



محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی مود سه چندین ترک در نیم صفحه الاستیک

حامد حقیری¹، علیرضا فتوحی^{2*}، علیرضا شفیعی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، طراحی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

* صندوق پستی 741-89195، afotuhi@yazd.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 01 آبان 1393

پذیرش: 24 دی 1393

ارائه در سایت: 06 اسفند 1393

کلید واژگان:

ضریب شدت تنش دینامیکی

نایبوستگی جابجایی

معادله انتگرالی فوق تکین

لاپلاس معکوس عددی

چکیده

در تحلیل سازه‌ها پاسخ دینامیکی و اثرات امواج الاستیک بر روی ضرایب شدت تنش از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. این مطالعه، به تحلیل تنش دینامیکی پادصفحه‌ای نیم صفحه همگن شامل چندین ترک برای محاسبه ضرایب شدت تنش با اثر تقابل امواج الاستیک با مرز صفحه و ترک در موقعیت‌های مختلف می‌پردازد. روش حل، استفاده از تکنیک توزیع پیوسته نایبوستگی جابجایی برای حل مسائل ترک در شکست دینامیکی است. با اعمال تبدیلات انتگرالی (فوری و لاپلاس) به معادله الاستودینامیک و استفاده از شرایط مرزی حاکم، حل نایبوستگی جابجایی انجام شده و سپس با توزیع پیوسته نایبوستگی جابجایی بر روی سطوح ترک معادلات انتگرالی با مرتبه فوق تکین حاصل می‌شود. حل معادله انتگرالی با استفاده از بسط سری چیبیشف و روش عددی نقاط نظم یافته در محیط لاپلاس صورت می‌پذیرد. در نهایت با استفاده از الگوریتم لاپلاس معکوس عددی، ضرایب شدت تنش در حوزه زمان بدست می‌آیند. با مقایسه نتایج موجود از حل صفحه بی‌نهایت مشاهده می‌شود، تئوری ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین توانایی مدلسازی چندین ترک با آرایش‌های مختلف بعنوان قابلیت تئوری، در قالب نمودارهایی آورده شده است.

Evaluation of dynamic mode-III stress intensity factors of multiple cracks in an elastic half-plane

Hamed Haghir, Alireza Fotuhi*, Alireza Shafiei

Department of Mechanical Engineering, University of Yazd, Yazd, Iran

* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, afotuhi@yazd.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 October 2014
Accepted 14 January 2015
Available Online 25 February 2015

Keywords:
Dynamic stress intensity factor
Displacement discontinuity
Hypersingular integral equation
Numerical Laplace inversion

ABSTRACT

In a structural analysis, dynamic response of a crack is of significant importance as well as the impacts of elastic waves on stress intensity factors (SIF). In this paper, dynamic analyses of multiple cracks on a half-plane subjected to anti-plane shear stresses are presented. Stress intensity factors are calculated and the interaction of elastic waves with the boundary of plane and the cracks' tips is investigated at different locations. The distribution discontinuous displacement techniques are used, enabling us to solve the crack problems in dynamic fracture mechanics. Integral transformations (Laplace and Fourier) are applied to elastodynamics equations and by using a set of appropriate boundary conditions, the crack problem is solved through discontinuous displacement method. As a result, the stress equations with hypersingular terms are obtained. Using Chebyshev series expansion and collocation points in Laplace domain, the crack solution is achieved. Finally, different algorithms of numerical Laplace inversion are presented and the stress intensity factors (SIF) are obtained. The presented results are compared with published data and a good agreement is observed. Moreover, it is also demonstrated that the present theoretical study is capable of modelling multiple cracks with different arrangements.

1- مقدمه

بر ثانیه می‌رسد. مهار نکردن این ناپایداری می‌تواند مستوجب آسیب جدی به سازه و حتی در صورت ادامه پیدا کردن به شکست سازه منجر شود. مکانیک شکست دینامیکی به تحلیل ضرایب شدت تنش و تأثیر امواج تنش، بر روی این ضرایب می‌پردازد.

هنگامی که جسم الاستیک خطی شامل ترک، تحت بارگذاری دینامیکی قرار می‌گیرد، میدان تنش در نزدیک نوک ترک، تکینگی با ریشه مرتبه اول دارد. به دلیل سختی در ارضای شرایط مرزی، تنها تعداد محدودی از حل‌های

شکست‌های فاجعه‌بار سازه‌هایی چون هواپیماها، کشتی‌ها، نیروگاه‌ها و دیگر ادوات مهندسی با استفاده از تئوریهای مرسوم مقاومت مصالح قابل‌بیان نیستند. همه‌ی سازه‌های مهندسی آماده ظهور ترک توسط طبیعت خود سازه یا در نتیجه ساخت و فرآیند سرهم کردن می‌باشند. یک ترک کوچک می‌تواند همچون مکانیزم خستگی، فرسودگی و غیره رشد و ایجاد ناپایداری کند. برای مثال در فولاد 4340 سرعت رشد ترک به مرتبه یک تا دو هزار متر

Please cite this article using:

H. Haghir, A.R. Fotuhi, A.R. Shafiei, Evaluation of dynamic mode-III stress intensity factors of multiple cracks in an elastic half-plane, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 123-132, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

H. Haghir, A.R. Fotuhi, A.R. Shafiei, Evaluation of dynamic mode-III stress intensity factors of multiple cracks in an elastic half-plane, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 123-132, 2015 (In Persian)

حالت پادصفحه‌ای را مورد تحلیل قرار دادند. شول و لیبی [10] معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم را با استفاده از تبدیلات انتگرالی استخراج کردند. حل معادلات به کمک روش‌های عددی گوس لاگور⁶ و گوس لژندر⁷ در محیط لاپلاس صورت پذیرفت. از لاپلاس معکوس عددی استفاده شد. تعیین ضریب شدت تنش در فضای زمان استفاده شد.

وو و همکاران [12,11] مسئله جسم همگن الاستیک خطی بی‌نهایت شامل چندین ترک هم‌راستا و غیرهم‌راستا تحت باردینامیکی خارج از صفحه را مورد تحلیل قرار دادند. ترک توسط توزیع نابجایی مدلسازی و معادله انتگرال تنش با تکنیکی از نوع کوشی در حوزه لاپلاس به کمک روش عددی گوس-چیبیشف حل شده است. ضرایب شدت تنش برای هر نوک ترک با استفاده از روش عددی میلر و گای بدست آمده است. سلیار [13] الگوریتمی را برای بررسی تنش گذرا و پایا نزدیک مجموعه‌ای از ترک در محیط بی‌نهایت تحت انتشار امواج برشی ارائه کرده است. این الگوریتم بر مبنای تبدیل انتگرال لاپلاس، فرمولاسیون معکوس پرودنیف بهبودیافته⁸ و روش معادلات انتگرال مرزی بنا نهاده شده است. بررسی ضرایب شدت تنش برای مجموعه‌ای از ترک‌ها در حالت پایا از اهداف این تحقیق بوده است. چئی، پاسخ ضربه از محیط محدود هدفمند ضعیف شده توسط دو ترک بین سطحی، تحت تغییر شکل پادصفحه‌ای را مدلسازی کرده است [14]. اعمال تبدیلات لاپلاس و فوریه منجر به کاهش مسئله ترک به حل مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی تکیه کوشی در محیط لاپلاس شده است. پاسخ نوک ترک در مود سه به وسیله‌ی لاپلاس معکوس عددی استفاده شد.

به دلیل پیچیدگی‌های ریاضی، اکثر مطالعات مسائل ترک بیشتر به رفتار ترک، تحت بارهای استاتیکی، شبه استاتیکی و بارهای دینامیکی در ترک‌های نیمه محدود درسازه‌های نامحدود متمرکز شده است. در این مقاله، از تکنیک ناپیوستگی جابجایی⁹ [8] برای حل مسائل ترک استفاده می‌شود که اعمال تبدیلات انتگرالی به معادله الاستودینامیک و استفاده از شرایط مرزی حاکم و توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی بر روی ترک منجر به داشتن معادلات انتگرالی با مرتبه فوق تکنیک می‌گردد.

2- ناپیوستگی جابجایی پادصفحه‌ای در نیم صفحه

برای یک جسم تحت تغییرشکل خارج از صفحه، مؤلفه‌های جابجایی در دو جهت محور مختصات با فرض عدم اغتشاش در لحظه اولیه، در همه زمان‌ها صفر هستند، $u=v=0$ ، و تنها مؤلفه غیر صفر، جابجایی خارج از صفحه (راستای محور عمود بر صفحه) است $w=w(x,y,t)$. همچنین بر اساس معادلات الاستیسیته، مؤلفه‌های تنش بر حسب جابجایی برای یک جسم، تحت تغییر شکل پادصفحه‌ای در دستگاه مختصات دکارتی به صورت رابطه (1) است:

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

با در نظر گرفتن فرضیات بالا، معادله الاستودینامیک حاکم بر مسئله پادصفحه‌ای به قرار رابطه (2) است:

$$\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial y^2} - b^2 \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

که $b=1/c_s=\sqrt{\rho/\mu}$ و c_s سرعت موج برشی است.

