مجله مهندسی مکانیک مدرس، اردیبهشت 1394، دوره 15، شماره 2، ص‌ص 135-146

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

استفاده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته در تعیین ضرایب شدت تنش و ترم‌های مرتبه بالای ترک

احمد قاسمی‌قلعه‌بهمن[1*]، سعید صلواتی[2]

1- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

2- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

* سمنان، صندوق‌پستی 3513119111، ghasemi@semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 18 مرداد 1393

پذیرش: 29 مهر 1393

ارائه در سایت: 06 دی 1393

کلید واژگان:

روش اجزاء محدود توسعه‌یافته

روش حداقل مربعات فرا معین

ضرایب شدت تنش

بسط سری مجانبی ویلیامز

چکیده

در مطالعه حاضر، به‌منظور ارزیابی میدان جابه‌جایی الاستیک و پس از آن پارامترهای شکست در مواد جامد الاستیک همگن ایزوتروپیک با وجود ترک‌های لبه‌ای و یا داخلی، از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته و با تکنیک مجموعه تراز استفاده شد تا از معایب روش استاندارد اجزاء محدود جلوگیری شود. به‌منظور تعیین ضرایب شدت تنش و همچنین ضرایب ترم‌های مرتبه بالای ترک در حل سری مجانبی ویلیامز برای سازه‌های حاوی ترک در حالت‌های مختلف مود شکست از یک روش کمینه مربعات فرامعین و از طریق انطباق حل سری میدان جابه‌جایی در اطراف نوک ترک بر تعداد زیادی از جابه‌جایی‌های گره‌ای به‌دست‌آمده از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، استفاده شد. برای تأیید و احراز صحت نتایج، چندین نمونه ترک‌دار در حالت‌های مختلف بارگذاری مود خالص اول، مود خالص دوم، و مود ترکیبی مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ای که با نتایج موجود در مراجع براساس فرمول بندی‌های دیگر صورت گرفته، میزان کارآیی و سادگی این روش را نشان داده و قابلیت آن را در شناسایی دقیق ضرایب شدت تنش و ضرایب ترم‌های مرتبه بالاتر ترک به اثبات می‌رساند.

Utilizing the extended finite element method for determining crack stress intensity factors and higher order terms coefficients

Ahmad Ghasemi Ghalebahman*, Saeed Salavati

Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.
* P.O.B. 3513119111 Semnan, Iran, ghasemi@semnan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 August 2014
Accepted 21 October 2014
Available Online 27 December 2014

Keywords:
Extended Finite Element Method
over deterministic Least Squares Method
Stress Intensity Factors
Williams' Asymptotic Series Expansion

ABSTRACT

In the present study, in order to evaluate the elastic displacement field and subsequently the fracture parameters within the isotropic homogeneous elastic solids with the edge or interior cracks, the extended finite element method with level set technique was used to avoid the disadvantages associated with the standard finite element method. An over deterministic least squares method was utilized to determine the crack stress intensity factors as well as the coefficients of the higher order terms in the Williams' asymptotic series solution for structures containing crack in various modes of failure by fitting the series solution of displacement fields around the crack tip to a large number of nodal displacements obtained from the extended finite element method. For validating the results, several cracked specimens subjected to pure mode I, pure mode II, and mixed modes I/II loading were performed. Comparison with results available from the literature obtained by other formulations reveals the efficiency and simplicity of the proposed method, and demonstrate the capability of it to accurately capture the crack stress intensity factors and the coefficients of higher order terms.

1- مقدمه

مدل‌سازی ترک و رشد آن از جمله موضوعاتی است که در طی سالیان گذشته مورد توجه محققین در حوزه مکانیک شکست قرار گرفته است. مش‌بندی دوباره دامنه مورد مطالعه در مدل‌سازی رشد ترک و نیز صرف هزینه بالای محاسباتی در موقعیت ناپیوستگی‌ها از جمله چالش‌ها و معایب عمده روش اجزاء محدود استاندارد است که استفاده از آن را در برخی از مسائل مکانیک شکست محدود ساخته است. عدم در نظر گرفتن هندسه ناپیوستگی‌ها در مش‌بندی دامنه و نیز عدم‌نیاز به مش‌بندی دوباره آن به‌واسطه رشد ترک، از جمله قابلیت‌های عمده روش کارآمد اجزاء محدود توسعه‌یافته[1] محسوب می‌شود. در این روش برخلاف روش اجزاء محدود استاندارد بدون استفاده از المان‌های تکینه[2] و با استفاده از توابع غنی‌ساز[3] که از حل تحلیلی میدان تنش در پیرامون ناپیوستگی و ترک استخراج می‌شوند و از طریق اضافه کردن درجات آزادی (غنی‌سازی) گره‌هایی از مش که با ناپیوستگی‌ها درگیر است، شبیه‌سازی تکینگی و ناپیوستگی امکان‌پذیر است. برای مدل‌سازی گسترش ترک از روش

1- Extended Finite Element Method (XFEM)
2- Singular elements
3- Enrichment functions

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Ghasemi Ghalebahman, S. Salavati, Utilizing the extended finite element method for determining crack stress intensity factors and higher order terms coefficients, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 2, pp. 135-146, 2015 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]

مجموعه تراز[1] استفاده می‌شود. براساس این روش موقیعت نوک ترک و نیز بدنه ترک را می‌توان در هر مرحله رشد ترک یافت و در نتیجه المان‌هایی که باید غنی‌سازی شوند انتخاب کرد[1].

یکی از روش‌های عددی کارآمد در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها، روش بدون شبکه (فاقد المان)[2] است. در این روش مشکلات مش‌بندی دوباره و نیز قفل‌شدگی و اعوجاج المان در روش اجزاء محدود کلاسیک، صرفاً با اضافه یا حذف کردن گره در ناحیه حل مسأله مرتفع می‌شود. به دلیل ویژگی ذاتی توابع شکل انتخاب‌شده در این روش، احراز بعضی از شرایط مرزی با مشکلاتی همراه می باشد و در عین حال هزینه محاسباتی آن بالاست؛ بنابراین محققین با تلفیق روش المان محدود در ناحیه دور از موقعیت ترک و نیز روش بدون شبکه در محدوده ترک توانسته‌اند بر این مشکلات فایق آیند [۲،3]. دافلات و انجوین دنگ [4] و لی و همکاران [5] با افزودن گره‌هایی که توسط توابع وزنی خاص و براساس اصل تکینگی تنش در نوک ترک غنی شده‌اند، ضرایب شدت تنش را با دقت بالاتری تعیین کردند. از این رو در روش المان محدود توسعه‌یافته برای کاهش هزینه شبکه‌بندی دوباره می‌توان با استفاده از یک شبکه‌بندی ثابت و منظم در طول زمان رشد ناپیوستگی و با انتخاب توابع غنی‌ساز مناسب در موقعیت ناپیوستگی، هزینه محاسبات را در مقایسه با روش بدون‌شبکه کاهش داده و دقت محاسبات را بالا برد.

در روش مدل ناحیه چسبنده[3] شکست زمانی اتفاق خواهد افتاد که تنش اصلی بیشینه و یا مقدار کمینه گشودگی دهانه ترک در ناحیه آسیب[4] براساس یک قانون ساختاری جدایش- کشش (قانون نرم‌شوندگی)[5] به یک مقدار مادی بحرانی (متناسب با استحکام چسبندگی ماده) رسیده که سبب انفصال و جدایش تنش پیوسته چسبنده موجود مابین دو ناحیه پیوسته مدل خواهد شد [6]. اویی و یانگ [7] از روش کوپله المان مرزی مدرج[6] و مدل ناحیه چسبنده، رشد ترک را در نمونه‌هایی شامل ترک‌های متعدد پیش‌بینی نمود. قامز و همکاران [8] ضریب شدت تنش را برای شکاف U شکل تحت شرایط شکست مود ترکیبی و بر اساس مفهوم مدل ناحیه چسبنده محاسبه کردند. پرابهاکار و واس [9] اثر مدل‌سازی ناحیه چسبنده را در میدان تنش نوک ترک مطالعه کرده و با محاسبه سفتی ناحیه چسبنده ضریب شدت تنش را در مود اول شکست تعیین کردند.

در روش انتگرالی بسته شدن مجازی ترک[7] به‌واسطه بسته‌شدن مجازی ترک به مقدار ناچیز و از طریق حاصل‌ضرب مقادیر نیرو و جابه‌جایی‌های گره‌های دهانه باز شونده ترک که در محیط اجزاء محدود مدل‌شده، تغییر انرژی پتانسیل و در نتیجه نرخ رهایی انرژی کرنشی محاسبه‌شده و به کمک آن ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شود [10]. حسینی تودشکی و همکاران [11] برای کاهش حجم محاسباتی، فرمول‌بندی اصلاح‌شده[8] این روش را در مسایل الاستیک خطی و با فرض شبکه متعامد در نوک ترک ارائه کردند. اوکادا و همکاران [12] این روش را در محاسبه ضرایب شدت تنش ترک سه‌بعدی و برای فرمولاسیون المان‌های چهار وجهی مرتبه دوم به‌کار گرفتند. لبان و همکاران [13] به روش برون‌یابی عددی و براساس روش ناحیه بسته ترک مجازی، ضرایب شدت تنش را در ترک‌های سطحی بیضی شکل تعیین کردند.

برخلاف روش مدل ناحیه چسبنده و روش انتگرالی بسته‌شدن مجازی ترک، روش ارائه‌شده در پژوهش حاضر را می‌توان از جمله روش‌های مستقیم عددی محسوب کرد که در آن به‌طور مستقیم و از طریق میدان جابه‌جایی ضرایب شدت تنش تعیین می‌شود [12]؛ بنابراین روش محاسباتی فرامعین اجزاء محدود توسعه‌یافته در تعیین ضرایب شدت تنش و نیز ضرایب ترم‌های مرتبه بالاتر ترک را می‌توان به‌عنوان اولین تحقیق در این حوزه محسوب کرد.

مبنای ریاضی روش اجزاء محدود توسعه‌یافته توسط ملنک و بابوسکا [14] با تعریف جزءبندی واحد روش اجزای محدود[9] آغاز شد. آقایان بلیچکو و بلک [15] روش اجزای محدودی با کمینه مش‌بندی دوباره برای گسترش ترک ارائه کردند. ایشان توابع غنی‌کننده ناپیوسته‌ای را به توابع تقریب اجزای محدود استاندارد افزودند تا بتوانند محاسبات مربوط به ترک موجود در مسئله را انجام دهند. روش مجموعه تراز نیز رفته‌رفته در نشان دادن موقعیت بدنه و نوک ترک مورد استفاده قرار گرفت. بلیچکو و همکارانش [16] روشی را ارائه کردند تا با آن بتوان هر ناپیوستگی را به‌صورت یک تابع و مشتقاتش در اجزای محدود مدل کرد. گنزلز البیوکسچ و همکارانش [17] ضرایب شدت تنش را در ترک‌های منحنی و غیرمسطح با تصحیح روش انتگرال متقابل[10] و براساس روش اجزاء محدود توسعه‌یافته تعیین کردند. یو و همکارانش [18] پارامترهای شکست و ضرایب شدت تنش را در مواد مگنتو الکتروالاستیک با ارائه یک روش انتگرال متقابل فرا دامنه به‌دست آوردند.

