



## مطالعه متجه‌های نیرو و گشتاور پیرامون گشودگی چهارضلعی در چندلایه‌های نامتقارن

محمد جعفری<sup>۱\*</sup>، حسان السادات آشوری سوادکوهی<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرورد، شهرورد

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرورد، شهرورد

\* شهرورد، کد پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱ m\_jafari821@shahroodut.ac.ir

### چکیده

در این مقاله با بسط روش متغیر مختلط لختیسکی، تحلیل تنش چندلایه‌های نامتقارن دارای گشودگی چهارضلعی مورد مطالعه قرار گرفته است. لختیسکی از روش متغیر مختلط، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی و بیضی‌شکل را در صفحات ناهمسانگرد به دست آورد. با بسط این روش برای چندلایه‌های کامپوزیتی نامتقارن و استفاده ازتابع نگاشت همنو، سعی شده است تا توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های غیر دایروی مورد بررسی قرار گیرد. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مختلف نظری نسبت ابعاد گشودگی، زاویه چرخش و شعاع انحنای گوشه گشودگی بر توزیع متجه‌های نیرو و گشتاور در اطراف آن مطالعه تأثیر این پارامترها بر روی متجه‌های نیرو و گشتاور، برای دو چیدمان [۰/۹۰]T و [-۴۵/۴۵]T ارائه شده است. برای بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، از حل عددی اجزای محدود استفاده شده است. نتایج حاصل از حل عددی تطابق خوبی با حل تحلیلی دارد. با توجه به نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که برخلاف انتظار همواره گشودگی دایروی بهترین هندسه برای کاهش تمرکز تنش در صفحات دارای گشودگی نیست و در مواردی با انتخاب انحنای مناسب برای گشودگی چهارضلعی می‌توان تمرکز تنش کمتری در مقایسه با گشودگی دایروی داشت. همچنین با انتخاب زاویه چرخش مناسب برای گشودگی و انتخاب چیدمان و زاویه الیاف مناسب برای لایه‌ها می‌توان متجه‌های نیرو و گشتاور ایجاد شده در اطراف گشودگی را به میزان قابل توجهی کاهش داد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۳ دی ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۱ بهمن ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۱۵ فروردین ۱۳۹۴

کلید واژگان:

نمتجه نیرو و گشتاور

حل تحلیلی

چندلایه نامتقارن

گشودگی چهارضلعی

## A study of the force and moment resultants around quadrilateral hole in unsymmetric laminates

Mohammad Jafari, Hesaan Sadat Ashoori Savadkoohi

Department of Mechanical Engineering, University of Shahrood, Shahrood, Iran.

\* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m\_jafari821@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 24 December 2014  
Accepted 10 February 2015  
Available Online 04 April 2015

**Keywords:**  
Force and Moment Resultants  
Analytical Solution  
Unsymmetric Laminate  
Quadrilateral Hole

### ABSTRACT

In this paper, with the development of the classical Lekhnitskii's complex variable methods, stress analysis of unsymmetric laminated with a quadrilateral hole has been studied. By using the complex variable method, Lekhnitskii obtained the stress distribution around a circular and elliptical hole in anisotropic plates. With the extension of this method to unsymmetric composite laminates and by using the conformal mapping, an attempt has been made to investigate the stress distribution around non-circular holes. In this article, the effect of various parameters such as aspect ratio of hole shape, hole orientation and bluntness on force and moment resultants around the hole are considered. The results of the effect of these parameters have been presented for [0/90]T and [-45/45]T layup. The finite element method is used to verify the results of the analytical solution. Analytical results are in good agreement with the finite element solution, based on the analytical results. Unexpectedly, the circular hole is not the best geometry to reduce the stress concentration in perforated plates and in some cases by selecting the appropriate bluntness for quadrilateral hole, stress concentration less than circular hole can be achieved. Also, by choosing an appropriate rotation angle and selecting the proper fiber angle for each layer, the force and moment resultants around the hole can be significantly reduced.

خاصی برخوردار است. در برخی از کاربردهای عملی، طراح ناچار به ایجاد گشودگی در سازه است. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجراه‌ها در بدنه هواپیماها و زیردربایی‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرج‌ها، ایجاد راه ورود و خروج، سرویس دهی و یا کاهش وزن سازه اشاره کرد. این امر باعث ایجاد تمرکز تنش و در نهایت شکست سازه در این نواحی می‌شود. بنابراین برای طراحی دقیق صفحات حاوی گشودگی

۱- مقدمه

مواد مركب در صنایع مختلف مانند صنایع دریابی، خودرو سازی، صنایع نفت و گاز، هوافضا کاربردهای قابل توجهی دارند. علت استفاده گسترده از این مواد، مزیت آن‌ها از قبیل استحکام، وزن کم و عمر بالای آن‌ها نسبت به مواد دیگر است. به دلیل کاربرد گسترده این مواد و خواص مکانیکی متفاوتی که نسبت به مواد فلزی دارند، مطالعه استحکام شکست آن‌ها از پیچیدگی‌های

Please cite this article using:

M. Jafari, H. S. Ashoori Savadkoohi, A study of the force and moment resultants around quadrilateral hole in unsymmetric laminates, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 193-204, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

گشودگی هایی با هندسه های مختلف را تحلیل کردند. رانو [14] و همکارانش توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی و مربعی را در چندلایه های نامتقارن به دست آوردند. آن ها شاعع انحنای گوشه گشودگی، زاویه بارگذاری و نوع چیدمان لایه ها را مورد بررسی قرار دادند. اما در تابع نگاشت استفاده شده توسط آن ها بررسی شاعع انحنای گوشه گشودگی تنها با تعییر این تابع برای هر گشودگی امکان پذیر بود. جعفری و مشیری اول [15] به بررسی تنش در چندلایه های کامپوزیتی نامتقارن با گشودگی شبه مستطیلی پرداختند. آن ها تأثیر پارامترهایی از قبیل انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، زاویه اعمال بار و چیدمان لایه ها را مورد بررسی قرار دادند. در زمینه چندلایه های نامتقارن کو [16] با استفاده تئوری ورق های ناهمسانگرد لخنیتسکی، تمرکز تنش اطراف گشودگی دایروی را برای چیدمان ها و زوایای الیاف مختلف چندلایه هایی از جنس گرافیت اپوکسی مورد بررسی قرار داد. بکر [17] با استفاده از روابطی که برای صفحات دارای کوپلینگ کشش و خمش ارائه کرده بود؛ چندلایه هایی با ترک های گریفیت<sup>۱</sup> (ترک هایی محدود، ساده و مستقیم) را مورد بررسی قرار داد. او از بارگذاری خمشی و درون صفحه ای در تحلیل خود استفاده کرد. سپس روش پتانسیل مختلف را برای تحلیل تنش چندلایه نامتقارن شامل گشودگی مرکزی بیضی شکل [18] بسط داد. او با همین روش تحقیقی در زمینه چندلایه های نامتقارن تحت تأثیر نیرو و گشتاور تمرکز [19] انجام داد. چن و شن [20] با گسترش روش متغیر مختلف برای چندلایه های نامتقارن، تنش و جابه جایی را با چهار تابع هولومورفیک بیان کردند. روش آن ها برای چندلایه های نامتقارن شامل گشودگی و ترک تحت بارگذاری های درون صفحه ای قابل استفاده است. آن ها تحقیق خود را برای چندین چیدمان حاوی گشودگی دایروی و بیضی شکل انجام دادند و تأثیر چیدمان لایه ها را مورد بررسی قرار دادند [21]. آن ها همچنین با استفاده از تابع گرین، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی شکل در چندلایه نامتقارن را مطالعه کردند. آن ها برای بارگذاری های مختلف مانند نیرو و خمش متمرکز روابطی تحلیلی بیان کردند [22]. یوکاد گونکر و رائو [23] به تحلیل تنش صفحات چندلایه نامتقارن حاوی گشودگی های مختلف از قبیل دایره، مربع و بعضی شکل های غیرمنتظم دیگر پرداختند. آن ها از بارگذاری کششی و برشی در کار خود استفاده کردند. مدنی و همکارانش [24] با استفاده از روش متغیر مختلف، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی شکل در یک چندلایه نامتقارن را مورد بررسی قرار دادند. آن ها با استفاده از بسط و سری لورانت انرژی پتانسیل را به دست آوردند و با استفاده از آن میدان تنش جابه جایی را محاسبه کردند. به نظر مؤلفان این مقاله، در مطالعاتی که تاکنون در زمینه توزیع تنش اطراف گشودگی های غیردایروی در چندلایه های نامتقارن صورت گرفته است، تأثیر پارامترهای نسبت ابعاد گشودگی، زاویه چرخش و شاعع انحنای گوشه گشودگی مورد بررسی قرار نگرفته است، لذا در این مقاله سعی می شود تا تأثیر این پارامترها بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی واقع در چندلایه نامتقارن مورد بررسی قرار گیرد و پارامترهای بهینه برای دستیابی به کمترین نتیجه نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی معرفی شود.

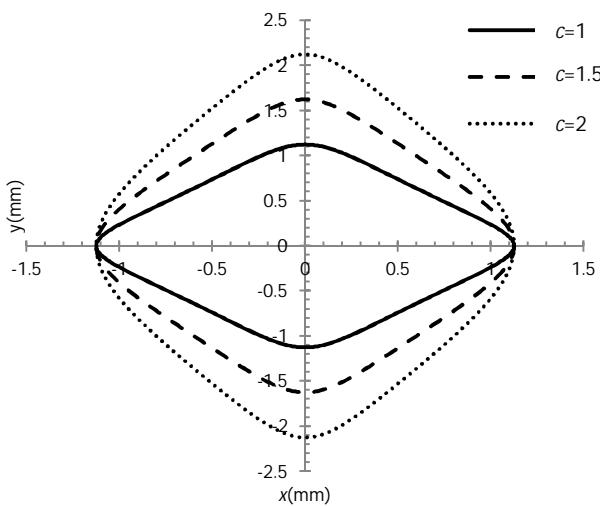
## 2- تعریف مسئله

مسئله مورد بررسی در این مقاله، یک چندلایه کامپوزیتی نامتقارن است که در مرکز دارای گشودگی چهارضلعی است. ابعاد چندلایه در مقایسه با ابعاد گشودگی طوری در نظر گرفته شده است که بتوان آن را بی نهایت فرض کرد.