با شناخت از روش‌های المان مرزی غیرمستقیم [15] و تکنیک

نوع بسته (مانند روش‌های تابع گرین¹، وینر-هاف² و کاگنیارد-دهوپ³) برای ارزیابی ضریب شدت تنش موجود است [1]. همچنین بازتاب موج‌های تنش و تحلیل آن در اثر برخورد به سطح جسم، یکی از مراحل پیچیده در تحلیل مسائل شکست دینامیکی شناخته می‌شود. با این حال، محققان علم مکانیک تلاش می‌کنند تا با ارائه روش‌هایی تا حد امکان گویا، بر دشواری این حوزه از مطالعات غلبه کنند. مانو با استفاده از روش توابع مختلط، فرمولاسیون انتگرال کوشی را برای یک ترک در نیم صفحه بی‌نهایت تحت بار هارمونی زمانی پیشنهاد داد و ظاهراً اولین مطالعه دینامیکی مسئله ترک بوده است [2]. لُبر و سیخ به پراکندگی موج برشی هارمونیک قطبی در اثر یک ترک محدود در نیم صفحه بی‌نهایت تحت کرنش پادصفحه‌ای پرداختند. آن‌ها با استفاده از تبدیلات انتگرالی به یک سیستم معادلات انتگرالی کوپل شده رسیده و میدان تنش در نزدیکی نوک ترک را بصورت پارامتری مورد بحث قرار دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که روش وینر-هاف در نقطه تکنیکی، مسیر حل را پیچیده می‌کند، ازاینرو روش تبدیلات انتگرالی را برای حل مسئله بصورت تحلیلی ارجح دانستند [3].

ژانگ با استفاده از نظریه نمایش⁴، برای اختلاف جابجایی روی سطوح ترک، و اعمال چندجمله‌ای چیبیشف برای کاهش حل معادله انتگرالی به دستگاه معادله جبری، ضریب شدت تنش را برای ترک‌های مستقیم با زاویه موج‌های برشی متفاوت تحت بار هارمونیک تعیین کرد [4]. تنش حول ترک محدود در صفحه بی‌نهایت الاستیک جامد تحت موج برشی با استفاده از مدل نابجایی⁵ و در نظر گرفتن حل تابع گرین، توسط هوانگ و سو پیشنهاد شد [5]. بعلاوه این مدل نسبت به بدست آوردن میدان تنش دینامیکی برای ترک‌های بی‌نهایت با طول برابر در الاستیک جامد تحت موج برشی تعمیم‌پذیر بود. ما و چن [6] مسئله گذرا یک ترک زاویه‌دار نیمه محدود تحت تنش پادصفحه‌ای روی مرز نیم صفحه، برای بررسی پدیده تقابل موج تنش با ماده تضعیف‌شده، حل دقیقی ارائه دادند. آن‌ها ترکشن روی سطح ترک را بصورت نمایی در نظر گرفتند و با استخراج معادلات در حوزه لاپلاس، به کمک روش وینر-هاف میدان‌های تنش و جابجایی را بدست آوردند. همچنین این راه حل در زمان‌های طولانی با توجه به پراکندگی و پراش موج‌های تنش معتبر است. هوانگ به تقابل موج تنش برشی با ترک محدود در نیم صفحه پرداخت. وی با استفاده مدل نابجایی و روش تصویر سازی به سیستم معادلات انتگرال تکیه کوشی دست یافت. کرنل معادله انتگرالی شامل توابع بسل به کمک روش عددی گالرکین حل شدند. تفاوت حل عددی برای دو نوع شرط مرزی، ترکشن آزاد و سطح قیدگذاری شده مورد بررسی و در نهایت ضریب شدت تنش بر حسب توابعی از عدد موج، زاویه برخورد موج و موقعیت ترک محاسبه شد [7].

ون و همکاران [8] حل اساسی مود سوم شکست برای یک ورق مستطیلی شامل ترک مایل با در نظر گرفتن تابع ناپیوستگی جابجایی را ارائه دادند. پس از استخراج معادله انتگرالی، ضریب شدت تنش دینامیکی تحت تکنیک عددی تنش معادل محاسبه شد. تأثیر موج تنش بر روی ضریب شدت تنش بصورت پارامتری از اهداف این مطالعه بوده است. ما و آینگ [9] مسئله گذرای نیم صفحه شامل ترک نیم بی‌نهایت تحت دو جفت نیروی متمرکز، با استفاده از اصل جمع آثار و حل اساسی، معادلات را استخراج نموده و با ارائه روش جدیدی از تکنیک وینر-هاف مسئله پراکندگی و پراش موج تنش در

1- Green function method
2- Wiener-Hopf method
3- Cagniard-de Hoop method
4- Representation theory
5- Dislocation model

6- Gouss lagueere
7- Gouss legendre
8- Modified Prudnikov inversion
9- Displacement Discontinuity(DD)

حل معادله (9) که یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است، به سادگی برای دو ناحیه از روابط (11) و (12) بدست می آید.

$$\bar{W}(p, y, s) = A_1(p, s)e^{-\sqrt{p^2 + (bs)^2}y} + B_1(p, s)e^{\sqrt{p^2 + (bs)^2}y}, \quad -h < y \leq 0 \quad (11)$$

$$\bar{W}(p, y, s) = A_2(p, s)e^{-\sqrt{p^2 + (bs)^2}y} + B_2(p, s)e^{\sqrt{p^2 + (bs)^2}y}, \quad y \geq 0 \quad (12)$$

اعمال شرایط تبدیل یافته در رابطه (10) به روابط (11) و (12) ضرایب مجهول در رابطه (13) را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} A_1(p, s) &= -\frac{\bar{\Delta}_z(s)}{2} e^{-2h\sqrt{p^2 + (bs)^2}} \\ B_1(p, s) &= -\frac{\bar{\Delta}_z(s)}{2} \\ A_2(p, s) &= \frac{\bar{\Delta}_z(s)}{2} \left[1 - e^{-2h\sqrt{p^2 + (bs)^2}} \right] \\ B_2(p, s) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری ضرایب (13) در روابط (11) و (12)، و اعمال تبدیل فوریه معکوس، میدان جابجایی پادصفحه ای برای کل ناحیه، $-h < y \leq \infty$ ، با محاسبه انتگرال ها به صورت تحلیلی با توجه به روش های ارائه شده در [17, 16] به صورت رابطه (14) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \bar{W}(p, y, s) &= -\frac{bs\bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \times \\ &\left\{ \frac{2h+y}{\sqrt{(2h+y)^2 + x^2}} K_1\left(bs\sqrt{(2h+y)^2 + x^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1\left(bs\sqrt{x^2 + y^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

که K_v توابع بسل بهبود یافته مرتبه v از نوع دوم است. اکنون از میدان جابجایی بدست آمده در فضای لاپلاس، می توان میدان تنش پادصفحه ای را از رابطه (1) و با توجه به خواص مشتق توابع بسل بدست آورد [18]. طبق روابط (15) و (16) داریم:

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, y, s) = \frac{\mu(bs)^2 \bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \left\{ \frac{x(2h+y)}{r'^2} K_2(bsr') - \frac{xy}{r^2} K_2(bsr) \right\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yz}(x, y, s) &= \frac{\mu(bs)^2 \bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \left\{ \frac{(2h+y)^2}{r'^2} K_0(bsr') \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{y}{r}\right)^2 K_0(bsr) - \frac{1}{bs} \left(\frac{x^2 - (2h+y)^2}{r^3} K_1(bsr') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{y^2 - x^2}{r^3} K_1(bsr) \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

که $r' = \sqrt{(2h+y)^2 + x^2}$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ تعریف می شود. برای بدست آوردن حل ناپیوستگی جابجایی در صفحه بی نهایت می توان آن را از مرز نیم صفحه دور نمود، بنابراین با تعریف فرم مجانبی توابع بسل نوع دوم، رابطه (17)، هنگامی که $z \rightarrow \infty$ [18]:

$$K_v(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (17)$$

و اعمال رابطه بالا به مؤلفه های تنش، روابط (15) و (16)، هنگامی که $h \rightarrow \infty$ ، تنش های مربوط به ناپیوستگی جابجایی صفحه بینهایت، روابط (18) و (19)، حاصل شدند:

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, y, s) = -\frac{\mu(bs)^2 \bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \left\{ \frac{xy}{r^2} K_2(bsr) \right\} \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(x, y, s) = -\frac{\mu(bs)^2 \bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \left\{ \left(\frac{y}{r}\right)^2 K_0(bsr) + \frac{1}{bs} \frac{y^2 - x^2}{r^3} K_1(bsr) \right\} \quad (19)$$

نتایج فوق کاملاً با روابط ارائه شده در مرجع [8] تطابق دارد.

مطرح شده به نام ناپیوستگی جابجایی، به صورت اختلاف جابجایی سطح بالا و پایین ترک بعنوان مجهول در حل تحلیلی موجود بکار گرفته می شود. با قرار دادن محور مختصات بر روی ناپیوستگی جابجایی و تقسیم شدن به دو ناحیه $-h < y \leq 0$ و $y \geq 0$ حل مسئله دنبال می شود. شکل 1، ناپیوستگی جابجایی نقطه ای بر روی محور x را نشان می دهد.