روش اجزاء محدود فرا معین[11] یک روش عددی برای محاسبه پارامترهای شکست است. این روش از مقادیر تنش/ جابه‌جایی تعداد زیادی از نقاط اطراف نوک ترک که از یک نرم‌افزار المان محدود به‌دست می‌آید استفاده کرده و مقادیر آن‌ها را در معادلات تنش/ جابه‌جایی جای‌گذاری می‌کند. با حل مجموعه معادلات به‌دست‌آمده پارامترهای مورد نظر به‌دست می‌آید. در مرجع [19]، همچنین ثقفی و همکارانش [20] و آیت‌الهی و نجاتی [21] به محاسبه و بررسی اثرات ترم‌های مراتب بالاتر بسط سری ویلیامز در حل به روش اجزاء محدود فرامعین پرداخته‌اند.

در پژوهش حاضر با تلفیق روش اجزاء محدود توسعه‌یافته و روش حداقل مربعات فرامعین، ضرایب شدت تنش و ترم‌های مرتبه بالاتر ترک با دقت بالایی به‌دست آمده که تأثیر به‌سزایی در تخمین ناحیه آسیب و شناسایی پارامترهای شکست خواهد داشت.

2- روش اجزاء محدود توسعه‌یافته

روش اجزاء محدود توسعه‌یافته طبیعت تکین بودن مدل‌های گسسته درون شبکه هندسی پیوسته اجزاء محدود را شبیه‌سازی می‌کنند. در مقایسه با روش اجزاء محدود استاندارد، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته که بر پایه مفهوم جزءبندی واحد استوار است، برای برطرف کردن نواقص روش اجزاء محدود استاندارد در تحلیل مسأله رشد ترک و همچنین برای نمایش و محاسبات مربوط به ناپیوستگی موجود در دامنه و رفع تکین‌بودن تنش در منطقه نوک ترک از عمل غنی‌سازی استفاده می‌کند. غنی‌سازی در اجزاء محدود توسعه‌یافته برای ترک به دو روش انجام می‌شود. به‌طورکلی گره‌های ناشی از بدنه و سطح ترک به‌وسیله تابع پله واحد[12] غنی‌سازی‌شده و گره‌هایی که در محل قرار گرفتن نوک ترک هستند به‌وسیله تابع تکینه[13] غنی می‌شوند. در واقع با اضافه کردن توابع غنی‌ساز درجه آزادی گره‌های موجود در دامنه اجزاء محدود افزایش می‌یابند.

1- Level set method
2- Meshless or element-free method
3- The Cohesive Zone Model (CZM)
4- Fracture Process Zones (FPZ)
5- Cohesive traction-separation law (softening law)
6- Scaled Boundary Fnite Element (SBFEM)
7- Virtual Crack Closure-integral Method or Technique (VCCM or VCCT)
8- Modified Crack Closure Technique (MCCT)

9- Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)
10- Interaction Integral
11- Finite element over deterministic method
12- Heavy side function
13- Singular function

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]

برای توصیف موقعیت سطح ترک و جبهه ترک به‌ترتیب از دو مجموعه تراز نرمال $\phi(x)$ و مماسی ψ استفاده می‌شود که مقادیر نظیر این توابع تراز به‌ترتیب برای گره‌های واقع بر سطح ترک و جبهه ترک برابر صفر است [22]. مطابق شکل1، با تغییر علامت توابع تراز فاصله در ارتباط با گره‌های مختلف یک المان نمونه، امکان و نیز نوع غنی‌سازی گره‌های آن المان مشخص خواهد شد. اگر سطح ترک با Γ معرفی شود، x_Γ تصویر نرمال نقطه دلخواه x در امتداد Γ و $\hat{n}$ نیز بردار نرمال وارد بر آن باشد، در این‌صورت تابع تراز $\phi(x)$ به‌صورت رابطه (1) تعریف می‌شود.

$$\phi(x) = \min(\|x - x_\Gamma\|)\ \mathrm{sign}(\hat{n}.(x - x_\Gamma)) \tag{1}$$

تابع تراز $\psi(x)$ عمود بر تابع تراز نرمال بوده و به‌صورت مشابه و فقط در موقعیت نوک ترک تعریف می‌شود؛ بنابراین موقعیت هر نقطه دلخواه نسبت به نوک ترک در مختصات قطبی به‌صورت روابط (2،3) تعریف خواهد شد.

$$r = \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \tag{2}$$

$$\theta = \tan(\phi/\psi) \tag{3}$$

در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته از همان توابع شکل استاندارد استفاده شده و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش یافته که به آن غنی‌سازی‌گره‌ای گفته می‌شود. این کار با اعمال توابع خاص و از طریق اصل تفکیک پیوستگی امکان‌پذیر است. براساس این اصل مجموع مقادیر توابع شکل، در هر نقطه داخلی یا مرزی و حتی خود گره‌ها برابر واحد، به صورت رابطه (4)، است.

$$\sum_{i\in I} N_i = 1 \tag{4}$$

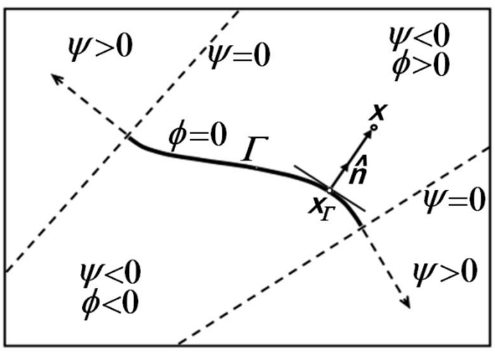
حال با ضرب تابع دلخواه $\chi(x)$ در طرفین این رابطه و براساس اصل تفکیک پیوستگی، رابطه (5)، داریم.

$$\sum_{i\in I} N_i\, \chi(x) = \chi(x) \tag{5}$$

بنابراین طبق رابطه (2) در محدوده داخلی هر المان می‌توان تابع ψ را به شکل دلخواه اعمال کرد و این کلید اصلی ورود به المان محدود توسعه‌یافته براساس اصل تفکیک پیوستگی است. غنی‌سازی یا افزایش درجات آزادی گره‌ها به‌صورت موضعی و در موقعیت ناپیوستگی‌ها انجام می‌شود. غنی‌سازی گره‌های متأثر از سطح ترک توسط توابع ناپیوسته پله واحد صورت می‌گیرد که در این حالت ترک به‌طور کامل از میانه المان عبور کرده و آن را به دو ناحیه مختلف تقسیم می‌کند. غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک نیز توسط توابع تکینه انجام می‌شود. این توابع غنی‌ساز به‌صورت روابط (6،7) تعریف می‌شوند [23].

$$H(\mathrm{sign}(\phi(x))) = \begin{cases} +1\,, \phi(x) > 0 \\ -1\,, \phi(x) < 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$[\Psi_{j=1-4}] = \left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\,\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\,\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{7}$$



شکل 1 نمایش توابع تراز نرمال و مماسی نسبت‌به موقعیت ترک

در رابطه (7)، r و θ معرف موقعیت گره در مختصات قطبی نسبت‌به مختصات محلی نوک ترک است. در نهایت نمایش کلی غنی‌سازی گره‌ای در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته در شکل 2 ارائه شده است. از این‌رو در حل مسأله ترک با تفکیک ناحیه حل به نواحی مختلف، حل تقریبی میدان جابه‌جای را می‌توان به‌صورت رابطه (8) بیان کرد [24،25].

$$u^h(x) = u^S + u^H + u^T \tag{8}$$

که در آن u^S میدان جابه‌جایی اجزاء محدود استاندارد، u^H میدان جابه‌جایی گره‌های شامل سطح ترک و u^T میدان جابه‌جایی گره‌های اطراف نوک ترک است که به‌صورت رابطه (9) تعریف خواهند شد.

$$u^h(x) = \sum_{i\in\Omega_S} N_i(x)\, u_i + \sum_{i\in\Omega_H} N_i(x) H(x)\, a_i + \sum_{i\in\Omega_T}\left[N_i(x)\sum_{j=1}^{4}\Psi_j(x) b_{ij}\right] \tag{9}$$

که در آن ناحیه Ω_S متعلق به تمامی گره‌های مدل المان محدود بوده، $N_i(x)$ نیز توابع شکل استاندارد و u_i درجات آزادی استاندارد گره iام است. زیر ناحیه‌های Ω_H و Ω_T نیز به‌ترتیب شامل گره‌های غنی‌شده با تابع پله واحد $H(x)$ و توابع تکینه $\psi_j(x)$ بوده و a_i و b_{ij} نیز به‌ترتیب درجات آزادی اضافه شده به گره‌های متأثر از سطح ترک و نوک ترک است. در نهایت با استفاده از گسسته‌سازی و فرمول‌بندی ضعیف اجزاء محدود[1] و براساس روش گلرکین در نهایت شکل گسسته دسته روابط تعادل به‌صورت رابطه (10) بیان خواهد شد.

$$\sum_{e} K_{ij}^e\, d_j^e = \sum_{e} f_i^e \tag{10}$$

در این رابطه K_{ij}^e، u_j^e و f_i^e به‌ترتیب معرف ماتریس سختی، بردار مقادیر جابه‌جایی گره‌ای و بردار مقادیر نیروی گره‌ای المان[2] نمونه e است که از روابط (11-13) به‌دست می‌آیند [25،26]:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{ij}^{uu} & K_{ij}^{ua} & K_{ij}^{ub} \\ K_{ij}^{au} & K_{ij}^{aa} & K_{ij}^{ab} \\ K_{ij}^{bu} & K_{ij}^{ba} & K_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$d_j^e = \{u \quad a \quad b_1\, b_2 \quad b_3 \quad b_4\}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$f_i^e = \{f_i^u \quad f_i^a \quad f_i^{b_1}\, f_i^{b_2} \quad f_i^{b_3} \quad f_i^{b_4}\}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

زیرماتریس‌های ماتریس سختی و پارامترهای مختلف آن و نیز مؤلفه‌های بردار نیرو نیز از روابط (14-21) به‌دست خواهند آمد.

$$K_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega^e} (B_i^\alpha)^{\mathrm{T}} D\, B_j^\beta\, d\Omega\ ;\ \alpha,\beta = u, a, b \tag{14}$$

$$B_i^u = \begin{bmatrix} (N_i)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i)_{,y} \\ (N_i)_{,y} & (N_i)_{,x} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$B_i^a = \begin{bmatrix} (H\,N_i)_{,x} & 0 \\ 0 & (H\,N_i)_{,y} \\ (H\,N_i)_{,y} & (H\,N_i)_{,x} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$B_i^b = [B_i^{b_1} \quad B_i^{b_2} \quad B_i^{b_3}\, B_i^{b_4}] \tag{17}$$

$$B_i^{b_j} = \begin{bmatrix} (\Psi_j\, N_i)_{,x} & 0 \\ 0 & (\Psi_j\, N_i)_{,y} \\ (\Psi_j\, N_i)_{,y} & (\Psi_j\, N_i)_{,x} \end{bmatrix} \tag{18}$$