1- Griffith crack

دانستن اطلاعات دقیق در مورد تعییر شکل ها و توزیع تنش ها لازم است. تمرکز تنش اهمیت ویژه ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه های مهندسی دارد. با توجه به تحقیقات موجود مشخص شده است که سازه های دارای گشودگی، استحکام شکست پایین تری نسبت به قطعات بدون گشودگی دارند و ۸۰ درصد شکست های انجام شده در سازه های هوایی از محل بسته ها و اتصالات روى داده است [1]. لذا طراحی باید به گونه ای باشد تا مقدار تمرکز تنش در نواحی که دارای ناپیوستگی هستند، کاهش یابد. به این منظور محققان زیادی از روش های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی به بررسی توزیع تنش صفحات دارای گشودگی پرداخته اند.

استفاده از روش متغیر مختلف در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دو بعدی اولین بار توسط موشخلیشولی [2] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. سپس ساوین [3] با استفاده از این روش، در مورد صفحات همسانگرد نامحدود برای گشودگی های مختلف و در مورد صفحات ناهمسانگرد لخنیتسکی [4] تنوری خود را برای حل عمومی صفحات ناهمسانگرد نامحدود با گشودگی دایروی و بیضی شکل در اندازه های مختلف ارائه داد. راجیه [5] با استفاده از روش لخنیتسکی و استفاده از یک نگاشت همنواه ضریب تمرکز تنش را برای چندین گشودگی مستطیلی در صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد بررسی کرد و به این نتیجه رسید که بهینه سازی گشودگی ها، ضریب تمرکز تنش را به میزان چشم گیری کاهش می دهد. رضایی پژند و جعفری [6] با ارائه تابع نگاشتی مناسب به تحلیل تنش صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی شبه مربعي پرداختند. آن ها با مطالعه زاویه چرخش گشودگی و انحنای گوشه گشودگی، توانستند به تمرکز تنشی کمتر از تمرکز تنش دایره دست یابند. بکر [7] برای صفحاتی که در آن ها کوپلینگ بین کشش و خمش وجود دارد، با استفاده از روش متغیر مختلف روابط و نتایجی را ارائه کرد. کاربرد این روابط در تحلیل استاتیکی صفحه میانی چندلایه های نامتقارن که در اثر نیروی درون صفحه ای دچار کوپلینگ بین کشش و خمش می شوند، دیده می شود. اسمر و جبور [8] با تعریف تابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضا می کرد، توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه ناهمسانگرد و تحت کشش به دست آوردند. آن ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه ای بار را بر تمرکز تنش مورد بررسی قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام شده است. این تحقیقات در دو دسته متقاضان و نامتقارن جای می گیرند. ربیکی و همکارانش [9] با استفاده از روش اجزای محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی را در چندلایه ها به دست آوردند. آن ها از روش تجربی برای تأیید روش اجزای محدود خود استفاده کرد. در زمینه چندلایه های متقاضان، کنیش و ویتنی [10] حل تقریبی برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی ارائه دادند. آن ها برای پیش بینی ضریب تمرکز تنش در چندلایه هایی با جنس های مختلف، رابطه واحدی را ارائه کردند. یونورا [11] و همکارانش با ارائه عبارتی تحلیلی برای تابع تنش توانستند توزیع تنش اطراف گشودگی هایی با هندسه ساده نظری دایره و بیضی را برای چندلایه های متقاضان به دست آورند. آن ها به کمک روش اجزای محدود دقت حل خود را بررسی کردند. پراساد و شوارتز [12] توزیع تنش اطراف گشودگی بیضی شکل و دایروی را در چندلایه های متقاضان تحت خمش خالص برای چندین چیدمان مختلف مورد بررسی قرار دادند. یوکاد گاثونکر [13] و همکارانش با استفاده از روش متغیر مختلف، صفحات چندلایه نامتقارن حاوی

شکل 3 تأثیر پارامتر  $c$  بر هندسه گشودگی

با فرض  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  و  $\rho = 1$  برای دایره واحد، متغیر  $\zeta$  به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$\zeta = \cos\theta + i\sin\theta \quad (3)$$

بنابراین تابع نگاشت بر حسب  $\zeta$  به صورت رابطه (4) قابل ارائه است:

$$z_j = \frac{\lambda}{2} \left[ a_j \zeta + \frac{b_j}{\zeta} + \omega c'_j \zeta^n + \frac{\omega d'_j}{\zeta^n} \right] \quad (4)$$

که در آن ثوابت  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c'_j$  و  $d'_j$  مطابق رابطه (5) برابرند با:

$$\begin{aligned} a_j &= 1 + is_j c, & b_j &= 1 - is_j c \\ c'_j &= 1 - is_j, & d'_j &= 1 + is_j \end{aligned} \quad (5)$$

#### 4- حل تحلیلی

در تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، رفتار ساختاری چندلایه به وسیله ماتریس سفتی که شامل ماتریس‌های  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  است، به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ماتریس  $A_{ij}$  سفتی کششی، ماتریس  $B_{ij}$  کوپل بین کشش و خمش و ماتریس  $D_{ij}$  سفتی خمشی بوده و از روابط (7)، (8) و (9) به دست می‌آیند:

$$A = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k - z_{k-1}) \quad (7)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8)$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}^k] (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

[ $\bar{Q}$ ] ماتریس سفتی کاهش یافته برای هر لایه است.  $k$  تعداد لایه‌ها و مطابق شکل 1، فاصله لایه  $k$  ام تا صفحه میانی است. در معادله (6)  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_x$  و  $\gamma_{xy}$  کرنش‌های صفحه میانی و  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  و  $\chi_{xy}$  انحنای ناشی از جابه‌جایی

توزیع تنش اطراف گشودگی مورد نظر بر حسب پارامترهای مختلفی از قبیل انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش و نسبت ابعاد گشودگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بارگذاری صفحه به صورت کششی در جهت X صورت می‌گیرد. صفحه دارای رفتار الاستیک خطی است و جنس لایه‌های مختلف در این تحقیق گرافیت BMI بوده که خواص آن در جدول 1 آرائه شده است. در این تحقیق از چیدمان‌های  $T_{[0/90]}$  و  $T_{[-45/45]}$  استفاده شده است. نمایشی از هندسه مسئله و بارگذاری آن در شکل 1 نشان داده شده است. در شکل 1، زاویه چرخش گشودگی با  $\beta$  نشان داده شده است.

#### 3- نگاشت

در این تحقیق ازتابع نگاشتی مناسب که قبلاً در مرجع [6] برای مطالعه تکلایه‌ها استفاده شده است؛ برای بررسی چندلایه‌های نامتقارن حاوی گشودگی چهارضلعی استفاده می‌شود. به وسیله نگاشت همنوای مذکور، ناحیه خارج گشودگی چهارضلعی در مختصات فیزیکی  $Z$ ، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای در صفحه  $Z$  انتقال می‌یابد. این تابع نگاشت به صورت رابطه (1) است:

$$z_j = x + s_j y, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

که در آن  $x$  و  $y$  مطابق رابطه (2) تعریف می‌شوند:

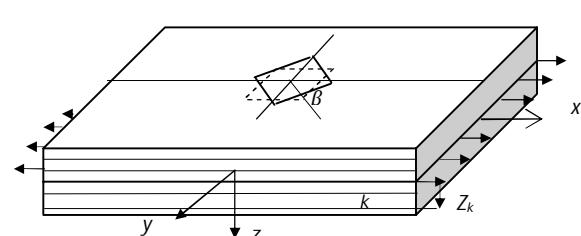
$$\begin{aligned} x &= \lambda(\cos\theta + \omega \cos(n\theta)) \\ y &= \lambda(\cos\theta - \omega \sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (2)$$

$s_j$  ریشه‌های معادله مشخصه درجه هشت مربوط به چندلایه نامتقارن است [18].

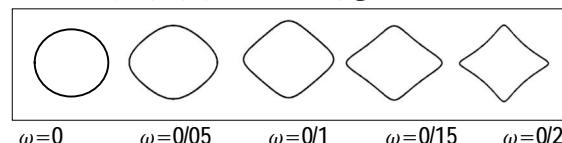
در روابط فوق، پارامتر  $\omega$  برای تعیین میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی تعریف شده است. به عبارت دیگر  $\omega$  نشان دهنده انحنای گوشه گشودگی است. به گونه‌ای که با افزایش مقدار  $\omega$  تیزی گوشه گشودگی نیز افزایش می‌یابد. پارامتر  $c$  تعیین نسبت طول به عرض گشودگی است و اندازه کشیدگی گشودگی را کنترل می‌کند. پارامتر  $\lambda$  بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد که در این مقاله یک در نظر گرفته شده است و پارامتر  $n$  تعیین کننده هندسه گشودگی است که برای گشودگی چهارضلعی سه در نظر گرفته می‌شود. شکل‌های 2 و 3 تأثیر پارامترهای  $\omega$  و  $c$  را به ترتیب بر روی کشیدگی و انحنای گوشه گشودگی نشان می‌دهند.

