http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
فوق‌العاده اسفند ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۴ ص ص ۲۸-۴۲

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۲/٤/۱۸
تاریخ پذیرش ۹۲/۵/۸
ارائه در سایت ۹۲/۱۰/۳۰

حل معادلات MHD با استفاده از یک روش مرتبه بالای مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها به منظور شبیه‌سازی رانشگر پلاسمایی مغناطیسی

مهدی آهنگر[۱]، رضا ابراهیمی[۲*]، مهرزاد شمس[۳]

۱- دانشجوی دکترای مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
۲- دانشیار مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
۳- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، صندوق پستی ۳۳۸۱-۱۶۷۶۵، rebrahimi@kntu.ac.ir

چکیده- در این پژوهش یک الگوریتم محاسباتی عددی برای حل معادلات دوبعدی تقارن محوری حاکم بر جریان پلاسمای درون رانشگر، جهت تعیین رفتار جریان سیال و توزیع مشخصه‌های الکترومغناطیسی، توسعه داده شده است. بدین منظور برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی از روش رؤ، برای تعیین مشخصه‌های جریان از روش موج هشتم پاول و برای افزایش دقت حل عددی از روش OMUSCL2 استفاده شده است. با توجه به وجود انبساط‌های قوی سرعت بالا در مجاورت نوک الکترودها، رابطهٔ اصلاح شدهٔ HHT برای جلوگیری از وقوع شوک انبساطی به کار گرفته شده است. به منظور همخوانی بهتر نتایج عددی و تجربی، زیر مدل‌های شیمیایی و فیزیکی از قبیل مدل یونش چند مرحله‌ای، اثر هال، اثر ریزناپایداری‌های میکروسکوپیک، مدل چند-دمایی، معادلهٔ حالت واقعی و اثر خواص انتقالی در نظر گرفته شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی عددی برای یک رانشگر آزمایشگاهی ارائه شده و توزیع جریان و پتانسیل الکتریکی به دست آمده، در مقایسه با نتایج تجربی تطابق خوبی را نشان می‌دهند.

کلیدواژگان: معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی، اثر هال، نیروی لورنتز، انتقال غیرعادی، مدل‌سازی عددی.

The solution of MHD equations using a high order characteristics-splitting scheme for MPDT simulation

M. Ahangar[1], R. Ebrahimi[2*], M. Shams[3]

1- PhD Student, Aero. Eng., K.N. Toosi Univ., Tehran, Iran
2- Assoc. Prof., Aero. Eng., K.N. Toosi Univ., Tehran, Iran
3- Assoc. Prof., Mech. Eng., K.N. Toosi Univ., Tehran, Iran
* P.O.B. 16765-3381 Tehran, Iran. rebrahimi@kntu.ac.ir

Abstract- In this study, a two-dimensional, axisymmetric, computational Algorithm has been developed to simulate the plasma flow field in a MPD thruster for the purpose of determining the flow behavior and electromagnetic characteristics distribution. The solution employs Roe's flux vector difference method in combination with Powell's characteristics-splitting scheme. To ensure the stable high-accuracy solution, new modification of MUSCL technique so called OMUSCL2 method is used. According to being supersonic strong gas dynamic expansion near the electrodes tip, HHT entropy correction is employed. Further improvements to the physical model, such as the inclusion of relevant classical transport properties, a real equation of state, multi-level equilibrium ionization models, anomalous transport, and multi-temperature effects, that are essential for the realistic simulation MPD flows, are implemented. Numerical results of a lab-scale thruster are presented, whereby comparison with experimental data shows good agreement between the predicted and measured enclosed current and electric potential.

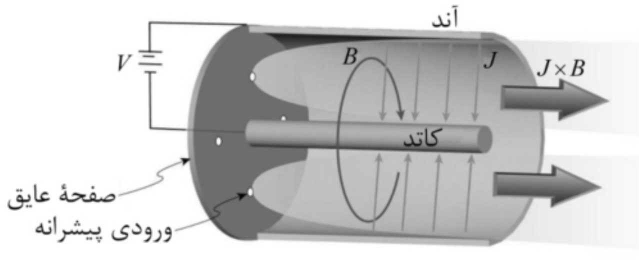
Keywords: Magneto hydrodynamic Equations, Hall Effect, Lorentz Force, Anomalous Transport, Numerical Modeling.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

۱- مقدمه

۱-۱- کلیات

به کارگیری سیستم‌های پیشرانش شیمیایی در انجام مأموریت‌های فضایی با محدودیت‌هایی همراه است. یکی از این محدودیت‌ها مقدار کم سرعت گازهای خروجی موتور و کوچک بودن مقدار ایمپالس ویژه در این نوع از سیستم‌های پیشرانش است. براساس رابطهٔ سیلکوفسکی [۱] انجام مأموریت‌های فضایی دوردست، مستلزم افزایش سرعت گازهای خروجی است که به تبع آن جرم پیشرانه افزایش چشمگیری خواهد داشت. از دیگر موانع پیشروی سیستم‌های پیشرانش شیمیایی در دست‌یابی به سرعت گازهای خروجی بالاتر، وجود محدودیت در افزایش دمای شعله در محفظهٔ احتراق، جهت جلوگیری از افزایش دمای دیواره‌ها می‌باشد. یکی از راهکارهای موجود برای غلبه بر محدودیت‌های مذکور، استفاده از سیستم‌های پیشرانش الکتریکی می‌باشد. رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی[1] (MPD) یکی از انواع خانواده سیستم‌های پیشرانش الکتریکی هستند که امروزه به طور چشمگیری مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. در شکل ۱ طرح‌واره‌ای از یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این نوع از رانشگرها، جریان گاز خنثی به داخل فضای بین یک الکترود مثبت حلقوی (آند) و یک الکترود منفی استوانه‌ای (کاتد) تزریق می‌شود. با اعمال اختلاف ولتاژ (بین چند صد تا چند هزار ولت) میان الکترودها، جریان گاز عبوری یونیزه شده و جریان پلاسمای شبه‌خنثی تشکیل می‌گردد. با توجه به خصوصیت پلاسمایی گاز یونیزه شده، جریان الکتریکی چند هزار آمپری بین الکترودها برقرار می‌شود. این جریان الکتریکی آمپر بالا، یک میدان مغناطیسی محیطی حول کاتد القا می‌کند.



شکل ۱ طرح‌واره‌ای از یک رانشگر MPD [۲]

1. Magnetoplasmadynamic Thruster

نیروی لورنتز ($f_{Lorentz} = J \times B$) حاصل از اندرکنش جریان الکتریکی عبوری در محیط پلاسما و میدان مغناطیسی القایی، باعث شتاب گرفتن جریان گاز یونیزه، می‌شود.

اگرچه مکانیزم عملکرد این سامانه ساده به نظر می‌رسد، اما وجود پدیده‌هایی نظیر یونش گاز خنثی، اثر هال، تراکم‌پذیری جریان گاز رقیق، رفتار جمعی پلاسمای شبه‌خنثی، نیروی محرکهٔ القایی و ریزناپایداری‌های میکروسکوپیک باعث می‌شود تا شناخت و فهم فیزیک حاکم بر این نوع رانشگرها با پیچیدگی‌هایی روبه‌رو شود.

وقوع پدیده‌های مذکور سبب می‌شود تا مدل‌های تحلیلی نظیر رابطهٔ مکر [۱]، دقت لازم جهت بررسی و پیش‌بینی شرایط عملکردی رانشگر را نداشته باشند. از سوی دیگر، هزینه‌های کلان و به خصوص عدم وجود تجهیزات آزمایشگاهی برای رانشگرهایی با توان بسیار زیاد، موانعی هستند که انجام پژوهش‌های تجربی را محدود می‌کنند. با توجه به موارد ذکر شده ضرورت انجام پژوهش‌های عددی در این حوزه بیشتر نمایان می‌گردد. در سال‌های اخیر پژوهش‌های عددی نسبتاً محدودی برای مدل‌سازی جریان در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی صورت گرفته، که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

نایوود [۳]، مدل شبه یک‌بعدی گذرایی را برای شبیه‌سازی رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی توسعه داد. او برای حل معادلات حاکم از روش اختلاف محدود استفاده کرد. در این پژوهش عبارت جابه‌جایی معادلات پیوستگی و اندازه حرکت با روش روزانوف، معادلات میدان مغناطیسی و عبارت هدایت حرارتی معادلهٔ دمای الکترون با روش مک‌کورمک و معادلهٔ پیوستگی الکترون و دمای یون نیز با روش سلول دُنُر حل شده‌اند. چانتی [۴]، با بهره‌گیری از ترکیب روش تئوری اغتشاشات و روش المان محدود گالرکین و با تقسیم‌بندی دامنهٔ حل به نواحی مختلف، جریان درون رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی را به صورت دوبعدی حل کرد. نایوود [۵]، مدل تقارن محوری برای حل معادلات حاکم بر رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی ارائه کرد. او برای حل معادلات از روش اختلاف محدود استفاده کرد. در این پژوهش بردار شار معادلات سیال در جهت محوری توسط روش تفکیک بردار شار استیگر-وارمینگ و بردار شار در جهت شعاعی به کمک روش روزانوف و معادلهٔ دمای الکترون نیز با روش مک‌کورمک حل شده‌اند. معادلهٔ میدان مغناطیسی نیز با توجه