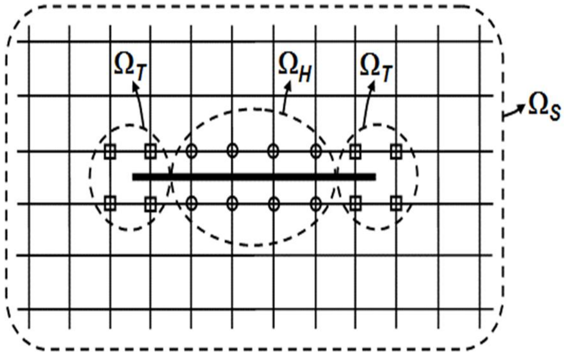
$$f_i^u = \int_{\Gamma_t} (N_i)^{\mathrm{T}}\, \bar{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega^e} (N_i)^{\mathrm{T}}\, b\ d\Omega \tag{19}$$

$$f_i^a = \int_{\Gamma_t} (H\,N_i)^{\mathrm{T}}\, \bar{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega^e} (H\,N_i)^{\mathrm{T}}\, b\ d\Omega \tag{20}$$

$$f_i^{b_j} = \int_{\Gamma_t} (\Psi_j\, N_i)^{\mathrm{T}}\, \bar{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega^e} (\Psi_j\, N_i)^{\mathrm{T}}\, b\ d\Omega \tag{21}$$

1- Weak finite element formulation
2- Element stiffness matrix, nodal displacement vector, and nodal force vector

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]



شکل 2 نمایش کلی غنی سازی گره‌ای مدل المان محدود: ○ غنی‌سازی به‌وسیله تابع پله واحد غنی‌سازی به‌وسیله تابع تکینه

در این روابط B_i^{α} $(\alpha = u, a, b)$ معرف ماتریس کرنش- جابه‌جایی[1]، D نیز ماتریس خواص ماده، $\bar{t}$ نیروی سطحی[2] وارد بر مرز Γ_t از جسم و b نیز سهم نیروی حجمی[3] وارد بر المان است.

3- مفهوم ضریب شدت تنش

در تحلیل مسایل مکانیک شکست مواد ترد و شبه ترد تعیین دقیق ضرایب شدت تنش K (MPa $\sqrt{m}$) کمک شایانی به شناسایی میدان تنش الاستیک در حوالی نوک ترک خواهد کرد. اروین [27] مفهوم ضریب شدت تنش را به‌عنوان وسیله‌ای برای سنجش مقدار تکینگی میدان تنش در یک جسم ترک‌دار معرفی کرد. او نشان داد در یک جسم ترک‌دار و با فرض ناچیز بودن اندازه ترک، ضریب شدت تنش از طریق رابطه $K \propto \sigma\sqrt{\pi r}$، کمیتی برای کنترل تنش محلی در اطراف نوک ترک است. اروین [27] و ویلیامز [28] نشان دادند برای یک جسم ایزوتروپ دوبعدی در حالت شکست مود ترکیبی براساس رابطه (22) می‌توان وضعیت تنش را در اطراف نوک ترک مشخص کرد.

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + T\,\delta_{1i}\,\delta_{1j} + O(r^{1/2}) \quad (22)$$

در این رابطه σ_{ij} مؤلفه‌های تنش، K_I و K_{II} به‌ترتیب ضرایب شدت تنش در ارتباط با مود اول شکست یا مود بازشدگی[4] و مود دوم شکست یا مود لغزش صفحه‌ای[5] و فاکتور تنش T نیز معرف ترم مرتبه دوم و غیرتکین میدان تنش است [29].

4- روش فرامعین اجزاء محدود توسعه‌یافته[6]

در روش فرامعین اجزاء محدود توسعه‌یافته با استفاده از تعداد زیادی داده در پاره‌ای از نقاط، مجموعه‌ای کوچک از ضرایب مجهول محاسبه می‌شود. در این روش ضرایب مجهول بسط سری ویلیامز مرتبط با میدان مجانبی نوک یک شکاف V شکل[7] با استفاده از مؤلفه جابه‌جایی که به‌طورمستقیم از تحلیل اجزاء محدود توسعه‌یافته به‌دست می‌آیند، تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن N ترم مجانبی نوک شکاف از مود I و Mترم مجانبی نوک شکاف از مود II، حل جابه‌جایی در اطراف نوک شکاف به شکل روابط (23،24) بیان می‌شود [30،31]:

$$u_x = u = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left(\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2}\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right\}$$
$$+ \sum_{n=0}^{M} \frac{B_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left(-\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \sin\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2}\sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right\}$$
$$= f_0 A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n f_n^{I}(r,\theta) + \sum_{n=1}^{M} B_n f_n^{II}(r,\theta) \quad (23)$$

$$u_y = v = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left(\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n\right) \sin\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2}\sin\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right\}$$
$$+ \sum_{n=0}^{M} \frac{B_n}{2\mu} r^{n/2} \left\{ \left(\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n\right) \cos\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2}\cos\left(\frac{n}{2}-2\right)\theta \right\}$$
$$= g_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n g_n^{I}(r,\theta) + \sum_{n=1}^{M} B_n g_n^{II}(r,\theta) \quad (24)$$

که در این معادلات u و v به‌ترتیب بیانگر مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای محورهای x و y است. همچنین در روابط (25،26) داریم.

$$\mu = E/2(1+\upsilon) \quad (25)$$

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\upsilon, & \text{کرنش صفحه‌ای} \\ (3-\upsilon)/(1+\upsilon), & \text{تنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (26)$$

که در آن κ ثابت کولوسو[8]، μ مدول برشی[9]، Eمدول یانگ[10]، υ ضریب پواسون[11] و f و g توابع تعریف‌شده در مختصات قطبی (r,θ) هستند. با درنظر گرفتن $n = 0$، مؤلفه‌های جابه‌جایی به شکل روابط (28،27) به‌دست می‌آیند.

$$u_0 = \frac{\kappa + 1}{2\mu} = f_0 A_0 \quad (27)$$

$$v_0 = \frac{\kappa + 1}{2\mu} = g_0 B_0 \quad (28)$$

که مستقل از موقعیت نقاط اطراف نوک شکاف بوده و به‌عنوان جابه‌جایی‌های صلب[12] شکاف لحاظ می‌شوند. همچنین به‌ازای $n = 0$، مؤلفه‌های جابه‌جایی در مود II به شکل روابط (30،29) به‌دست می‌آیند.

$$u = -\frac{\kappa + 1}{2\mu} B_2 r \sin\theta = -\frac{\kappa + 1}{2\mu} B_2 y = \varphi y \quad (29)$$

$$v = \frac{\kappa + 1}{2\mu} B_2 r \cos\theta = \frac{\kappa + 1}{2\mu} B_2 x = -\varphi x \quad (30)$$

که در آن x و y مختصات کارتزین هستند. به‌راحتی می‌توان نشان داد با درنظر گرفتن $\varphi = -(\kappa+1)B_2/2\mu$، ترم B_2به‌طور مستقیم به دوران صلب شکاف[13] وابسته است؛ بنابراین جابه‌جایی‌های صلب شکاف وابسته به ضرایب A_0 و B_0 و دوران صلب آن نیز نسبت‌به نوک شکاف وابسته به ضریب B_2است. بزرگی دوران صلب شکاف با φ نشان داده می‌شود که برابر است با زاویه بین نیم‌ساز شکاف پس و پیش از تغییر شکل. دوران صلب شکاف و جابه‌جایی‌های صلب آن در شکل 3 نشان داده شده است [21].

روش فرامعین برای به‌دست آوردن ضرایب مجهول در میدان جابه‌جایی به‌کار می‌رود به این صورت که تعداد زیادی گره در اطراف نوک شکاف انتخاب شده و موقعیت و جابه‌جایی گره‌ها در معادله میدان جابه‌جایی جای‌گذاری می‌شود و یک مجموعه از معادلات با در نظر گرفتن k گره نزدیک نوک شکاف به‌دست می‌آیند که در شکل ماتریسی می‌توان این معادلات را به‌صورت روابط (31-33) نوشت [21]:

$$[u]_{2k+1} = [C]_{2k\times(N+M+2)}[x]_{(N+M+2)\times 1} \quad (31)$$

$$[u]^{\mathrm{T}} = [u_1\, u_2\, \cdots\, u_k\, v_1\, v_2\, \cdots\, v_k] \quad (32)$$

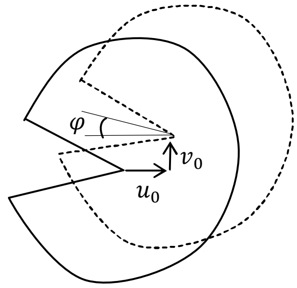
$$[x]^{\mathrm{T}} = [A_1\, A_2\, \cdots\, A_n\, B_1\, B_3\, \cdots\, B_M\, A_0\, B_0\, B_2] \quad (33)$$

در این رابطه $[u]$ بردار جابه‌جایی‌های هر گره در راستای محورهای x و y پس از اعمال بار، برداری است معلوم و از تحلیل اجزاء محدود استاندارد و یا توسعه‌یافته به‌دست می‌آید، $[x]$ بردار ضرایب مجهول و $[C]$ نیز ماتریس ضرایب معلوم است که در رابطه (34) ارائه شده است.

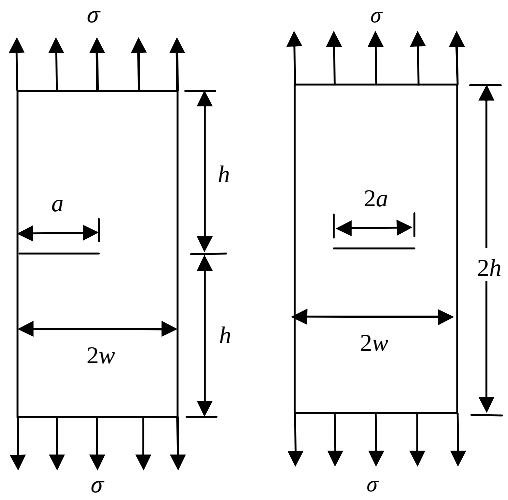
1- Strain-displacement matrix
2- Surface traction vector
3- Element body force vector
4- Mode I (opening mode)
5- Mode II (sliding mode)
6- Extended finite element overdeterministic method (XFEOD)
7- V-notch tip asymptotic displacement field
8- Kolosov constant
9- Shear modulus
10- Young's modulus
11- Poisson's ratio
12- Crack Rigid body displacements
13- Notch rigid body rotation

