مجله مهندسی مکانیک مدرس، دی 1396، دوره 17، شماره 10، ص‌ص 397-404

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

استفاده از روش مسایل معکوس در اعمال مرزهای مستغرق جامد به فرمولاسیون تاوایی-تابع جریان سیال تراکم ناپذیر لزج

فریدون ثابت‌قدم[1*]، عبدالله شجری قاسم‌خیلی[2]

1- دانشیار، مهندسی مکانیک ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران

2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران

* تهران، صندوق پستی 775/14515 ، fsabet@srbiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 25 مرداد 1396
پذیرش: 25 شهریور 1396
ارائه در سایت: 05 آبان 1396

کلید واژگان:
جریان سیال تراکم ناپذیر لزج
فرمولاسیون تاوایی-تابع جریان
جسم جامد مستغرق
جمله چشمه تکینه
روش مسایل معکوس

چکیده

مقالهٔ پیش‌رو روشی جدید برای اعمال شرایط عدم لغزش\عدم نفوذ بر روی مرزهای نامنظم مستغرق در یک جریان سیال تراکم‌ناپذیر لزج در فرمولاسیون تاوایی-تابع جریان ارایه می‌کند. در این روش، انتگرال‌گیری در زمان به‌صورت شبه ضمنی انجام می‌شود، به‌نحوی که در هر گام زمانی معادلات تاوایی-تابع جریان به دو معادله هلمهولتز و پواسون تبدیل می‌شوند. به سمت راست این معادلات جمله‌های چشمه تکینه‌ای، در درون ناحیه جامد، اضافه می‌شوند به‌طوری که بتوان بر روی یک شبکه دکارتی، شرایط مرزی دلخواه را به آنها اعمال کرد. جمله‌های چشمه با استفاده از روش مسایل معکوس به‌نحوی پیدا می‌شوند که شرایط مرزی مناسب به معادلات تاوایی-تابع جریان اعمال شوند. در نهایت با معلوم شدن این جملات چشمه، معادلات پواسون و هلمهولتز با استفاده از حلگرهای سریع پواسون و هلمهولتز بر روی یک شبکه دکارتی حل می‌شوند. به‌دلیل استفاده از حل‌گرهای سریع، این روش در دسته روش‌های دارای راندمان زیاد، با هزینه محاسباتی از مرتبه $N\log N$، قرار می‌گیرد؛ و همچنین سادگی اعمال آن به مسایل با مرزهای نامنظم باعث انعطاف‌پذیری آن می‌شود. به منظور نشان دادن توانایی‌روش در استخراج جواب‌های فیزیکی، روش پیشنهاد شده برای تحلیل جریان در یک کانال دارای یک مانع جامد مربعی استفاده شده و انطباق نتایج با نتایج تایید شده قبلی نشان داده شده‌است.

Using the Method of Inverse Problems in Implementing the Solid Immersed Boundaries on Vorticity-Streamfunction Formulation of the Incompressible Viscous Fluid Flow

Fereidoun Sabetghadam*, Abdollah Shajari Ghasemkheili

Mechanical and Aerospace Engineering Faculty, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
*POB .775/14515, Tehran, Iran, fsabet@srbiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 August 2017
Accepted 16 September 2017
Available Online 27 October 2017

Keywords:
Incompressible fluid flow
Vorticity-Stream function formulation
Immersed Rigid Body
Singular Source Terms
Method of Inverse Problems

ABSTRACT

A new method is proposed for implementing the no-slip/no-penetration conditions at the irregular immersed boundaries on the vorticity-streamfunction formulation of the incompressible viscous fluid flow. Time integration is performed using a semi-implicit method such that at each time step the vorticity-streamfunction equations are changed to a Helmholtz and a Poisson's equation. Some singular source terms are added to the right hand sides of these equations, in the solid region, such that the desired boundary conditions can be satisfied. The singular source terms are found, using the inverse problems method, such that the desired boundary conditions of the vorticity-streamfunction equations are satisfied. Finally, given these source terms, the Helmholtz and Poisson's equations are solved on a Cartesian grid, using the fast Poisson (and Helmholtz) solvers. Since the fast Poisson's (and Helmholtz) solvers are employed, the method is high performance, with the computational effort of $O(N\log N)$; and it is also flexible because it can be applied easily to the complex geometries. The method is applied in simulation of the fluid flow around a square solid obstacle, placed in a channel, and the agreement of the results with the other benchmark results is shown.