شرایط اولیه، پیوستگی تنش و ناپیوستگی جابجایی نقطه ای و تنش آزاد روی مرز برای مسئله حاکم به صورت روابط (3-5) بیان می شوند:

$$-\infty \leq x \leq \infty \quad w(x, y, 0) = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0^+, t) &= \sigma_{yz}(x, 0^-, t) \\ w(x, 0^+, t) - w(x, 0^-, t) &= \Delta_z(t) \delta(x) \\ \sigma_{yz}(x, -h) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$w(x, y, t) \Big|_{x, y \rightarrow \infty} = 0 \quad (5)$$

که $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک و $\Delta_z(t)$ اندازه ناپیوستگی جابجایی دینامیکی است. برای حل معادلات حاکم از تبدیلات انتگرالی کمک گرفته می شود. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ از رابطه (6) تعریف می شود.

$$f(t) = \bar{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \bar{F}(s) ds \quad (6)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه (2) و شرایط اولیه در (3) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(x, y, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}(x, y, s)}{\partial y^2} - b^2 s^2 \bar{w}(x, y, s) = 0 \quad (7)$$

که تبدیل لاپلاس w است. تبدیل انتگرالی فوریه نمایی و معکوس آن از رابطه (8)، است:

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ipx} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{f}(p) e^{ipx} dp \end{aligned} \quad (8)$$

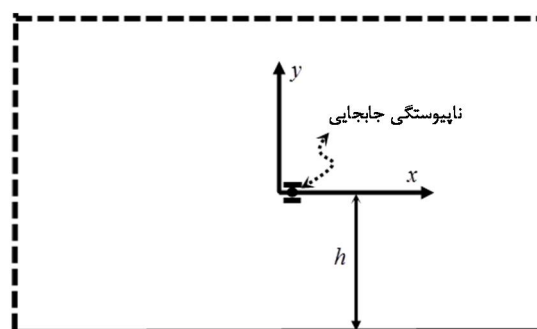
اعمال رابطه (8) به معادله حاکم در فضای لاپلاس، رابطه (7)، نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(p, y, s)}{\partial y^2} - (p^2 + b^2 s^2) \bar{w}(p, y, s) = 0 \quad (9)$$

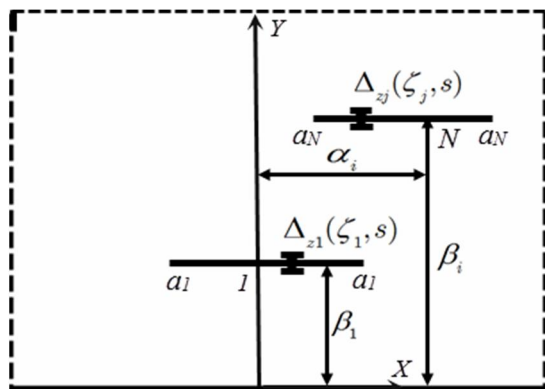
که تبدیل فوریه $\bar{w}$ است. با اعمال تبدیلات لاپلاس و فوریه به شرایط (4) و (5) حل معادلات در فضای تبدیل یافته دنبال می شود. طبق رابطه (10) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (\bar{w}(p, 0^+, s) - \bar{w}(p, 0^-, s)) &= 0 \\ \bar{w}(p, 0^+, s) - \bar{w}(p, 0^-, s) &= \bar{\Delta}_z(s) \\ \frac{d}{dy} (\bar{w}(p, -h, s)) &= 0 \\ \bar{w}(p, y, s) \Big|_{y \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

که $\bar{\Delta}_z(s)$ تبدیل لاپلاس $\Delta_z(t)$ است.



شکل 1 ناپیوستگی جابجایی نقطه ای در نیم صفحه الاستیک همگن



شکل 2 توزیع ناپیوستگی جابجایی برای چندین ترک در نیم صفحه همگن

بطوریکه $T = bs$ ، $r_{ij} = \sqrt{(\beta_i - \beta_j)^2 + (\alpha_i - \alpha_j)^2}$ و δ_{ij} دلتای کروئکر است. کرنل معادله انتگرالی هنگامی که $i = j$ تکین، و از دو نوع مرتبه دوم و لگاریتمی (تکینگی ضعیف شده¹) است. $\bar{K}_{reg}^{ij}$ قسمت غیرتکین کرنل، و طبق رابطه (27) عبارت است از:

$$\bar{K}_{reg}^{ij} = \left(\frac{T(\beta_i + \beta_j)}{r_{ij}'} \right)^2 K_0(Tr_{ij}') - \left(\frac{\beta_i - \beta_j}{r_{ij}'} \right)^2 K_0(Tr_{ij}') - T \left[\frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2 - (\beta_i + \beta_j)^2}{r_{ij}^3} K_1(Tr_{ij}') + \left(\frac{\delta_{ij}}{Tr_{ij}^2} + \delta_{ij} \frac{T}{2} \ln \left(\frac{Tr_{ij}'}{2} \right) - \frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2 - (\beta_i - \beta_j)^2}{r_{ij}^3} K_1(Tr_{ij}') \right) \right] \quad (27)$$

که $r_{ij}' = \sqrt{(\beta_i + \beta_j)^2 + (\alpha_i - \alpha_j)^2}$ است.

به دلیل عدم ناپیوستگی جابجایی در دو نوک ترک، رفتار تابع $\bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s)$

در $\zeta = \pm 1$ به صورت رابطه (28) فرض می شود [21,20]:

$$\bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s) = \bar{R}_{zj}(\zeta, s) \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (28)$$

حل عددی معادله انتگرالی (26) را می توان بر اساس تابع وزن $\sqrt{1 - \zeta^2}$ و نوع تکینگی مرتبه بالا برحسب چندجمله ای سری چبیشف مناسب به صورت رابطه (29) بسط داد:

$$\bar{R}_{zj}(\zeta, s) = \sum_{n=0}^M \bar{C}_{nj}(s) U_n(\zeta) \quad (29)$$

که $U_n(\zeta)$ چندجمله ای چبیشف نوع دوم و از رابطه (30) تعریف می شود:

$$n=0,1,2,\dots \quad U_n(\zeta) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(\zeta)]}{\sin[\cos^{-1}(\zeta)]} \quad (30)$$

با جایگذاری رابطه (30) در معادله انتگرالی (26) ترم های تکین مرتبه دوم و ضعیف شده را می توان به صورت تحلیلی بر حسب توابع چبیشف محاسبه نمود [23,22]، و در نهایت به فرم استخراج شده به صورت رابطه (31) در می آید:

$$\frac{\pi \bar{\sigma}_{yz}^i(q, s)}{\mu} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^M a_j \bar{C}_{nj}(s) \left\{ \delta_{ij} \Lambda_n(q, s) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \zeta^2} \bar{K}_{reg}^{ij}(q, \zeta, s) U_n(\zeta) d\zeta \right\} \quad (31)$$

که

$$\Lambda_n(q, s) = -\frac{\pi(n+1)}{2a_i^2} U_n(q) + \frac{\pi T^2}{8} \begin{cases} \left(q^2 - \frac{1}{2} + \ln \frac{a_i T}{4} \right), & n=0 \\ \left(-\frac{T_n(q)}{n} + \frac{T_{n+2}(q)}{n+2} \right), & n \geq 1 \end{cases} \quad (32)$$

2-1- تکنیکی میدان تنش

با استفاده از فرم مجانبی توابع بسل در حوالی صفر می توان رفتار تکنیکی میدان تنش، (15) و (16)، را بررسی کرد. فرم مجانبی توابع بسل بهبود یافته نوع دوم به صورت رابطه (20) تعریف می شود [18]:

$$\begin{aligned} K_0(z)|_{z \rightarrow 0} &\simeq -\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma \\ K_1(z)|_{z \rightarrow 0} &\simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right) \\ K_2(z)|_{z \rightarrow 0} &\simeq \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

که γ ثابت اولر و $\gamma = 0.57754899949$ است. در نتیجه با استفاده از روابط (20) ترم های تکین تنش بدست می آیند، که طبق روابط (21) و (22) عبارتند از:

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, y, s)|_{r \rightarrow 0} \simeq -\frac{\mu \bar{\Delta}_z(s) xy}{\pi r^4} \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{yz}(x, y, s)|_{r \rightarrow 0} \simeq \frac{\mu \bar{\Delta}_z(s)}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 - y^2}{r^4} + \left(bs \frac{y}{r} \right)^2 \ln\left(\frac{bsr}{2}\right) \right\} \quad (22)$$

از روابط (21) و (22) پیداست تکنیکی میدان تنش از دو نوع مرتبه بالا $O(1/r^2)$ و لگاریتمی $O(\ln(r))$ هستند.

3- فرمولاسیون چندین ترک

برای سادگی در نوشتن معادلات، دستگاه مختصات روی مرز نیم صفحه قرار داده می شود. فرض کنید، نیم صفحه حاوی N ترک مستقیم و موازی با مرز دارای معادلات پارامتری به صورت رابطه (23) باشد.

$$\begin{aligned} \alpha_i(q) &= x_{ci} + a_i q \\ \beta_i(q) &= y_{0i}, \\ i &= 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (23)$$

که مختصات (x_{ci}, y_{0i}) وسط ترک i ام و a_i نصف طول ترک است. حدود q در رابطه (23) به نحوی انتخاب شده است که با تغییر آن بین $(-1, 1)$ کل طول ترک طی شود.

با در نظر گرفتن توزیع پیوسته تابع چگالی ناپیوستگی جابجایی روی سطح ترک i ام بصورت $\bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s)$ با مختصات (شکل 2)،

$$\begin{aligned} \alpha_j(\zeta) &= x_{cj} + a_j \zeta \\ \beta_j(\zeta) &= y_{0j}, \\ j &= 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \end{aligned} \quad (24)$$

بردار تنش ایجاد شده حاصل از توزیع ناپیوستگی جابجایی با استفاده از اصل جمع آثار نتیجه می شود:

$$\bar{\sigma}_{yz}^i(q, s) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \bar{K}_{ij}(q, \zeta, s) \bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s) d\zeta \quad (25)$$

لازم بذکر است که پارامترهای با زیراندیس های i و j به ترتیب تابعی از q و ζ هستند. بنا بر اصل باکتر [19] سمت چپ معادله بالا با توجه به بارگذاری های وارده معلوم است. در نتیجه رابطه (25) تبدیل به دستگاه معادلات انتگرالی نسبت به مجهول $\bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s)$ می شود.