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]

$$[C]=\left\{\begin{matrix} f_1^I(r_1,\theta_1)\ f_2^I(r_1,\theta_1)\cdots f_N^I(r_1,\theta_1)\ f_1^{II}(r_1,\theta_1)\ f_3^{II}(r_1,\theta_1)\cdots f_M^{II}(r_1,\theta_1)\ f_0\ 0\ f_2^{II}(r_1,\theta_1)\\ f_1^I(r_2,\theta_2)\ f_2^I(r_2,\theta_2)\cdots f_N^I(r_2,\theta_2)\ f_1^{II}(r_2,\theta_2)\ f_3^{II}(r_2,\theta_2)\cdots f_M^{II}(r_2,\theta_2)\ f_0\ 0\ f_2^{II}(r_2,\theta_2)\\ \vdots\\ f_1^I(r_k,\theta_k)\ f_2^I(r_k,\theta_k)\cdots f_N^I(r_k,\theta_k)\ f_1^{II}(r_k,\theta_k)\ f_3^{II}(r_k,\theta_k)\cdots f_M^{II}(r_k,\theta_k)\ f_0\ 0\ f_2^{II}(r_k,\theta_k)\\ g_1^I(r_1,\theta_1)\ g_2^I(r_1,\theta_1)\cdots g_N^I(r_1,\theta_1)\ g_1^{II}(r_1,\theta_1)\ g_3^{II}(r_1,\theta_1)\cdots g_M^{II}(r_1,\theta_1)\ 0\ g_0\ g_2^{II}(r_1,\theta_1)\\ g_1^I(r_2,\theta_2)\ g_2^I(r_2,\theta_2)\cdots g_N^I(r_2,\theta_2)\ g_1^{II}(r_2,\theta_2)\ g_3^{II}(r_2,\theta_2)\cdots g_M^{II}(r_2,\theta_2)\ 0\ g_0\ g_2^{II}(r_2,\theta_2)\\ \vdots\\ g_1^I(r_k,\theta_k)\ g_2^I(r_k,\theta_k)\cdots g_N^I(r_k,\theta_k)\ g_1^{II}(r_k,\theta_k)\ g_3^{II}(r_k,\theta_k)\cdots g_M^{II}(r_k,\theta_k)\ 0\ g_0\ g_2^{II}(r_k,\theta_k)\end{matrix}\right\}_{2k\times(M+N+2)} \quad (34)$$



شکل 3 نمایش سه مؤلفه جابه‌جایی صلب نوک شکاف [21]



(ب) (الف)

شکل 4 مشخصات هندسی الف- ترک در وسط صفحه ب- ترک در لبه صفحه

علاوه‌بر این برای دست‌یابی به یک حل دقیق و قابل قبول تعداد گره‌های انتخابی اطراف نوک شکاف باید به اندازه کافی زیاد بوده و در عین‌حال به‌گونه‌ای باشد که نامساوی $2k > 2N + 2M + 1$ را ارضاء کند. برای یافتن ماتریس ضرایب مجهول، دو طرف معادله (31) را در $[C]^{\mathrm{T}}$ ضرب کرده و با استفاده از روش حداقل مربعات، بردار $[x]$ به کمک روابط (35،36) محاسبه می‌شود.

$$[C]^{\mathrm{T}}\{u\} = [C]^{\mathrm{T}}[C]\{x\} \quad (35)$$

$$\{x\} = ([C]^{\mathrm{T}}[C])^{-1}[C]^{\mathrm{T}}\{u\} \quad (36)$$

در روش اجزاء محدود در موقعیت نوک شکاف باید المان تکینه تعریف شود تا با فیزیک مسأله سازگار باشد، ولی وجود تکینگی، خطای عددی را بالا می‌برد. روش ارائه‌شده در این مقاله تلفیقی از روش‌های تحلیلی و عددی حاصل از روش اجزاء محدود توسعه‌یافته است. به عبارتی ابتدا میدان جابه‌جایی از رابطه (10) و براساس روش اجزاء محدود توسعه‌یافته به‌دست آمده و در نهایت از رابطه (36) ضرایب مجهول بسط سری ویلیامز تعیین شده است. در حل نرم‌افزاری به کمک نرم‌افزار آباکوس نیز پس از مدل‌سازی، نتایج به روش فرامعین تعیین شده است. برای کاهش خطای محاسباتی نوک شکاف را در محاسبات لحاظ نکرده و مقداری از نوک شکاف فاصله می‌گیریم؛ این فاصله باید به قدری باشد که جواب‌ها تغییر نکرده و نسبت به تعداد گره‌های انتخاب شده نوسان نداشته باشد؛ بنابراین جواب‌ها باید مستقل از تعداد گره‌ها بوده و به عبارتی با افزایش تعداد گره‌ها نباید تغییر محسوسی به‌لحاظ دقت در جواب‌ها حاصل شود. نمونه‌هایی که در ادامه ارائه می‌شود به‌ازای زاویه شکاف برابر صفر و برای نمونه‌های دوبعدی و با وجود ترک میانی یا لبه‌ای است. شایان یاد است در نمونه‌های حل‌شده جهت تبدیل مسأله شکاف به مسأله ترک، زاویه شکاف صفر لحاظ شده است.

5- نتایج آنالیز فرامعین اجزاء محدود توسعه‌یافته

در این بخش نتایج حاصل از آنالیز نمونه‌های ترک‌دار آورده شده است. در ابتدا برای احراز درستی نتایج حاصل از محاسبات عددی به روش اجزاء محدود توسعه‌یافته، نتایج حاصل از حل تحلیلی نیز ارائه می‌شود. رابطه (37) رابطه تحلیلی نظیر ضریب شدت تنش را در صفحه‌ای با ابعاد $2w \times 2h$ نشان می‌دهد که در آن مقدار $f(a/w)$ برای حالت ترک میانی و لبه‌ای به‌ترتیب در روابط (38، 39) معرفی شده است [32]. پارامترهای هندسی ورق شامل ترک میانی و لبه‌ای به‌ترتیب در شکل‌های 4-الف و 4-ب نشان داده شده است.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, f(a/w) \quad (37)$$

$$f(a/w) = 1 - 0.025(a/w)^2 + 0.06(a/w)^4\sqrt{\sec \pi a/2w} \quad (38)$$

$$f(a/w) = 1.22 - 0.231(a/w) + 10.550(a/w)^2 - 21.710(a/w)^3 + 30.382(a/w)^4 \quad (39)$$

با استفاده از روش فرا معین ضرایب بسط سری ویلیامز محاسبه شده و به کمک این ضرایب و با استفاده از روابط (40-42)، ضرایب شدت تنش برای مود اول و دوم و فاکتور تنش T برای ترک محاسبه خواهند شد.

$$K_I = \sqrt{2\pi}\, A_1 \quad (40)$$

$$K_{II} = -\sqrt{2\pi}\, B_1 \quad (41)$$

$$T = 4\, A_2 \quad (42)$$

مطالعات اخیر نشان می‌دهد ترم‌های مراتب بالاتر غیر صفر در بسط ویلیامز می‌توانند نقش مهمی در فرایند رشد ترک ایفا کنند. به‌ویژه نخستین ترم غیر صفر در بسط ویلیامز (n=2) یا همان فاکتور تنش T اثرات زیادی در شکست ترد و شبه ترد دارد. فاکتور تنش T می‌تواند بر سایز و شکل ناحیه آسیب و منطقه پلاستیک نوک ترک [31]، پایداری مسیر رشد ترک [33] و به‌طور مسلم روی چقرمگی شکست [34،35] اثر گذارد. کاریهالو [36] نشان داد ترم‌های مراتب بالاتر ترک ($n \geq 3$) نیز می‌توانند به همان اندازه بر شکست ترد مواد شبه ترد نقش داشته باشند. همچنین تحقیقات نشان داد دومین ترم غیر صفر (n=3) به‌طور قابل توجهی بر رفتار شکست ورق با ترک کوتاه لبه‌ای و میانه تأثیرگذار است [37].

آیت‌الهی و همکاران [38] نشان دادند نخستین ترم غیر صفر تنش در مواد دو جنسی با شکاف تیز (یا به اصطلاح فاکتور تنش T) ممکن است نقش زیادی در میدان تنش در اطراف نوک شکاف داشته باشد؛ بنابراین به‌طور قابل توجهی بر رفتار شکست و خستگی اجسام دو جنسی شکاف‌دار اثر می‌گذارد. در نتیجه یافتن راه حل مناسب برای محاسبه ضرایب ترم‌های مراتب بالاتر بسیار مفید است. محاسبه ضرایب مراتب بالاتر به روش تحلیلی فقط برای چند نمونه ساده امکان‌پذیر است؛ بنابراین استفاده از تکنیک‌های عددی برای

مسایل پیچیده شکاف اجتناب‌ناپذیر است.

روش تحلیلی ارائه‌شده براساس توابع پتانسیل مختلط توسط ایزیدا [40] فقط برای شرایط مرزی و بارگذاری خاص مورد استفاده است. در مرجع [41] انتگرال متقابل I [1] به‌صورت عددی و از طریق نرم‌افزار آباکوس تعیین و به کمک آن فاکتور تنش T محاسبه شده است. چن و وانگ [42] نیز از روش برون‌یابی جابه‌جایی [2] و با مدل‌سازی در محیط نرم‌افزار انسیس [3] ضرایب شدت تنش را به‌صورت عددی محاسبه کردند. فت [43] فاکتور تنش T را به‌صورت تابع گرین [4] بیان کرده و ضرایب وزنی آن را با اعمال شرایط فیزیکی و مرزی حاکم بر مسأله تعیین کرد. این روش نیز مقید به شرایط مرزی و بارگذاری خاص است. در مراجع [44،45] نیز از طریق روش همپوشان مرزی المان محدود، پارامترهای شکست تعیین شده است. تی سنگ [46] روش المان فوق تکینه [5] را برای تعیین فاکتور تنش T معرفی کرد. کیم و چو [47] فاکتور تنش T را به کمک روش عددی انتگرال کانتور کار متقابل [6] و از طریق میدان‌های جابه‌جایی و تنش تعیین کرده و اثر آن را بر ناحیه آسیب در همسایگی نوک ترک مطالعه کردند. این کار در محیط نرم‌افزاری انسیس و با حضور المان‌های تکینه در نوک ترک انجام شد. ژائو و هان [48] پارامترهای شکست شکاف V شکل را از طریق پارامترهای شکست ترک در حالت مود ترکیبی تعیین کردند. ترایفی و همکاران [49] از یک روش اجزاء محدود [7] و با توابع میانیاب کلی پارامترهای شکست نمونه‌های شکاف‌دار را تعیین کردند.

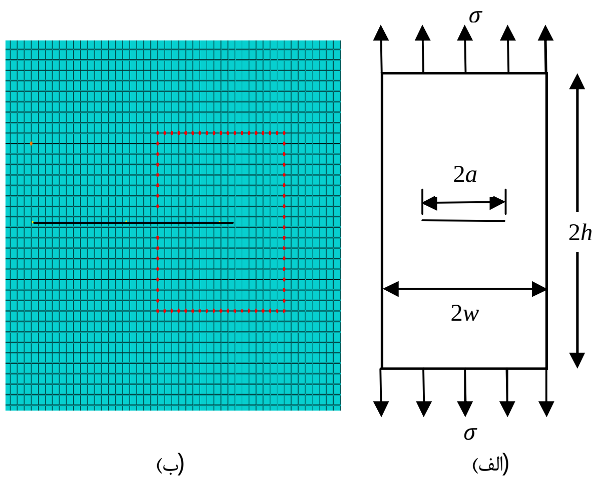
در تحقیق حاضر، به‌ازای تمامی حالت‌های بارگذاری و انواع مختلف شرایط مرزی می‌توان ضرایب شدت تنش و ترم‌های مرتبه بالای شکست را در نمونه‌های ترک‌دار و از طریق روش فرامعین اجزاء محدود توسعه‌یافته و با انتخاب مناسبی از حلقه‌های حل گره‌ای در اطراف نوک ترک، یافت. شایان ذکر است روش فرامعین و روش هم‌پوشان مرزی [8] ارائه‌شده در [21] بر مبنای روش اجزاء محدود است ولی تلفیق روش فرامعین و روش کارآمد اجزاء محدود توسعه‌یافته برای نخستین بار در این تحقیق ارائه شده است. نمونه‌هایی که در ادامه برای احراز صحت روش این تحقیق دنبال می‌شود در نرم‌افزارهای آباکوس و متلب به‌صورت دوبعدی مدل شده و نتایج به‌دست‌آمده همراه با نتایج موجود در مقالات و کتاب‌های مرجع در جداول مربوطه مقایسه شده است. در این پژوهش برای یافتن ضرایب مجهول و حل ماتریسی به روش فرا معین از برنامه‌نویسی متلب استفاده شده است.