1- مقدمه

ایده روش مرز مستغرق ابتدا توسط پسکین برای مدل‌سازی جریان سیال حول اجسام الاستیک پیشنهاد شد [1]. در روش پسکین یک مجموعه معادلات حل می‌شوند که در ناحیه سیال همان معادلات ناویر-استوکس (در فرم متغیرهای اولیه) هستند و در ناحیه جامد به معادلات هوک تبدیل می‌شوند (بدین ترتیب که از اینرسی الیاف جسم الاستیک چشم‌پوشی شده است). جفت شدن نواحی جامد و سیال از طریق توابع نیروی تکینه‌ای انجام می‌شود که در معادلات سیال نقش مقاومت مرز جامد و در معادلات جامد

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

F. Sabetghadam, A. Shajari Ghasemkheili, Using the Method of Inverse Problems in Implementing the Solid Immersed Boundaries on Vorticity-Streamfunction Formulation of the Incompressible Viscous Fluid Flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 397-404, 2017 (in Persian)

نقش نیروهای ناشی از جریان سیال را دارند. متاسفانه روش پسکین قابل اعمال به اجسام صلب نیست زیرا برای اجسام صلب قانون هوک تکینه می‌شود که باعث میل کردن سفتی معادلات جفت‌شده به سمت بینهایت و لذا واگرایی مجموعه معادلات خواهد شد. روش پسکین بعدها توسط گلدشتین و سایرین اندکی اصلاح شد بطوریکه در برخی حالات قابل اعمال به اجسام صلب باشد [2].

با توجه به انعطاف‌پذیری چنین روش‌هایی؛ عدم نیاز آنها به تولید شبکه، و همچنین راندمان بالای آنها (بدلیل امکان استفاده از حلگرهای سریع)، اینچنین روش‌هایی به سرعت مورد توجه قرار گرفتند، بطوریکه امروزه انواع بسیار متنوعی از آنها بوجود آمده‌اند. برای دیدن دسته‌بندی‌های مرسوم این روش‌ها می‌توان به مراجع [3]، [4] و یا [5] مراجعه کرد.

در دسته روش‌های نیروی گسسته [4] یکی از مرسوم‌ترین‌ها، روش نیروی مستقیم است که توسط مُهدیوسُف ارایه شد [6]. در این روش برای تعیین تابع نیرو ابتدا معادلات برگرز بدون در نظر گرفتن جسم غوطه‌ور در زمان، انتگرال‌گیری شده و سپس از تفاضل سرعت‌های به دست آمده و سرعت دلخواه روی مرز مقدار تابع نیرو برآورد می‌شود. لی و لِوک [7] نیز مرز مستغرق را با تخمینی برای پرش فشار و مشتق سرعت نسبت به بردار نرمال سطح اعمال کردند. در روش آنها تابع نیرو به دو مولفهٔ عمودی و مماسی بر روی مرز تجزیه شده که مقدار عمودی آن در معادلهٔ پواسون حاکم بر فشار وارد می‌شود تا شرط عدم‌نفوذ ارضا شود و شرط عدم لغزش نیز همچنان از طریق لزجت موجود در معادلات اندازه حرکت ارضاء می‌شود. از دیگر روش-های این دسته می‌توان به روش‌های سلول بریده و سلول مجازی اشاره کرد که بدون استفاده مستقیم از مفهوم تابع نیرو، به ارضاء مستقیم شرایط عدم نفوذ و عدم لغزش در عین ارضاء پیوستگی می‌پردازند [4].