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

به مقادیر میدان الکتریکی در مرز سلول‌های محاسباتی گسسته گردید. لاپوینت [۶]، با توسعهٔ یک کد دوبعدی در مرکز لوئیز ناسا، اثر هندسه بر عملکرد رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی مدل ZT-1 و HSFAT را مورد مطالعه قرار داد. وی معادلات را در قالب اختلاف محدود و در شرایط پایا حل کرد. کالدو [۷]، مدلی دوبعدی را به منظور مطالعهٔ اثر انتقال غیرعادی[1] توسعه داد. در این پژوهش معادلات سیال به صورت گذرا و معادلهٔ میدان مغناطیسی به صورت پایا در نظر گرفته شده و معادلات در قالب اختلاف محدود و با روش چند شبکه‌ای حل شدند. سنکاران [۸]، معادلات بقا و معادلهٔ میدان الکتریکی را به صورت خودسازگار[2] و در قالب حجم محدود برای شبیه‌سازی جریان در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی توسعه داد. او برای حل معادلات از روش تفکیک مشخصه‌ها استفاده نمود. در این پژوهش یکنوایی حل با به کارگیری روش شار محدود جیمسون تضمین شده و مدل یونش تعادلی ساها[3] برای شبیه‌سازی فرایند یونش گاز آرگون به کار گرفته شده است. همچنین اثر انتقال غیرعادی در معادلات لحاظ شده و دمای الکترون و یون به صورت غیرتعادلی (مدل چند-دمایی) در نظر گرفته شده است. مایکلیدس و همکارانش [۹،۱۰]، کد محاسباتی MACH[4] را برای شبیه‌سازی جریان تقارن محوری گذرا در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی به کار گرفتند. این کد محاسباتی در نیمهٔ دههٔ ۸۰ میلادی در نیروی هوایی آمریکا برای مطالعهٔ جریان پلاسما در هندسه‌های پیچیده توسعه داده شد. پیوسته‌ترین مطالعات پیرامون رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی در دانشگاه اشتوتگارت توسط کورتز و همکارانش انجام شده است. روش‌های عددی به کار گرفته شده در نسخه‌های مختلف کدهای توسعه داده شده توسط این محققین متنوع می‌باشد و به مرور زمان ارتقاء یافته‌اند. به طور مثال در مرجع [۱۱] از روش حجم محدود رو به باد گدونف برای حل قسمت هذلولوی معادلات و از یک روش اختلاف محدود برای حل قسمت بیضوی معادلات استفاده شده است. در مرجع [۱۲] روش اُشر-بارت برای محاسبهٔ بردار شار غیرلزج اعمال شده است. در این پژوهش معادلات بیضوی بوسیلهٔ یک روش المان محدود گسسته شده‌اند. در جدیدترین نسخه [۱۳]، برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی از روش HLLE[5] و برای گسسته‌سازی مکانی متغیرها از روش WENO[6] که توسط فردریش ارائه شد، استفاده شده است. کوبُتا و همکارانش [۱۴،۱۵]، مدل دوبعدی گذرایی را برای شبیه‌سازی جریان پلاسما در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی توسعه دادند. در این پژوهش، بردار شار هذلولوی معادلات، با اعمال روش لاکس-فردریش به همراه محدودکنندهٔ مین‌مود[7] حل شده است. همچنین، فرایند یونش و دمای الکترون و یون‌ها به صورت غیرتعادلی در نظر گرفته شده‌اند.

۱-۲- اهداف پژوهش حاضر

بررسی‌های صورت گرفته، نشان می‌دهند که مطالعات اخیر از لحاظ روش‌های عددی و نحوهٔ فرمول‌بندی معادلات دارای نقاط ضعفی هستند که در ذیل به مهمترین آن‌ها اشاره می‌شود.

۱- در مقادیر نسبت جریان تخلیه الکتریکی به دبی جرمی بالا ($I_{dis}^2/\dot{m} \gg 1$)، بازده رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی افزایش می‌یابد. متأسفانه تحت این شرایط، برخی از کدهای محاسباتی موجود، ناپایداری‌هایی را در حل عددی نشان می‌دهند [۸]. یکی از دلایل این ناکامی، عدم فرمول‌بندی خودسازگار معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی[8] (MHD) می‌باشد. با توجه به مقدار عدد رینولدز مغناطیسی برای رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی [۱۶]، مشاهده می‌شود که همبستگی قوی بین جریان سیال و میدان مغناطیسی وجود دارد (هم مقدار نفوذ مقاومتی میدان مغناطیسی و هم مقدار جابه‌جایی جریان دارای اهمیت می‌باشند).

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\mu_0 u L}{\eta} \sim O\left(4-12\right) \qquad (۱)$$

بنابراین باید معادلات بقای جرم، اندازه حرکت، میدان مغناطیسی و انرژی، همزمان و به صورت خودسازگار حل شوند. علاوه بر این، یکی از ویژگی‌های معادلات MHD وجود امواج مشخصه با سرعت‌های متفاوت است. رفتار غیرخطی این مشخصه‌ها نقش مهمی در تعیین وقوع پدیده‌های فیزیکی حاکم بر مسأله و شیوهٔ حل عددی معادلات دارد [۱۷]. حل

1. Anomalous Transport
2. Self-Consistence
3. Saha's Equilibrium Ionization Model
4. Multiblock Arbitrary Coordinate Hydromagnetic (MACH) Simulation Tool
5. Hartn, Lax, van-Leer and Einfeldt
6. Weighted Essentially Non-Oscillatory
7. minmod
8. Magnetohydrodynamic Equations

سازگار معادلات ماکسول با معادلات دینامیک گاز بر مبنای مقادیر ویژه، مانع از نقض قوانین فیزیکی در فضای محاسباتی می‌شود. این موضوع در ناپیوستگی‌هایی که در آن تداخل امواج رخ می‌دهد، حائز اهمیت است.

۲- در برخی از پژوهش‌های اخیر [۹-۱۰]، معادلات در شکل غیربقایی حل شده‌اند. فرمول‌بندی بقایی معادلات حاکم، بقای کمیت‌ها را تضمین می‌کند. همچنین، این نوع فرمول‌بندی، اعمال شرایط مرزی را تسهیل می‌نماید.

۳- همان‌طور که در مرجع [۵] اشاره شده است، هیچ یک از پژوهش‌های مذکور (به غیر از [۱۳،۸])، روش‌های پیشرفتهٔ توسعه داده شده برای معادلات اویلر و ناویر-استوکس [۱۸] را در حل معادلات MHD به کار نبسته‌اند.

۴- روش‌های عددی به کار گرفته شده در این پژوهش‌ها دارای لزجت عددی زیادی (به غیر از [۸]) هستند. به طور مثال مراجع [۱۵،۱۳] که به ترتیب از روش‌های HLLE و لاکس-فردریش استفاده می‌کنند به استناد مراجع [۱۸،۱۹] دارای لزجت عددی زیادی هستند. به علاوه پژوهش‌های صورت گرفته در مراجع [۲۰،۹،۱۰،۷]، برای مستهلک نمودن ناپایداری‌های عددی و همگرایی حل عددی، از لزجت مصنوعی استفاده نموده‌اند. کاستی‌های مطرح شده را می‌توان با در نظر گرفتن ملاحظات زیر بهبود بخشید:

۱- معادلات جریان سیال و میدان مغناطیسی را به صورت خودسازگار در نظر گرفت؛

۲- معادلات حاکم را در شکل بقایی، فرمول‌بندی کرد؛

۳- برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی، یکی از روش‌های تفکیک مشخصه‌ها را به کار بست؛

۴- به منظور افزایش دقت حل عددی، از روش‌های غیرنوسانی با لزجت مصنوعی محدود استفاده کرد.

در پژوهش حاضر روند حل معادلات حاکم بر رانشگر پلاسمایی به گونه‌ای در نظر گرفته شده تا با برطرف کردن کاستی‌های فوق‌الذکر، ملاحظات عددی بیان شده نیز به کار گرفته شود. در این روند برای محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی از روش رؤ [۲۱]، برای تعیین مشخصه‌های جریان از روش موج هشتم پاول [۲۲] و برای افزایش دقت حل عددی از روش OMUSCL2 [۲۳] استفاده می‌شود.

در ادامه، معادلات حاکم بر جریان پلاسما تحت میدان مغناطیسی و روش‌های عددی مذکور تشریح شده‌اند. سپس زیرمدل‌های فیزیکی و شیمیایی استفاده شده به همراه هندسه و شرایط مرزی بیان شده و در نهایت نتایج به دست آمده برای یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی واقعی، بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان سیال درون یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی شامل معادلات ناویر-استوکس به همراه معادلات الکترومغناطیس ماکسول است. به طور کلی، معادلات سیال تحت میدان مغناطیسی را معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی می‌نامند که در برگیرندهٔ معادلات بقای جرم، اندازه حرکت، میدان مغناطیسی و انرژی می‌باشد. با توجه به آن که هندسهٔ رانشگر پلاسمایی مغناطیسی مورد مطالعه در این پژوهش به صورت دوبعدی تقارن محوری می‌باشد، لذا شکل نهایی این معادلات در قالب کاملاً پایستار (بقایی) و در مختصات استوانه‌ای (r, z) به صورت معادلهٔ (۲) نوشته می‌شود [۲۴]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=S_r+D \tag{۲}$$

که در آن $U=\begin{bmatrix}\rho & \rho u & \rho w & B_\theta & \varepsilon\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ بردار متغیرهای بقایی است. F_r و F_z بردارهای شار جابه‌جایی در جهت شعاعی و طولی هستند که در رابطه (۳) نمایش داده شده‌اند.

$$F_r=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p+\dfrac{B_\theta^2}{2\mu_0}\\ \rho uw\\ uB_\theta\\ u\left(\varepsilon+p+\dfrac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\end{bmatrix};F_z=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho w^2+p+\dfrac{B_\theta^2}{2\mu_0}\\ wB_\theta\\ w\left(\varepsilon+p+\dfrac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\end{bmatrix} \tag{۳}$$

در این روابط، انرژی کل در واحد حجم به کمک رابطه (۴) تعریف می‌شود.

$$\varepsilon=\varepsilon_g+\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{\rho \mathrm{u}\cdot\mathrm{u}}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0} \tag{۴}$$

S_r نیز عبارت مولد شعاعی است که در شکل تقارن محوری معادلات MHD ظاهر می‌گردد.