کرنل معادله انتگرالی (25) با توجه به رابطه (16) و تکنیکی رابطه (22) به صورت $\bar{K}_{ij}(q, \zeta, s) = \delta_{ij} \bar{\sigma}_{yz} + (\bar{\sigma}_{yz} - \delta_{ij} \bar{\sigma}_{yz})$ تعریف می شود. بنابراین معادله انتگرالی حاصل از توزیع ناپیوستگی جابجایی برای چندین ترک به صورت رابطه (26) ساده می شود،

$$\frac{2\pi \bar{\sigma}_{yz}^i(q, s)}{\mu} = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\delta_{ij}}{r_{ij}^2} + \frac{\delta_{ij} T^2}{2} \left(\ln\left(\frac{Tr_{ij}}{2}\right) \right) + \bar{K}_{reg}^{ij} \right\} a_j \bar{\Delta}_{zj}(\zeta, s) d\zeta \quad (26)$$

معکوس، ضرایب شدت تنش در فضای زمان قابل محاسبه هستند. روش لاپلاس معکوس عددی با گسسته سازی نقاط بر روی محور حقیقی یا موهومی محاسبه می‌شوند. از اینرو روش‌های متعددی پیشنهاد شده است؛ گیور-استهفست، میلر-گای، دوربین و دیگر روش‌ها [25,24]. در این مقاله برای افزایش دقت محاسبات و تأیید نتایج از دو روش لاپلاس معکوس عددی دوربین و استهفست استفاده می‌شود.

1-5- روش دوربین

دوربین، حل مسئله در فضای لاپلاس را با استفاده از بسط سری فوریه سینوسی -کسینوسی و گسسته سازی روی محور موهومی انجام می‌دهد. رابطه (41) ضریب شدت تنش را در فضای مادی به صورت انتگرال روی خط برمویج⁵ در فضای زمان بیان می‌کند:

$$K_{III}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \tilde{K}_{III}(s) e^{st} ds \quad (41)$$

محاسبه انتگرال (41) در حالت کلی به صورت تحلیلی ممکن نیست. از اینرو، از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در نتیجه مقدار تابع $\tilde{K}_{III}(s)$ برای مقادیر متفاوت پارامتر لاپلاس یعنی $s_k = \eta + 2\pi i k/D$ محاسبه می‌شود که $k = 0, 1, 2, \dots, L$ و η و D ثوابت و L تعداد نقاط گسسته در فضای لاپلاس می‌باشند. در نهایت $K_{III}(t)$ در حوزه زمان با استفاده از الگوریتم دوربین [26] به صورت رابطه (42) معرفی می‌شود:

$$K_{III}(t) \approx \frac{e^{\eta t}}{D} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{K}_{III}(\eta) \} + \sum_{k=0}^L \operatorname{Re} \{ \tilde{K}_{III}(s_k) \} \cos\left(\frac{2\pi k t}{D}\right) - \operatorname{Im} \{ \tilde{K}_{III}(s_k) \} \sin\left(\frac{2\pi k t}{D}\right) \right] \quad (42)$$

Re و Im به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی را نشان می‌دهد.

2-5- روش استهفست

استهفست با گسسته سازی روی محور حقیقی، حل انتگرال لاپلاس معکوس (41) را دنبال می‌کند [27]:

$$K_{III}(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{N=1}^P V_N \tilde{K}_{III}\left(\frac{N}{t} \ln 2\right) \quad (43)$$

که P عدد استهفست و باید زوج باشد. V_N به صورت رابطه (44) است:

$$V_N = (-1)^{N+P/2} \times \sum_{k=(1+N/2)}^{\min(N,P/2)} \frac{k^{P/2} (2k)!}{(P/2-k)! k! (k-1)! (P-k)! (2k-P)!} \quad (44)$$

در زمان‌های طولانی، ضریب شدت تنش دینامیکی بسته به نوع بارگذاری به سمت حل الاستوستاتیک همگرا می‌شود؛ رابطه (45) محاسبه این حد را از قضیه مقدار نهایی⁶ نشان می‌دهد [14]:

$$K_{III}(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}_{III}(s) \quad (45)$$

6- مثال‌های عددی و بحث

برای صحت‌سنجی مدل‌سازی انجام شده، می‌توان مسئله یک ترک مستقیم به طول $2a$ در صفحه بی‌نهایت، تحت ترک‌شن برشی وابسته به زمان تابع پله $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ روی سطح ترک در نظر گرفت. با حل دستگاه معادلات جبری، (31)، و بدست آوردن ضرایب ناپیوستگی جابجایی و جایگذاری آن در روابط (39) و (40)، با توجه به الگوریتم‌های لاپلاس معکوس عددی استهفست و دوربین ضرایب شدت تنش دینامیکی در محیط زمان بدست می‌آید. هر دو روش لاپلاس معکوس عددی از معتبرترین روش‌ها در سطح وسیعی از علوم و مهندسی

$T_n(q)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول مرتبه n ، به صورت رابطه (33) بیان می‌شود [22]:

$$n=0,1,2,\dots \quad T_n(q) = \cos[n \cos^{-1}(q)] \quad (33)$$

حل معادله (31) را می‌توان به کمک الگوریتم نقاط نظم یافته¹ [20] انجام داد. از لحاظ عددی گسسته کردن معادله توسط ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف، رابطه (34)، انجام و به دستگاه معادلات جبری خطی کاهش پیدا می‌کند. [23]:

$$e=0,1,2,\dots,M \quad q_e = \cos\left[\frac{2e+1}{2M+2}\pi\right] \quad (34)$$

برای محاسبه بخش انتگرالی معادله (31) از روش انتگرال گیری فرمول اصلاح‌شده تربیع چبیشف² استفاده می‌شود. نقاط تربیع³ در رابطه (35) است [19]:

$$m=0,1,2,\dots,NQ \quad \zeta_m = \cos\left[\pi \frac{(m+1)}{NQ+2}\right] \quad (35)$$

بنابراین با معرفی این فرآیند عددی و استفاده از رابطه (36) ضرایب بسط چبیشف، $\tilde{C}_{nj}(s)$ با حل $M+1$ معادله جبری بدست خواهد آمد.

$$\frac{\pi \tilde{\sigma}_{yz}^i(q_e, s)}{\mu} = \sum_{n=0}^M a_j \tilde{C}_{nj}(s) \left\{ \delta_{ij} \Lambda_n(q_e, s) + \frac{\pi}{2NQ+4} \sum_{m=0}^{NQ} \tilde{K}_{reg}^{ij}(q_e, \zeta_m) [T_n(\zeta_m) - T_{n+2}(\zeta_m)] \right\} \quad (36)$$

4- محاسبه ضریب شدت تنش

از آنجا که پیشرفت ترک از نوک آن آغاز می‌شود مطالعه ضریب شدت تنش در هر دو نوک ترک حائز اهمیت است. زیرا وجود نوک‌های ترک مقابل هم باعث افزایش ضریب شدت تنش به دلیل برهم‌زدن⁴ جریان موج تنش می‌شود. ضریب شدت تنش دینامیکی در فضای لاپلاس برای حالتی که طول ترک $2a_i$ و مبدا مختصات در مرکز ترک قرار گرفته باشد، از روابط (37) و (38) تعریف می‌شود [13]:

$$x > \alpha_i(1) \quad \tilde{K}_{III}^R(s) = \lim_{x \rightarrow \alpha_i(1)} \sqrt{2\pi(x - \alpha_i(1))} \tilde{\sigma}_{yz}^i(x, 0, s) \quad (37)$$

$$x < \alpha_i(-1) \quad \tilde{K}_{III}^L(s) = \lim_{x \rightarrow \alpha_i(-1)} \sqrt{2\pi(\alpha_i(-1) - x)} \tilde{\sigma}_{yz}^i(x, 0, s) \quad (38)$$

$\tilde{K}_{III}^L$ و $\tilde{K}_{III}^R$ به ترتیب ضریب شدت تنش دینامیکی مود سوم شکست برای نوک‌های راست و چپ ترک i ام است.

در محاسبه حد بالا برای تعیین ضرایب شدت تنش، ترم‌های تکین موثر است و ترم‌های غیرتکین در حدگیری صفر خواهند شد. بنابراین، بر اساس مرجع [22] فرمولاسیون مربوط به ضرایب شدت تنش چندین ترک برای نوک‌های راست و چپ به ترتیب به صورت روابط (39) و (40) بدست می‌آید:

$$\tilde{K}_{III}^{R_i}(s) = \frac{\mu}{2a_i} \sqrt{\pi a_i} \sum_{n=0}^M (n+1) \tilde{C}_{ni}(s) \quad (39)$$

$$\tilde{K}_{III}^{L_i}(s) = \frac{\mu}{2a_i} \sqrt{\pi a_i} \sum_{n=0}^M (-1)^n (n+1) \tilde{C}_{ni}(s) \quad (40)$$

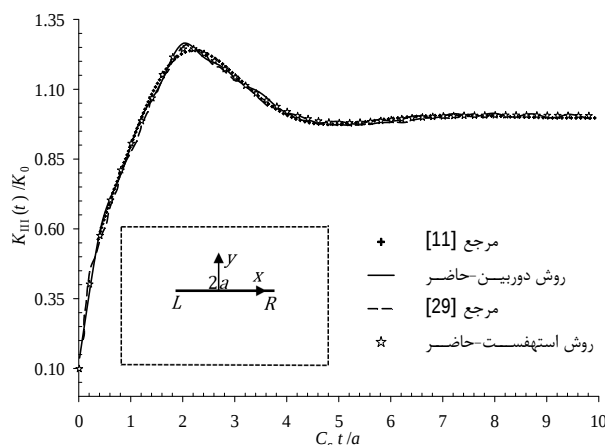
$i = 1, 2, \dots, N$

5- الگوریتم لاپلاس معکوس عددی

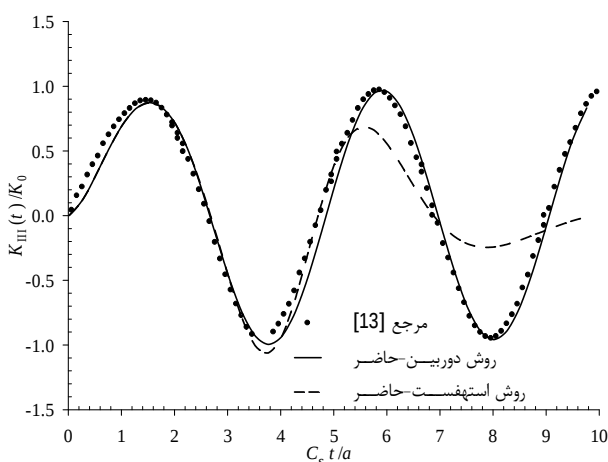
در بخش قبل، مجهول ناپیوستگی جابجایی تعیین و نهایتاً ضرایب شدت تنش در فضای لاپلاس بدست آمدند. با استفاده از الگوریتم مناسب لاپلاس