5-1- ترک در وسط صفحه تحت نیروی کششی

ابتدا برای صفحه‌ای شامل ترک میانی نتایج دنبال شده است (شکل 5-الف). برای نمایش حلقه حل به روش فرامعین، فقط قسمتی از مدل المان محدود آن در شکل 5-ب نشان داده شده است. مشخصات این ورق در نرم‌افزار آباکوس و نیز برنامه متلب بدین‌ترتیب در نظر گرفته شده است؛ مدول الاستیسیته این ورق برابر E = 30 GPa، ضریب پواسون آن υ = 0.3، مقدار تنش کششی اعمال شده σ = 1 MPa، نصف طول ترک a = 0.2 mm و با فرض تنش صفحه‌ای (ضخامت ناچیز ورق) حل مسأله دنبال شده است.

با در نظر گرفتن ابعاد ورق به‌صورت $2w \times 2h$، به ازای مقادیر مختلف h/w و a/w مقادیر محاسبه شده $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس با نتایج سایر محققین در جدول 1 مقایسه شده است.

1- Interaction Integral
2- Limited displacement extrapolation technique (LDET)
3- Ansys Software
4- Green's function representation
5- Super singular element method (SSEM)
6- The reciprocal work contour integral method (RWCIM)
7- The fractal-like finite element method (FFEM)
8- Boundary collocation method



شکل 5 نمایش الف- ترک در وسط صفحه تحت نیروی کششی ب- حلقه 9ام اطراف ترک

درصد خطای حاصل از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس در مقایسه با فعالیت سایر محققین در جدول 1 ارائه شده است. لازم به یاد است درصد خطای محاسبه شده از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس به‌صورت رابطه (43) تعریف شده است [39]:

$$\text{خطا درصد \%} = \left| \frac{\text{مقدار مرجع} - \text{مقدار محاسبه شده}}{\text{مقدار مرجع}} \right| \times 100 \qquad (43)$$

برای نمونه برای حالت $h/w = 1$، $a/w = 0.2$، جواب‌هایی که در جدول 1 ارائه شده است با درنظر گرفتن 17689 المان سازه‌ای و در حلقه 9ام (مطابق شکل 5-ب) به‌دست آمده است. همان‌طور که جدول 1 نشان می‌دهد، بیشترین درصد خطا در آباکوس برابر 0/9823% نسبت‌به مرجع [40] و بیشترین درصد خطا در متلب برابر 0/8206% نسبت به مراجع [32،40] است. لازم به یاد است در مرجع [39] نتایج پنج حالت مختلف شبکه‌بندی المان محدود در موقعیت نوک ترک برای محاسبه ضرایب شدت تنش و فاکتور تنش T ارائه شده است که از میان این پنج حالت به‌عنوان نمونه نتایج دو حالت خاص برای مقایسه انتخاب شده است. در ادامه به‌ازای مقادیر مختلف h/w و a/w مقادیر محاسبه‌شده T/σ از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس در جدول 2 ارائه و با نتایج سایر محققین مقایسه شده است. در جدول 3 نیز درصد خطای حاصل از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس نیز مطابق رابطه (43) با نتایج سایر محققین مقایسه شده است. این نتایج بیشترین درصد خطا در آباکوس را برابر 2/4523 % نسبت‌به حالت2 از مرجع [39] و بیشترین درصد خطا در متلب را برابر 2/3851 % نسبت‌به حالت2 از مرجع [39] نشان می‌دهد.

5-2- ترک لبه‌ای زاویه‌دار در صفحه تحت نیروی کششی

در این نمونه صفحه‌ای شامل ترک لبه‌ای زاویه‌دار درنظر گرفته می‌شود که در میدان بارگذاری ترکیبی قرار می‌گیرد (شکل 6-الف). مشخصات مادی و هندسی مدل استفاده‌شده در نرم‌افزارهای متلب و آباکوس چنین است.

مدول الاستیسیته E = 1MPa، ضریب پواسون υ = 0.25، مقدار تنش کششی وارده σ = 1MPa، طول ترک a = 0.3 mm، زاویه ترک نسبت‌به امتداد اعمال بار $\beta = 45^{\circ}$ و با فرض تنش صفحه‌ای (ضخامت ناچیز ورق) حل مسأله دنبال‌شده و نتایج در جداول 4 و 5 ارائه شده است.

برای نمونه برای حالت $h/w = 1$ و $a/w = 0.3$ با درنظر گرفتن 12250 المان سازه‌ای و در حلقه 5ام و 6ام و براساس شکل 6-ب جواب‌ها به‌دست‌آمده و در جدول 4 ارائه شده است.

جدول 1 مقادیر $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ و درصد خطا

$h/_w$	$a/_w$	مرجع [32]	ایزیدا [40]	جوگداند [39]		حل نرم‌افزاری		درصد خطا نسبت‌به مرجع [32]		درصد خطا نسبت‌به ایزیدا [40]		درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39]			
				حالت2	حالت4	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	حالت2 متلب	حالت2 آباکوس	حالت4 متلب	حالت4 آباکوس
	0/2	-	1/0550	1/0557	1/0558	1/0548	1/0489	-	-	0/0189	0/5782	0/0852	0/6441	0/0947	0/6535
1/0	0/4	-	1/2160	1/2162	1/2165	1/2140	1/2202	-	-	0/1644	0/3454	0/1808	0/3288	0/2055	0/3041
	0/6	-	1/4810	1/4809	1/4811	1/4801	1/4723	-	-	0/0607	0/5874	0/0540	0/5807	0/0675	0/5941
	0/2	1/0245	1/0250	1/0249	1/0250	1/0252	1/0230	0/0683	0/1464	0/0195	0/1951	0/0292	0/1853	0/0195	0/1951
3/0	0/4	1/1090	1/1090	1/1111	1/1099	1/1181	1/1190	0/8206	0/9018	0/8206	0/9017	0/6300	0/7110	0/7388	0/8198
	0/6	1/3027	1/3030	1/3043	1/3041	1/3123	1/3158	0/7369	0/9288	0/7137	0/9823	0/6133	0/8816	0/6287	0/8971

جدول 2 مقادیر T/σ برای حالت‌های مختلف نسبت h/w

$h/_w$	$a/_w$	وانگ [41]	چن و وانگ [42]	فت [43]	جوگداند [39]		حل نرم‌افزاری	
					حالت2	حالت4	متلب	آباکوس
	0/2	-	-1/0770	-1/0750	-1/0648	-1/0642	-1/0802	-1/0894
1/0	0/4	-	-1/2650	-1/2600	-1/2539	-1/2505	-1/2453	-1/2393
	0/6	-	-1/5590	-1/5500	-1/5387	-1/5405	-1/5754	-1/5730
	0/2	-1/0290	-1/0280	-	-1/0226	-1/0208	-1/0230	-1/0190
3/0	0/4	-1/1390	-1/1410	-	-1/1301	-1/1315	-1/1352	-1/1290
	0/6	-1/4480	-1/4550	-	-1/4313	-1/4372	-1/4598	-1/4664

جدول 3 درصد خطای T/σ

$h/_w$	$a/_w$	درصد خطا نسبت‌به وانگ [41]		درصد خطا نسبت‌به چن و وانگ [42]		درصد خطا نسبت‌به فت [43]		درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39]			
		متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	حالت2 متلب	حالت2 آباکوس	حالت4 متلب	حالت4 آباکوس
	0/2	-	-	0/2971	1/1513	0/4837	1/3395	1/4462	2/3102	1/5034	2/3679
1/0	0/4	-	-	1/5573	2/0316	1/1666	1/6428	0/6858	1/1643	0/4158	0/8956
	0/6	-	-	1/0519	0/8980	1/6387	1/4838	2/3851	2/2291	2/2655	2/1097
	0/2	0/5830	0/9718	0/4863	0/8754	-	-	0/0391	0/3520	0/2155	0/1763
3/0	0/4	0/3336	0/8779	0/5083	1/0517	-	-	0/4512	0/0973	0/3270	0/2209
	0/6	0/8149	1/2707	0/3298	0/7835	-	-	1/9912	2/4523	1/5725	2/0317

جدول 4 مقادیر نرمال ضرایب شدت تنش و درصد خطای آن برای حالت 1 = $h/_w$

	$a/_w$	ویلسون [44]	جوگداند [39]		حل نرم‌افزاری		درصد خطا نسبت‌به ویلسون [44]		درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39]			
			حالت2	حالت4	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	حالت2 متلب	حالت2 آباکوس	حالت4 متلب	حالت4 آباکوس
	0/3	0/8860	0/8833	0/8816	0/8836	0/8797	0/2708	0/7110	0/0339	0/4075	0/2268	0/2155
$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	0/4	1/0155	1/0182	1/0162	1/0143	1/0132	0/1181	0/2264	0/3830	0/4910	0/1869	0/2952
	0/5	1/2010	1/2038	1/2014	1/2016	1/2105	0/0499	0/7910	0/1827	0/5565	0/0166	0/7574
	0/3	0/4514	0/4435	0/4449	0/4512	0/4486	0/0443	0/6203	1/7361	1/1499	1/4160	0/8316
$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	0/4	0/5049	0/5021	0/5036	0/5054	0/5064	0/0990	0/2971	0/6572	0/8564	0/3574	0/5560
	0/5	0/5750	0/5798	0/5806	0/5782	0/5775	0/5565	0/4348	0/2760	0/3967	0/4133	0/5340

در این نمونه، نخست یک حلقه در نظر گرفته شد که جواب مطلوب حاصل نشد، ولی با درنظر گرفتن دو حلقه و با افزایش تعداد نقاط در اطراف نوک ترک جواب‌ها با دقت مطلوبی به‌دست آمد.

از میان نمونه‌های حل‌شده، این مثال مدل اجزاء محدود مربوطه و نیز تغییر شکل و کانتور تغییرات تنش در محیط نرم‌افزار آباکوس مطابق شکل‌های 6-ج و 6- د نمایش داده شده است. از آن‌جایی که تنش اعمال‌شده در موقعیت ترک دارای دو مؤلفه عمودی و مماسی است؛ بنابراین شکست نمونه در وضعیت مود ترکیبی قرار می‌گیرد.