جدول 1 خواص مکانیکی ماده [21]

$v_{12}$	$G_{12}$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_1$ (GPa)	نوع ماده
0/28	4/59	8/46	124	BMI



شکل 1 نمایشی از هندسه مسئله و بارگذاری آن

شکل 2 تأثیر پارامتر  $\omega$  بر هندسه گشودگی

انتگرال نیروهای عرضی مطابق رابطه (15) برابرند با [23]:

$$\int_0^s p(s) ds = f(s) \quad (15)$$

مطابق رابطه (16) برابر است با [23]:

$$\int_0^s \left( Q_n + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} \right) ds = - \int_0^s p(s) ds \quad (16)$$

به عبارت دیگر مطابق رابطه (17):

$$P + M_{nt} = -f(s) \quad (17)$$

گشتاور خمی قائم  $m_n$  در حالت دوم با رابطه (18) (بیان می‌شود):

$$M_n = -m(s) \quad (18)$$

مؤلفه‌های قائم و مماسی گشتاور توسط ماتریس انتقال به  $f(s)$  و  $M(s)$  مرتبط می‌شوند. با قرار دادن متجه‌ها بر حسبتابع پتانسیل مرتبه اول، شرایط مرزی مرحله دوم به صورت روابط (19) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \int_0^s f_x ds &= 2\operatorname{Re}[e_j A_j z_j] \\ \int_0^s f_y ds &= 2\operatorname{Re}[d_j A_j z_j] \\ - \int_0^s (mdx - fdy) &= 2\operatorname{Re}[g_j A_j z_j] + cy \\ - \int_0^s (mdy + fdx) &= 2\operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) A_j z_j] + cx \end{aligned} \quad (19)$$

با در نظر گرفتن متجه‌ها بر حسب  $(z_j)$  مطابق رابطه (13) و جایگذاری در (19) روابط (20) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[e_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2\operatorname{Re}[e_j A_j z_j] \\ 2\operatorname{Re}[d_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2\operatorname{Re}[d_j A_j z_j] \\ 2\operatorname{Re}[g_j \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2\operatorname{Re}[g_j A_j z_j] \\ 2\operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) \varphi'_{j2}(z_j)] &= 2\operatorname{Re}[(2h_j + s_j g_j) A_j z_j] \end{aligned} \quad (20)$$

با تعریف تابع نگاشت در این معادلات، تابع پتانسیل حالت دوم در صفحه  $\zeta$  به دست می‌آید. فرمول شوارتز برای تابع هولومورفیک  $(\zeta)$   $\varphi(\zeta) = 1/|\zeta|$  در داخل ناحیه دایره‌ای به شاعر واحد به صورت رابطه (21) تعریف می‌شود: [23]

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \operatorname{Re}[\varphi(t)] \frac{t + \zeta}{t - \zeta} dt + ia_0 \quad (21)$$

با قرار دادن شرایط مرزی در این انتگرال، می‌توان مشتق دوم تابع نگاشت مرحله دوم را به صورت روابط (22) محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} e_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[ (k_1 + k_2) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n(k_3 + k_4) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ d_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[ (k_5 + k_6) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n(k_7 + k_8) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ e_j \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[ (k_1 + k_2) \frac{1}{\zeta^2} + \omega n(k_3 + k_4) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \\ (2h_j + s_j g_j) \varphi''_{j2}(\zeta) &= -\frac{\lambda}{2} \left[ (k_{13} + k_{14}) \frac{1}{\zeta^2} \right. \\ &\quad \left. + \omega n(k_{15} + k_{16}) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

عمودی  $w$  هستند و با روابط (10) به هم مرتبط می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} & \varepsilon_y &= v_{,y} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \chi_x &= -w_{,xx} & \chi_y &= -w_{,yy} & \chi_{xy} &= -2w_{,xy} \end{aligned} \quad (10)$$

اندیس کاما نشان‌دهنده مشتق جزئی نسبت به  $x$  و  $y$  است. مؤلفه‌های جایی  $u$  و  $w$  بر حسب تابع پتانسیل تحلیلی و هولومورفیک  $\varphi(z_j)$  ( $j=1,\dots,4$ ) و مشتق مرتبه اول آن (که به تفصیل در بخش تابع پتانسیل معرفی می‌شود) به صورت روابط (11) تعریف می‌شوند: [23]

$$\begin{aligned} w &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_3(z_3) + \varphi_4(z_4)] \\ u &= 2\operatorname{Re}[p_j \varphi'_j(z_j)], \quad v = 2\operatorname{Re}[q_j \varphi'_j(z_j)] \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط (11) منظور از  $\operatorname{Re}$  قسمت حقیقی تابع درون کروشه است و اندیس‌های این معادلات از قاعده جمع اندیسی پیروی می‌کنند. مقادیر مختلط  $p_j$  و  $q_j$  با به کارگیری روابط (10) و (11) به منظور ارائه مؤلفه‌های کرنش و انحنای در رابطه (6) بر حسب تابع پتانسیل  $\varphi(z_j)$  و جایگذاری نتایج حاصل شده در معادلات تعادل (12) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

معادلات مربوط به محاسبه  $s_j$  و  $p_j$  در مرجع [7] آورده شده اند. متجه‌های نیرو و گشتاور بر حسب مشتق دوم تابع پتانسیل به صورت رابطه (13) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_x &= 2\operatorname{Re}[c_j \varphi''_j(z_j)], \quad N_y = 2\operatorname{Re}[d_j \varphi''_j(z_j)], \\ N_{xy} &= 2\operatorname{Re}[e_j \varphi''_j(z_j)], \quad M_x = 2\operatorname{Re}[f_j \varphi''_j(z_j)], \\ M_y &= 2\operatorname{Re}[g_j \varphi''_j(z_j)], \quad M_{xy} = 2\operatorname{Re}[h_j \varphi''_j(z_j)] \end{aligned} \quad (13)$$

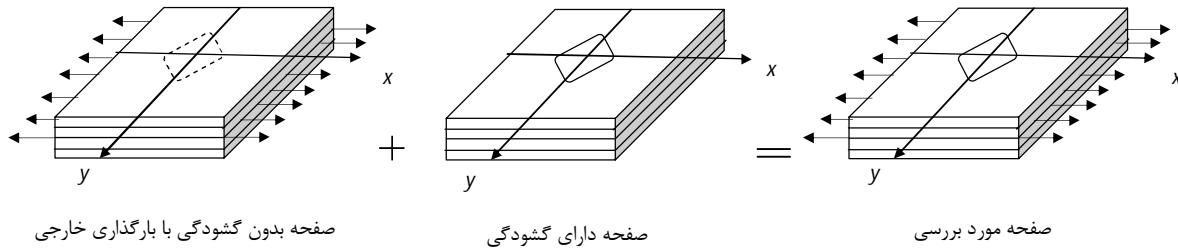
#### 1-4- محاسبه تابع پتانسیل

تابع پتانسیل مسئله با استفاده از روش جمع آثار<sup>1</sup>، از جمع توابع پتانسیل در مرحله، قابل محاسبه است. در مرحله اول، صفحه بدون گشودگی با بارگذاری در لبه‌های خارجی آن در نظر گرفته شده است. در اثر این بارگذاری در نقاطی که مرز گشودگی را مشخص می‌کنند، بار داخلی ایجاد می‌شود. چون مرز گشودگی در مسئله اصلی عاری از بار است؛ بنابراین فرض می‌شود که در حالت دوم نیرویی مخالف بار داخلی ایجاد شده بر مرز گشودگی اعمال می‌شود تا در نهایت مرز گشودگی بدون بار باشد. با جمع توابع پتانسیل هر یک از حالت‌های اشاره شده، تابع پتانسیل کل به دست می‌آید (شکل 4).

در حالت اول در صورت نبود گشودگی، تابع پتانسیل به صورت یک ثابت مختلط  $A_x$  خواهد بود. این ثابت مختلط با اعمال شرایط مرزی در روابط (13) به دست می‌آید [23]. در تحقیق حاضر، چندلایه تحت بارگذاری در جهت  $\alpha$  قرار دارد. در نتیجه تنها نیروی اعمالی در مرز  $N_x^\infty = 1$  در نظر گرفته می‌شود. در مرحله دوم با استفاده از تابع پتانسیل حالت اول، نیروهای داخلی  $f_x$  و  $f_y$  و نیروی عرضی  $p(s)$  و گشتاور خمی  $w$  محاسبه می‌شوند. رابطه بین این مقادیر و متجه‌های نیرو به صورت رابطه (14) است [23]:

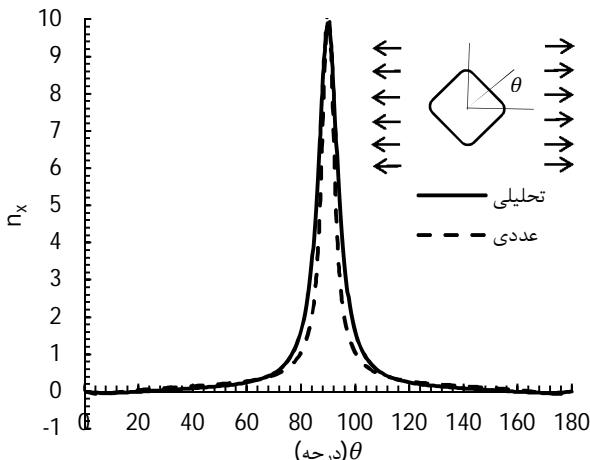
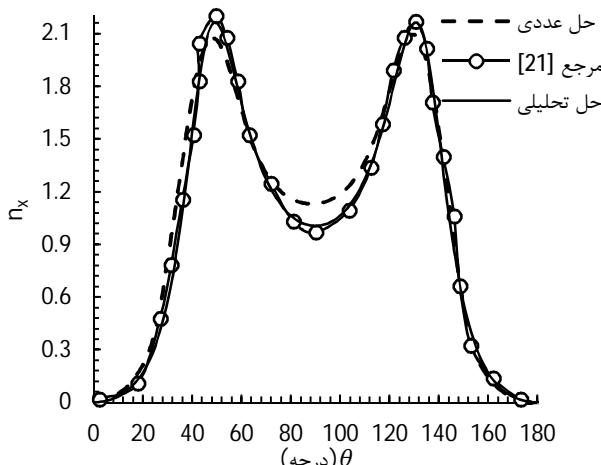
$$\begin{aligned} N_x dy - N_{xy} dx &= -f_x ds \\ N_{xy} dy - N_y dx &= -f_y ds \end{aligned} \quad (14)$$

1- Superposition Principle



شکل 4 نمایشی از روش حل

گشتاور را در چندلایه های نامقابله حاوی گشودگی دایروی و بیضی شکل در چیدمان های  $[0/90]_T$  و  $[45/45/-45]$  مورد بررسی قرار دادند. شکل 6 نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر، حل ارائه شده در مرجع [21] و حل عددی را برای منتجه نیرو در جهت  $x$  در اطراف گشودگی دایروی نشان می دهد. زاویه  $\theta$  زاویه پیرامون گشودگی است و منتجه نیرو بی بعد نسبت منتجه نیرو در اطراف گشودگی به بارگذاری اعمالی  $(N_i/N_x^\infty)$  (که در آن  $i$  می تواند  $x$  و  $y$  و  $xy$  باشد) است. بارگذاری در لبه های صفحه مورد بررسی  $N_x^\infty = 1$  در نظر گرفته شده است.