از دیدگاه تاریخی روش‌های مرز مستغرق ابتدا برای فرم متغیرهای اولیه معادلات ناویر-استوکس توسعه یافتند. در سال‌های بعد، فرمولاسیون‌های بر پایه تاوایی نیز به تدریج وارد شدند [8-12]. در فرم متغیرهای اولیه، بقاء جرم اغلب از طریق جمله فشار به معادلات اعمال می‌شود. اما باید توجه کرد که: اولا همواره در همسایگی مرز جامد (در عبور از ناحیه سیال به ناحیه جامد و یا برعکس)، میدان فشار دارای ناپیوستگی است که باعث کاهش نرخ همگرایی جواب به مرتبه یک خواهد شد [13]؛ و ثانیا، معادله‌های حاکم بر فشار دارای شرط مرزی نیومن هستند که ارضاء آن در حل‌های عددی اغلب مستلزم طی کردن عملیاتی تکراری و زمان‌بر با نرخ کاهش خطای پایین است[14]. برعکس، در فرمولاسیون تاوایی-خط جریان، بقاء جرم از طریق معادله تابع جریان برقرار می‌شود که غالبا بدون ناپیوستگی، و همچنین دارای شرایط مرزی دیریشله است که حل عددی آن را ساده‌تر و سریع‌تر می‌کند. لذا تلاش برای دستیابی به نرخ‌های همگرایی بالاتر و راندمان‌های بیشتر در فرمولاسیون‌های برپایه تاوایی معقول بنظر می‌رسد. لازم به ذکر است که در فرمولاسیون‌های بر پایه تاوایی نیز نوعی ناپیوستگی، این بار در مقادیر تاوایی در همسایگی مرز جامد، ظاهر خواهد شد؛ اما این ناپیوستگی‌ها به‌صورتی ساده‌تر قابل رفع هستند [8].

با استفاده از الگوی روش لی و لِوک [7]، کالهون با تخمینی از مقدار پرش تاوایی و اعمال شرط پرش به آن، شرایط مرزی عدم لغزش را با استفاده از فرمولاسیون تاوایی-تابع جریان ارضا نموده است [8]. رِن نیز با استفاده از همین شکل از معادلات و ارایهٔ یک روش پیشگویی-تصحیح به این مهم نایل آمده است [9]. در این روش ابتدا میدان جریان بدون در نظر گرفتن جسم جامد حل شده و سپس با وارد کردن یک جملهٔ تصحیح تاوایی در معادلات پواسون حاکم بر تابع جریان، مقدار سرعت را بر روی مرز جسم تصحیح می‌کند. وَنگ [14] با استفاده از ایدهٔ نیروی مستقیم مُهدیوسُف، ابتدا مقادیر تابع نیرو را در معادلات بر پایهٔ متغیرهای اولیه وارد کرده و سپس با کرل گرفتن از معادلات حاکم به معادلهٔ انتقال تاوایی نظیر روش نیروی مستقیم رسیده است که در آن مشتقات تابع نیرو به عنوان جملهٔ چشمه جهت ارضای شرط عدم لغزش ظاهر می‌شوند.

در مقاله حاضر روش جدیدی در اعمال شرایط مرزی مستغرق عدم لغزش\عدم نفوذ به شبکه دکارتی در فرمولاسیون تاوایی-خط جریان ارائه خواهد شد. در این روش، اعمال شرط مرزهای مستغرق بعنوان یک مسئله معکوس[1] دیده شده‌است. انتگرال‌گیری زمانی به‌صورت نیمه‌ضمنی انجام شده‌است که محدوده پایداری بزرگتری را نتیجه داده و ناپیوستگی توزیع تاوایی در همسایگی مرز جامد را به نحو موثری جبران می‌کند. شرایط مرزی مستغرق از طریق تعریف برخی جمله‌های چشمه تکینه و حل یک مسئله معکوس به معادلات هلمهولتز و پواسون ناشی از گسسته‌سازی زمانی اعمال می‌شوند. با توجه به استفاده از شبکه دکارتی، امکان استفاده از روش‌های سریع حل معادلات پواسون و هلمهولتز بر پایه تبدیل فوریه سریع[2] وجود دارد که باعث بالا رفتن راندمان روش شده‌است (در مجموع روش دارای هزینه محاسباتی از مرتبه $(N\log N)$ است که روشی سریع محسوب می‌شود.) ضمنا همانگونه که دیده خواهد شد، محدودیتی در اعمال روش به هندسه‌های پیچیده وجود ندارد که به معنای انعطاف‌پذیری آن است.