1- Collocation points method algorithm.
2- Modified chebyshev quadrature formula
3- Quadrature points
4- Disturbed

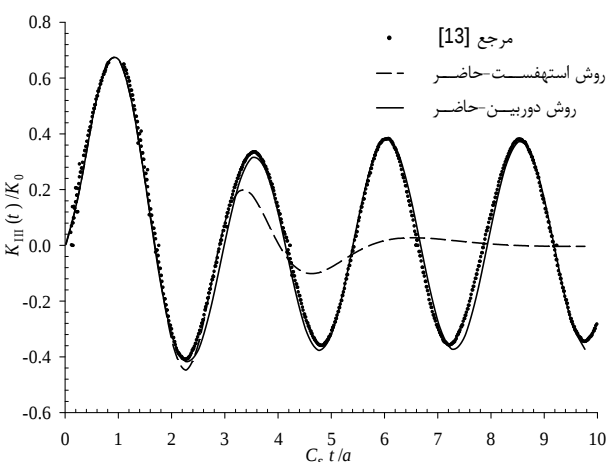
5- Bromwich integration path (Br)
6- Final-value theorem



شکل 3 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای یک ترک در صفحه بی نهایت تحت بار پله ای $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$.



شکل 4 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، در صفحه بی نهایت تحت بار هارمونیک با عدد موج $\omega = 1.5$.



شکل 5 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، در صفحه بی نهایت تحت بار هارمونیک با عدد موج $\omega = 2.5$.

6-2- دو ترک هم راستا در نیم صفحه

صفحه بی نهایت حاوی دو ترک هم راستا با طول $2a_1 = 2a_2 = 2a$ در نظر بگیرید که سطوح آن تحت تنش برشی گذرا $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ قرار گرفته است. به دلیل تقارن مسئله نسبت به محور y ضرایب شدت تنش L_1 و L_2 و همچنین R_1 و R_2 یکسان می باشند. شکل 8 ضریب شدت تنش را برای دو

می باشند. مزیت روش استهفست، پیچیدگی و هزینه محاسباتی کمتر نسبت به روش دوربین است و همین باعث شده بیشتر حل عددی لاپلاس معکوس براساس این روش بنا نهاده شود. اما این مطالعه به روشنی قابل اعتمادتر بودن هر کدام از روش ها را نشان می دهد.

در روش لاپلاس معکوس عددی حساسیت زیاد به ثوابت هر کدام از تکنیک ها یعنی در روش استهفست، عدد استهفست P و در روش دوربین عدد D مشاهده می شود. در این مقاله، ثوابت لاپلاس معکوس در روش استهفست: $P = 20$ و در روش دوربین: $L = 120$ و $\eta = 0.2$ و $D = 40$ در نظر گرفته می شود. برنامه نویسی حل عددی با استفاده از نرم افزار متلب انجام می شود.

6-1- بارهای پله ای، هارمونیک و نوسانی بر روی یک ترک

صفحه بی نهایت حاوی ترک مستقیم الخط بر روی بخشی از محور x ، $(-a, a)$ ، را در نظر بگیرید. با وارد کردن تنش برشی یکنواخت پله ای، $\sigma_{yz} = \sigma_0 H(t)$ بر روی سطح ترک و اعمال تبدیل لاپلاس، $\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_0/s$ ضریب شدت تنش بی بعد شده $K_{III}(t)/K_0$ که $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ ، بر حسب زمان بدون بعد $C_s t/a$ محاسبه شده است. شکل 3 ضریب شدت تنش دینامیکی را برای یک ترک در صفحه بی نهایت نشان می دهد.

اوج شدت تنش در $C_s t/a = 2$ به $K_{III}(t)/K_0 = 1.26$ می رسد؛ که با حل تحلیلی در مرجع [28] کمتر از 0/7 درصد اختلاف مشاهده می شود. پس از آن با گذشت زمان و کاهش اثر امواج تنش، به مقدار استاتیکی خود میل می کند. این نتایج با نتایج موجود در [11، 29]، به خوبی مطابقت دارد. همچنین مشخص است در این مورد هر دو الگوریتم از دقت بالایی برخوردار و الگوریتم دوربین به حل تحلیلی نزدیک تر است.

به منظور بررسی صحت سنجی روش و همچنین برای ارزیابی الگوریتم های ارائه شده، دو بارگذاری دینامیکی مختلف در نظر گرفته می شود. یکی بار هارمونیک $\sigma_{yz} = \sigma_0 \sin(\omega t)$ و دیگری بار نوسانی $\sigma_{yz} = \sigma_0 \sin|\omega t|$ که تبدیل لاپلاس آن با اعمال رابطه (6)، به صورت روابط (46) و (47) بیان می گردد:

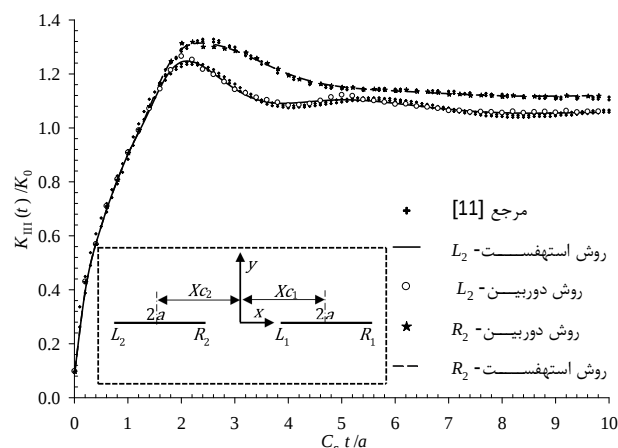
$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (46)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \sigma_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{\pi s}{2\omega} \quad (47)$$

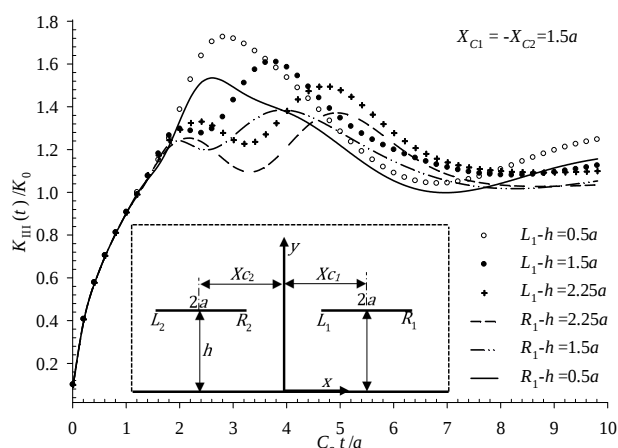
که $\omega = \omega / C_s$ عدد موج است. ضریب شدت تنش به ازای عدد موج های $\omega = 1.5, 2.5$ برای موج هارمونیک و $\omega = 4.5, 5.5$ برای موج نوسانی، نسبت به زمان بی بعد $C_s t/a$ در شکل های 4 تا 7 رسم شده است. آنچه مشخص است در فرکانس پایین، $\omega = 1.5$ دامنه نوسانات ضریب شدت تنش بصورت یکنواخت با زمان افزایش می یابد و در فرکانس $\omega = 2.5$ ، افزایش ضریب شدت تنش از صفر به مقدار بیشینه و سپس به حالت پایا می رسد.

در بارگذاری نوسانی با فرکانس بالا، $\omega = 5.5$ ، رفتار ضریب شدت تنش با آنچه در بارگذاری ضربه حاصل می شود نزدیکتر است [13]، (شکل 6). در فرکانس پایین تر $\omega = 4.5$ ، ضریب شدت تنش صورتی پیچیده تر دارد، (شکل 7). مقایسه دو الگوریتم با نتایج سلیار [13]، دقت بالای الگوریتم لاپلاس معکوس دوربین نسبت به روش استهفست را نتیجه می دهد.

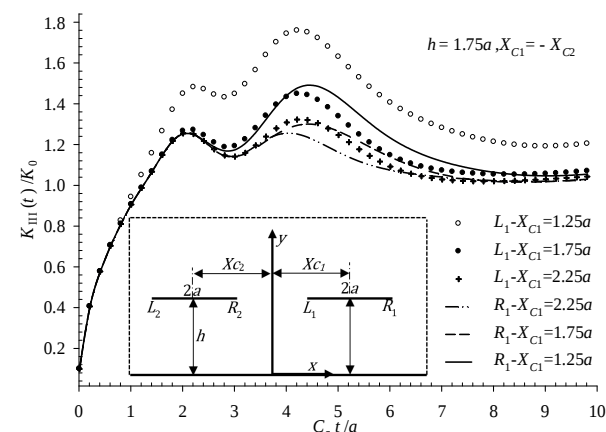
پیداست روش استهفست برای بارگذاری های موجی-نوسانی در بازه زمانی ابتدایی دارای دقتی خوب است اما با گذشت زمان دیگر این روش به نسبت روش دوربین قابل اعتماد نیست.