در معادلهٔ (۲)، D بردار شار نفوذی است که با استفاده از رابطهٔ (۶) قابل محاسبه می‌باشد.

$$S_r = -\frac{1}{r}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \\ \rho w u \\ 0 \\ u\left(\varepsilon + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E'_z \\ q_r \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E'_r \\ q_z \end{bmatrix} + \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_r \end{bmatrix}$$

$$q_r = \frac{E'_z B_\theta}{\mu_0} + k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + k_h \frac{\partial T_h}{\partial r}$$
$$q_z = \frac{-E'_r B_\theta}{\mu_0} + k_e \frac{\partial T_e}{\partial z} + k_h \frac{\partial T_h}{\partial z} \quad (6)$$

جهت محاسبهٔ میدان الکتریکی در رابطهٔ (۶)، از قانون عمومی اهم استفاده می‌شود. در این پژوهش سهم میدان الکتریکی ناشی از مولفهٔ اهمی و اثر هال در نظر گرفته شده است.

$$\begin{bmatrix} E'_r & E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta j_r - \frac{j_z B_\theta}{n_e e} & \eta j_z + \frac{j_r B_\theta}{n_e e} \end{bmatrix} \quad (7)$$

با به کارگیری قانون آمپر، مقادیر جریان الکتریکی به کمک رابطهٔ (۸) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} j_r & j_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_\theta}{\partial z} & \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (8)$$

نتایج تجربی [۲۵] نشان می‌دهند که ذرات پلاسما (یون‌ها و الکترون‌ها) در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی کاملاً در تعادل گرمایی نمی‌باشند. شرایط تعادل گرمایی زمانی بر قرار است که مقدار نسبت زمان مشخصهٔ حضور پیشرانه در رانشگر به زمان موازنهٔ انرژی بین الکترون‌ها و یون‌ها بسیار زیاد باشد. لکن، این مقدار برای رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی تقریباً برابر است با $\tau_{res}/\tau_{equi} \sim O(10)$. در این شرایط برای الکترون‌ها و یون‌ها دماهای جداگانه‌ای در نظر گرفته می‌شود که محاسبهٔ آن‌ها مستلزم حل معادلهٔ انرژی جداگانه‌ای است. با کسر سهم انرژی جنبشی، انرژی مغناطیسی و انرژی داخلی یون‌ها از معادلهٔ انرژی کل، مقدار انرژی داخلی الکترون (ε_e) از معادلهٔ (۹) قابل محاسبه می‌باشد.

$$\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left[(\varepsilon_e + p_e)u\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\varepsilon_e + p_e)w\right]$$
$$+\frac{1}{r}(\varepsilon_e + p_e)u = u\frac{\partial p_e}{\partial r} + w\frac{\partial p_e}{\partial z} + \eta\left(j_r^2 + j_z^2\right)$$
$$-\Delta\dot{\varepsilon}_{ie} + \frac{\partial}{\partial r}\left(k_e \frac{\partial T_e}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_e \frac{\partial T_e}{\partial z}\right) \quad (9)$$

$\Delta\dot{\varepsilon}_{ei}$ بیانگر تبادل انرژی بین الکترون‌ها و یون‌ها در اثر برخورد می‌باشد که از رابطهٔ (۱۰) قابل محاسبه است [۳۱].

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ei} = \frac{3\rho_e \nu_{ei}}{M_i} k_B \left(T_e - T_i\right) \quad (10)$$

افت انرژی ناشی از انتقال حرارت تشعشعی در برخی از انواع جریان‌های پلاسما مهم است. اما مراجع [۲۵] و [۲۶] نشان می‌دهند که مقدار این اثر در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی در مقایسه با اثر سایر مکانیزم‌های تبادل انرژی ناچیز است و در نظر گرفته نمی‌شود.

۳- زیرمدل‌های فیزیکی و شیمیایی

۳-۱- خواص انتقال

در این پژوهش خواص انتقال شامل مقاومت الکتریکی، هدایت حرارتی الکترون و یون و همچنین اثر هال می‌باشد. بر این اساس، در معادلات MHD ضریب مقاومت الکتریکی به کمک رابطهٔ (۱۱) محاسبه می‌شود [۲۷].

$$\eta = \frac{m_e \sum_i \nu_{ei}}{n_e e^2} \quad (11)$$

که در آن ν_{ei} فرکانس برخورد الکترون و یون‌ها می‌باشد و از رابطهٔ (۱۲) قابل حصول است.

$$\nu_{ei} = n_i Q_{ei}\sqrt{8k_B T_e/\pi m_e}$$
$$Q_{ei} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{Z_i e^2}{4\pi\varepsilon_0 k_B T_e}\right)^2 \times \ln\left(1 + \frac{144\pi^2\left(\varepsilon_0 k_B T_e\right)^3}{n_e e^6 Z_{eff}^2\left(Z_{eff}+1\right)}\right) \quad (12)$$

با توجه به مرجع [۲۸] ضریب هدایت حرارتی الکترون و یون را نیز می‌توان از روابط (۱۳) به دست آورد.

$$k_e = 3.2\frac{k_B^2 n_e T_e}{m_e \sum_s \nu_{es}}$$
$$k_i = \sqrt{\frac{\pi k_B^3 T_h}{8M_i}}\left(\frac{n_i}{n_i Q_{ii} + n_0 Q_{i0}}\right) \quad (13)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

که در آن Q_{i0} و Q_{ii} از روابط (۱۴) منتج می‌شوند.

$$Q_{i0} \simeq 1.4\times10^{-18}\,\mathrm{m}^2$$

$$Q_{ii} = \left[\left(5.845\times10^{-10}\right)\big/T_h^2\right]\times \ln 1.239\times10^7\sqrt{T_h^3/n_e} \tag{۱۴}$$

۳-۲- اثر مدهای مختلف انرژی

برای جریان پلاسمای گاز آرگون، فرض حالت ایده‌آل در دماهای بیش از ۰/۵ eV معتبر نیست. در این شرایط رابطهٔ غیرخطی (۱۵) برقرار می‌باشد [۲۹].

$$p = nk_BT\,\frac{\partial \ln Q}{\partial V} \tag{۱۵}$$

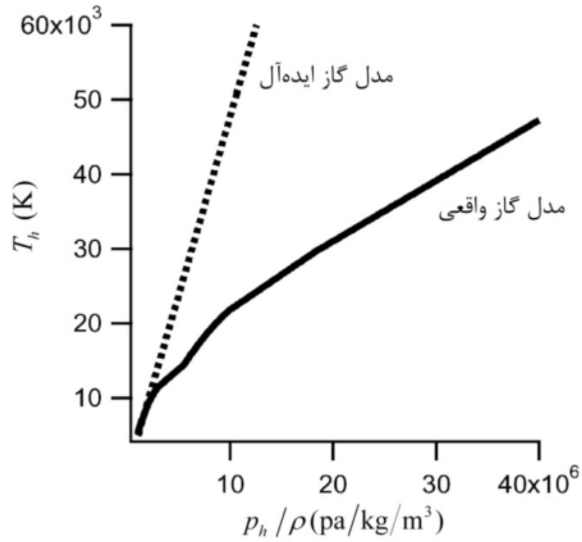
که در آن Q تابع تقسیم[1] کل است و شامل سهم متناظر با مد چرخشی انرژی (Q_{rot})، مد ارتعاشی (Q_{vib})، مد انتقالی (Q_{tr}) و مد الکترونیکی (Q_{el}) می‌باشد.

$$Q = Q_{rot}Q_{vib}Q_{tr}Q_{el} \tag{۱۶}$$

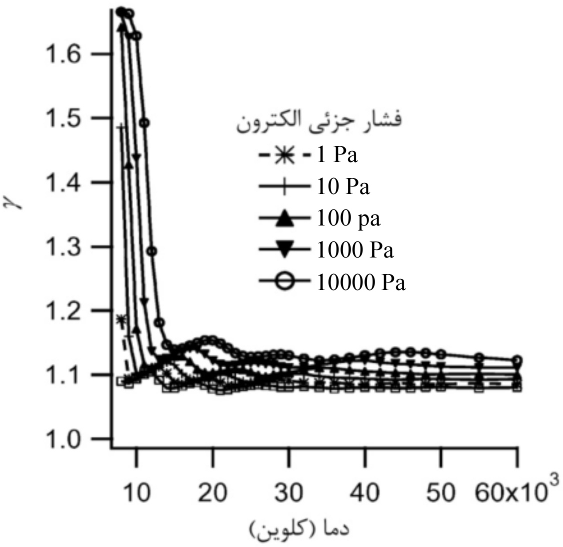
برای گاز تک اتمی آرگون سهم مربوط به مدهای ارتعاشی و چرخشی وجود ندارد. مراجع [۳۱،۳۰] مقادیر تابع تقسیم مربوط به گاز آرگون را برای دماهای مختلف ارائه نموده‌اند. بر اساس نتایج مرجع اخیر، چوری [۳۲] رابطه‌ای را برای محاسبهٔ دما برحسب چگالی و فشار استخراج نموده که در پژوهش حاضر مورد استفاده قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود در دمای بیش از ۱ eV انحراف از حالت ایده‌آل به سرعت افزایش می‌یابد. تحت این شرایط، اختلاف نسبت گرمای ویژه نیز از مقدار ایده‌ال خود (γ=۵/۳) زیاد می‌شود. نحوه تغییرات این متغیر برحسب دما در شکل ۳ نشان داده شده است.

۳-۳- اثر انتقال غیرعادی

مطالعات تجربی نشان می‌دهند که در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی، جریان الکتریکی می‌تواند باعث بروز ریزناپایداری‌هایی[2] در مقیاس میکرو شود که در نتیجهٔ آن اتلاف انرژی افزایش و بازده رانشگر کاهش می‌یابد. تبادل اندازه حرکت ذرات و امواج ناشی از این ریزناپایداری‌ها باعث افزایش مقدار ضرایب پدیده‌های انتقالی همچون مقاومت الکتریکی در جریان پلاسما می‌شود، از این‌رو این پدیده را انتقال غیرعادی نامیده‌اند [۳۳].



