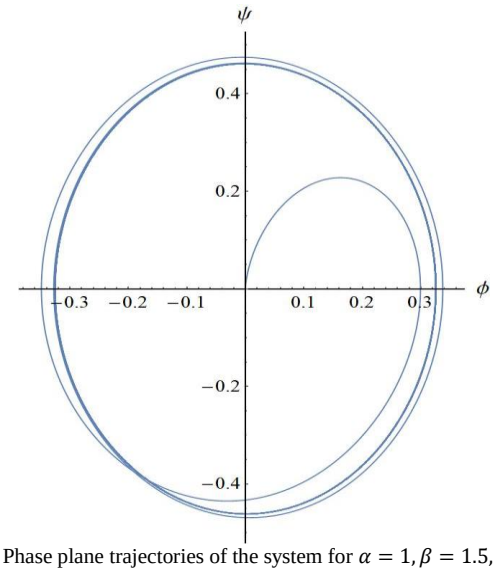

Fig. 4 Phase plane trajectories of the system for $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 4 نمودار صفحه فاز سیستم به ازاء مقادیر $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2$ $F = 0.5, \omega = 1.4$

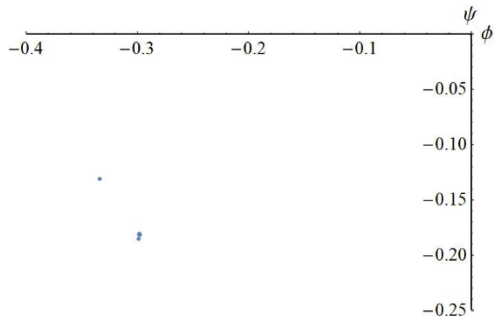

Fig. 5 Poincaré section for $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 5 نمودار مقطع پوآنکاره سیستم به ازاء مقادیر $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2$ $F = 0.5, \omega = 1.4$

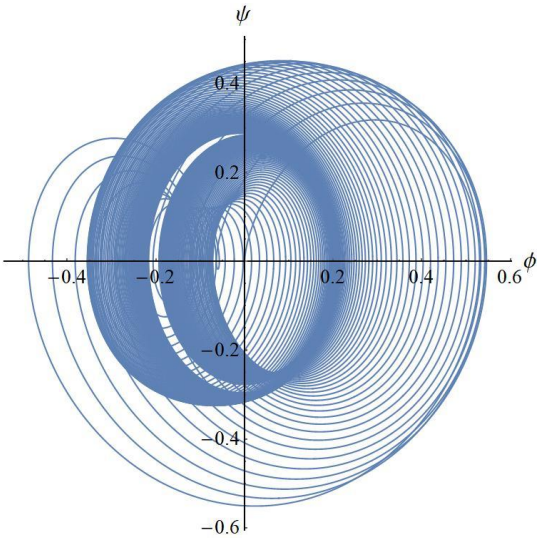

Fig. 6 Phase plane trajectories of the system for $\alpha = 1, \beta = 1.5, \gamma = -2, F = 0.5, \omega = 1.4$

شکل 6 نمودار صفحه فاز به ازاء مقادیر $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2$ $F = 0.3, \omega = 1.4$

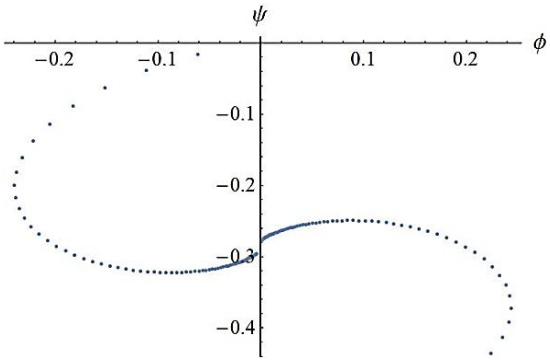

Fig. 7 Poincaré section for $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 7 نمودار مقطع پوآنکاره به ازاء مقادیر $\alpha = 0.01, \beta = 0.5, \gamma = -0.2$ $F = 0.3, \omega = 1.4$