مطابق نتایج ارائه‌شده در جدول 4، بیشترین درصد خطا در آباکوس برای $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ برابر 0/7910% نسبت‌به مرجع [44] و بیشترین درصد خطا در متلب برای $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ برابر 0/3830 % نسبت‌به حالت2 از مرجع [39] است. همچنین بیشترین درصد خطا در آباکوس برای $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ برابر 1/1499 % نسبت‌به حالت2 از مرجع [39] و بیشترین درصد خطا در متلب برای $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ برابر 1/7361 % نسبت‌به حالت2 از مرجع [39] است.

مقادیر محاسبه‌شده T/σ نیز برای حالت $h/w = 1$ از حل نرم‌افزاری متلب و آباکوس در جدول ۵ ارائه شده است. از آن‌جایی که خطای محاسباتی حالت۴ از مرجع [۳۹] در محاسبه فاکتور تنش T بالا به‌دست آمده (خطای بیش از ۵۰ درصد)؛ بنابراین شبکه‌بندی برای محاسبه ترم‌های مرتبه بالای بسط سری ویلیامز پیشنهاد نمی‌شود. از این‌رو در جدول ۵ نتایج حالت۳ این مرجع مورد مقایسه قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود بیشترین درصد خطا در آباکوس برابر ۲/۲۶۶۲ ٪ نسبت‌به حالت۳ از مرجع [۳۹] و بیشترین درصد خطا در متلب نیز برابر ۲/۱۰۴۴ ٪ نسبت‌به حالت۳ از مرجع [۳۹] است.

۵-۳- ترک زاویه‌دار در وسط صفحه تحت نیروی کششی

در این نمونه صفحه‌ای شامل ترک میانی زاویه دار تحت بارگذاری مود ترکیبی قرار می‌گیرد (شکل ۷-الف). مدلی به شکل ۷-ب و این مشخصات در نرم‌افزارهای متلب و آباکوس مدل شده است: مدول الاستیسیته $E = 1\text{MPa}$، ضریب پواسون $\upsilon = 0.25$، تنش کششی $\sigma = 1\text{MPa}$، نصف طول ترک $a = 0.2$ mm، زاویه راستای صفحه ترک $\beta = 30^{\circ}$ و با فرض برقراری شرایط تنش صفحه‌ای (ضخامت ناچیز ورق) برای حالت‌های مختلف نسبت h/w و a/w، حل مسأله دنبال‌شده و جواب‌ها در جداول ۶ تا ۸ ارائه شده است.

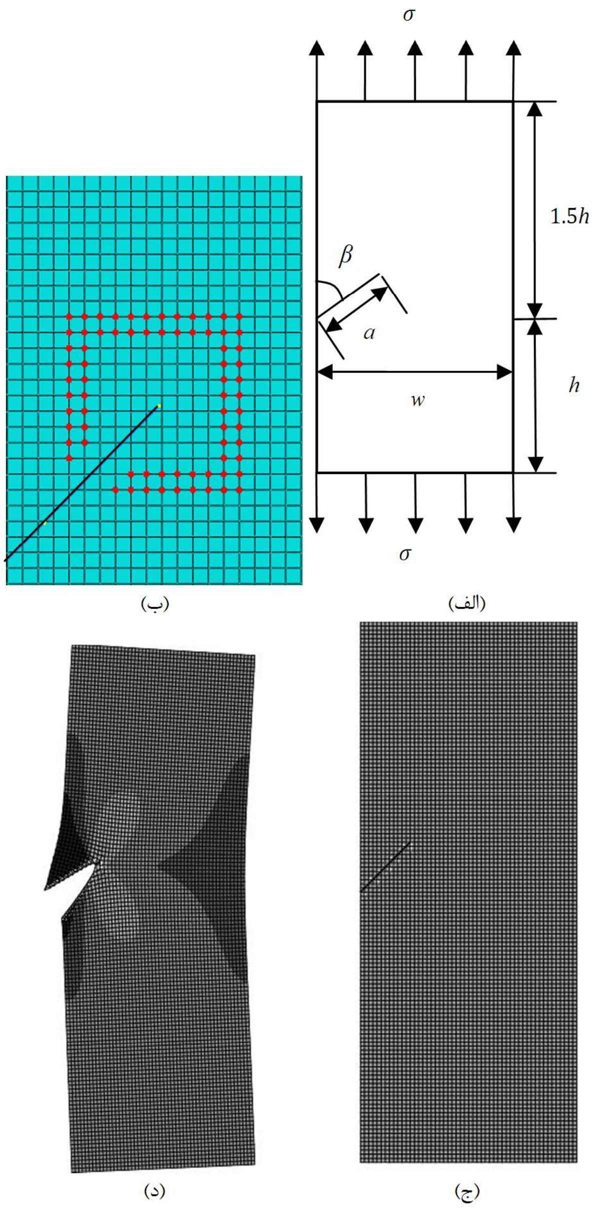
برای نمونه در حالت $h/w = 2$ و $a/w = 0.2$ و با درنظر گرفتن ۱۶۲۰۰ المان سازه‌ای و در حلقه ۱۱ام و براساس شکل ۷-ب پاسخ‌ها در جداول ارائه شده است. لازم به یادآوری است که از پنج حالت شبکه‌بندی مطرح‌شده در مرجع [۳۹]، فقط نتایج حالت ۲ در این مرجع ارائه شده است؛ بنابراین در مقایسه صورت‌گرفته فقط نتایج این حالت دنبال می‌شود. ملاحظه می‌شود مطابق نتایج به‌دست آمده بیشترین درصد خطای $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ در **آباکوس برابر ۰/۱۶۵۵٪ نسبت‌به مرجع [۴۵] و بیشترین درصد خطا در** متلب برابر ۰/۱۵۴۹٪ نسبت‌به حالت۲ از مرجع [۳۹] است. همچنین بیشترین درصد خطای $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ در آباکوس برابر ۱/۱۰۵۷٪ نسبت‌به حالت۲ از مرجع [۳۹] و بیشترین درصد خطا در متلب برابر ۰/۶۱۳۶٪ نسبت‌به حالت۲ از مرجع [۳۹] است. مقادیر به‌دست‌آمده برای فاکتور تنش T در جدول ۸ ارائه شده است که بیشترین درصد خطا در آباکوس را برابر ۰/۹۰۵۱٪ نسبت‌به [۴۶] و بیشترین درصد خطا در متلب را برابر ۰/۷۷۸۱٪ نسبت‌به حالت۲ از مرجع [۳۹] نشان می‌دهد.

۵-۵- مثال دیگر از ترک زاویه‌دار در لبه صفحه تحت میدان کششی

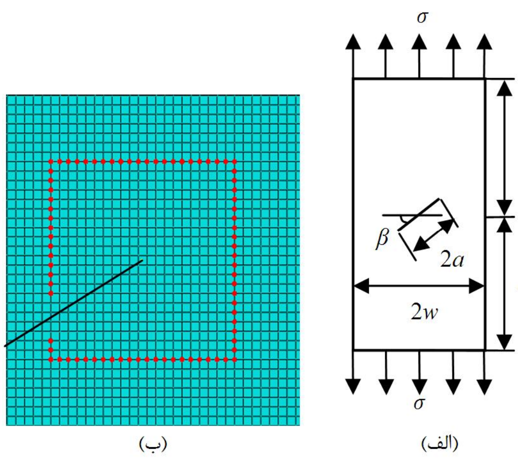
نمونه دیگری که در این بخش دنبال می‌شود در ارتباط با ترک زاویه‌دار در لبه صفحه است که در میدان تنش کششی قرار گرفته است. از آن‌جایی که نتایج با مسأله شکاف زاویه‌دار مورد مطالعه در مرجع [۲۱] مقایسه شده است؛ بنابراین برای مقایسه، در نمونه‌های حل‌شده زاویه شکاف برابر صفر منظور می‌شود.

در شکل۸-الف، γ معرف زاویه شکاف و β نیز راستای شکاف را نشان می‌دهد. با تغییر زاویه β سهم مودهای اول و دوم شکست تغییر می‌کند. نتایج آنالیز برای مقادیر مختلف زاویه β ارائه شده است. به‌ازای $\beta = 0^{\circ}$ و $\gamma = 0^{\circ}$، مدلی به شکل ۸-ب و این مشخصات در نرم‌افزار مدل شده است: مدول الاستیسیته $E = 1\text{MPa}$، ضریب پواسون $\upsilon = 0.25$، تنش کششی $\sigma = 1\text{MPa}$، $a = 0.4$ mm و با فرض مساله تنش صفحه‌ای (ضخامت ناچیز ورق) به حل مسأله پرداخته و جواب‌ها در جدول ۹ ارائه شده است.

برای نمونه در حالت $w = 1$، $h/w = 1$، $\beta = 0^{\circ}$ و $\gamma = 0^{\circ}$ و با در نظر گرفتن ۹۸۰۰ المان سازه‌ای و در حلقه ۹ام و مطابق شکل ۸-ب و نیز با در نظر گرفتن تعداد جملات $M = 0$ و $N = 11$ از بسط سری ویلیامز، جواب‌ها در جدول ۹ ارائه شده است.



شکل ۶ نمایش الف- ترک لبه‌ای در صفحه تحت نیروی کششی، ب- نمایش حلقه‌های ۶ و ۷ اطراف ترک، ج- مدل المان محدود، د-تغییر شکل و کانتور تغییرات تنش



شکل ۷ نمایش الف- ترک زاویه‌دار در وسط صفحه تحت نیروی کششی ب- حلقه ۱۱ام اطراف ترک

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]

جدول 5 مقادیر فاکتور تنش T و درصد خطای آن برای حالت $h/_W = 1$

	$a/_W$	چن و وانگ [42]	جوگداند [39] حالت2	جوگداند [39] حالت3	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به چن و وانگ [42] متلب	درصد خطا نسبت‌به چن و وانگ [42] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت2 متلب	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت2 آباکوس	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت3 متلب	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت3 آباکوس
T/σ	0/3	0/4160	0/4149	0/4069	0/4124	0/4149	0/8654	0/2644	0/6025	0/0000	1/3516	1/9660
	0/4	0/5060	0/5038	0/4942	0/5046	0/5054	0/2767	0/1186	0/1587	0/3175	2/1044	2/2662
	0/5	0/6480	0/6497	0/6370	0/6486	0/6477	0/0926	0/0463	0/1693	0/3078	1/8210	1/6797

جدول 6 مقادیر $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ برای حالت $h/w = 1$

$a/_W$	کیتاگاوا [45]	جوگداند [39] حالت2	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به کیتاگاوا [45] متلب	درصد خطا نسبت‌به کیتاگاوا [45] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39] حالت 2 متلب	درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39] حالت 2 آباکوس
0/3	0/7730	0/7746	0/7734	0/7739	0/0517	0/1164	0/1549	0/0903
0/4	0/8456	0/8464	0/8469	0/8470	0/1537	0/1655	0/0591	0/0708
0/5	0/9840	0/9841	0/9834	0/9830	0/0610	0/1016	0/0711	0/1117

جدول 7 مقادیر $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ برای حالت $h/w = 1$