در ادامه مقاله، در بخش‌های 2 و 3 فرمولاسیون ریاضی و عددی روش پیشنهادی ارائه خواهد شد. سپس این مطالب در بخش 4 جمع‌بندی و خلاصه می‌شوند، بطوریکه بتوان یک نمای کلی از روش حل، و هزینه محاسباتی آن به دست آورد. در بیشتر مسائل واقعی، علاوه بر مرزهای مستغرق، مرزهای کلاسیک نیز وجود دارند (مانند مرزهای ورود و خروج سیال). لذا برای کامل بودن روش پیشنهادی، در بخش 5 نحوه اعمال این مرزها به حل نیز بیان شده‌اند. در نهایت نیز در بخش 6 روش پیشنهادی به یک مسئله کلاسیک یعنی جریان درون کانالی با یک مانع مربعی اعمال شده، نتایج بررسی و با داده‌های سایر محققین مقایسه شده‌اند.

2- معادلات حاکم

مطابق شکل 1 دامنهٔ Ω با مرز منظم Γ شامل ناحیه سیال Ω_f و یک یا چند ناحیهٔ جامد Ω_s با مرز (یا مرزهای) نامنظم Γ_s که در درون Ω واقع شده‌اند در نظر گرفته می‌شود. همچنین بستار[3] $\bar{\Omega}_s = \Omega_s \cup \Gamma_s$ برای استفاده‌های بعدی تعریف می‌شود.

تغییرات زمانی جریان دوبعدی یک سیال تراکم‌ناپذیر لزج در ناحیهٔ Ω_f می‌تواند در قالب دینامیک تاوایی ω به‌صورت:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + J(\omega,\psi) = \mathrm{Re}^{-1}\nabla^2\omega & \Omega_f \times (0,T] \\ \omega(X,t=0) = \omega_0(X) & X \in \Omega_f \end{cases} \tag{1}$$

مدل شود، مشروط بر اینکه اولا شرایط مرزی مناسب به معادله بالا اعمال شوند و ثانیا تابع جریان ψ در معادله پواسون

$$\begin{cases} \nabla^2\psi_f(X) = -\omega(X) & X \in \Omega_f \\ \psi_f(\Gamma) = \psi_\Gamma \\ \psi_f(\Gamma_s) = \psi_s \end{cases} \tag{2}$$

صدق کند. در معادلات فوق $X = (x_1, x_2)$ بردار موقعیت مکانی، Re عدد رینولدز جریان و $J(\omega,\psi) = (\partial_2\psi\partial_1\omega - \partial_1\psi\partial_2\omega)$ ژاکوبین انتقال از

[1] Inverse problem
[2] Fast Fourier transform (FFT)
[3] Closure

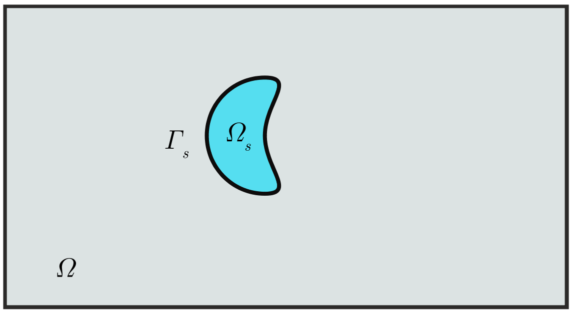

Fig. 1 A solid body is placed in a fluid flow. The solid domain Ω_s with its boundary Γ_s occupies a part of the solution domain Ω with its boundary Γ. Therefore, the fluid domain is defined as $\Omega_f = \Omega - (\Omega_s + \Gamma_s)$.