شکل ۲ مقایسه رفتار معادله حالت برای پلاسمای گاز آرگون در شرایط ایده‌آل و واقعی [۳۲]



شکل ۳ تغییرات نسبت گرمای ویژه برحسب دما [۳۲]

این پدیده باعث افزایش افت ولتاژ و کاهش نیروی پیشران می‌شود. مرجع [۳۴] مدلی برای پیش‌بینی اثر انتقال غیرعادی برحسب متغیرهای ماکروسکوپیک ارائه کرده است. در این فرمول‌بندی، به غیر از تبادل اندازه حرکت و انرژی ناشی از برخورد طبیعی ذرات با یکدیگر، اثر تبادل اندازه حرکت و انرژی اضافی حاصل از برخورد ذرات و امواج ریزناپایداری‌ها نیز در نظر گرفته شده است. اثرات غیرعادی ریزناپایداری‌ها، زمانی

1. Partition Function
2. Microinstabilities

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

اهمیت پیدا می‌کند که مقدار نسبت سرعت رانش[1] الکترون (u_{de}) به سرعت حرارتی یون (v_{ti})، بیشتر از ۱/۵ باشد. در صورت برقرار شدن این شرط، نسبت فرکانس برخورد ذرات با امواج ریزناپایداری‌ها به فرکانس برخورد طبیعی ذرات، تابعی از متغیر هال الکترون ($\Omega_e = eB/m_e \sum_s \nu_{es}$) و نسبت دمای یون به دمای الکترون می‌باشد. چندجمله‌ای رابطهٔ (۱۷) بیانگر چگونگی این ارتباط است [۳۴].

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{e,\text{anomalous}}}{\sum_i \nu_{ei}} &= \{0.192 + 3.33\times10^{-2}\Omega_e \\ &+0.212\Omega_e^2 - 8.27\times10^{-5}\Omega_e^3\} \\ &+\frac{T_h}{T_e}\{1.23\times10^{-3} \\ &-1.58\times10^{-2}\Omega_e - 7.89\times10^{-3}\Omega_e^2\}\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با توجه به مباحث بیان شده، می‌توان مقاومت مؤثر جریان پلاسما را به صورت رابطهٔ (۱۸) در نظر گرفت.

$$\eta_{eff} = \frac{m_e\left(\sum_i \nu_{ei} + \nu_{e,\text{anomalous}}\right)}{e^2 n_e} \qquad (۱۸)$$

۳-۴- مدل یونش

در رژیم پلاسما اجزاء شیمیایی درون جریان (الکترون‌ها و یون‌ها) می‌توانند تولید و مصرف شوند. چگونگی رخداد این فرایندها پیچیده است و دارای مکانیزم‌های مختلفی می‌باشد که برای مطالعهٔ بیشتر می‌توان به مراجع [۳۵،۲۶] رجوع کرد. اگرچه فرایند یونش در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی غیرتعادلی می‌باشد، با این حال اکثر پژوهش‌های قبلی مانند [۲۸،۸]، از مدل تعادلی ساها برای مدل‌سازی فرایند یونش در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی استفاده کرده‌اند. بر این اساس در پژوهش حاضر نیز مدل مذکور به کار گرفته شده است. با فرض یونش تعادلی که حداقل در ناحیهٔ تخلیهٔ الکتریکی بین دو الکترود منطقی می‌باشد، ثابت تعادل به کمک رابطهٔ (۱۹) محاسبه می‌شود [۳۲].

$$\begin{aligned}K_i &= \frac{n_i n_e}{n_{i-1}} = \frac{2\left(2\pi m_e k_B T_e\right)^{3/2}}{h^3} \\ &\times \frac{\sum_l g_l^i \exp\left(-\mathrm{E}_l^i / k_B T_e\right)}{\sum_l g_l^{i-1} \exp\left(-\mathrm{E}_l^{i-1} / k_B T_e\right)}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

1. Drift Velocity

که در آن E_l^i انرژی یونش سطح l-ام مربوط به i-امین یون و g_l^i وزن آماری متناظر با آن است. برای یک مدل یونش N مرحله‌ای، چگالی ذرات الکترون از محاسبهٔ ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۲۰) که توسط هایرمن [۲۸] ارائه شده، به دست می‌آید.

$$n_e^{N+1} + \sum_{l=1}^{N}\left[n_e^{N-l}\left[n_e - l\cdot\left(n_e + n_h\right)\right]\prod_{i=1}^{l} K_i\right] = 0 \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ جبری فوق با استفاده از روش نیوتن-رفسون در هر گام زمانی و برای هر سلول محاسباتی حل می‌شود.

۴- روند حل عددی

۱-۴- محاسبات زمانی

به طور کلی هر یک از روندهای صریح و یا ضمنی مورد استفاده در حل معادلات ناویر-استوکس و اویلر را می‌توان برای معادلات MHD نیز بسط داد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که مراجع ذکر شده در بخش ۱-۱ عموماً از روش‌های صریح بهره گرفته‌اند. علت این امر این است که روندهای ضمنی احتیاج به معکوس‌گیری از ماتریس‌های جعبه‌ای نواری دارند که برای این معادلات بسیار پر هزینه و وقت‌گیر می‌باشند. از سوی دیگر با توجه به این که تنها جواب حالت پایا مدنظر است لذا انتگرال‌گیری زمانی مرتبه اول با گام زمانی متغیر یکی از مناسب‌ترین گزینه‌های پیش‌رو می‌باشد. برای تعیین گام زمانی بایستی در نظر داشت که برای معادلات MHD غیرایده‌آل، مقیاس‌های زمانی متفاوتی وجود دارد، لذا برای دست‌یابی به حلی پایدار، بایستی گام زمانی برابر با کوچک‌ترین مقیاس زمانی در هر تکرار، در نظر گرفته شود [۸]. مقیاس‌های زمانی مورد نظر عبارتند از،

مقیاس زمانی سریع‌ترین موج: $\tau_{FW} = \hbar\cdot\vartheta/\lambda_{\max}$

مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی: $\tau_{MD} = \mu_0\cdot\hbar^2/\eta$

مقیاس زمانی نفوذ حرارتی: $\tau_{HC} = n_e\cdot k_B\cdot\hbar^2/k_e$

در این روابط $\hbar = \min\{\Delta r, \Delta z\}$ و ϑ عدد کورانت می‌باشد.

برای معادلات MHD غیرایده‌آل، مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی و حرارتی از مرتبه $۱۰^{-۱۱}$ تا $۱۰^{-۹}$ ثانیه تغییر می‌کند. مقدار مقیاس زمانی سریع‌ترین موج معمولاً بزرگتر از دو مقیاس زمانی دیگر می‌باشد و در بازهٔ $۱۰^{-۱۰}$ تا $۱۰^{-۸}$ ثانیه قرار می‌گیرد.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

۴-۲ محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی

روند حل تقریبی ریمان که توسط رؤ [۲۱] توسعه داده شده، روشی مبتنی بر تفکیک مشخصه‌های اختلاف شار[1] و متضمن حفظ خواص بقایی معادلات می‌باشد. رؤ، محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی را به صورت رابطهٔ (۲۱) ارائه کرد.

$$F_{i+1/2}^{\mathrm{Roe}} = \frac{1}{2}\left[F\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{L}}\right) + F\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{R}}\right)\right] - D_{i+1/2}$$

$$D_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left|A\right|_{i+1/2}\left(U_{i+1/2}^{\mathrm{R}} - U_{i+1/2}^{\mathrm{L}}\right) \quad (۲۱)$$

که در آن A ماتریس ژاکوبین بوده و $|A| = A^+ - A^-$ است. $U_{i+1/2}^{\mathrm{L}}$ و $U_{i+1/2}^{\mathrm{R}}$ به ترتیب مقادیر بردار متغیرهای بقایی در سمت راست و چپ مرز سلول محاسباتی می‌باشند. $A^\pm$ بر حسب ماتریس تشابه قطری (۲۲) نوشته می‌شود.

$$A^{\pm} = R\Lambda^{\pm}R^{-1} \quad (۲۲)$$

در رابطهٔ فوق، R و R^{-1} به ترتیب بردار ویژهٔ راست و چپ ماتریس A می‌باشند. همچنین Λ ماتریس قطری است که مقادیر روی قطرش برابر با مقادیر ویژهٔ ماتریس A می‌باشند و براساس مقادیر ویژهٔ مثبت و منفی تفکیک می‌شود ($\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$).

رؤ، ماتریس A را برای معادلات اویلر به دست آورد. ولی واضح است که این ماتریس برای معادلات MHD قابل استفاده نمی‌باشد. کارگو [۳۶] و اسلان [۳۷] در تلاش‌های جداگانه، شکل‌های مختلفی از ماتریس A را برای معادلات MHD به دست آوردند. با توجه به ملاحظات بیان شده در مورد روش عددی، در پژوهش حاضر از روش موج هشتم که توسط پاول [۲۲] ارائه گردید، برای محاسبهٔ مقادیر و بردارهای ویژه استفاده شده است (به پیوست رجوع شود). از ترکیب روش رؤ و پاول محاسبهٔ بردار شار جابه‌جایی بر حسب مقادیر مشخصهٔ جریان صورت می‌گیرد.

۴-۳- افزایش دقت حل عددی

در روش‌های با دقت مرتبهٔ اول مقادیر متغیرهای اولیه $W = \left[\rho \quad u \quad w \quad B_\theta \quad p\right]^{\mathrm{T}}$ در مرز سلول برابر با مقدار متوسط متغیرها در سلول در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های افزایش دقت حل عددی، برون‌یابی مقادیر متغیرهای مرزی بر حسب مقدار متغیرها در سلول‌های مجاور می‌باشد.