شکل 5 مقایسه منتجه نیروی بی بعد در جهت  $x$  در اطراف گشودگی در چیدمان  $[0/90]_T$  با دو روش حل تحلیلی و اجزای محدودشکل 6 مقایسه منتجه نیروی بی بعد در جهت  $x$  در اطراف گشودگی دایروی در چیدمان  $[45/45/-45]$  با روش های مختلف

که در آن  $k_1$  تا  $k_{16}$  مطابق رابطه (23) عبارتند از:

$$\begin{aligned} k_1 &= \overline{e_j A_j a_j}, & k_2 &= e_j A_j b_j, \\ k_3 &= \overline{e_j A_j c_j}, & k_4 &= e_j A_j d_j, \\ k_5 &= \overline{d_j A_j a_j}, & k_6 &= d_j A_j b_j, \\ k_7 &= \overline{d_j A_j c_j}, & k_8 &= d_j A_j d_j, \\ k_9 &= \overline{g_j A_j a_j}, & k_{10} &= g_j A_j b_j, \\ k_{11} &= \overline{g_j A_j c_j}, & k_{12} &= g_j A_j d_j, \\ k_{13} &= \overline{(2h_j + s_j g_j) A_j a_j}, & k_{14} &= (2h_j + s_j g_j) A_j b_j, \\ k_{15} &= \overline{(2h_j + s_j g_j) A_j c_j}, & k_{16} &= (2h_j + s_j g_j) A_j d_j \end{aligned} \quad (23)$$

لازم به ذکر است که اندیس های موجود در معادله (23) از قاعده جمع اندیسی پیروی می کنند.

به این ترتیب تابع پتانسیل مرحله دوم در صفحه  $Z$  از رابطه (24) به دست می آید:

$$\varphi''_{j2}(z_j) = \frac{\varphi''_{j2}(\zeta)}{z'_j} \quad (24)$$

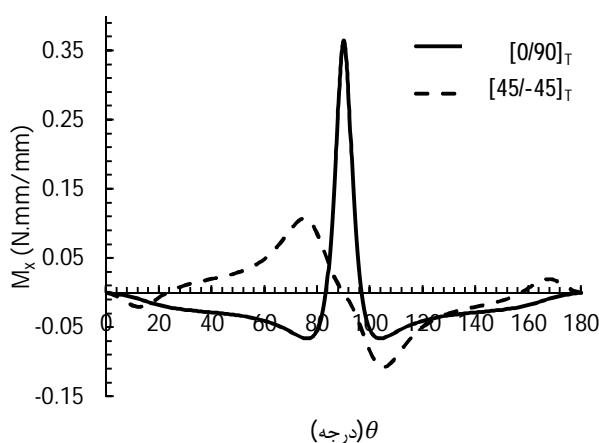
که در آن  $\zeta'$  مشتق مرتبه اول تابع نگاشت نسبت به  $\zeta$  است. اکنون با داشتن تابع پتانسیل هر مرحله، تابع پتانسیل کل با استفاده از اصل جمع آثار قابل محاسبه رابطه (25) مطابقت دارد:

$$\varphi_j''(z_j) = \varphi''_{j1}(z_j) + \varphi''_{j2}(z_j) \quad (25)$$

در نهایت با اعمال رابطه (25) در رابطه (13) منتجه های نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی به دست می آیند.

## 5- بررسی درستی جواب ها

به منظور صحبت سنجی حل تحلیلی حاضر، با کمک نرم افزار آباکوس از حل عددی اجزای محدود استفاده شده است. بدین منظور صفحه های با گشودگی مربعی با انحنای  $c=1$ ، زاویه چرخش صفر و تحت بارگذاری کششی مدل شده است. برای مشبندی از المان S8R که منطبق با هندسه و فیزیک مسئله است، استفاده شده است. به منظور دستیابی به مشبهه، در اطراف گشودگی، مشبندی بسیار ریزتر از مرزهای خارجی صفحه در گرفت و برای یافتن تعداد المان مناسب در اطراف گشودگی، صفحه با تعداد المان های متفاوتی مشبندی شد و بررسی شد و در نهایت تعداد المان بهینه برای حل عددی به دست آمد. شکل 5 نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی را برای منتجه نیرو بی بعد در اطراف گشودگی چهارضلعی در چیدمان  $[0/90]_T$  نشان می دهد. علاوه بر روش اجزای محدود از نتایج ارائه شده در مرجع [21] برای بررسی درستی نتایج استفاده شده است. چن و شن با گسترش روش متغیر مختلط برای چندلایه های نامقابله، توزیع منتجه نیرو و



شکل 8 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان‌های  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$

جدول 2 مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$

$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$	منتجه‌های نیرو (بی بعد) و منتجه‌های گشتاور ( $N.mm/mm$ )
9/8776	3/4059	$n_x$
0/4864	1/7066	$n_y$
1/2659	2/1924	$n_{xy}$
0/365	0/1076	$M_x$
0/0222	0/0568	$M_y$
0/019	0/078	$M_{xy}$

## 6- تأثیر انحنای گوشه گشودگی

همان‌طور که در بخش تابع نگاشت اشاره شد، پارامتر  $\omega$  بر میزان نرمی یا تیزی لبه گشودگی تأثیر می‌گذارد و افزایش یا کاهش آن به ترتیب باعث تیز شدن و نرم شدن گوشه‌های گشودگی می‌شود. نتایج ارائه شده در این بخش برای گشودگی چهارضلعی با زاویه چرخش صفر درجه و  $c=1$  در دو چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$  است. همان‌طور که در شکل 9 دیده می‌شود، برای چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$ ، منتجه  $n_x$  با افزایش انحنا افزایش می‌یابد. برای هر دو چیدمان برای مقادیر  $\omega$  بزرگتر از  $0.02$  این افزایش با شبیه زیادی اتفاق می‌افتد. تفاوت رفتار دو چیدمان در فاصله  $\omega=0.08$  تا  $\omega=0.04$  قابل توجه است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای چیدمان  $[0/90]_T$  مینیمم بیشینه  $n_x$  در  $\omega=0.08$  اتفاق می‌افتد و این به این معناست که برخلاف انتظار در این حالت گشودگی دایری  $(\omega=0)$ ، گشودگی بهینه از لحاظ دستیابی به کمترین مقدار منتجه نیروی بیشینه نیست. همچنین از این نمودار مشخص است که در انحنای مختلف چیدمان  $[-45/45]_T$  بیشینه  $n_x$  کمتری نسبت به چیدمان  $[0/90]_T$  دارد. در شکل 10 تغییرات بیشینه  $M_x$  بر حسب شعاع انحنا مشاهده می‌شود. رفتاری مشابه آنچه در مورد  $n_x$  بیان شد در این مورد نیز مشهود است. اما در بررسی بیشینه  $n_y$  و  $M_y$  چیدمان‌ها رفتار متفاوتی نشان می‌دهند به گونه‌ای که در جهت عمود بر بارگذاری، چیدمان  $[0/90]_T$  بیشینه  $n_y$  و  $M_y$  کمتری نسبت به چیدمان  $[-45/45]_T$  دارد. برای چیدمان  $[-45/45]_T$  کمترین مقادیر بیشینه  $n_y$  و  $M_y$  در  $\omega=0.04$  اتفاق می‌افتد. حال آنکه برای چیدمان  $[0/90]_T$  این مقدار در  $\omega=0$  رخ می‌دهد. این رفتار برای منتجه  $n_y$  در شکل 11 در دو چیدمان قابل مشاهده است. در مورد

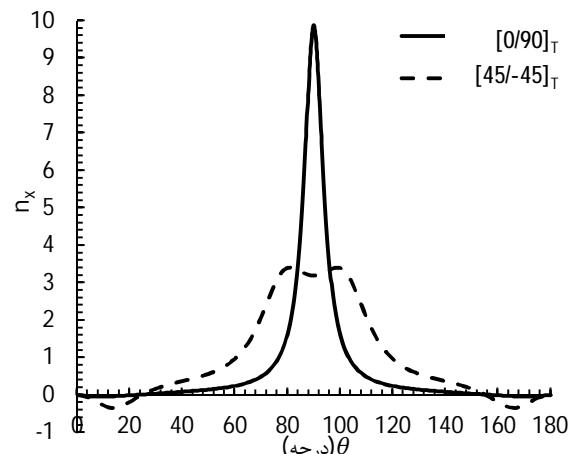
شده است، لذا مقدار منتجه‌های نیروی بی بعد با مقدار منتجه‌های نیرو برابر است و با  $n_x$ ,  $n_y$  و  $n_{xy}$  نشان داده می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین حل تحلیلی انجام شده و روش‌های دیگر وجود دارد.

## 6- نتایج

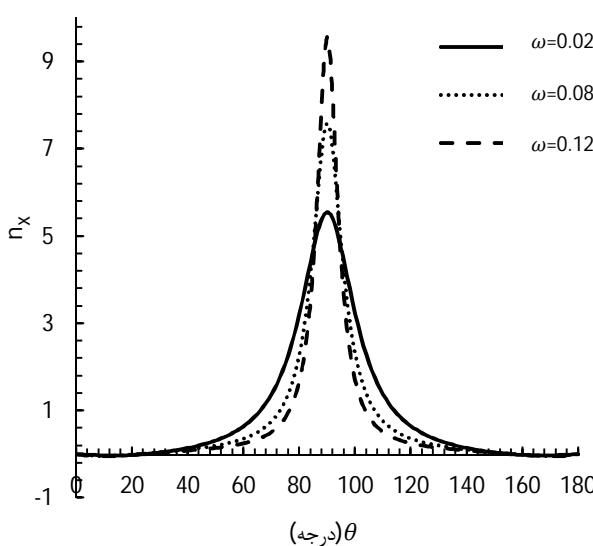
در این مقاله به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی، انحنای گوشه گشودگی و کشیدگی آن بر توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی پرداخته می‌شود. برای این منظور از ماده گرافیت BMI که خواص مکانیکی آن در جدول 1 آمده است، استفاده شده است.