شکل 1 جسم جامد قرار گرفته در جریان سیال. بخشی از دامنه حل Ω با مرز Γ توسط ناحیه جامد Ω_s با مرز Γ_s اشغال شده‌است. بدین ترتیب ناحیه سیال به‌صورت $\Omega_f = \Omega - (\Omega_s + \Gamma_s)$ تعریف می‌شود.

فضای (x_1, x_2) به (ω, ψ) است.

یکی از نقاط قوت چنین فرمولاسیونی بقایی بودن خود به خودی میدان سرعت‌های حاصل از حل عددی آن است [11]، خاصیتی که در بسیاری از فرمولاسیون‌های دیگر نیازمند در نظر گرفتن تمهیداتی خاص خواهد بود، خصوصا برای روش‌های مرز مستغرق [10].

برای اعمال مرز جامد Γ_s به حل جریان سیال در فرمولاسیون فوق، روش‌های متنوعی وجود دارند که مقاله حاضر حل مرز مستغرق دستگاه معادلات (2)-(1) را پیشنهاد می‌کند. اینچنین روشی دارای محاسنی است که در بخش‌های بعدی به آنها اشاره خواهد شد.

3- روش پیشنهادی

در حل عددی دستگاه معادلات کوپل (2)-(1) معادله دینامیکی (1) باید در زمان انتگرال‌گیری شود، در حالیکه معادله بیضوی (2) بعنوان یک شرط در حین انتگرال‌گیری (1) برقرار باشد [13]. حال در یک تقسیم‌بندی کلی، برای اعمال تکنیک مرز مستغرق به حل عددی سه انتخاب وجود دارد: اعمال مرزهای مستغرق به انتگرال‌گیری زمانی [11]، اعمال مرزهای مستغرق به معادله پواسون [15]، و یا هردو به‌صورت توام. در مقاله حاضر روش سوم استفاده شده‌است که در ادامه به آن پرداخته خواهدشد.

3-1- گسسته‌سازی زمانی

برای دستیابی به دقت‌های زمانی بالاتر و پایداری زمانی بیشتر، انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از یک روش نیمه‌ضمنی انجام خواهد شد. بدین منظور معادله (1) به‌صورت زیر در زمان گسسته می‌شود:

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\delta t} - J(\omega^n, \psi^n) = \mathrm{Re}^{-1}(\nabla^2 \omega)^{n+1} \tag{3}$$

در معادله فوق با توجه به نیمه‌ضمنی بودن گسسته‌سازی زمانی، تنها عملگر لاپلاسین در گام زمانی $n+1$ تقریب زده شده‌است. چنین فرمولاسیونی کاملا سازگار با فرم پیوسته معادلات (2)-(1) خصوصا در مواجهه با مرزهای جامد است که در آن شرط عدم نفوذ از طریق معادله بیضوی (2) و شرط عدم لغزش بدلیل وجود لزجت در معادله (1) اعمال می‌شوند. ضمنا بدلیل صریح بودن جمله ژاکوبین، نیازی به بادسویی[1] نخواهد بود. در حقیقت، با توجه به استفاده از تکنیک مرز مستغرق، گسسته‌سازی مکانی بر روی یک شبکهٔ دکارتی انجام خواهد شد.

[1] Upwinding

با مرتب کردن معادلهٔ (3) معادلهٔ هلمهوتز زیر حاصل خواهد شد:

$$\nabla^2 \omega^{n+1} - \beta \omega^{n+1} = f(\omega^n, \psi^n) \tag{4}$$

که در آن $\beta = (\delta t)^{-1}\mathrm{Re}$ ، و تابع نیروی f نیز عبارتست از:

$$f = \mathrm{Re} \cdot J(\omega^n, \psi^n) - \beta \omega^n \tag{5}$$

که در زمان n داده‌شده است.