برای برون‌یابی متغیرهای مرزی، ون‌لیر الگوریتم موسوم به "روش‌های متمرکز-بالادست یکنوا برای قوانین بقا"[2] (MUSCL) را ارائه نمود [۳۸]. ون‌لیر برای حذف نوسانات غیرفیزیکی و حفظ یکنوایی حل عددی، محدودیت‌هایی را بر شیب متغیرهای درون سلول در فرایند برون‌یابی خطی متغیرهای مرزی اعمال کرد. یان و همکارانش [۲۳] مدل بهینه‌ای از تکنیک MUSCL موسوم به OMUSCL2 را ارائه کردند که دارای اتلاف عددی و خطای پراکندگی کمتری نسبت به روش ون‌لیر می‌باشد. بر این اساس متغیرهای اولیه در سمت راست و چپ مرز سلول به کمک رابطهٔ (۲۳) محاسبه می‌شوند.

$$q_{i+1/2}^{L} = q_i + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_{i+1/2}^{L}\cdot\left(q_{i+1} - q_i\right)$$

$$q_{i+1/2}^{R} = q_{i+1} - \frac{1}{2}\tilde{\phi}_{i+1/2}^{R}\cdot\left(q_{i+1} - q_i\right) \quad (۲۳)$$

که در آن‌ها روابط (۲۴) برقرارند.

$$\tilde{\phi}_{i+1/2}^{L} = \max\left(0, \min\left(2, \phi_{i+1/2}^{L}, 2r_{i+1/2}^{L}\right)\right)$$

$$\phi_{i+1/2}^{L} = 0.8 - 0.175\frac{1}{r_{i+3/2}^{L}} + 0.375 r_{i+1/2}^{L}$$

$$\tilde{\phi}_{i+1/2}^{R} = \max\left(0, \min\left(2, \phi_{i+1/2}^{R}, 2r_{i+1/2}^{R}\right)\right)$$

$$\phi_{i+1/2}^{R} = 0.8 - 0.175\frac{1}{r_{i-1/2}^{R}} + 0.375 r_{i+1/2}^{R}$$

$$r_{i+1/2}^{L} = \frac{q_i - q_{i-1} + \varepsilon}{q_{i+1} - q_i + \varepsilon}, \quad r_{i+1/2}^{R} = \frac{q_{i+2} - q_{i+1} + \varepsilon}{q_{i+1} - q_i + \varepsilon} \quad (۲۴)$$

در این روابط q مقدار هریک از مولفه‌های بردار W و ε یک عدد مثبت کوچک می‌باشد.

۴-۴ شرط انتروپی

روش رؤ که از خانوادهٔ روش‌های با لزجت عددی کم محسوب می‌گردد، در جریان‌های انبساطی منجر به حل غیرفیزیکی (شوک انبساطی) می‌شود که در نتیجهٔ آن شرط انتروپی نقض می‌گردد. برای رفع این مشکل هارتن و هایمن [۳۹] رابطهٔ (۲۵) را برای مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبین پیشنهاد کردند.

$$\left|\lambda_{new}\right|^{HH} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta} & |\lambda| < \delta \\ |\lambda| & |\lambda| \ge \delta \end{cases}$$

$$\delta = 4.0\max\left[0, \left(\lambda - \lambda^L\right), \left(\lambda^R - \lambda\right)\right] \quad (۲۵)$$

1. Flux Difference

2. Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservations Law

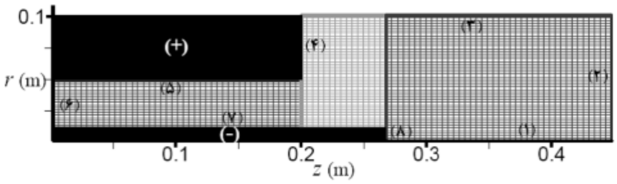
براساس تجربه مشخص شد که به دلیل وقوع انبساط‌های بسیار قوی (بازشدگی جریان گاز رقیق سرعت بالا در نوک الکترودها) در رانشگر، تصحیح فوق نیز نمی‌تواند باعث ارضاء شرط انتروپی شود. در این شرایط با افزایش یافتن سهم انرژی جنبشی در انرژی کل، مقدار فشار استاتیکی در برخی از سلول‌های محاسباتی منفی می‌شود. برای رفع این مشکل، در پژوهش حاضر از رابطهٔ اصلاح شدهٔ تادمور [۴۰] که برای جریان‌های با سرعت بالا ارائه گردید، استفاده شده است.

$$\left|\lambda_{new}\right|^{HHT} = \max\left(\frac{1}{6}\left(\lambda^R - \lambda^L\right) + K\left|u^R - u^L\right|;0\right)$$
$$+\begin{cases}\dfrac{\lambda^2}{\delta}\dfrac{+\delta}{4} & \left|\lambda\right| < \delta/2 \\ \left|\lambda\right| & \left|\lambda\right| \ge \delta/2\end{cases} \quad K > 0$$
$$\delta = \alpha\left(u + w + \lambda\right),\ 0.1 \le \alpha \le 0.5 \qquad (۲۶)$$

بررسی‌ها نشان می‌دهد که برای مقادیر $\alpha = 0.5$ و $K = 0.5$ نتایج بهتری به دست می‌آید. استفاده از رابطهٔ بالا باعث ازدیاد لزجت عددی در سلول‌های محاسباتی یاد شده می‌شود که این امر ارضای شرط انتروپی را در پی خواهد داشت.

۵- هندسه و شرایط مرزی

به منظور سنجش کد محاسباتی توسعه داده شده، یک رانشگر شامل دو الکترود استوانه‌ای هم‌محور برای مقایسه و صحت‌آزمایی نتایج، مورد بررسی واقع شده است. رانشگر مورد نظر، توسط ویلانی و همکارانش [۲۵] در دانشگاه پرینستون تحت شرایط کارکردی مختلف مورد مطالعهٔ تجربی قرار گرفته است. در این پژوهش، آزمون I-ام این تحقیق تجربی مورد مطالعه عددی قرار گرفته است. طول الکترود کاتد (-) ۲۶۴ و شعاع آن ۹/۵ میلی‌متر می‌باشد. این مقادیر برای الکترود آند (+) به ترتیب برابر ۲۰۰ و ۵۱ میلی‌متر می‌باشد. در این آزمون، جریان تخلیه کل ورودی به رانشگر ۸ kA و دبی جرمی پیشرانه (گاز آرگون) ۶ g/s می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، برای هندسهٔ مورد نظر از یک شبکهٔ محاسباتی یکنواخت متعامد استفاده شده است. به دلیل وجود تقارن در هندسه و همچنین کاهش حجم محاسبات تنها نصف هندسهٔ واقعی تحلیل شده است. برای حل این مساله لازمست که علاوه بر شرایط مرزی معادلات سیال، شرایط مربوط به معادلهٔ میدان مغناطیسی نیز در مرزهای محاسباتی تعیین شود.



شکل ۴ هندسهٔ محاسباتی رانشگر مورد نظر

در مرز (۱) شرط تقارن اعمال شده است. با توجه به آن که در خط تقارن، مقدار سرعت شعاعی صفر می‌باشد بنابراین تمام مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی شعاعی در این مرز صفر می‌گردند. از سوی دیگر به دلیل عدم وجود گرادیان شعاعی، انتقال حرارت در عرض این مرز صورت نمی‌گیرد. از آنجا که میدان مغناطیسی بر روی خط تقارن برابر صفر است و با فرض این که خط تقارن همانند یک سیم مستقیم طویل می‌باشد، لذا می‌توان جریان الکتریکی محوری را با استفاده از ترکیب قانون بیو-ساوار و قانون آمپر به دست آورد. بر این اساس جریان الکتریکی محوری بر روی خط تقارن از رابطهٔ (۲۷) محاسبه می‌شود.

$$j_z\Big|_{r=0} = \frac{4B_\theta\big|_{\Delta r/2}}{\mu_0 \Delta r} \qquad (۲۷)$$

برای الکترودها، در مرزهای (۴، ۵) و (۷، ۸) شرط لغزش با دمای ثابت در نظر گرفته شده است. بنابراین به غیر از مولفهٔ در برگیرندهٔ کمیت فشار مگنتواستاتیکی ($p_m = p + B_\theta^2/2\mu_0$) سایر مولفه‌های بردار شار جابه‌جایی در رابطهٔ (۳) صفر می‌باشند. فشار مگنتواستاتیکی نیز از دامنهٔ حل برون‌یابی می‌شود. همچنین برای الکترودها میدان الکتریکی مماسی صفر است.

در مرزهای (۲) و (۳) گرادیان عمودی متغیرهای اولیه سیال به همراه مقدار میدان مغناطیسی برابر صفر در نظر گرفته شده است.

در عمل فرایند شکل‌گیری و تولید پلاسما در فاصلهٔ چند میلی‌متری از ابتدای ورودی (مرز ۱) شروع می‌شود. در این ناحیه به دلیل عدم پیوستگی جریان پلاسما، فرض‌های مربوط به معادلات MHD برقرار نمی‌باشند. با صرف‌نظر از این لایهٔ بسیار نازک فرض می‌شود که جریان پلاسما پس از تولید، وارد ناحیهٔ حل شده است. بنابراین لازم است تا دمای ورودی به حد کافی زیاد در نظر گرفته شود به نحوی که مکانیزم یونش فعال

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

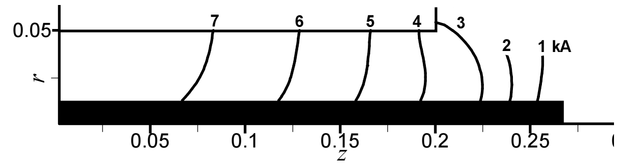
شود. در این رانشگر جریان با دبی ثابت و تحت شرایط صوتی از ۱۲ سوراخ به فضای میان الکترودها تزریق می‌شود. با توجه به شرایط صوتی و مشخص بودن دما در ورودی، سرعت سیال محاسبه می‌گردد. با استفاده از دما و سرعت محاسبه شده و دبی جرمی معین، مقادیر چگالی و فشار در ورودی به دست می‌آیند. با به کارگیری قانون آمپر توزیع میدان مغناطیسی در ورودی از رابطهٔ $B_{\theta,in}=-\mu_0 I_{dis}/2\pi r$ قابل محاسبه است. در حین انجام این پژوهش بنا به تجربه معلوم شد در صورتی که مقدار جریان تخلیه الکتریکی (۸ کیلوآمپر) به یک‌باره در این رابطه اعمال گردد، حل مسأله در ورودی با مشکل روبه‌رو می‌شود. این امر به این دلیل است که در سلول‌های مجاور این مرز، جریان الکتریکی که از مشتقات میدان مغناطیسی محاسبه می‌گردد، گرادیان‌های بسیار شدیدی را وارد حل عددی می‌کند و در نتیجه کد محاسباتی واگرا می‌شود. برای رفع این مشکل سعی شد تا جریان تخلیه الکتریکی به صورت تدریجی وارد دامنه حل گردد (برای این مسأله در هر تکرار زمانی مقدار I_{dis} به میزان ۵ میلی‌آمپر افزایش داده شد). اگرچه این امر باعث طولانی شدن زمان حل می‌شود اما همگرایی حل را تضمین می‌نماید.