### 6-1- تأثیر چیدمان لایه‌ها

چیدمان لایه‌ها یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر مقدار بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور است. همان‌طور که در شکل 7 مشاهده می‌شود، در شرایط یکسان برای گشودگی چهارضلعی با  $c=1$  و  $\omega=0/125$ ، بیشینه منتجه بی بعد  $n_x$  برای چیدمان  $[0/90]_T$  در زاویه  $\theta=90^\circ$  و برای چیدمان  $[-45/45]_T$  در زاویه  $\theta=81^\circ$  اتفاق می‌افتد. برای منتجه‌های گشتاور نیز نتایج به همین صورت است. در شکل 8 بیشینه  $M_x$  برای چیدمان  $[0/90]_T$  برابر  $0/365$  در زاویه  $\theta=90^\circ$  و برای چیدمان  $[-45/45]_T$  برابر  $0/1076$  است که در زاویه  $\theta=70^\circ$  و  $\theta=155^\circ$  رخ می‌دهد. این نتایج نشان می‌دهد که مقدار بیشینه  $n_x$  برای چیدمان  $[-45/45]_T$  حدوداً 3 برابر کمتر از چیدمان  $[0/90]_T$  است. تفاوت در مقادیر بیشینه  $M_x$  در دو چیدمان مورد بررسی نیز از همین روند پیروی می‌کند. این رفتار در جهت عمود بر بارگذاری کاملاً متفاوت می‌شود؛ به گونه‌ای که میزان بیشینه  $n_y$  برای چیدمان  $[0/90]_T$  برابر  $0/4864$  و برای چیدمان  $[-45/45]_T$  برابر  $1/7066$  است و این بدين معنی است که در جهت عمود بر بارگذاری چیدمان  $[0/90]_T$  بیشینه  $n_y$  به مراتب کمتر از  $[-45/45]_T$  دارد. به همین ترتیب  $M_y$  نیز همین رفتار را نشان می‌دهد. منتجه‌های  $n_{xy}$  و  $M_{xy}$  نیز برای چیدمان  $[-45/45]_T$  مقادیر بیشتری دارند. بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای هر دو چیدمان در جدول 2 آورده شده است. لازم به ذکر است که برای چندلایه نامتقارن تحت کشش در جهت  $\alpha$ ، توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور در اطراف گشودگی نسبت به محور بارگذاری متفاوت است.



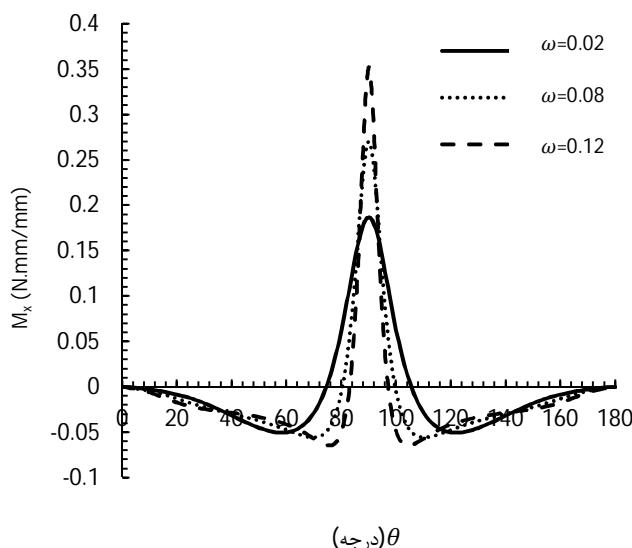
شکل 7 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان‌های  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$



شکل 12 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] در انحصاری مختلف

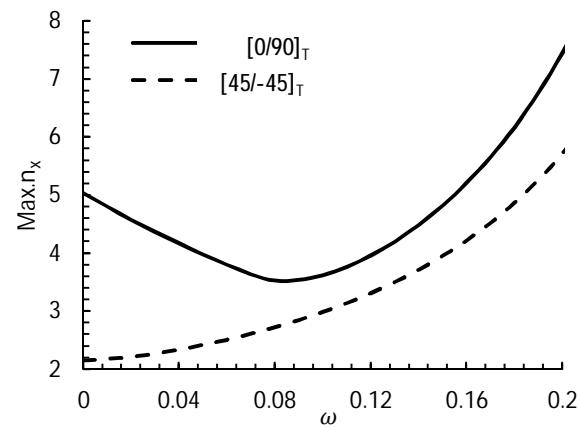
جدول 3 مقادیر بیشینه منتجه های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان<sub>T</sub>[0/90] و  $\omega=0/2$  در  $[-45/45]_T$

		منتجه های نیرو (بی بعد)	و منتجه های گشتاور (N.mm/mm)
$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$		
7/4575	5/7215	$n_x$	
1/1541	3/4709	$n_y$	
1/3909	4/0989	$n_{xy}$	
0/2602	0/1998	$M_x$	
0/0351	0/1133	$M_y$	
0/0512	/15098	$M_{xy}$	

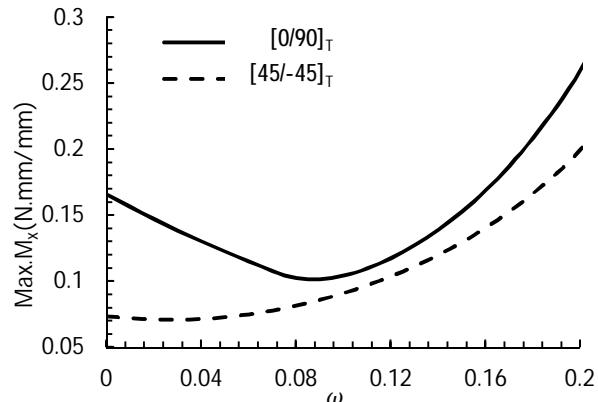


شکل 13 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] در انحصاری مختلف

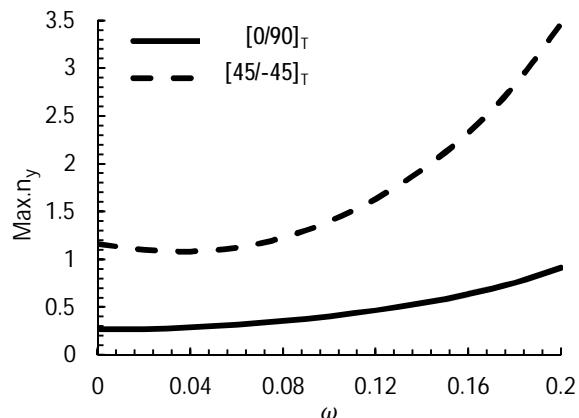
منتجه  $n_{xy}$  نشان می دهد که کمترین بیشینه این منتجه برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] در  $\omega=0/04$  و برای چیدمان<sub>T</sub> در  $\omega=0/02$  است. در نهایت کمترین بیشینه منتجه  $M_{xy}$  برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] در گشودگی دابیروی ( $\omega=0$ ) و برای چیدمان<sub>T</sub> در  $\omega=0/02$  در  $\omega=0/2$  رخ می دهد. جدول 3 مقدار بیشینه منتجه های نیرو و گشتاور را برای دو چیدمان مورد بحث نشان می دهد. شکل های 12 و 13 توزیع منتجه های  $n_x$  و  $M_x$  در اطراف گشودگی برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] و شکل های 14 و 15 توزیع همین مقادیر را برای چیدمان<sub>T</sub> در سه انحصاری مختلف نشان می دهد.



شکل 9 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی بعد در جهت X برای چیدمان های [0/90]<sub>T</sub> و  $[-45/45]_T$  بر حسب شعاع انحنای گشودگی

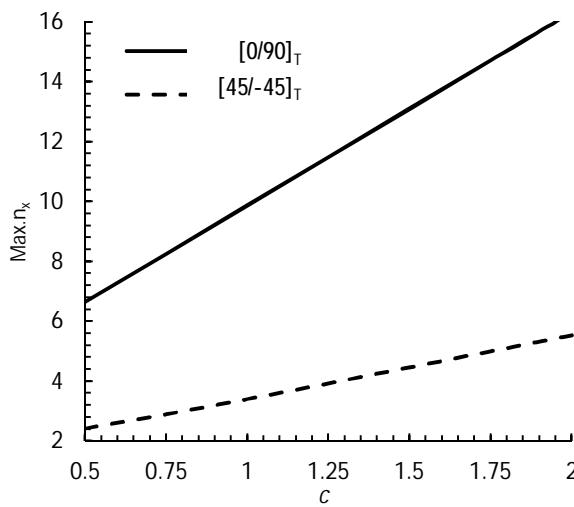


شکل 10 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان های  $[-45/45]_T$  و  $[0/90]$  بر حسب شعاع انحنای گشودگی

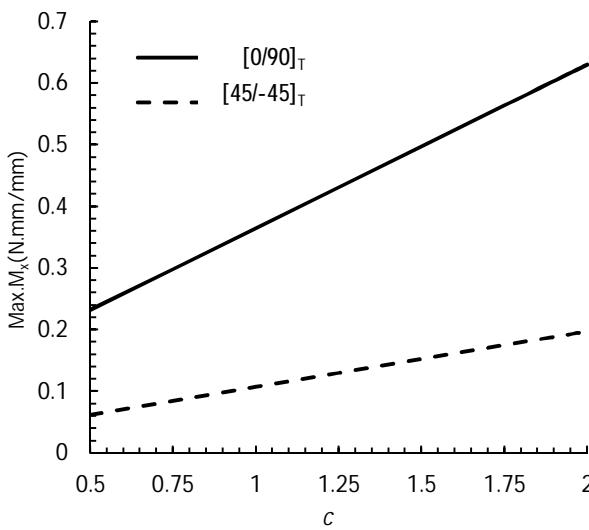


شکل 11 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیرو در جهت Y برای چیدمان های  $[0/90]$  و  $[-45/45]_T$  بر حسب شعاع انحنای گشودگی