شکل 8 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو ترک همراستا در صفحه بی نهایت تحت بار برشی پله.



شکل 9 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو ترک همراستا با تغییر ارتفاع از مرز تحت بار برشی پله.



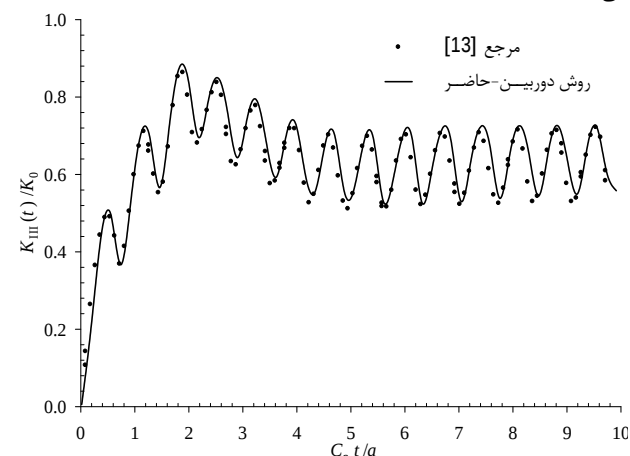
شکل 10 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو ترک همراستا با تغییر فاصله بین دو ترک تحت بار برشی پله.

3-6- دو ترک غیرهمراستا در نیم صفحه

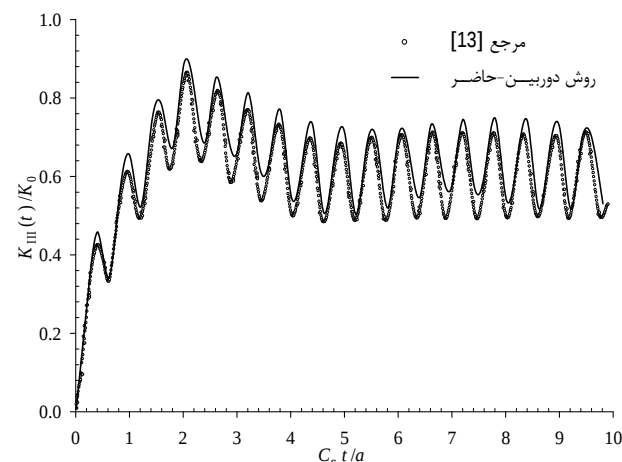
پیش از این تأثیر موقعیت قرارگیری دو ترک همراستا بر روی ضرایب شدت تنش مطرح و بحث شد. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که دو ترک در یک راستا قرار نگرفته باشند. برای مثال اول، ارتفاع ترک اول از مرز ثابت، $h_1 = a$ ، و ارتفاع ترک دوم متغیر لحاظ شده است. فاصله مرکز تا مرکز دو ترک، $X_{C1} = -X_{C2} = 1.5a$ ، ثابت در نظر گرفته می شود. شکل های 11 و 12 به ترتیب

ترک همراستا به فاصله مرکز تا مرکز $3a$ در صفحه بی نهایت نشان می دهد. به دلیل موج تنش برشی عبوری از ترک اول به ترک دوم و اثر متقابل دو ترک بر هم، ضریب شدت تنش $R_2 > L_2$ است. پیک شدت تنش برای نوک های خارجی L_2 و داخلی R_2 به ترتیب در زمان بی بعد $2/15$ و $1/24$ دارای مقادیر $1/25$ و $1/24$ است (شکل 8). از مقایسه این تحلیل نتیجه می شود، ضرایب شدت تنش در دو الگوریتم لاپلاس معکوس عددی با مرجع [11]، به خوبی تطابق دارند. به منظور بررسی و تأثیر موقعیت قرارگیری ترک ها در نیم صفحه بر روی ضرایب شدت تنش، بعنوان مثال اول فرض می شود، فاصله بین دو ترک $1/5$ برابر نصف طول آن، یعنی $X_{C1} = -X_{C2} = 1.5a$ ، و ارتفاع از مرز بصورت پارامتریک متناسب با نصف طول ترک تغییر کند، (شکل 9).

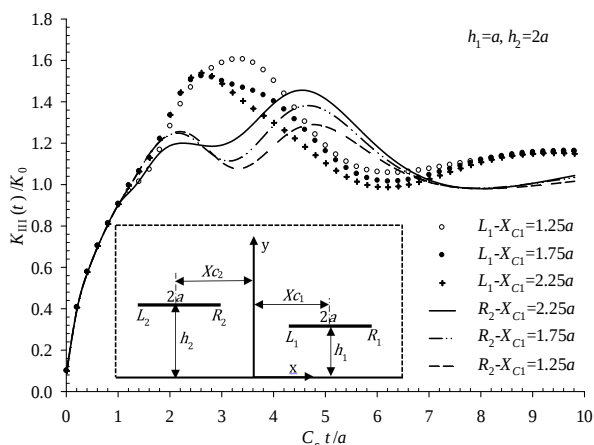
در مثال دوم، ارتفاع دو ترک از مرز ثابت $h = 1.75a$ و فاصله مرکز تا مرکز ترک ها متغیر، $X_{C1} = -X_{C2}$ ، در نظر گرفته می شود (شکل 10). اوج شدت تنش، برای حالت هایی که ارتفاع از مرز، $h = 0.5a$ ، و فاصله نوک های ترک تغییر می کنند، $X_{C1} = -X_{C2} = 1.25a$ ، به ترتیب در زمان های بی بعد $4/21$ و $2/81$ به $1/7583$ و $1/7249$ می رسد (شکل های 9 و 10). پس از آن به سرعت همگرا شده و اثر تقابل امواج تنش با مرز و نوک های ترک کاهش می یابد. نمونه های دیگر به خوبی تأثیر این مهم را نشان می دهند.



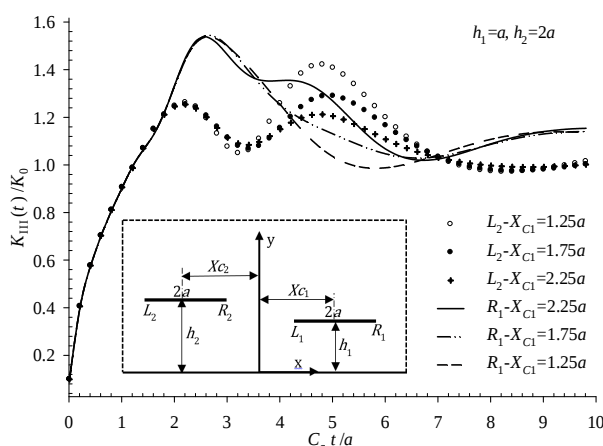
شکل 6 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، در صفحه بی نهایت تحت بار نوسانی با عدد موج $\varpi = 5.5$.



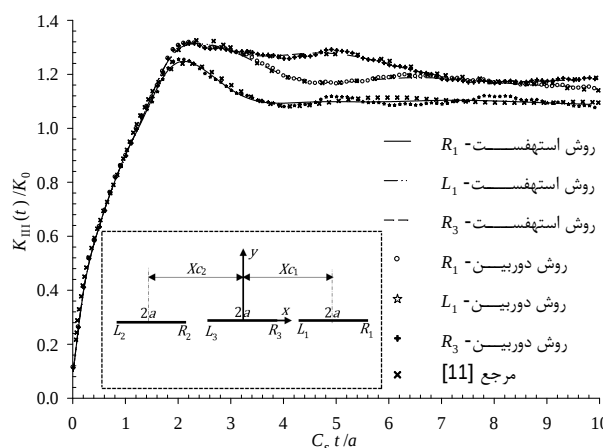
شکل 7 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، در صفحه بی نهایت تحت بار نوسانی با عدد موج $\varpi = 4.5$.



شکل 13 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، دو نوک داخلی ترک غیرهمراستا با فاصله متغیر تحت بار برشی پله.



شکل 14 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو نوک خارجی ترک غیرهمراستا با فاصله متغیر تحت بار برشی پله.



شکل 15 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک همراستا در صفحه بی نهایت تحت بار برشی پله.

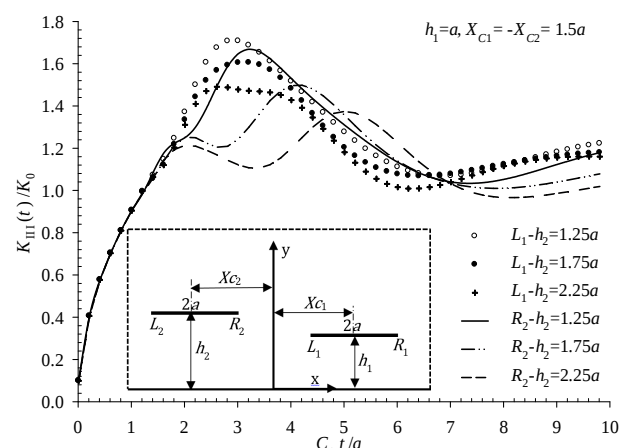
4-6- سه ترک در نیم صفحه

بعنوان آخرین مثال عددی، تحلیل پارامتریک از تأثیر امواج تنش برشی بر روی سه ترک همراستا و غیرهمراستا و تقابل آن‌ها با مرز صفحه انتخاب شده است. در ابتدا، فرض کنید طول ترک‌ها $2a_1 = 2a_2 = 2a_3 = 2a$ و سطوح ترک تحت تنش برشی پله‌ای $\sigma_y = \sigma_0 H(t)$ قرار گرفته باشد. به دلیل تقارن

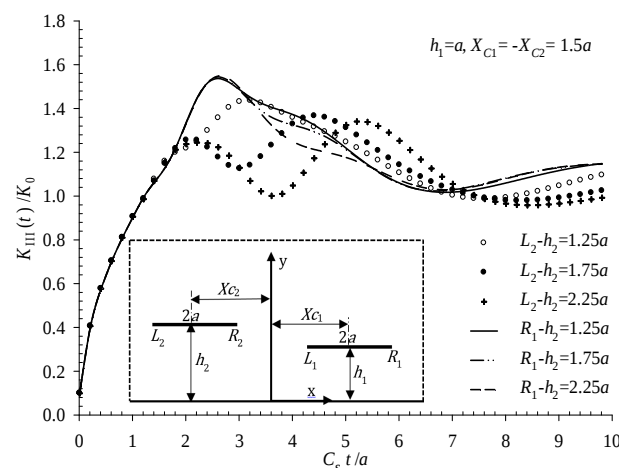
رفتار نوک‌های داخلی و خارجی دو ترک برای سه حالت متفاوت از تغییرات h_2 را نشان می‌دهند. به دلیل غیرهمراستا بودن ترک‌ها و عدم تقارن، ضرایب شدت تنش هر یک از نوک‌ها متفاوت است. در مثال عددی دیگر، ارتفاع ترک اول و دوم از مرز ثابت $h_1 = a$ و $h_2 = 2a$ است.