۶- بررسی و تحلیل نتایج

شکل ۵ توزیع جریان الکتریکی محصور بین دو الکترود که از رابطهٔ (۲۸) محاسبه شده، را نشان می‌دهد.

$$I_{enclosed}=2\pi r B_\theta/\mu_0 \tag{۲۸}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود با حرکت از دهانه ورودی رانشگر به سوی ناحیه خروجی، مقدار جریان الکتریکی محصور با روندی کاهشی همراه است. این رفتار قرابت نزدیکی با نتایج تجربی اندازه‌گیری شده در مرجع [۲۵] دارد. در شکل ۶ مشاهده می‌شود که خطوط جریان اندازه‌گیری شده نسبت به نتایج حاضر دارای شیب تندتری هستند و کشیدگی بیشتری به سمت پایین‌دست دارند.



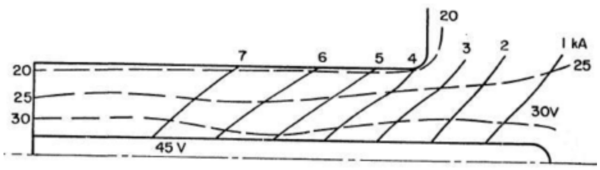
شکل ۵ توزیع جریان الکتریکی محصور بین دو الکترود

بررسی‌ها نشان می‌دهد، در صورتی که مقاومت الکتریکی صفر در نظر گرفته شود (معادلهٔ MHD ایده‌آل) خطوط جریان کاملاً به سمت پایین دست کشیده می‌شوند و با افزایش مقدار مقاومت الکتریکی شیب این خطوط افزایش می‌یابد. لذا علت این تفاوت در نتایج تجربی و عددی را می‌توان این گونه بیان کرد که مقدار مقاومت الکتریکی در شبیه‌سازی عددی بیشتر از مقدار حالت واقعی آن پیش‌بینی شده است.

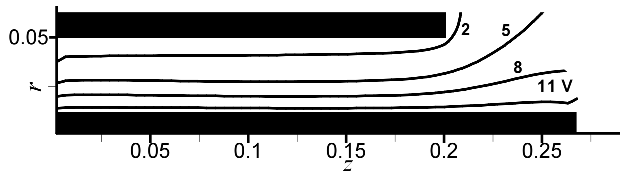
در شکل ۷ خطوط پتانسیل ثابت به نمایش در آمده است. برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه از رابطهٔ (۲۹) استفاده شده است.

$$\varphi(r_2)-\varphi(r_1)=-\int_{r_1}^{r_2} E\cdot dr \tag{۲۹}$$

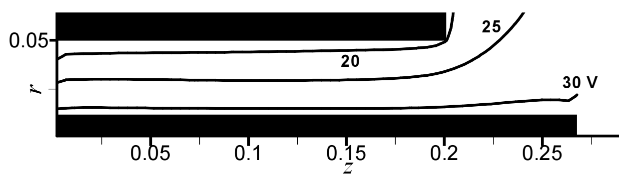
در این محاسبات، پتانسیل الکتریکی کاتد به عنوان نقطه مرجع برابر صفر در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که این محاسبات اختلاف ولتاژ الکترودها را در بر نمی‌گیرد و تنها شامل سهم اختلاف ولتاژ در جریان پلاسما می‌باشد. لذا نمی‌توان نتایج را به طور مستقیم با نتایج تجربی مقایسه کرد. برای انجام مقایسه بهتر نتایج عددی با نتایج تجربی (در شکل ۶) بایستی مقدار اختلاف ولتاژ آند (۲۰ ولت) را به نتایج شکل ۷ اضافه نمود. نتیجه به دست آمده در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۶ توزیع جریان و پتانسیل الکتریکی اندازه‌گیری شده [۲۵]



شکل ۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در پلاسما



شکل ۸ توزیع پتانسیل الکتریکی (سهم پلاسما + اختلاف ولتاژ آند)

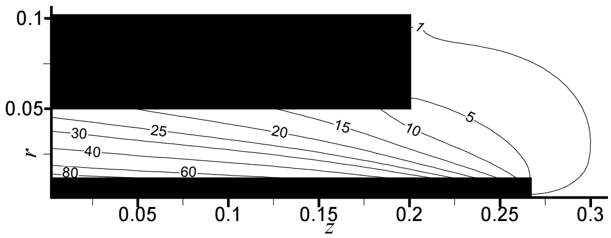
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج عددی و تجربی از همخوانی خوبی برخوردارند و اندک تفاوت موجود به دلیل آن است که مقدار تجربی اضافه شده کاملاً در طول الکترود آند ثابت نمی‌باشد.

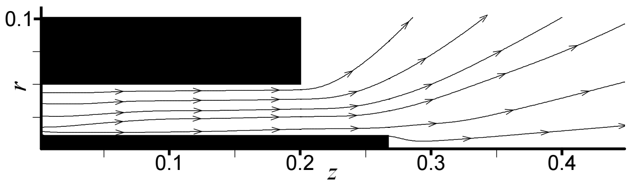
در شکل ۹ توزیع میدان مغناطیسی برحسب درصد مقدار بیشینه آن در رانشگر نمایش داده شده است. مقدار بیشینه میدان مغناطیسی در محل تقاطع کاتد و مرز ورودی رخ می‌دهد و حدوداً برابر با ۰/۱۳۵ تسلا می‌باشد. همان‌طور که انتظار می‌رفت میدان در راستای شعاعی با معکوس شعاع تغییر کرده و در راستای طولی نیز به صورت خطی کاهش می‌یابد [۱].

در شکل ۱۰ خطوط جریان سیال نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در فاصله بین دو الکترود، این خطوط تقریباً موازی بوده و بلافاصله در خروجی به دلیل انبساط به سمت نوک الکترودها منحرف می‌شوند. در شکل ۱۱ توزیع سرعت محوری قابل مشاهده است. مقدار بیشینه این کمیت به ۱۱/۱ کیلومتر بر ثانیه می‌رسد. از آنجا که نیروی لورنتز تابعی از میدان مغناطیسی است و همان‌طور که قبلاً بیان شد میدان مغناطیسی نسبت معکوسی با شعاع دارد، بنابراین سرعت محوری با کاهش شعاع افزایش می‌یابد. مقادیر منفی سرعت مربوط به ناحیه مجاور نوک الکترود کاتد می‌باشد که منجر به تشکیل گردابه در این منطقه می‌شود. این امر به دلیل آن است که به دلیل محدودیت در تولید شبکه، نوک الکترود کاتد بر خلاف نمونه آزمایشگاهی به صورت صاف در نظر گرفته شده است.

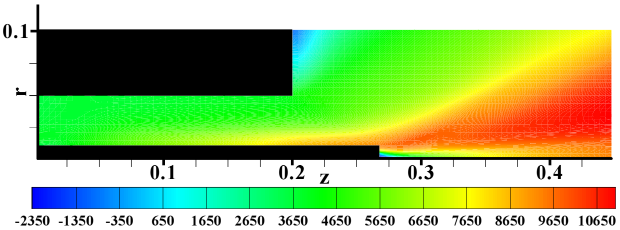
در شکل ۱۲ توزیع دمای الکترون نشان داده شده است. دما از حدود ۰/۶۵ تا ۲ الکترون ولت تغییر می‌کند. به طور کلی با توجه به آن که مقدار حرارت اهمی (ηj^2) با کاهش شعاع افزایش می‌یابد لذا در مجاورت کاتد و به ویژه در نوک آن دما افزایش می‌یابد. علاوه بر این در نوک کاتد (ناحیه سکون) انرژی جنبشی کاهش یافته و در قالب انرژی حرارتی ظاهر می‌شود.



شکل ۹ توزیع میدان مغناطیسی (٪)



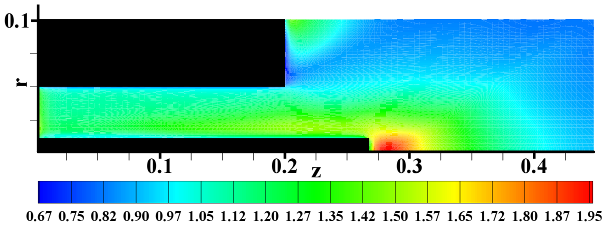
شکل ۱۰ خطوط جریان



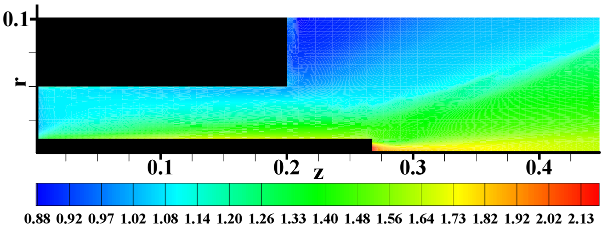
شکل ۱۱ توزیع مولفه محوری سرعت (متر بر ثانیه)

این امر باعث می‌شود تا دما در این ناحیه به طور چشمگیری نسبت به سایر نقاط افزایش یابد. در نوک آند به دلیل انتقال حرارت زیاد با دیواره و وقوع انبساط قوی در این ناحیه، دما افت محسوسی دارد. اما به تدریج با افزایش تراکم خطوط میدان مغناطیسی و در نتیجه ازدیاد مقدار حرارت اهمی، دما افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۳ توزیع دمای یون مشاهده می‌شود. در طول رانشگر دمای یون از حدود ۰/۸۵ تا ۲/۱۵ الکترون ولت تغییر می‌کند و بیشینهٔ آن در نوک کاتد به ۲/۲ الکترون ولت می‌رسد. در ناحیه مجاور نوک الکترود آند، دمای یون به کمترین مقدار خود می‌رسد. به دلیل وقوع انبساط قوی در این ناحیه فشار کل کاهش می‌یابد و در نتیجه فشار جزئی یون و به تبع آن دمای یون که از معادلهٔ حالت واقعی محاسبه می‌شود، افت می‌کند. همانند نتایج مربوط به دمای الکترون، دمای یون در نوک الکترود کاتد و همچنین در طول خط تقارن بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند که یکی از دلایل آن همان‌طور که گفته شد به دلیل ناحیه سکون است.