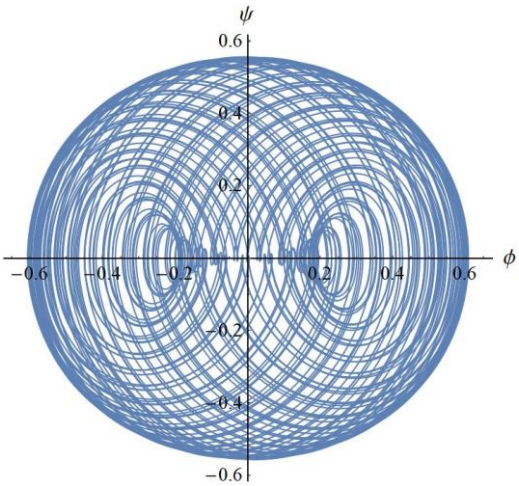

Fig. 8 Phase plane trajectories of the system for $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 8 نمودار صفحه فاز به ازاء مقادیر $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2$ $F = 0.3, \omega = 1.4$

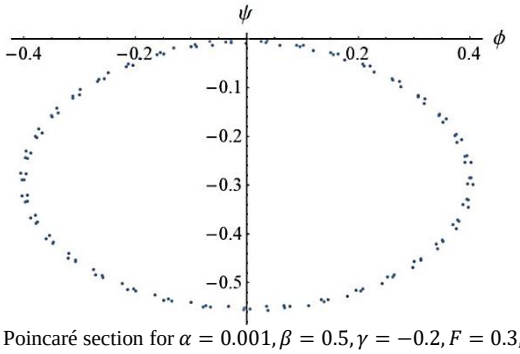

Fig. 9 Poincaré section for $\alpha = 0.001, \beta = 0.5, \gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4$

شکل 9 نمودار مقطع پوآنکاره به ازاء مقادیر $\alpha = 0.001, \beta = 0.5$ $\gamma = -0.2\ , F = 0.3, \omega = 1.4$

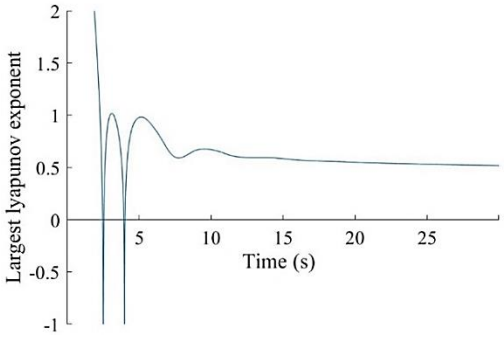

Fig. 10 Largest Lyapunov exponent for $\alpha = 0.001, \beta = 0.5,$ $\gamma = -0.2, F = 0.3, \omega = 1.4, \phi(0) = 0.1,\ \psi(0) = 0.15$

شکل 10 بزرگترین نمای لیاپانف به ازاء مقادیر $\alpha = 0.001, \beta = 0.5$ $\gamma = -0.2\ , \phi(0) = 0.1,\ \psi(0) = 0.15\ , F = 0.3, \omega = 1.4$

6- نتیجه‌گیری

با درنظر گرفتن یک نانوتیر اویلر-برنولی بر روی بستر ویسکوالاستیک، دینامیک غیرخطی آن با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از روش ملنیکوف، محدوده مورد انتظار رفتار آشوبناک سیستم تعیین گردید. با توجه به این‌که معیار به‌دست آمده تابع پارامتر غیرموضعی هم می‌باشد، لزوم استفاده از الاستیسیته غیرموضعی در بررسی دینامیک غیرخطی سیستم مشخص گردید.