از آنجایی که معادله پواسون را می‌توان بعنوان حالتی خاص از معادله هلمهولتز با $\beta = 0$ در نظر گرفت، اگر بتوانیم روشی برای حل مرز مستغرق معادله هلمهولتز بیابیم، هر دو معادلات (1) و (2) از آن روش قابل حل هستند. پیشنهاد مقاله حاضر، حل این معادلات و اعمال مرزهای مستغرق با استفاده از روش مسائل معکوس است.

3-2- اعمال مرزهای مستغرق به معادله هلمهوتز بعنوان یک مسئله معکوس

بر اساس تعاریف شکل 1، معادلهٔ هلمهوتز با شرایط مرزی دیریشلهٔ

$$\begin{cases} \nabla^2 u_f - \beta u_f = f & X \in \Omega_f \\ u_f(\Gamma) = U_\Gamma \\ u_f(\Gamma_s) = U_s \end{cases} \tag{6}$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن β یک عدد ثابت است. اعمال شرط مرزهای مستغرق $u_f(\Gamma_s) = U_s$ به حل این معادله از روش‌های مختلفی امکان‌پذیر است [15]. پیشنهاد مقاله حاضر استفاده از روش‌های مبتنی بر مسائل معکوس با استفاده از جمله‌های چشمه تکینه است [16]. چنانکه خواهیم دید چنین رهیافتی منجر به روشی سریع و دارای دقتی قابل قبول خواهد شد.

در این روش، با اضافه کردن تابع چشمهٔ مجهول $h(Z)$ که در آن $Z \in \bar{\Omega}_s$ تابع جواب $u_f(X)$ به کل دامنه حل گسترش داده می‌شود، یعنی بجای $u_f(X)$ بدنبال $u(Y)$ خواهیم بود بطوریکه:

$$\nabla^2 u(Y) - \beta u(Y) = f(X) + h(Z) \tag{7}$$

که در آن $Y \in \Omega$ و $Z \in \bar{\Omega}_s$ است.

در عین حال می‌خواهیم همه شرط مرزی‌های معادله (5) نیز اعمال شده باشند. بدین منظور، با توجه به خطی بودن معادله هلمهوتز، تجزیه $u = u_0 + \hat{u}$ را انجام می‌دهیم بطوریکه u_0 شرط مرزی U_Γ را ارضاء کند:

$$\begin{cases} \nabla^2 u_0(Y) - \beta u_0(Y) = f(X) & Y \in \Omega \\ u_0(\Gamma) = U_\Gamma \end{cases} \tag{8}$$

شرط مرزی مستغرق U_s نیز از طریق اضافه کردن جملات چشمهٔ $h(Z)$ به معادلات مدل می‌شود، یعنی:

$$\begin{cases} \nabla^2 \hat{u}(Y) = h(Z) & Z \in \bar{\Omega}_s \\ \hat{u}(\Gamma) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

که در آن تابع مجهول $h(Z)$ به گونه‌ای تعیین می‌شود که مقدار تابع u بر روی مرز Γ_s شرط مرزی U_s را ارضاء کند. می‌دانیم که چنین مساله‌ی خوش‌تعریف[2] است.

برای رسیدن به فرمولاسیون مسئله معکوس، ابتدا مسئله (7) به فرم انتگرالی تبدیل می‌شود. در این مسئله اگر تابع گرین عملگر هلمهوتز $G_h(X,Z)$ شناخته شده باشد (متناسب با شرایط مرزی مسئله)، آنگاه خواهیم داشت:

$$\hat{u}(X) = \int_\Omega G_h(X,Z)\, h(Z)\, dZ = u(X) - u_0(X) \tag{10}$$

که در آن Z متغیر انتگرال‌گیری است. حال می‌توان معادله (10) را بعنوان فرمولاسیون معکوس نیز در نظر گرفت، زیرا برای $X \to \Gamma_s$ داریم:

[2] Well posed

$$\int_{\Omega} G_h(X \to \Gamma_s, Z)\, h(Z)\ dZ = \big(U_s - u_0(\Gamma_s)\big) \qquad (11)$$

بدین ترتیب با معلوم بودن هسته انتگرال $G_h(\Gamma_s, Z)$ یک معادلۀ انتگرالی برای تعیین تابع مجهول h بدست آمده‌است. با حل عددی این معادله و یافتن $h(X)$، معادله (7) با استفاده از حلگرهای مرسوم بر روی کل دامنۀ Ω قابل حل خواهد بود. لذا کلید حل مسئله (6) حل معادله انتگرالی (11) است که در ادامه به جزئیات آن پرداخته می‌شود.