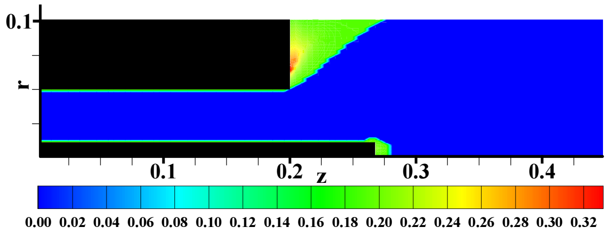
شکل ۱۲ توزیع دمای الکترون (الکترون ولت)



شکل ۱۳ توزیع دمای یون (الکترون ولت)

از دیگر علل افزایش دما در این ناحیه، اعمال شرط تقارن محوری است که باعث می‌شود تا هدایت حرارتی در عرض خط تقارن برابر با صفر باشد و در حقیقت این مرز همانند یک عایق عمل می‌نماید. به طور کلی با کاهش شعاع، مؤلفه شعاعی نیروی لورنتز ($-j_z B_\theta$) افزایش یافته و در نتیجه تراکم جریان پلاسما در مجاورت الکترود کاتد بیشتر از ناحیه نزدیک به آند می‌باشد. بنابراین با کاهش شعاع، افزایش فشار کل به وجود آمده (با توجه به آن که فشار جزیی الکترون در ناحیه بین دو الکترود تقریباً یکنواخت است) منجر به افزایش فشار جزئی یون می‌شود و در پی آن دمای یون نیز با حرکت از سمت آند به کاتد به تدریج افزایش می‌یابد. علی‌رغم عدم وجود نتایج تجربی دقیق، بازه دمایی به دست آمده برای الکترون و یون با ارقام گزارش شده در مرجع [۲۵] همخوانی دارد. همچنین رفتار فیزیکی این کمیات (به طور مثال بیشینه بودن دما در نوک کاتد) با نتایج عددی مربوط به رانشگرهایی با شرایط هندسی و کارکردی متفاوت (به طور مثال مراجع [۷،۱۳])، کاملاً تطابق دارد.

در شکل ۱۴ نسبت فرکانس ریزناپایداری‌ها به فرکانس برخورد ذرات نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقدار این نسبت تنها در نواحی مجاور الکترودها غیر صفر می‌باشد و این به معنای آن است که مقدار نسبت سرعت رانش الکترون (u_{de}) به سرعت حرارتی یون (v_{ti})، تنها در این نواحی بیشتر از ۱/۵ می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که اثر ریزناپایداری‌ها در شرایط عملکردی $I_{dis}^2/\dot{m} \approx 10\left(\mathrm{kA}\right)^2 \mathrm{gr}^{-1}\mathrm{s}$ محدود می‌باشد. نتایج مرجع [۳۴] نشان می‌دهد که در رابطهٔ (۱۷) به ازای مقدار مشخصی از پارامتر هال با کاهش نسبت دمای یون به الکترون، مقدار نسبت فرکانس ریزناپایداری‌ها به فرکانس برخورد ذرات، افزایش می‌یابد. با توجه به آن که مقادیر پارامتر هال در این پژوهش کمتر از عدد یک به دست آمده، بنابراین می‌توان گفت بیشینه شدن نسبت فرکانس در نوک آند ناشی از افت نسبت دمای یون به الکترون در این ناحیه است و پارامتر هال الکترون تحت این شرایط عملکردی اثر چندانی ندارد.



شکل ۱۴ توزیع پارامتر $\nu_{e,\text{anomalous}}/\nu_{e,\text{classic}}$

۷- جمع‌بندی

در این پژوهش یک الگوریتم محاسباتی جدید برای شبیه‌سازی جریان پلاسمای گرم تحت میدان مغناطیسی توسعه داده شد و با استفاده از آن رفتار یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفت. مشخصه‌های الکترومغناطیسی نظیر جریان محصور و پتانسیل الکتریکی محاسبه شده، در مقایسه با نتایج تجربی تطابق و سازگاری خوبی را نشان می‌دهند. به دلیل در دسترس نبودن نتایج تجربی مربوط به متغیرهای سیال نظیر سرعت و دما مقایسه دقیقی صورت نگرفته ولی رفتار و مقادیر به دست آمده، منطقی بوده و به لحاظ کیفی با نتایج پژوهش‌های عددی مشابه، همخوانی دارد.

همان‌طور که بیان شد اثر پدیده انتقال غیرعادی برای رانشگر مورد مطالعه در این پژوهش محدود می‌باشد. با افزایش مقدار $I_{dis}^2/\dot{m}$ اثر ریزناپایداری‌ها تقویت می‌شود. در عمل اگرچه افزایش این پارامتر باعث بهبود شرایط عملکردی رانشگر می‌شود، اما افزایش آن بیش از مقدار حد بحرانی باعث بروز نوسان در رفتار ولتاژ اعمالی بر رانشگر شده و در پی آن الکترودها دچار خوردگی شده و توان اعمال شده بر رانشگر دچار اتلاف می‌گردد.

مدل‌سازی شرایط عملکردی به ازای مقادیر بزرگتر $I_{dis}^2/\dot{m}$ نیز نشان می‌دهد که ناپایداری‌هایی در حل عددی به وجود می‌آید. علت این امر این است که با افزایش $I_{dis}^2/\dot{m}$، فرکانس ریزناپایداری‌ها در نوک الکترودها افزایش یافته و اثر پدیده انتقال غیرعادی در این نواحی تقویت می‌شود. وقوع انبساط قوی در این نواحی که با افت فشار ناگهانی گاز رقیق سرعت بالا همراه است، از یک سو و افزایش اثر پدیده انتقال غیرعادی به

دلیل تقویت فرکانس ریزناپایداری‌ها از سوی دیگر باعث می‌شود تا فشار جزئی یون که از اختلاف فشار کل و فشار جزئی الکترون به دست می‌آید، مقداری منفی و غیرفیزیکی اختیار کند. در شرایط فعلی رابطۀ اصلاح شدۀ HHT با تولید لزجت عددی در مجاورت الکترودها مانع از تشدید اثر دو مکانیزم فوق‌الذکر می‌شود. اما به کارگیری روش رؤ که از خانوادۀ روش‌های با لزجت عددی کم محسوب می‌شود به همراه روش OMUSCL2 که دارای لزجت و پراکندگی عددی کمینه است، موجب می‌شود تا در مقادیر $I_{dis}^2/\dot{m}$ بالاتر، لزجت ناشی از بکارگیری رابطۀ HHT به ازای مقادیر $\alpha = 0.5$ و $K = 0.5$ نتواند ناپایداری‌های تولید شده را از بین ببرد. برای رفع این مشکل باید به دنبال ترکیب جدیدی از مقدار پارامترهای α و K در رابطۀ (۲۶) بود.

۸- فهرست علایم

B_θ میدان مغناطیسی محیطی (T)

j چگالی جریان الکتریکی ($\mathrm{A/m^2}$)

e بار الکترون C ۱/۶۰۲۲×۱۰

E میدان الکتریکی ($\mathrm{Volts/m}$)

h ثابت پلانک $\mathrm{m^2 \cdot kg/s}$ ۶/۶۲۶×۱۰

k ضریب هدایت حرارتی ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)

k_B ثابت بولتزمن $\mathrm{JK^{-1}}$ ۱/۳۸۱×۱۰

m_e جرم الکترون kg ۹/۱۰۹×۱۰

n_e چگالی ذرات الکترون ($\mathrm{m^{-3}}$)

n_i چگالی ذرات یون‌ها ($\mathrm{m^{-3}}$)

p فشار استاتیکی (Pa)

T_e دمای الکترون (K)

T_h دمای یون (K)

u مولفه شعاعی سرعت ($\mathrm{m/s}$)

w مولفه محوری سرعت ($\mathrm{m/s}$)

Z_{eff} نسبت چگالی ذرات الکترون به یون‌ها

Z_i تعداد بار ذرات مثبت

ε انرژی کل در واحد حجم ($\mathrm{J/m^3}$)

ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی $\mathrm{F/m}$ ۸/۸۵×۱۰

η مقاومت الکتریکی ($\mathrm{Ohm \cdot m}$)

λ مقدار ویژه ($\mathrm{m/s}$)

μ_0 ضریب نفوذپذیری مغناطیسی $\mathrm{N/A^2}$ $4\pi \times 10^{-7}$

۹- پیوست: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

روابط زیر برای حالت دوبعدی تقارن‌محوری بر مبنای مرجع [۲۲] استخراج شده است.