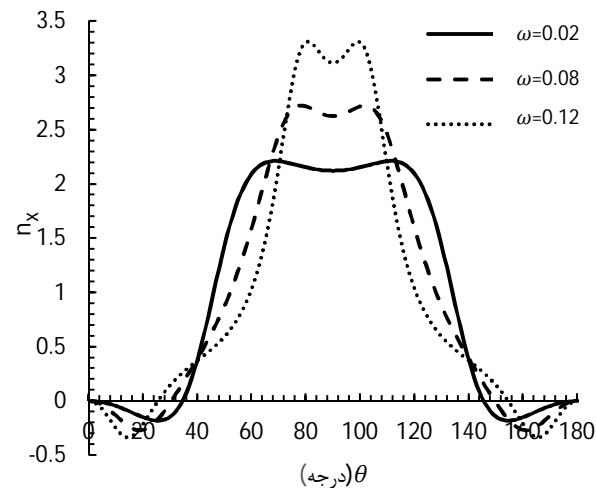
بیشینه  $n_y$  برابر 0/887 و بیشینه  $M_y$  برابر 0/0222 است. در حالی که در چیدمان  $T/45/45$ -[45] این مقادیر به ترتیب برابر 3/4412 و 0/111 هستند. بنابراین در جهت  $y$  چیدمان  $T/45/45$ -[45] بیشینه نیرو و گشتاور بیشتری دارد. این نتایج درباره منتجه‌های  $n_{xy}$  و  $M_{xy}$  نیز قابل مشاهده است. در جدول 4 مقدار بیشینه منتجه‌ها برای هر دو چیدمان را ارائه شده است. در شکل‌های 18 و 19 تغییرات  $n_x$  در اطراف گشودگی برای سه کشیدگی مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش مقدار کشیدگی گشودگی، بیشینه منتجه  $n_x$  به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد. بیشینه منتجه  $n_x$  تا 59 درصد افزایش می‌یابد. برای چیدمان  $T/45/45$ -[45] بیشینه منتجه  $n_x$  تا 56 درصد بیشتر نیز با افزایش  $c$  در همین بازه مقدار بیشینه منتجه  $n_x$  تا 56 درصد بیشتر می‌شود. این رفتار برای سایر منتجه‌های نیرو و گشتاور نیز دیده شد.



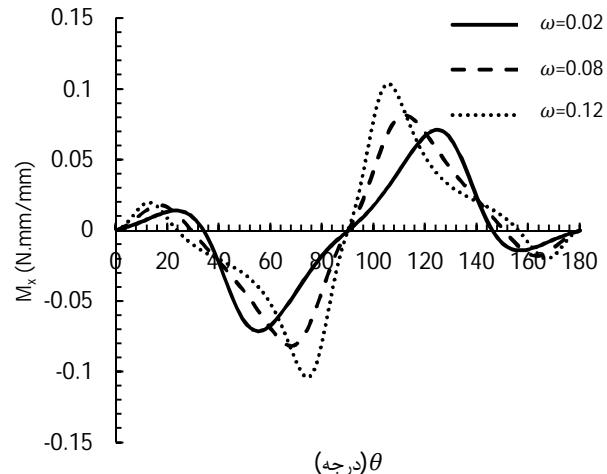
شکل 16 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی بعد در جهت  $x$  برای چیدمان‌های  $T/45/45$ -[45] و  $[0/90]_T$  بر حسب کشیدگی گشودگی



شکل 17 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور برای چیدمان‌های  $T/45/45$ -[45] و  $[0/90]_T$  بر حسب کشیدگی گشودگی



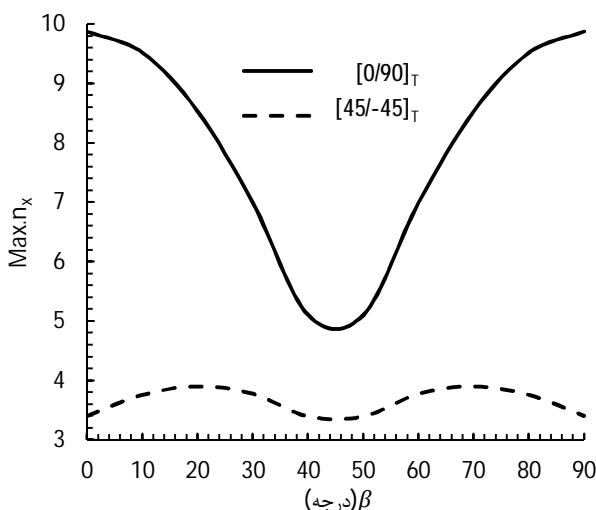
شکل 14 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت  $x$  در اطراف گشودگی برای چیدمان  $T/45/45$ -[45] در انحصارهای مختلف



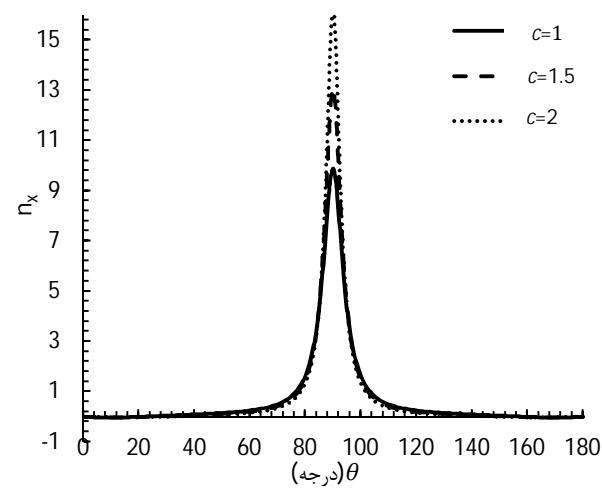
شکل 15 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت  $x$  در اطراف گشودگی برای چیدمان  $T/45/45$ -[45] در انحصارهای مختلف

**6-3- تأثیر کشیدگی گشودگی**  
یکی از پارامترهایی که بر هندسه گشودگی تأثیرگذار است، پارامتر  $c$  است. با توجه به رابطه (2) پارامتر  $c$  فقط در جهت  $y$  تابع نگاشت اعمال شده است. لذا مطابق شکل 3 با افزایش مقدار  $c$  شکل گشودگی در جهت  $y$  کشیده می‌شود. برای دستیابی به یک نگاشت همنوا مقدار  $c$  در تابع نگاشت باید در محدوده مشخصی قرار بگیرد؛ به همین منظور سعی شده است نتایج ارائه شده برای  $c$  در همین محدوده قرار گیرد. مطابق شکل‌های 16 و 17 تغییر مقدار منتجه نیرو بی بعد و گشتاور با تغییرات  $c$  رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش آن باعث افزایش و کاهش منتجه نیرو بی بعد و گشتاور می‌شود. همان‌طور که در شکل 16 دیده شود، مقدار بیشینه منتجه  $n_x$  برای چیدمان  $T/45/45$ -[45] در  $c=2$  برابر 16/334 و برای چیدمان  $T/45/45$ -[45/45] در  $c=2$  برابر 5/5407 است. به عبارتی مقدار بیشینه  $n_x$  برای چیدمان  $T/45/45$ -[45] است و با افزایش کشیدگی گشودگی با شبیه تندتری نسبت به چیدمان  $T/45/45$ -[45] تغییر می‌کند. اما در جهت عمود بر پارگذاری رفتار چیدمان‌ها مقاومت است؛ به گونه‌ای که در چیدمان  $T/45/45$ -[45] بیشتر از چیدمان  $T/45/45$ -[45] است

گشودگی است. نحوه چرخش گشودگی در شکل 1 نشان داده شده است. در این بخش با چرخش گشودگی در جهت ساعتگرد، تأثیر این پارامتر بر بیشینه منتجه نیرو و گشتاور و نحوه توزیع آن در اطراف گشودگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل 20 تأثیر زاویه چرخش بر بیشینه  $n_x$  در دو چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$  دیده می‌شود. همان‌طور که مشخص است، برای تمامی زوایای چرخش، چیدمان  $[0/90]_T$  بیشتری نسبت به چیدمان  $[-45/45]_T$  دارد. برای هر دو چیدمان رفتار نمودارها نسبت به زاویه چرخش  $\beta = 45^\circ$  متقارن است. به عبارت دیگر بیشینه  $n_x$  برای زوایای چرخش متمم یکدیگر با تقریب خوبی برابر است. همچنین مشاهده می‌شود که مینیمم بیشینه  $n_x$  برای هر دو چیدمان در زاویه  $\beta = 45^\circ$  اتفاق می‌افتد. در شکل 21 نیز مشاهده می‌شود، چیدمان  $[0/90]_T$  بیشینه  $M_x$  دارد و تقارن خود را نسبت به زاویه  $\beta = 45^\circ$  حفظ می‌کند؛ اما در چیدمان  $[-45/45]_T$ -[رفتار منحنی از این روند پیروی نمی‌کند. مینیمم بیشینه  $M_x$  برای چیدمان  $[0/90]_T$  در  $\beta = 45^\circ$  و برای  $[-45/45]_T$  در  $\beta = 20^\circ$  اتفاق می‌افتد. در جهت عمود بر محور بارگذاری برخلاف جهت بارگذاری، چیدمان  $[-45/45]_T$  بیشینه  $M_y$  و  $n_y$  بیشتری دارد اما مانند منتجه نیرو در جهت  $x$ ، منتجه  $y$  نیز رفتاری متقارن نسبت به زاویه  $\beta = 45^\circ$  است و مینیمم آن در همین زاویه اتفاق می‌افتد، اتا در چیدمان  $[-45/45]_T$ -کمترین مقدار بیشینه آن در زاویه  $\beta = 10^\circ$  اتفاق می‌افتد و نمودار رفتار متقارن ندارد. رفتار منتجه  $n_{xy}$  برای هیچ کدام از چیدمان‌ها متقارن نیست و مینیمم بیشینه برای چیدمان  $[0/90]_T$  در زاویه  $\beta = 30^\circ$  و برای چیدمان  $[-45/45]_T$  در زاویه  $\beta = 20^\circ$  اتفاق می‌افتد. رفتار منتجه  $M_{xy}$  برای چیدمان  $[-45/45]_T$  نسبت به زاویه  $\beta = 45^\circ$  اتفاق می‌افتد و کمترین مقدار بیشینه آن در زوایای  $\beta = 0^\circ$  است. برای چیدمان  $[0/90]_T$  رفتار متقارنی وجود ندارد و کمترین مقدار بیشینه منتجه  $M_{xy}$  در زاویه چرخش  $\beta = 80^\circ$  رخ می‌دهد.