3-2-1- حل عددی معادله انتگرالی

مطابق شکل 2 شبکۀ منظم $\mathcal{G}(d)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $d_i = L_i/N_i - 1$ است و L_i و N_i به ترتیب طول و تعداد نقاط در راستاهای $i = 1,2$ هستند. نقاط در چنین شبکه‌ای به دو دستۀ نقاط واقع در ناحیه‌های Ω_S و Ω_f تفکیک می‌شوند که توسط مرز فیزیکی Γ_S از هم جدا شده‌اند. همانند کارهای قبلی نویسندگان [15]، مرز فیزیکی Γ_S بر روی شبکه $\mathcal{G}$ توسط مرز عددی Γ_N با تعریف زیر تقریب زده می‌شود (شکل 2 را ببینید):

$$\Gamma_N = \{\gamma_i \in \mathcal{G} \mid \gamma_i \in \bar{\Omega}_s \;\&\; Ball(\gamma_i, d) \cap \Omega_f \neq 0\} \qquad (12)$$

در کار حاضر شبکه محاسباتی یکنواخت، یعنی $d_1 = d_2 = d$ فرض شده است. با تعاریف صورت گرفته شکل عددی معادلۀ انتگرالی (11) به‌صورت:

$$\sum_{i=1}^{N} G_h(\gamma_j, \gamma_i) h(\gamma_i) d^2 = U_s(\gamma_j) - u_0(\gamma_j)\,,\ \ j = 1, \dots, N \qquad (13)$$

خواهد شد. که منجر به یک دستگاه معادلات خطی به شکل:

$$[A_{M\times M}][h]_M = [b]_M \qquad (14)$$

جهت برآورد M مقدار جملۀ مجهول چشمۀ $h(\gamma_i), i = 1 \dots M$ می‌-شود. در رابطۀ فوق داریم:

$$\begin{cases} A_{j,i} = G_h(\gamma_j, \gamma_i) & i, j = 1 \dots M \\ h_j = h(\gamma_j) & j = 1 \dots M \\ b_j = U_s(\gamma_j) - u_0(\gamma_j) & j = 1 \dots M \end{cases} \qquad (15)$$

با حل دستگاه (14) و یافتن تابع $h(Z)$، سمت راست معادلۀ (7) بدست می‌آید و لذا مسئله با استفاده از روش‌های کلاسیک قابل حل است. ضمنا توجه کنید که M نشان دهنده تعداد نقاط مرز عددی است که در مقابل N یعنی تعداد نقاط شبکه عدد بسیار کوچکی محسوب می‌شود.

واضح است که همین روش برای حالت $\beta = 0$، یعنی معادله پواسون

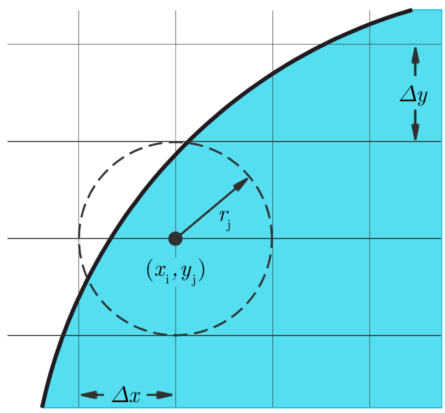

Fig. 2 Definition of the numerical boundaries in a uniform grid (i.e., $dx = dy = d$).