جهت شعاعی:

- مقادیر ویژه

$$\left[u - C_F, u, u, u, u + C_F\right] \tag{۳۰}$$

- بردارهای ویژه چپ

$$L1_r = \left[0, \frac{-\alpha_f C_F}{2a^2}, 0, \frac{\alpha_s \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_f}{2\rho a^2}\right]$$

$$L2_r = \left[0, 0, \frac{\beta_\theta}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]$$

$$L3_r = \left[1, 0, 0, 0, -1/a^2\right]$$

$$L4_r = \left[0, 0, 0, \frac{-\alpha_f \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_s}{2\rho a^2}\right]$$

$$L5_r = \left[0, \frac{\alpha_f C_F}{2a^2}, 0, \frac{\alpha_s \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_f}{2\rho a^2}\right] \tag{۳۱}$$

- بردارهای ویژه راست

$$R1_r = \left[\rho\alpha_f, -\alpha_f C_F, 0, \alpha_s a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_f\right]$$

$$R2_r = \left[0, 0, \beta_\theta/\sqrt{2}, 0, 0\right]$$

$$R3_r = \left[1, 0, 0, 0, 0\right]$$

$$R4_r = \left[\rho\alpha_s, 0, 0, -\alpha_f a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_s\right]$$

$$R5_r = \left[\rho\alpha_f, \alpha_f C_F, 0, \alpha_s a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_f\right] \tag{۳۲}$$

جهت محوری:

- مقادیر ویژه

$$\left[w - C_F, w, w, w, w + C_F\right] \tag{۳۳}$$

- بردارهای ویژه چپ

$$L1_z = \left[0, 0, \frac{-\alpha_f C_F}{2a^2}, \frac{\alpha_s \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_f}{2\rho a^2}\right]$$

$$L2_z = \left[0, -\frac{\beta_\theta}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right]$$

$$L3_z = \left[1, 0, 0, 0, -\frac{1}{a^2}\right]$$

$$L4_z = \left[0, 0, 0, \frac{-\alpha_f \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_s}{2\rho a^2} \right]$$

$$L5_z = \left[0, 0, \frac{\alpha_f C_F}{2a^2}, \frac{\alpha_s \beta_\theta}{2a\sqrt{\mu_0 \rho}}, \frac{\alpha_f}{2\rho a^2} \right] \qquad (۳۴)$$

- بردارهای ویژه راست

$$R1_z = \left[\rho\alpha_f, 0, -\alpha_f C_F, \alpha_s a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_f \right]$$

$$R2_z = \left[0, -\beta_\theta / \sqrt{2}, 0, 0, 0 \right]$$

$$R3_z = \left[1, 0, 0, 0, 0 \right]$$

$$R4_z = \left[\rho\alpha_s, 0, 0, -\alpha_f a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_s \right]$$

$$R5_z = \left[\rho\alpha_f, 0, \alpha_f C_F, \alpha_s a \beta_\theta \sqrt{\mu_0 \rho}, \rho a^2 \alpha_f \right] \qquad (۳۵)$$

در این روابط داریم

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \;,\; C_F = \sqrt{\frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho} + a^2} \;,\; \alpha_f = \frac{a}{C_F}$$

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{C_F^2 - a^2}}{C_F} \;,\; \beta_\theta = \frac{C_{A;\theta}}{\sqrt{C_{A;\theta}^2}} \;,\; C_{A;\theta} = \frac{B_\theta}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \qquad (۳۶)$$

۱۰- مراجع

[1] Jahn R. G., *Physics of Electric Propulsion*, McGraw-Hill, 1968.

[2] Hoyt R. P., "Magnetic Nozzle Design for High-Power MPD Thrusters", *Presented at the 29th International Electric Propulsion Conference,* Princeton University, Oct. 31Nov. 4, 2005.

[3] Niewood E. H., *Transient One Dimensional Numerical Simulation of Magnetoplasmadynamic Thrusters*, Msc Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1989.

[4] Chanty J. M. G., *Analysis of Two-Dimensional Flows in Magneto-Dynamic Plasma Accelerators*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992.

[5] Niewood E. H., *An Explanation for Anode Voltage Drops in an MPD Thruster*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1993.

[6] LaPointe M., "Numerical Simulation of Geometric Scale Effects in Cylindrical Self-Field MPD Thrusters", *NASA-CR-189224*, 1992.

[7] Caldo G., Choueiri E. Y., "Numerical Fluid Simulation of an MPD Thruster with Real Geometry", *In 23rd International Electric Propulsion Conference*, Seattle, WA, USA, 1993.

[8] Sankaran K. Martinelli L., Jardin S. C., Choueiri E. Y., "A Flux-Limited Numerical Method For Solving the MHD Equations to Simulate Propulsive Plasma Flows", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, Iss. 6, 2002, pp. 1415-1432.

[9] Mikellides P. G., *A Theoretical Investigation of Magnetoplasmadynamic Thrusters*, [PhD Thesis], Ohio State University, Columbus, Ohio, 1994.

[10] Mikellides P. G., "Modeling and Analysis of a Megawatt-Class Magnetoplasmadynamic Thruster", *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 20, No. 2, 2004, pp. 204-210.

[11] Sleziona P. C., M. A. Kurtz, H. O. Schrade, "Numerical Calculation of a Cylindrical MPD Thruster", *Proceeding of International Electric Propulsion Conference*, Seattle, 1993, PP. 609-617.

[12] Winter M. W., Boie C., M. A. Kurtz, H. L. Kurtz, "Experimental and Numerical Investigation of Steady State MPD Thrusters", *In Proceedings of the Second European Spacecraft Propulsion Conference*, Noordwijk, Netherlands, 1997.

[13] Winter M. W., Nada T. R., Kurtz M. A., Haag D., Fertig M., "Investigation of Nozzle Geometry Effects on the Onset of Plasma Instabilities in High Power Steady State MPD Thrusters", *In 42nd Joint Propulsion Conference & Exhibit*, Sacramento, California , 2006.

[14] Kubota K., Funaki I., Okuno Y., "Numerical Simulation of a Self-Field MPD Thruster Using Lax-Friedrich Scheme", *In Proceedings of ISSS-7*, 2005.

[15] Kubota K., Funaki I., Okuno Y., "Modeling and Numerical Simulation of a Two-Dimensional MPD thruster Using a Hydrogen Propellant", *Presented at the 32nd International Electric Propulsion Conference,* Germany, 2011.

[16] Heimerdinger D. J., *Fluid Mechanics in a Magnetoplasmadynamic Thruster*, [PhD Thesis], Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1988.

[17] Myong R. S., *Theoretical and Computational Investigation of Nonlinear Waves in Magnetohydrodynamics*, [PhD Thesis], University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 1996.

[18] Laney C. B., *Computational Gasdynamics*. Cambrigde, 1998.

[19] Li S., "An HLLC Riemann Solver for Magnetohydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, Vol. 203, Iss. 1, 2005, pp. 344-357.

[20] Chanty J. M. G., Sanchez M. M., "Two-Dimensional Numerical Simulation of MPD Flows", *19th International Electric Propulsion Conference*, Colorado, 1987.

[21] Roe P., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp. 357-372.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.14.14.2]

[22] Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., Dezeeuw D. L., “A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magneto-hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 154, 1999, PP. 284–309.

[23] Yan L., Liang L. X., Dexun F., Ynwen M., “Optimization of the MUSCL Scheme by Dispersion and Dissipation”, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Vol. 55, Iss. 5, 2012, pp. 844-853.

[24] Samtaney R., *Computathional Magneto-hydrodynamics*, Course Notes Phys., PPP Laboratory, Princeton University, under USDOE Contract no. DE-AC020-76-CH03073, 2007.

[25] Villani D. D., *Energy Loss Mechanisms in a Magnetoplasmadynamic Arcjet*, [PhD Thesis], Princeton University, Princeton, New Jersey, 1982.

[26] Sheppard E. J., *Ionizational Nonequilibrium and Ignition in Plasma Accelerators*, [PhD Thesis], Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1994.

[27] Mitchner M., Kruger C. H., *Partially Ionized Gases*, Willy-Interscience, New York, 1973.

[28] Heiermann J., Auweter K. M., Sleziona P. C., “Adaptive Computation of the Current-Carrying Plasma in an MPD Rocket Thruster”, *Conference of Time-Dependent Magnetohydrodynamics: Anayltical, Numerical, and Application Aspects*, Kirchzarten, 1998.

[29] Tien C. L. Lienhard J. H., *Statistical Thermodynamics*, Holt Rinehart Winston Inc., 1971.

[30] Drellishak K. S., Knopp C. F., Cambel A. B., “Partition Functions and Thermodynamics Properties of Argon Plasmas”, US Air Force, Report No.: AEDC-TDR-63-146, 1963.

[31] Sparks W. M., Fischel D., “Partition Functions and Equations of State in Plasmas”, *NASA SP-3066*, 1971.

[32] Sankaran K., Choueiri E. Y., Jardin S. C., “Comparison of Simulated Magnetoplasmadynamic Thruster Flowfields to Experimental Measurements”, *JOURNAL OF PROPULSION AND POWER*, Vol. 21, No. 1, 2005, pp. 129-138.

[33] Choueiri E. Y., Kelly A. J., Jahn R. G., “Current-Driven Plasma Acceleration Versus Current-Driven Energy Dissipation”, *In Proceedings of the 22nd International Electric Propulsion Conference*, Centro Spazio, Pisa, Itlay, 1991.

[34] Choueiri E. Y., “Anomalous Resistivity and Heating in Current-Driven Plasma Thrusters”, *Journal of Physics of Plasmas*, Vol. 6, No. 5, 1999, PP. 2290-2306.

[35] Raizer Y. P., *Gas Discharge Physics*, Springer, 1997.

[36] Cargo P. Gallice G., “Roe Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe Matrices for Systems of Conservation Laws”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, No. 2, 1997, pp. 446-466.

[37] Aslan N., “Two-Dimensional Solutions of MHD Equations with an Adapted Roe Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, Iss. 11, 1996, pp. 1211–1222.

[38] Van Leer B., “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monoticity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, No. 4, 1974, pp. 361-370.

[39] Harten A. Hyman J., “Self-adjusting Grid Method for One Dimensional Hyberbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, No. 2, 1983, pp. 235–269.

[40] Madrane A., Tadmor E., “Entropy Stability of Roe-Type Upwind Finite Volume Methods on Unstructured Grids”, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,* Vol. 67, No. 2, 2009, pp. 775-784.