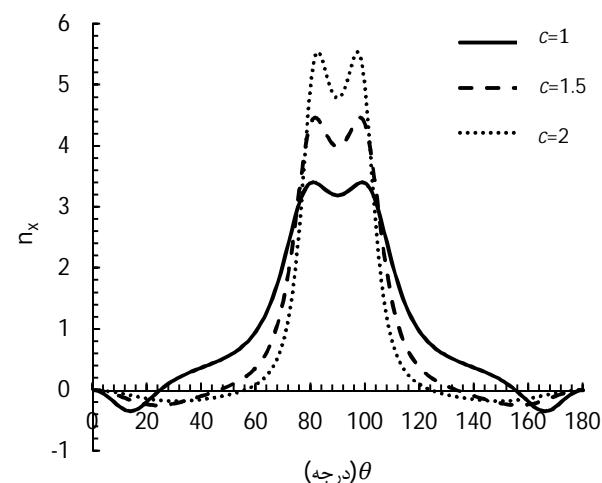
شکل 20 بررسی تغییرات بیشینه منتجه نیروی بی بعد در جهت X بر حسب زاویه چرخش گشودگی برای چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$



شکل 18 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان  $[0/90]_T$  در کشیدگی‌های مختلف

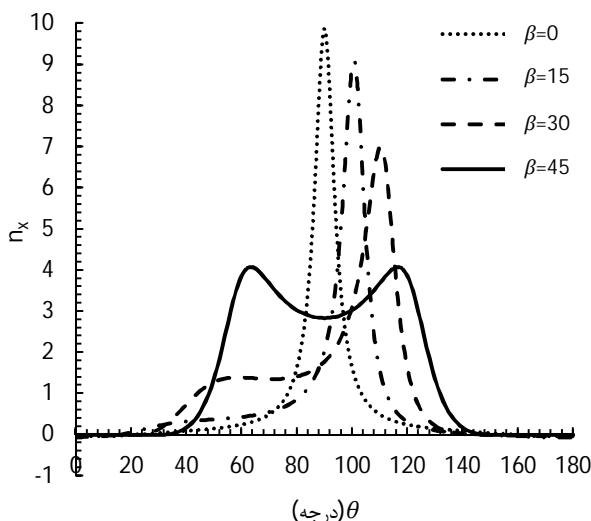
جدول 4 مقادیر منتجه‌های نیرو و گشتاور برای دو چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[-45/45]_T$

منتجه‌های نیرو (بی بعد)	منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)	$c=2$
$[0/90]_T$	$[-45/45]_T$	
16/334	5/5407	$n_x$
0/887	3/4412	$n_y$
2/1258	4/0217	$n_{xy}$
0/6304	0/1975	$M_x$
0/0222	0/111	$M_y$
0/0336	0/1484	$M_{xy}$

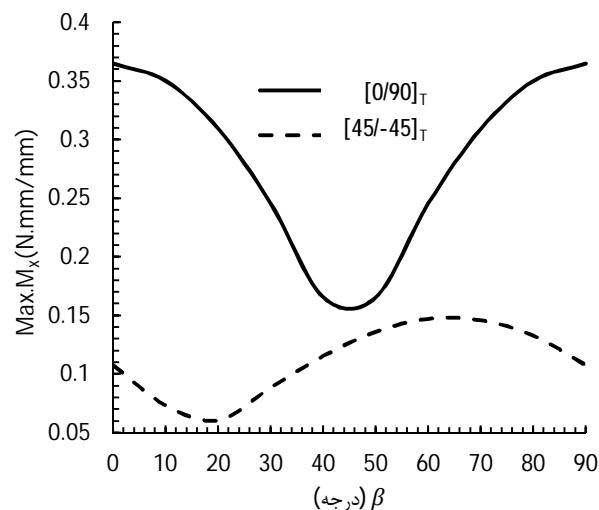


شکل 19 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X در اطراف گشودگی برای چیدمان  $[-45/45]_T$  در کشیدگی‌های مختلف

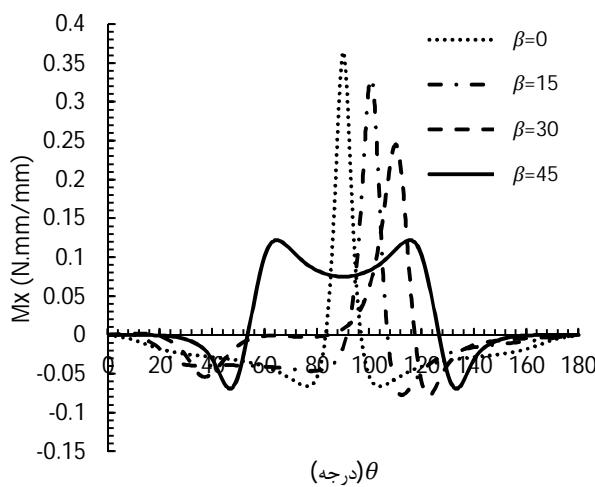
6-4- تأثیر زاویه چرخش گشودگی  
یکی از پارامترهای تأثیرگذار بر منتجه‌های نیرو و گشتاور، زاویه چرخش



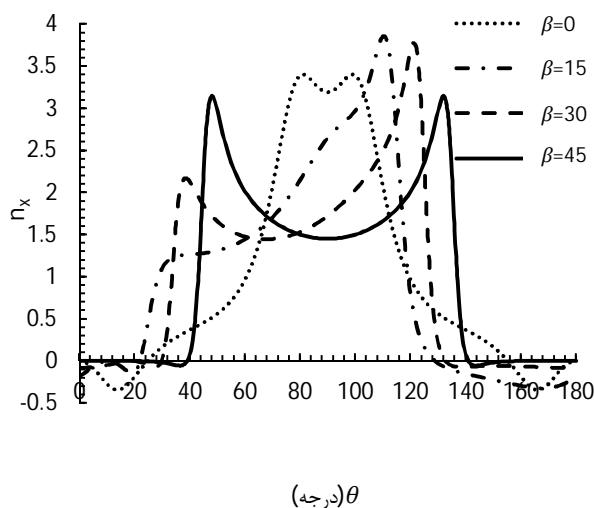
شکل 22 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X برای چیدمان  $[0/90]_T$  در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف



شکل 21 بررسی تغییرات بیشینه منتجه گشتاور در جهت X بر حسب زاویه چرخش گشودگی برای چیدمان  $[0/90]_T$  و  $[45/-45]_T$



شکل 23 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان  $[0/90]_T$  در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف



شکل 24 بررسی تغییرات منتجه نیروی بی بعد در جهت X برای چیدمان  $T[-45/45]$  در اطراف گشودگی در زاویه چرخش‌های مختلف

در شکل‌های 22 تا 25 تغییرات منتجه‌های نیرو و گشتاور  $n_x$  و  $M_x$  برای هر دو چیدمان مورد بررسی بر حسب زاویه چرخش گشودگی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های 22 و 23 مشخص است، در زاویه چرخش  $\beta=45^\circ$  که در آن ضلع گشودگی عمود بر راستای بارگذاری قرار می‌شود، بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور  $n_x$  و  $M_x$  به مقدار قابل توجهی افت می‌کند و محل توزیع این مقادیر بیشینه در چهار گوش گشودگی اتفاق می‌افتد. در باره توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور  $n_y$  و  $M_y$  چنین نتیجه‌های گرفته نشد. بیشینه منتجه نیروی  $n_{xy}$  نیز در  $\beta=45^\circ$  کمترین مقدار خود را دارد و منتجه گشتاور  $M_{xy}$  نیز توزیع موزون‌تری در این زاویه چرخش از خود نشان می‌دهد. در شکل‌های 24 و 25 توزیع منتجه‌های نیرو و گشتاور  $n_x$  و  $M_x$  برای چیدمان  $T[-45/45]$  در چند زاویه چرخش مختلف نشان داده شده است. در نمودار 22 مشهود است که در زاویه چرخش  $\beta=45^\circ$ ، توزیع منتجه موزون‌تر همراه با بیشینه کمتری اتفاق می‌افتد. اما در شکل 25 مشاهده می‌شود که در زاویه چرخش  $\beta=15^\circ$  منتجه گشتاور  $M_x$  مقادیر بیشینه کمتری دارد. مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور و زاویه چرخش اتفاق افتدان آن‌ها در جدول‌های 5 و 6 برای دو چیدمان مورد بررسی آورده شده است.