شبیه‌سازی‌های عددی شامل نمودار صفحه فاز، نمودار مقطع پوآنکاره و بزرگترین نمای لیاپانف هم نتایج به‌دست آمده از روش ملنیکوف را تایید می‌کند. همچنین از همیلتونین سیستم نتیجه می‌شود که نانوتیر بر بستر ویسکوالاستیک غیرخطی که حالت سخت‌شوندگی داشته باشد از خود رفتار آشوبناک نشان نمی‌دهد و فقط برای بسترهای ویسکوالاستیک غیرخطی دارای نرم‌شوندگی شرایط بروز آشوب فراهم است.

7- مراجع

[1] X. Li, B. Bhushan, K. Takashima, C. W. Baek, Y. K. Kim, Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques, *Ultramicroscopy*, Vol. 97, No. 1–4, pp. 481-494, 2003.

[2] Y. Moser, M. A. M. Gijs, Miniaturized flexible temperature sensor, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 16, No. 6, pp. 1349-1354, 2007.

[3] J. Pei, F. Tian, T. Thundat, Glucose biosensor based on the microcantilever, *Analytical Chemistry*, Vol. 76, No. 2, pp. 292-297, 2004.

[4] A. C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.

[5] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.

[6] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, First Edition, pp. 31-48, New York: Springer, 2002.

[7] J. N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2–8, pp. 288-307, 2007.

[8] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 41, No. 9, pp. 1651-1655, 2009.

[9] J. N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, pp. 1507-1518, 2010.

[10] A. GharehKhani, E. Abbaspoure-Sani, Study of static deflection and instability voltage of phase shifter micro-switches using a nonlinear beam model and non-localized elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 99, No. 9, pp. 9-99, 1396 .(in Persian فارسی)

[11] C. M. C. Roque, A. J. M. Ferreira, J. N. Reddy, Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, No. 9, pp. 976-984, 2011.

[12] I. Karimipöur, Y. Tadi Beni, A. Koochi, M.R. Abadyan, Using couple stress theory for modeling the size-dependent instability of double-sided beam-type nanoactuators in the presence of Casimir force, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 38, No. 6, pp. 1779-1795, 2015.

[13] Y. Tadi Beni, I. Karimipöur, M. R. Abadyan, Modeling the instability of electrostatic nano-bridges and nano-cantilevers using modified strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 9, pp. 2633–2648, 2015.

[14] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 27-34, 2015 .(in Persian فارسی)

[15] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, Nonlocal and surface effects on the buckling behavior of functionally graded nanoplates: An isogeometric analysis, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 84, pp. 84-97, 2016.

[16] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, A. Norouzzadeh, M. Bazdid-Vahdati, Dynamic stability analysis of embedded multi-walled carbon nanotubes in thermal environment, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 28, No. 6, pp. 659-667, 2015.

[17] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, M. Faghih Shojaei, M. Hosseinzadeh, Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 61, pp. 148-157, 2014.

[18] H. T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52, pp. 56-64, 2012.

[19] M. Şimşek, Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 621-628, 2014.

[20] Y. Z. Wang, F. M. Li, Nonlinear primary resonance of nano beam with axial initial load by nonlocal continuum theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 61, pp. 74-79, 2014.

[21] F. Najar, S. El-Borgi, J. N. Reddy, K. Mrabet, Nonlinear nonlocal analysis of electrostatic nanoactuators, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 117-128, 2015.

[22] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, H. Rokni, Nonlocal nonlinear free vibration of nanobeams with surface effects, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 52, pp. 44-53, 2015.

[23] S. El-Borgi, R. Fernandes, J. N. Reddy, Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams resting on a non-linear elastic foundation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 77, pp. 348-363, 2015.

[24] A. R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams on nonlinear elastic foundation, iranian journal of science and technology, *Transactions of Civil Engineering*, Vol. 40, No. 1, pp. 23-32, 2016.

[25] M. Soltanpour, M. Ghadiri, A. Yazdi, M. Safi, Free transverse vibration analysis of size dependent Timoshenko FG cracked nanobeams resting on elastic medium, *Microsystem Technologies*, pp. 1-18, 2016.