$a/_W$	کیتاگاوا [45]	جوگداند [39]	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به کیتاگاوا [45] متلب	درصد خطا نسبت‌به کیتاگاوا [45] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39] حالت 2 متلب	درصد خطا نسبت‌به جوگداند [39] حالت 2 آباکوس
0/3	0/4367	0/4400	0/4373	0/4391	0/1374	0/5496	0/6136	0/2045
0/4	0/4497	0/4522	0/4513	0/4472	0/3558	0/5559	0/1990	1/1057
0/5	0/4800	0/4812	0/4809	0/4785	0/1875	0/3125	0/0623	0/5611

جدول 8 مقادیر فاکتور تنش T برای حالت $h/w = 1$

$a/_W$	تی سنگ [46]	جوگداند [39]	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به تی سنگ [46] متلب	درصد خطا نسبت‌به تی سنگ [46] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت2 متلب	درصد خطا نسبت‌به جوگداند[39] حالت2 آباکوس
0/3	-0/5303	-0/5269	-0/5310	-0/5255	0/1320	0/9051	0/7781	0/2657
0/4	-0/6207	-0/6174	-0/6187	-0/6170	0/3222	0/5961	0/2105	0/0647
0/5	-0/7757	-0/7713	-0/7711	-0/7740	0/5930	0/2191	0/0259	0/3500

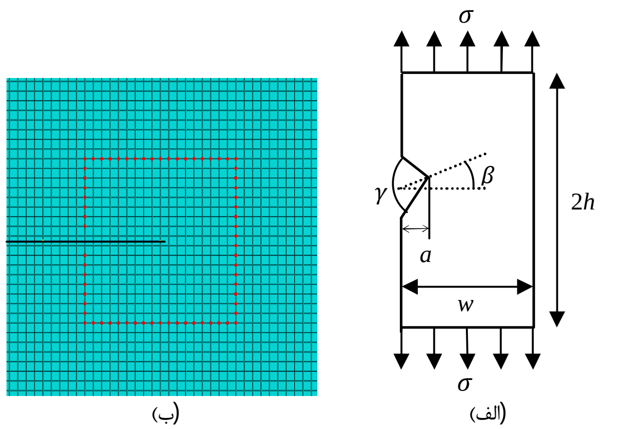
جدول 9 مقادیر ضرایب بسط سری ویلیامز در حالت $\gamma = 0°$ و $\beta = 0°$

ضرایب بسط	المان محدود فرامعین [21]	هم‌پوشان مرزی [21]	انتگرال I [21]	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [21] متلب	درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [21] آباکوس	درصد خطا نسبت به هم‌پوشان مرزی [21] متلب	درصد خطا نسبت به هم‌پوشان مرزی [21] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به انتگرال I [21] متلب	درصد خطا نسبت‌به انتگرال I [21] آباکوس
A_1	0/9430	0/9430	0/9440	0/9480	0/9460	0/5302	0/3181	0/5302	0/3181	0/4237	0/2119
A_2	-0/1440	-0/1430	-0/1440	-0/1430	-0/1430	0/6944	0/6944	0	0	0/6944	0/6944
A_3	-0/2150	-0/2150	-	-0/2150	-0/2160	0	0/4651	0	0/4651	-	-
B_1	0	0	-	0	0	-	-	-	-	-	-
B_3	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-

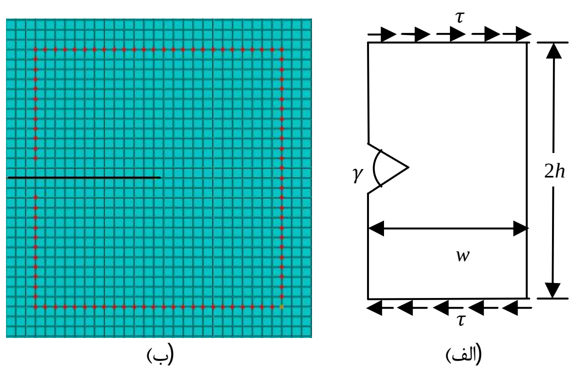
جدول 10 مقادیر بسط سری ویلیامز در حالت $\gamma = 0°$ و $\beta = 15°$

ضرایب بسط	المان محدود فرامعین [21]	هم‌پوشان مرزی [21]	انتگرال I [21]	حل نرم‌افزاری متلب	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [21] متلب	درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [21] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به هم‌پوشان مرزی[21] متلب	درصد خطا نسبت‌به هم‌پوشان مرزی[21] آباکوس	درصد خطا نسبت‌به انتگرال I[21] متلب	درصد خطا نسبت‌به انتگرال I[21] آباکوس
A_1	0/9160	0/9160	0/9170	0/9100	0/9130	0/6550	0/3275	0/6550	0/3275	0/7434	0/4362
A_2	-0/9800	-0/9800	-0/9900	-0/9873	-0/9834	0/7449	0/3469	0/7449	0/3469	0/2727	0/6667
A_3	-0/2660	-0/2660	-	-0/2641	-0/2647	0/7143	0/4887	0/7143	0/4887	-	-
B_1	-0/1380	-0/1370	-0/1380	-0/1375	-0/1371	0/3623	0/6522	0/3650	0/0730	0/3623	0/6522
B_3	-0/1470	-0/1460	-	-0/1460	-0/1466	0/6803	0/2721	0	0/4110	-	-

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.2.33.1]



شکل 8 نمایش الف- شکاف زاویه‌دار در لبه صفحه تحت نیروی کششی ب- حلقه 9ام اطراف ترک به‌ازای $\beta = 0°$ ج-حلقه 15ام اطراف ترک به‌ازای $\beta = 15°$ د-حلقه 12ام اطراف ترک به‌ازای $\beta = 30°$



شکل 9 نمایش الف- شکاف در لبه صفحه تحت برش خالص، ب- حلقه 13ام اطراف ترک

بیشترین درصد خطا در آباکوس در محاسبه مقدار ضریب مجهول A_2 بوده و نسبت‌به روش انتگرال I و روش اجزاء محدود فرامعین ارائه شده در مرجع [21] مقدار خطا برابر 0/6944% است. بیشترین درصد خطا در نرم‌افزار متلب نیز در محاسبه مقدار A_2 به‌دست‌آمده و نسبت‌به روش انتگرال I و روش اجزاء محدود فرامعین ارائه شده در مرجع [21] نیز برابر 0/6944% است. نتایج روش حاضر با روش هم‌پوشان مرزی [21] نیز مقایسه شده است.

به‌ازای مقادیر $\beta = 15°$ و $\gamma = 0°$، مدلی به شکل 8-ج و با همان مشخصات مادی و هندسی در نرم‌افزار مدل شده است، میدان تنش کششی نیز برابر $\sigma = 1$ MPa در نظر گرفته شده و با فرض مساله تنش صفحه‌ای به حل مسأله پرداخته و جواب‌ها در جدول 10 ارائه شده است. برای نمونه در حالت $h/w = 1$, $\gamma = 0°$, $\beta = 15°$ با درنظر گرفتن 15210 المان سازه‌ای و در حلقه 15 مطابق شکل 8-ج و با در نظر گرفتن تعداد جملات $M = 12$, $N = 12$ جواب‌ها در این جدول ارائه شده است.

براساس این نتایج بیشترین درصد خطا در آباکوس در محاسبه مقدار ضریب مجهول A_2 بوده و نسبت‌به روش انتگرال I ارائه‌شده در مرجع [21] برابر 0/6667% است. همچنین بیشترین درصد خطا در نرم‌افزار متلب نیز در محاسبه مقدار A_2 به‌دست‌آمده و نسبت‌به روش هم‌پوشان مرزی و روش اجزاء محدود فرامعین ارائه‌شده در مرجع [21] نیز برابر 0/7449% است.

به‌ازای مقادیر $\beta = 30°$ و $\gamma = 0°$، مدلی به شکل 8-د و با همان مشخصات مادی و هندسی و بارگذاری در نرم‌افزار مدل‌شده و با فرض تنش صفحه‌ای به حل مسأله پرداخته و جواب‌ها در جدول 11 ارائه شده است.

برای نمونه در حالت $h/w = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 30°$ و با درنظر گرفتن 16810 المان سازه‌ای و در حلقه 12ام و مطابق شکل 8-د و تعداد جملات $M = 14$, $N = 14$، جواب‌ها در این جدول ارائه شده است.

براساس این نتایج بیشترین درصد خطا در آباکوس در محاسبه مقدار ضریب مجهول B_1 بوده و نسبت‌به روش هم‌پوشان مرزی ارائه‌شده در مرجع [21] برابر 0/9020% است. همچنین بیشترین درصد خطا در نرم‌افزار متلب نیز در محاسبه مقدار B_3 به‌دست‌آمده و نسبت‌به روش هم‌پوشان مرزی ارائه‌شده در مرجع [21] نیز برابر 1/0300% است.

5-6- ترک در لبه صفحه تحت برش خالص

نمونه دیگر در ارتباط با ترک لبه‌ای است که در میدان تنش برشی خالص قرار گرفته، از آن‌جایی که نتایج با مسأله شکاف زاویه‌دار مورد مطالعه در مراجع مختلف مقایسه شده است؛ بنابراین برای مقایسه، در نمونه‌های حل‌شده زاویه شکاف برابر صفر لحاظ می‌شود (شکل 9-الف).

مدلی به شکل 9-ب و این مشخصات در نرم‌افزار مدل شده است: مدول الاستیسیته ورق $E = 1$ MPa، ضریب پواسون $\upsilon = 0.25$، تنش برشی $\tau = 1$ MPa، $a = 0.4$ mm و با فرض مساله تنش صفحه‌ای به حل مسأله پرداخته و جواب‌ها در جدول 12 ارائه شده است.

جدول 11 مقادیر بسط سری ویلیامز در حالت $\gamma = 0°$ و $\beta = 30°$

ضرایب بسط	المان محدود فرامعین [9]	هم‌پوشان مرزی [9]	انتگرال I [9]	حل نرم‌افزاری		درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [9]		درصد خطا نسبت‌به هم‌پوشان مرزی [9]		درصد خطا نسبت‌به انتگرال I [9]	
				متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس	متلب	آباکوس
A_1	0/8390	0/8390	0/8390	0/8343	0/8321	0/5602	0/8224	0/5602	0/8224	0/5602	0/8224
A_2	0/0260	0/0260	0/0260	0/0260	0/0258	0/3846	0/7692	0/3846	0/7692	0/3846	0/7692
A_3	-0/4030	-0/4040	-	-0/4031	-0/4035	0/0248	0/1241	0/2228	0/1238	-	_
B_1	-0/2570	-0/2550	-0/2570	-0/2575	-0/2573	0/1946	0/1167	0/9804	0/9020	0/1946	0/1167
B_3	-0/2350	-0/2330	-	-0/2354	-0/2351	0/1702	0/0426	1/0300	0/9013	-	_

جدول 12 مقادیر ضرایب بسط سری ویلیامز در حالت $\gamma = 0°$

ضرایب بسط	المان محدود فرامعین [21]	هم‌پوشان مرزی [21]	کیم [47]	ژائو [48]	ترایفی [49]	حل نرم‌افزاری آباکوس	درصد خطا نسبت‌به المان محدود فرامعین [21]	درصد خطا نسبت‌به هم‌پوشان مرزی [21]	درصد خطا نسبت‌به کیم [47]	درصد خطا نسبت‌به ژائو [48]	درصد خطا نسبت‌به ترایفی [49]
B_1	-0/5248	-0/5278	-0/5268	-0/5215	-0/5277	-0/5235	0/2477	0/8147	0/6264	0/3835	0/7959
B_3	-0/6798	-0/6823	-	-	-	-0/6801	0/0441	0/3224	-	-	-
B_4	0/3339	0/3349	-	-	-	0/3341	0/0599	0/2389	-	-	-

نتایج آنالیز با نتایج به‌دست‌آمده در مراجع [21، 47-49] مقایسه شده است. برای نمونه در حالت $h/w = 1$، $\beta = 0°$ و $\gamma = 0°$ و با در نظر گرفتن 15488 المان سازه‌ای و در حلقه 13ام و براساس شکل 9-ب و نیز با درنظر گرفتن تعداد جملات $M = 10$ و $N = 0$ از بسط سری ویلیامز، جواب‌ها در جدول 12 ارائه شده است. ملاحظه می‌شود بیشترین درصد خطا در آباکوس در محاسبه مقدار B_1 بوده و نسبت‌به روش هم‌پوشان مرزی در مرجع [21] برابر 0/8147% است.

6- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، از روش اجزاء محدود توسعه یافته برای محاسبه ضرایب شدت تنش ترک و ضرایب مراتب بالاتر بسط سری ویلیامز استفاده شد. ابتدا میدان جابجایی بر اساس روش اجزاء محدود توسعه یافته تعیین شده و سپس ضرایب بسط سری ویلیامز با یک عملیات ماتریسی ساده و براساس یک الگوی اجزاء محدود فرامعین به‌دست آمد. برای این کار موقعیت و جابه‌جایی نقاط بر حلقه‌ای مناسب در اطراف نوک ترک استخراج شد. سادگی روش ارائه‌شده، توانایی مدل‌سازی ناپیوستگی در هر مکان دلخواه از مش‌بندی، عدم‌نیاز به مش‌بندی دوباره، محاسبه هم‌زمان ضرایب شدت تنش و ضرایب مراتب بالاتر و دقت خوب نتایج از مزیت‌های روش اجزاء محدود توسعه‌یافته ارائه‌شده در این مطالعه است. همچنین چند نمونه ترک‌دار تحت بارگذاری خالص مود اول، خالص مود دوم و نیز مود ترکیبی مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزارهای متلب و آباکوس با نتایج موجود در مقالات مختلف مقایسه شد که نتایج به‌دست‌آمده دقت و کارآیی بالای روش ارائه‌شده را در مقایسه با سایر روش‌ها در تخمین ضرایب ترم‌های تکینه و غیر تکینه حل میدان جابه‌جایی سری ویلیامز و در نتیجه شناسایی دقیق‌تر ناحیه آسیب و پارامترهای شکست نشان می‌دهد.

7- مراجع

[1] S. Mohammadi, Extended Finite Element Method for fracture Analysis of structures, *Blackwell Publishing, Garsington Road,* Oxford, UK. 2008.

[2] B.N. Rao, S. Rahman, A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 78, pp. 647-657, 2001.

[3] Y. Li, W. Feng, Z. Xu, Fracture analysis of cracked 2D planar and axisymmetric problems of magneto–electro-elastic materials by the MLPG coupled with FEM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 198, pp. 2347–2359, 2009.

[4] M. Duflot, H. Nguyen-Dang, Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* Vol. 168, pp. 155–164, 2004.

[5] S.C. Li, S.C. Li, Y.M. Cheng, Enriched meshless manifold method for two-dimensional crack modeling, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics,* Vol. 44, pp. 234–248, 2005.

[6] R. Toni-Liong, C. Proppe, Application of the cohesive zone model to the analysis of a rotor with a transverse crack, *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics,* Eurodyn, Leuven, Belgium, ISBN 978-90-760-1931-4, 4-6 July 2011.

[7] E.T. Ooi, Z.J. Yang, Modelling multiple cohesive crack propagation using a finite element–scaled boundary finite element coupled method, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 33, pp. 915–929, 2009

[8] F.J. Gómez, M. Elices, F. Berto, P. Lazzarin, A generalised notch stress intensity factor for U-notched components loaded under mixed mode, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 75, pp. 4819–4833, 2008.

[9] P. Prabhakar and A.M. Waas, The influence of cohesive zone modeling on the stress field and energy release rates in a cracked elastic body, *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference,* Orlando, Florida, 18th, 12-15 April 2010.

[10] R. Krueger, The Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications, *NASA Langley Research Center,* Hampton, Virginia, NASA/CR-2002-211628, ICASE Report No. 2002-10.

[11] H. Hosseini-Toudeshky, B. Mohammadi, G. Sadeghi, H.R. Daghyani, Numerical and Experimental Fatigue Crack Growth Analysis in Mode-I for Repaired Aluminum Panels Using Composite Material, *Composites: Part A,* Vol. 38, pp. 1141-8, 2007.

[12] H. Okada, H. Kawai, K. Araki, A virtual crack closure-integral method (VCCM) to compute the energy release rates and stress intensity factors based on quadratic tetrahedral finite elements, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 75, pp. 4466–4485, 2008.

[13] J. Lebahn, H. Heyer, M. Sander, Numerical stress intensity factor calculation in flawed round bars validated by crack propagation tests, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 108, pp. 37–49, 2013.

[14] J.M. Melenk,I. Babuska, The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Application, *Seminar fur Angewandte Mathematik Eidgenossische Technische Hochschule,* Research Report No. 96-01, January, CH8092 Zurich, Switzerland. 1996.

[15] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal re meshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.

[16] T. Belytscho, N. Moes, S. Usui, and C. Parimi, Arbitrary discontinuities in finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 50, pp. 993-1013, 2001.

[17] V.F. González-Albuixech, E. Giner, J.E. Tarancón, F.J. Fuenmayor, A. Gravouil, Domain integral formulation for 3-D curved and non-planar cracks with the extended finite element method, *Computer methods in applied mechanics and engineering,* Vol. 264, pp. 129-144, 2013.

[18] H. Yu, L. Wu, H. Li, A domain-independent interaction integral for magneto-electro-elastic materials, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 51, pp. 336-351, 2014.

[19] M. Nejati, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, M.Sc Thesis, 2010. (In Persian)

[20] H. Saghafi, M.R. Ayatollahi, M. Sistaninia, A modified MTS criterion (MMTS) for mixed-mode fracture toughness assessment of brittle materials, *Materials Science and Engineering,* Vol. 527, No. 21-22, pp. 5624–5630, 2010.

[21] M.R. Ayatollahi, M. Nejati, Determination of NSIFs and coefficients of higher order terms for sharp notches using finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 53, No. 4, pp. 164-177, 2011.

[22] A. Ahmed, *Extended finite element method(XFEM)-modeling arbitrary discontinuities and failure analysis,* Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia, M.Sc Thesis, April 2009.

[23] H. Bayesteh, S. Mohammadi, XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials, *Composites: Part B,* Vol. 44, pp. 8–25, 2013.

[24] S. Mohammadi, xfem fracture analysis of composites, ISBN: 978-1-119-97406-2, John Wiley & Sons, September 2012.

[25] I.V. Singh, B.K. Mishra, S. Bhattacharya, R.U. Patil, The numerical simulation of fatigue crack growth using extended finite element method, *International Journal of Fatigue,* Vol. 36, pp. 109–119, 2012.

[26] E. Goli, H. Bayesteh, S. Mohammadi, Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the framework of partition of unity and the path-independent interaction integral, *Engineering Fracture Mechanics,* In Press, Accepted Manuscript, Available online 1 August 2014.

[27] G.R. Irwin, Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 24,No. 3, pp. 361–364, 1957

[28] M.L. Williams, On the stress distribution at the base of a stationary crack, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp.109–14, 1957.

[29] A. Sutradhar, G.H. Paulino, Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, No. 11, November 2004

[30] B. Atzori, P. Lazzarin, G. Meneghetti, M. Ricotta, Fatigue design of complex welded structures, *International Journal of Fatigue*, Vol. 31, pp. 59–69, 2009.

[31] S.G. Larsson, A.J. Carlsson, Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack-tips in elastic–plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 21, pp. 263–77, 1973.

[32] H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, *The stresses analysis of cracks handbook*, ASME Press, 3 Sub edition, January 1, 2000.

[33] S. Melin, The influence of the T-stress on the directional stability of crack., *International Journal of Fracture*, Vol 114, pp. 259–65, 2002.

[34] D.J. Smith, M.R. Ayatollahi, M.J. Pavier, The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 24, pp. 137–150, 2001.

[35] M.R. Ayatollahi, M.J. Pavier, D.J. Smith, Mode I. cracks subjected to large T–stresses, *International Journal of Fracture*, Vol. 117, pp. 159–174, 2002.

[36] B.L. Karihaloo, Size effect in shallow and deep notched quasi-brittle structures, *International Journal of Fracture* , Vol. 95, pp. 379–390, 1999.

[37] G.A. Kardomateas, R.L. Carlson, A.H. Soediono, D.P. Schrage, Near-tip stress and strain fields for short elastic cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 62, pp. 219–232, 1993.

[38] M.R. Ayatollahi, M.M. Mirsayar, M. Nejati, Evaluation of first non-singular stress term in bi-material notches. *Computational Materials Science*, Vol. 50, pp. 752–60, 2010.

[39] P.V. Jogdand K.S.R.K. Murthy, A finite element based interior collocation method for the computation of stress intensity factors and *T*-stresses, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, No. 7, pp. 1116–1127, May 2010.

[40] M. Isida, Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 7, pp. 301–16, 1971.

[41] X. Wang, Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 1339–52, 2002.

[42] C.H. Chen, C.L. Wang, Stress intensity factors and T-stresses for offset double edge-cracked plates under mixed-mode loadings, *International Journal of Fracture*, Vol. 152, pp. 149–62, 2008.

[43] T. Fett, T-stresses in rectangular plates and circular disks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 60, pp. 631–52, 1998.

[44] W.K. Wilson, On combined mode fracture mechanics, Research report 69–1E7-FMECH-R1, *Pittsburgh: Westinghouse Research Laboratories*, 1969.

[45] H. Kitagawa, R. Yuuki, Analysis of arbitrarily shaped crack in a finite plate using conformal mapping, 1st report–construction of analysis procedure andits applicability, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol 43, pp. 4354–4362, 1977.

[46] D.K.L. Tsang, S.O. Oyadiji, Super singular element method for two-dimensional crack analysis, *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 464, pp. 2629–2648, 2008.

[47] J.K. Kim, S.B. Cho, Effect of second non-singular term of mode I near the tip of a v-notched crack. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 32, pp. 346–56, 2009.

[48] Z. Zhao, H.G. Hahn, Determining the SIF of a v-notch from the results of a mixed mode crack, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 43, No. 4, pp. 511–518, 1992.

[49] M. Treifi, S.O. Oyadiji, D.K.L. Tsang, Computations of modes I and II stress intensity factors of sharp notched plates under in-plane shear and bending loading by the fractal-like finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 6468–6484, 2008.