جدول 5 مقادیر بیشینه منتجه‌های نیرو و گشتاور برای چیدمان  $T[0/90]$

منتجه‌های نیرو (بی بعد)	زاویه چرخش (درجه)	مقدار بیشینه و منتجه‌های گشتاور (N.mm/mm)
9/8776	0, 90	$n_x$
0/6397	60	$n_y$
0/2988	80	$n_{xy}$
0/385	0, 90	$M_x$
0/027	30	$M_y$
0/0325	40	$M_{xy}$

جدول 7 پارامترهای بهینه گشودگی برای چیدمان<sub>T</sub>[45/90]

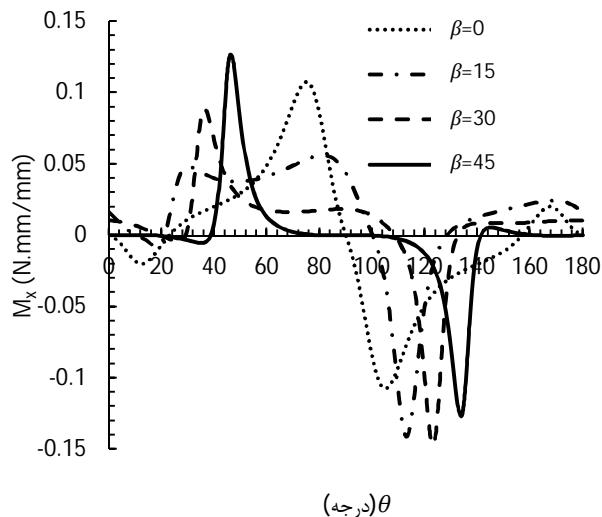
کشیدگی	زاویه چرخش (درجه)	انحنای	منتجه های نیرو (ی) بعد) (N.mm/mm)	و منتجه های گشتاور (N.mm/mm)
0/5	45	0/08	$n_x$	
0/5	0,90	0	$n_y$	
0/5	30	0/04	$n_{xy}$	
0/5	45	0/08		$M_x$
0/5	0,90	0		$M_y$
0/5	80	0		$M_{xy}$

جدول 8 پارامترهای بهینه گشودگی برای چیدمان<sub>T</sub>[45/45]

کشیدگی	زاویه چرخش (درجه)	انحنای	منتجه های نیرو (ی) بعد) (N.mm/mm)	و منتجه های گشتاور (N.mm/mm)
0/5	45	0	$n_x$	
0/5	0,90	0/04	$n_y$	
0/5	20	0/02	$n_{xy}$	
0/5	20	0		$M_x$
0/5	10	0/04		$M_y$
0/5	0,90	0/02		$M_{xy}$

## 8- فهرست علایم

ثابت مختلط مربوط به ریشه های معادله ای مشخصه	$a_j$
ثابت مختلط برای تابع پتانسیل مرحله ای اول	$A_j$
ماتریس سفتی کشش (N/mm)	$A_{ij}$
ثابت مختلط مربوط به ریشه های معادله ای مشخصه	$b_j$
ماتریس سفتی کوپلینگ (N)	$B_{ij}$
پارامتر تعیین کننده نسبت ابعاد گشودگی	$c$
ثابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$c_j$
ثابت مختلط مربوط به ریشه های معادله ای مشخصه	$c'_j$
ثابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$d_j$
ثابت مختلط مربوط به ریشه های معادله ای مشخصه	$d'_j$
ماتریس سفتی خمش (N.mm)	$D_{ij}$
ثابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$e_j$
ثابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$f_j$
مؤلفه های نیروی داخلی (N)	$f_x, f_y$
ثابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$g_j$
ثوابت مختلط در محاسبه منتجه های نیرو و گشتاور	$h_j$
ثوابت مختلط	$k_1 - k_{16}$
منتجه گشتاور عمود بر مرز گشودگی (N.mm/mm)	$M_n$
منتجه های گشتاور (N.mm/mm)	$M_x, M_y, M_{xy}$
منتجه های نیروی بی بعد	$n_x, n_y, n_{xy}$
منتجه های نیرو (N/mm)	$N_x, N_y, N_{xy}$
ثابت مختلط برای چند لایه	$p_j$
انتگرال نیرو در مرز گشودگی (N.mm)	$P$
ثابت مختلط برای چند لایه	$q_j$
ماتریس سفتی کاوش یافته (N/mm <sup>2</sup> )	$\bar{Q}_{ij}$
نیروی برشی در جهت عمود بر مرز گشودگی (N)	$Q_n$

شکل 25 بررسی تغییرات منتجه گشتاور در جهت X برای چیدمان<sub>T</sub>[45/45] در اطراف گشودگی در زاویه چرخش های مختلفجدول 6 مقادیر بیشینه منتجه های نیرو و گشتاور برای چیدمان<sub>T</sub>[45/45]

مقدار بیشینه	زاویه چرخش (درجه)	منتجه های نیرو (ی) بعد) (N.mm/mm)	و منتجه های گشتاور (N.mm/mm)
3/9035	20	$n_x$	
2/6097	30	$n_y$	
2/9917	70	$n_{xy}$	
0/1473	60		$M_x$
0/0809	60		$M_y$
0/11	60		$M_{xy}$

## 7- نتیجه گیری

در این مقاله با ارائه حل تحلیلی، تأثیر پارامترهای شعاع انحنای، زاویه چرخش و کشیدگی گشودگی در چند لایه های نامتقارن بررسی شد. نتایج نشان داد که با انتخاب پارامترهای مناسب برای گشودگی چهارضلعی، منتجه های نیرو و گشتاور به میزان قابل توجهی کاهش می یابند. از نتایج مهم این مطالعه این است که برای هر یک از چیدمان ها لزوماً گشودگی دایره ای بهترین هندسه برای کاهش منتجه ها نیست و مناسب با نوع چیدمان در جهات مختلف گشودگی چهارضلعی با انحرافی خاصی می تواند منتجه های کمتری داشته باشد. به عنوان مثال در چیدمان<sub>T</sub>[45/90] [0/90] مقدار بیشینه منتجه  $n_x$  در  $\omega=0/125$  تقریباً 29 درصد و بیشینه منتجه  $M_x$  38 درصد کمتر از مقدار  $n_x$  برای چیدمان لایه ها نیز تأثیر بسزایی در کاهش منتجه ها در جهات مختلف دارد. به عنوان مثال برای بارگذاری کششی در جهت X، بیشینه منتجه  $n_x$  برای چیدمان<sub>T</sub>[45/45] [0/90] 65 درصد کمتر از چیدمان<sub>T</sub>[45/45] است. به همین ترتیب منتجه  $M_x$  70 درصد کمتر است. مقدار منتجه  $n_y$  برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] [0, 70 درصد کمتر از چیدمان<sub>T</sub>[45/45] است. علاوه بر کاهش تیزی گوشه های گشودگی و تغییر چیدمان لایه ها، انتخاب زاویه چرخش مناسب می تواند در کاهش منتجه ها بسیار مؤثر باشد. به عنوان مثال برای چیدمان<sub>T</sub>[0/90] [0] بیشینه منتجه  $n_x$  در زاویه چرخش 45 درجه، مثلاً برای چیدمان<sub>T</sub>[45/45] [0] بیشینه منتجه  $n_x$  در حالت بدون چرخش 58 درصد کمتر از مقدار آن در حالت بدنون چرخش است. به همین ترتیب بیشینه منتجه گشتاور  $M_x$  نیز در این زاویه 66 درصد کمتر است. پارامترهای بیشینه برای گشودگی چهارضلعی برای دستیابی به کمترین منتجه در جدول های 7 و 8 معرفی شده است.

- [8] G. H. Asmar, T.G. Jabbour, Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes, *International Journal of Mechanics and Solids*, Vol. 2, No.1, pp. 59-84, 2007.
- [9] E. F. Rybicki, D. Schmueser, Effect of stacking sequence and lay-up angle on free edge stresses around a hole in a laminated plate under tension, *Journal of Composite Materials*, Vol. 12, No. 3, pp. 300-313, 1978.
- [10] H. J. Konish, J. M. Whitney, Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole, *Journal of Composite Materials*, April 1975.
- [11] N. Bonora, M. Costanzi, M. Marchetti, On closed form solution for the elastic stress field around holes in orthotropic composite plates under in-plane stress conditions, *Composite Structures*, Vol. 25, pp. 139-156, 1993.
- [12] C. B. Prasad, M. J. Shuart, Moment distributions around holes in symmetric composite laminates subjected to bending moments, 30th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 1989.
- [13] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under in-plane loading, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 339-354, 2000.
- [14] D. K. N. Rao, M. R. Babu, K.R. N. Reddy, D. Sunil, Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 12, pp. 2845-2859, 2010.
- [15] M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 395-404, 2015. (In Persian)
- [16] W. Ko, Stress concentration around a small circular hole in the HiMat composite plates, *NASA TM 86038*, 1985.
- [17] W. Becker, Closed form analytical solutions for a griffith crack in a nonsymmetric laminate plate, *Comp Struct*, 1992.
- [18] W. Becker, Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate, *Archive Appl Mech*, 1993.
- [19] W. Becker, Concentrated forces and moments on laminates with bending extension coupling, *Comp Struct*, 1995.
- [20] P. Chen, Z. Shen, Extension of Lekhnitskii's complex potential approach to unsymmetrical composite laminates, *Mech. Res. Commun.*, 28(4), 423, 2001.
- [21] P. Chen, Z. Shen, Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading, *Mechanics Research Communications*, Vol. 30, No. 1, pp. 79-86, 2003.
- [22] P. Chen, Z. Shen, Green's functions for an unsymmetrical laminated plate with an elliptic hole, *Mech. Res. Commun.*, 28(5), 519.
- [23] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates, *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 27-39, 2000.
- [24] E. Madenci, A. Barut, M. P. Nemeth, A complex potential-variational method for stress analysis of unsymmetric laminates with an elliptical cutout, *Journal of Applied Mechanics*, 68, 731, 2001.

$s_j$	ریشه‌های معادله مشخصه
$u$	جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای (mm)
$v$	جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای (mm)
$w$	جابه‌جایی عمودی (mm)
$z_j$	تابع تگاشت

## علایم یونانی

$\beta$	زاویه چرخش (درجه)
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	گرنش‌های برشی
$\epsilon_x, \epsilon_y$	گرنش‌های طولی
$\theta$	زاویه پیرامون گشودگی (درجه)
$\zeta$	متغیر مختلط
$X_x, X_y, X_{xy}$	انحنای درون‌صفحه‌ای
$\lambda$	پارامتر تعیین کننده اندازه گشودگی
$\varphi_j(z_j)$	تابع پتانسیل
$\omega$	پارامتر تعیین کننده انحنای گوشه گشودگی

## 9- مراجع

- [1] C. Y. Gao, J. Z. Xiao, Y. L. Ke, FE analysis of stress concentrations in composite plates with multiple holes for zigzag multi-fastened joints, *Materials Science Forum*, Vol. 770, pp. 17-20, 2014.
- [2] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Second edition, 1962.
- [3] G. N. Savin, *Stress concentration around holes*, New York: Pergamon Press, 1961.
- [4] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Second edition, New York: Gordon and Breach Science, 1968.
- [5] K. Rajalah, N. K. Naik, Optimum quasi-rectangular holes in infinite orthotropic plates under in-plane loadings, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4a, pp. 891-892, 1983.
- [6] Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with a quasi-square cutout subjected to uniaxial tension, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, July 2010.
- [7] W. Becker, A complex potential method for plate problems with bending extension coupling, *Archive Appl Mech*, 1991.