[26] N. Togun, Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of a nanobeam resting on elastic foundation, *Boundary Value Problems*, Vol. 2016, No. 1, pp. 1-14, 2016.

[27] K. Yagasaki, Bifurcations and chaos in vibrating microcantilevers of tapping mode atomic force microscopy, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, No. 4, pp. 658-672, 2007.

[28] H. S. Haghighi, A. H. D. Markazi, Chaos prediction and control in MEMS resonators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 10, pp. 3091-3099, 2010.

[29] M. S. Siewe, U. H. Hegazy, Homoclinic bifurcation and chaos control in MEMS resonators, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 12, pp. 5533-5552, 2011.

[30] E. M. Miandoab, A. Yousefi-Koma, H. N. Pishkenari, F. Tajaddodianfar, Study of nonlinear dynamics and chaos in MEMS/NEMS resonators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 22, No. 1–3, pp. 611-622, 2015.

[31] E. Maani Miandoab, H. N. Pishkenari, A. Yousefi-Koma, F. Tajaddodianfar, Chaos prediction in MEMS-NEMS resonators, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 82, pp. 74-83, 2014.

[32] J. Awrejcewicz, A. V. Krysko, V. Dobriyan, I. V. Papkova, V. A. Krysko, Chaotic and synchronized dynamics of non-linear Euler–Bernoulli beams,

[40] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology*, Vol. 19, No. 34, pp. 34-57, 2008.
[41] H. S. Shen, F. W. Williams, Postbuckling analysis of imperfect composite laminated plates on non-linear elastic foundations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 30, No. 5, pp. 651-659, 1995/09/01, 1995.
[42] H. S. Shen, F. W. Williams, Thermomechanical postbuckling analysis of imperfect laminated plates of softening nonlinear elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 40, No. 1, pp. 55-66, 1997.
[43] H. S. Shen, Thermal postbuckling analysis of imperfect reissner-mindlin plates on softening nonlinear elastic foundations, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, No. 3, pp. 259-270, 1998.
[44] S. A. Emam, A static and dynamic analysis of the postbackling of geometrically imperfect composite beams, *Composite Structure*, Vol. 90, No. 2, pp. 247-253, 2009.
[45] P. H. John Guckenheimer, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, First Edition, pp. 184-193, New York: Springer, 1983.
[46] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, pp. 426-429, New York: Springer, 1988.
[47] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, pp. 687-711, New York: Springer, 2003.
[48] F. C. Moon, *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, pp. 191-200, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
Computers & Structures, Vol. 155, pp. 85-96, 2015.
[33] F. Tajaddodianfar, H. Nejat Pishkenari, M. R. Hairi Yazdi, Prediction of chaos in electrostatically actuated arch micro-nano resonators: Analytical approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 30, No. 1–3, pp. 182-195, 2016.
[34] M. Maleki, H. Nahvi, Nano-resonator dynamic behavior based on nonlocal elasticity theory, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 229, No. 14, pp. 2665-2671, October 1, 2015, 2015.
[35] D. Younesian, S. R. Marjani, E. Esmailzadeh, Nonlinear vibration analysis of harmonically excited cracked beams on viscoelastic foundations, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 71, No. 1, pp. 109-120, 2013.
[36] H. Norouzi, D. Younesian, Chaotic vibrations of beams on nonlinear elastic foundations subjected to reciprocating loads, *Mechanics Research Communications*, Vol. 69, pp. 121-128, 2015.
[37] M. Şimşek, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He's variational method, *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 264-272, 2014.
[38] A. Norouzzadeh, R. Ansari, Finite element analysis of nano-scale Timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 88, pp. 194-200, 2017.
[39] A. Norouzzadeh, R. Ansari, H. Rouhi, Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of nonlocal elasticity: An isogeometric approach, *Applied Physics A*, Vol. 123:330, 2017.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1397.18.2.40.9]