شکل‌های 13 و 14 به ترتیب ضرایب شدت تنش برای نوک‌های داخلی و خارجی از سه حالت متفاوت تغییرات مرکز تا مرکز، $X_{C1} = -X_{C2}$ ، را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود، پس از به راه افتادن موج تنش از نوک R_1 و منتقل شدن به نوک L_1 و تقابل آن با نوک R_2 ، ضریب شدت تنش $L_1 > R_2$ و به دلیل نزدیک بودن ترک اول به مرز $R_1 > L_2$ است. اوج شدت تنش، برای تقابل دو نوک داخلی و خارجی حالتی که ارتفاع از مرز، $h_2 = 1.25a$ ، و فاصله مرکز تا مرکز ترک $1.5a$ ، باشد به ترتیب در زمان‌های بی بعد $2/81$ و $2/61$ ، به $1/7076$ و $1/5373$ ، شکل‌های 11 و 12، و برای دو نوک داخلی و خارجی حالتی که ارتفاع از مرز، $h_2 = 1.5a$ ، و فاصله مرکز تا مرکز ترک $1.25a$ ، باشد به ترتیب در زمان‌های بی بعد $3/41$ و $2/81$ ، به $1/6037$ و $1/5377$ ، شکل‌های 13 و 14، می‌رسد.

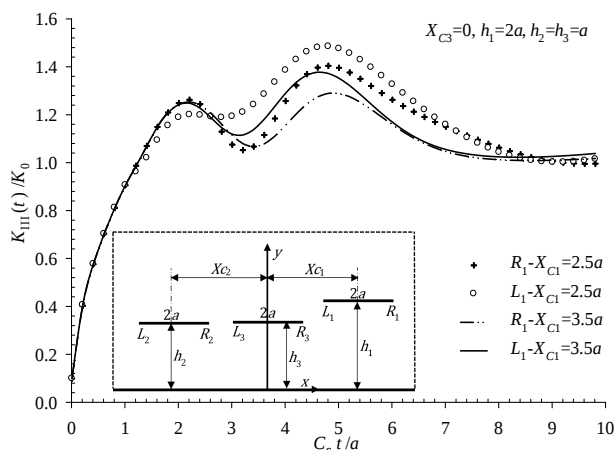
رفت و آمد موج‌های تنش برشی از مرز و اندرکنش با نوک‌های ترک باعث به وجود آمدن پیک‌هایی در نمودار ضریب شدت تنش می‌شوند؛ با گذشت زمان، اثر امواج الاستیک برشی کاهش یافته و به حالت استاتیکی متمایل می‌شوند. نمونه‌های دیگر با کاهش اثر مرز و افزایش فاصله بین دو ترک به روشنی تأثیر آنچه بحث شد را نشان می‌دهند.



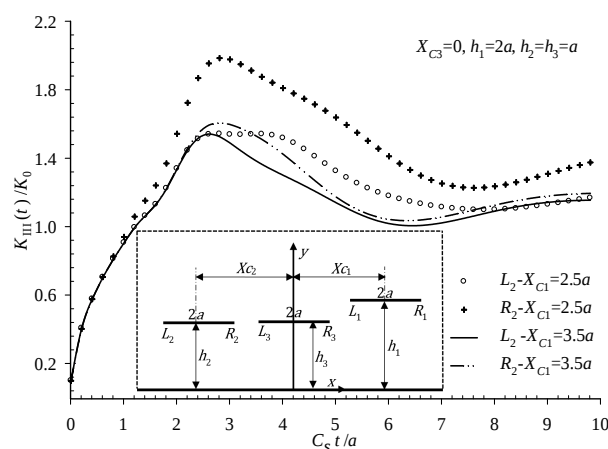
شکل 11 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو نوک داخلی ترک غیرهمراستا با تغییر ارتفاع ترک دوم تحت بار برشی پله.



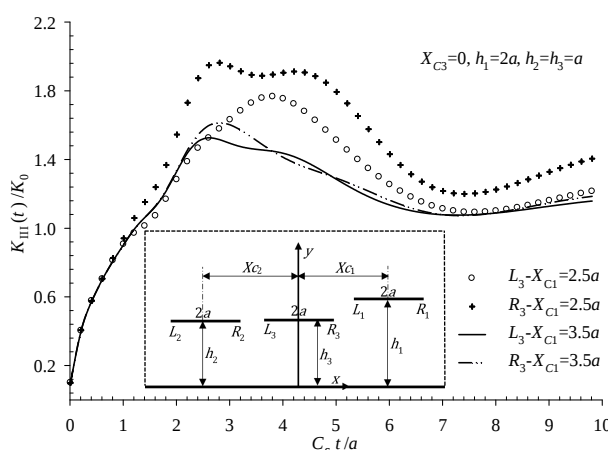
شکل 12 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای دو نوک خارجی ترک غیرهمراستا با تغییر ارتفاع ترک دوم تحت بار برشی پله.



شکل 18 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک غیرهم راستا تحت بار برشی پله: ترک سوم.



شکل 19 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک غیرهم راستا تحت بار برشی پله: ترک دوم.



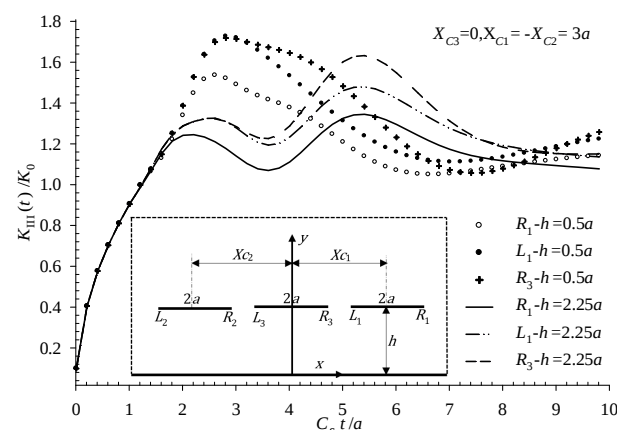
شکل 20 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک غیرهم راستا تحت بار برشی پله: ترک سوم.

پیداست، وقتی ترک سوم از مرز فاصله می گیرد اثر تقابل موج تنش برشی از مرز با نوک های دیگر ترک کمتر شده و از شدت آن کاسته می شود. افزایش تعداد ترک موجب اغتشاشات امواج تنش می شود. نوع آرایش، نزدیک و دور بودن ترک ها از مرز می تواند باعث افزایش ضریب شدت تنش و به نحوی منجر به رشد سریع ترک شود. برای مثال، این افزایش هنگامی که سه ترک به صورت غیرمتقارن در نیم صفحه قرار گیرد، یعنی، $h_1=2a, h_2=h_3=a$ ، و

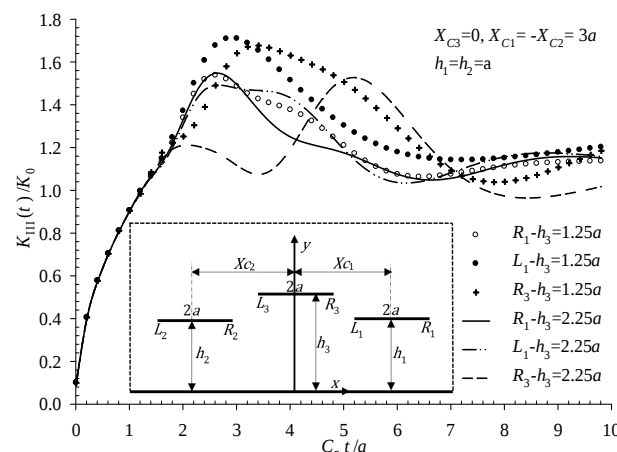
مسئله نسبت به محور y ضرایب شدت تنش $L_3=R_3$ و $L_2=R_1, L_1=R_2$ هستند. شکل 15 ضرایب شدت تنش را برای سه ترک هم راستا با مختصات $X_{C1}=-X_{C2}=3a$ در صفحه بی نهایت نشان می دهد. پیک شدت تنش در نوک های داخلی، R_3 و L_1 بطور یکسان در زمان بی بعد 2/21، دارای مقدار 1/3115 است (شکل 15). به واسطه وجود ترک سوم این مقدار با شبیه کمتر نسبت به نمونه های قبل به سوی حالت پایا میل می کند. پیداست هر دو الگوریتم لایلاس معکوس عددی با نتایج [11] به خوبی هم پوشانی دارد. برای آرایش سه ترک و تاثیر آن بر روی شدت تنش، چند مثال در ادامه آورده شده است. بعنوان مثال اول، دو نمونه متفاوت از سه ترک هم راستا با فواصل مرکز تا مرکز یکسان، $X_{C1}=-X_{C2}=3a$ ، و ارتفاع متغیر از مرز نیم صفحه را در نظر بگیرید. شکل 16 ضرایب شدت تنش را برای سه ترک مستقیم با فاصله متفاوت از مرز نشان می دهد.

اوج شدت تنش برای سه ترک هم راستا با موقعیت $h=a, 2.5a$ ، در زمان های بی بعد، 2/81 و 5/41، به ترتیب به 1/7264 و 1/6328 می رسد، (شکل 16). در مثال دوم فرض می شود، دو ترک اول و دوم در یک راستا، $X_{C1}=-X_{C2}=3a$ ، با ارتفاع $h_1=h_2=a$ ثابت و ترک سوم در مبدا مختصات به فواصل متغیر از مرز قرار می گیرد.

شکل 17 ضرایب شدت تنش را برای ترک های غیرهم راستا نشان می دهد. اوج شدت تنش در نوک R_3 برای $h_3=1.25a, 2.25a$ ، در زمان های بی بعد، 3/41 و 5/21، به ترتیب به 1/677 و 1/5275 می رسد.



شکل 16 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک هم راستا با ارتفاع متغیر از مرز تحت بار برشی پله.



شکل 17 ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد، $K_{III}(t)/K_0$ ، بر حسب زمان بی بعد، $C_s t/a$ ، برای سه ترک غیرهم راستا با تغییر ارتفاع ترک سوم تحت بار برشی پله.

- [6] C.-C. Ma, S.-K. Chen, Exact transient full-field analysis of an antiplane subsurface crack subjected to dynamic impact loading, *Journal of applied mechanics*, Vol. 61, No. 3, pp. 649-655, 1994.
- [7] J.-Y. Huang, Interaction of SH-waves with a finite crack in a half-space, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 51, No. 2, pp. 217-224, 1995.
- [8] P. Wen, M. Aliabadi, D. Rooke, Dynamic analysis of mode III cracks in rectangular sheets, *International journal of fracture*, Vol. 80, No. 2, pp. R37-R41, 1996.
- [9] C.-C. Ma, Y.-S. ING, Transient wave analysis of an antiplane crack interaction with half-plane boundary, *International journal of engineering science*, Vol. 34, No. 13, pp. 1507-1517, 1996.
- [10] C. W. Shul, K. Y. Lee, Dynamic response of subsurface interface crack in multi-layered orthotropic half-space under anti-plane shear impact loading, *International journal of solids and structures*, Vol. 38, No. 20, pp. 3563-3574, 2001.
- [11] K. Wu, J. Chen, Transient analysis of collinear cracks under anti-plane dynamic loading, *Procedia Engineering*, Vol. 10, pp. 924-929, 2011.
- [12] K. C. Wu, Y. L. Hou, S. M. Huang, Transient analysis of multiple parallel cracks under anti-plane dynamic loading, *Mechanics of Materials*, Vol. 81, pp. 56-61, 2015.
- [13] T. Y. Solyar, Transient and Steady-State Dynamic Stresses Under Antiplane Deformation of Bodies with Cracks, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 194, No. 2, pp. 225-238, 2013.
- [14] H. J. Choi, Elastodynamic Interaction of Two Offset Interfacial Cracks in Bonded Dissimilar Media With a Functionally Graded Interlayer Under Antiplane Shear Impact, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 8, pp. 081008, 2014.
- [15] M. Aliabadi, Boundary element formulations in fracture mechanics, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 2, pp. 83-96, 1997.
- [16] K. Watanabe, *Integral transform techniques for green's function*: Springer, 2013.
- [17] B. M. Project, A. Erdélyi, H. Bateman, *Tables of Integral Transforms: Based in Part on Notes Left by Harry Bateman and Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project*: McGraw-Hill, 1954.
- [18] A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*: CRC press, 2012.
- [19] H. Bueckner, Novel principle for the computation of stress intensity factors, *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, Vol. 50, No. 9, 1970.
- [20] R. S. St John, *The solution of hypersingular integral equations with applications in acoustics and fracture mechanics*, Phd thesis Thesis, Computational and Applied Mathematics, Old Dominion University, USA, 1998.
- [21] I. Karimipour, A. Fotuhi, Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 139-149, 2014. (In Persian)
- [22] Y.-S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino, Integral equations with hypersingular kernels—theory and applications to fracture mechanics, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 7, pp. 683-720, 2003.
- [23] N. Parsons, P. Martin, Scattering of water waves by submerged plates using hypersingular integral equations, *Applied Ocean Research*, Vol. 14, No. 5, pp. 313-321, 1992.
- [24] B. Davies, B. Martin, Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods, *Journal of computational physics*, Vol. 33, No. 1, pp. 1-32, 1979.
- [25] A. M. Cohen, *Numerical methods for Laplace transform inversion*: Springer, 2007.
- [26] F. Durbin, Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method, *The Computer Journal*, Vol. 17, No. 4, pp. 371-376, 1974.
- [27] H. Stehfest, Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5], *Communications of the ACM*, Vol. 13, No. 1, pp. 47-49, 1970.
- [28] S. A. Thau, L. Tsin-Hwei, Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, No. 7, pp. 731-750, 1971.
- [29] J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang, A meshless local boundary integral equation method for dynamic anti-plane shear crack problem in functionally graded materials, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 29, No. 4, pp. 334-342, 2005.

ترک سوم در مبدأ ثابت $X_{c3}=0$ و فاصله مرکز تا مرکز دو ترک دیگر از مبدأ متغیر باشد، مشخص است (شکل‌های 18 تا 20). پیک شدت تنش در نوک راست ترک اول R_1 ، برای $X_{c1} = -X_{c2} = 2.5a, 3.5a$ در زمان بی‌بعد $1/4042$ و $1/2891$ ، و نوک چپ آن L_1 در زمان‌های بی‌بعد $4/81$ و $4/61$ به $1/4840$ و $1/3774$ می‌رسند، (شکل 18).

این افزایش پیک شدت تنش، در نوک راست ترک دوم R_2 در زمان بی‌بعد یکسان $2/81$ به ترتیب با شدت تنش $1/9848$ و $1/6063$ مشهود است، (شکل 19). نوک L_2 در فاصله $X_{c1} = 2.5a$ به دلیل تقابل با ترک سوم نسبت به نمونه دیگر مدت بیشتری در پیک شدت تنش می‌ماند. همچنین این مقدار در نوک R_3 ، برای فاصله مرکز تا مرکز $2.5a$ و $3.5a$ در زمان بی‌بعد $2/81$ به ترتیب $1/9631$ و $1/6146$ ، و در L_3 در زمان بی‌بعد $3/81$ و $2/61$ به ترتیب به مقدار $1/7652$ و $1/5268$ می‌رسد، (شکل 20).

7- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با استفاده از روش ناپیوستگی جابجایی به‌صورت تابع مکان-زمان حل مسئله دینامیکی ترک با توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی در نیم صفحه همگن دنبال شده است. ضرایب شدت تنش در فضای مادی با ارائه دو الگوریتم متفاوت لاپلاس معکوس عددی بدست آمدند.

معادله انتگرالی حاصل از روش توزیع پیوسته ناپیوستگی جابجایی با تکنیکی نوع مرتبه بالا و تکنیکی ضعیف شده (تکنیکی لگاریتمی) است. به این دلیل، حل معادله انتگرالی بر اساس بسط سری چیشف پاسخ مطلوب‌تری را نتیجه می‌دهد؛ کما اینکه در نمودارهای صحت سنجی مشاهده می‌شود. از مقایسه دو الگوریتم لاپلاس معکوس عددی نتیجه می‌شود که روش دوربین برای بارگذاری‌های نوسانی به مراتب از روش استهفست دقیق‌تر و برای بارگذاری ضربه نتایج به هم نزدیک است. تأثیر امواج تنش برشی و تقابل چن‌دین ترک مستقیم و موازی با مرز نیم صفحه الاستیک تحت ترک‌شن‌های مختلف وابسته به زمان بر روی ضرایب شدت تنش دینامیکی از اهداف مهم مطالعه پارامتریک مسائل ترک بوده است. هنگامی که ترک به مرز صفحه نزدیک و یا فاصله بین ترک‌ها کم می‌شود، حداکثرهای شدت تنش با سرعت افزایش می‌یابد. همچنین قرار گرفتن ترک‌ها در موقعیت‌های حساس (نزدیک بودن ترک‌ها به یکدیگر و یا فاصله آن‌ها با مرز) سبب افزایش مدت زمان پیک شدت تنش می‌شود. این مهم هنگام وجود سه ترک نسبت به دو ترک مشهود است.

8- مراجع

- [1] P. Wen, *Dynamic fracture mechanics: displacement discontinuity method*, southampton, United Kingdom and Billerica: MA: Computational Mechanics Publications(Topics in Engineering). 1996.
- [2] A. W. Maue, Die beugung elastischer wellen an der halbebene, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 33, No. 1 - 2, pp. 1-10, 1953.
- [3] J. Loeber, G. Sih, Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 44, No. 1, pp. 90-98, 1968.
- [4] D. Gross, C. Zhang, Diffraction of SH waves by a system of cracks: solution by an integral equation method, *International journal of solids and structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 41-49, 1988.
- [5] J. Huang, H. So, Determination of dynamic stress intensity factors of multiple cracks, *International journal of fracture*, Vol. 36, No. 3, pp. 187-198, 1988.