شکل 2 تعریف یک نقطه از مرز عددی در یک شبکۀ یکنواخت (یعنی $dx = dy = d$)

حاکم بر تابع جریان (یعنی معادله (2)) نیز مستقیما قابل استفاده است. بدین ترتیب شرط مرزهای مستغرق هم در معادله سهموی (1) و هم در معادله بیضوی (2) اعمال شده‌اند. همانگونه که در بخش نتایج خواهیم دید، این خصوصیت روش باعث ارضاء هر دو شرط عدم نفوذ و عدم لغزش بر روی مرز جامد خواهد شد.

3-3- حلگر سریع هلمهولتز (پواسون)

یکی از بزرگترین محاسن روش‌های مرز مستغرق در حل معادله (6) نمایان می‌شود. این معادله بر روی یک دامنه منظم با شبکه یکنواخت تعریف شده و لذا به سادگی با استفاده از یک حلگر سریع هلمهولتز (پواسون برای حالت $\beta = 0$) قابل حل است. بکارگیری حلگرهای سریع هلمهولتز باعث افزایش چشمگیر راندمان محاسبات شده، انجام شبیه‌سازی‌های مستقیم و حتی زمان واقعی را امکان‌پذیر می‌سازد (برای مثال مرجع [17] از همین نویسندگان را ببینید).

در کار حاضر برای حل معادله (6) یک کد کامپیوتری بر اساس روش ترکیبی فشرده-طیفی سان و ژوانگ [18] توسعه داده شده‌است. این روش، که در اساس روشی با دقت مرتبه چهارم (برای مسائل به حد کافی هموار) و با تلاش محاسباتی از مرتبه $O(N\log N)$ است را می‌توان در گام‌های زیر خلاصه کرد:

1- ابتدا معادله هلمهولتز $\nabla^2 u + \beta u = f$ (و یا معادله پواسون برای حالت $\beta = 0$)، در یک راستا به فضای فوریه برده می‌شود.

در کار حاضر با توجه به اینکه هدف، تحلیل جریان سیال در کانالها بوده است، همواره برای دیواره‌های بالا و پایین کانال شرط عدم لغزش در نظر گرفته شده‌است. لذا: اولا معادله در راستای x_2 به فضای فوریه برده شده، و ثانیا برای انتقال معادله به فضای فوریه از تبدیل فوریه سریع سینوسی (که با SinFFT نمایش داده خواهد شد) استفاده شده‌است. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [18] مراجعه شود.

2- معادله انتقال یافته به فضای فوریه برای هر خط شبکه $x_2 = \mathrm{Cte.}$ و هر مود k تشکیل یک معادله هلمهولتز یک بعدی به‌صورت $d^2\hat{u}_k/dx_1^2 - (k^2 - \beta)\hat{u}_k = \hat{g}_k$ در راستای x_1 خواهد داد که در آن داریم:

$$\hat{u}_k = [\mathrm{SinFFT}]_k(u)$$
$$\hat{g}_k = [\mathrm{SinFFT}]_k(g)$$

با گسسته‌سازی فشرده مرتبه چهارم این معادله در راستای x_1 یک دستگاه معادلات سه‌قطری حاصل خواهد شد که با حل آن مقادیر $\hat{u}_k$ بدست خواهند آمد.

3- در نهایت مقادیر $u(X)$ از تبدیل معکوس فوریه $\hat{u}_k$ بدست می آیند.

کل عملیات فوق هزینه محاسباتی از مرتبه $O(N\log N)$ نیاز دارد که در آن N تعداد نقاط شبکه است. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع مراجعه کرد.

3-4- جمع‌بندی اعمال شرط مرزهای مستغرق به روش مسایل معکوس

بنابر آنچه که بیان شد، اعمال شرط مرزهای مستغرق به معادلات هلمهولتز (6) و پواسون (2) شامل گام‌های زیر خواهد بود:

1- حل عددی معادله (8) برای تعیین مقادیر $u_0(X)$ با استفاده از حلگر سریع هلمهولتز با تلاش محاسباتی از مرتبه $(N\log N)$.

2- تشکیل دستگاه خطی (14) و حل آن برای تعیین مقادیر مجهول جملات چشمه h با هزینه محاسباتی از مرتبه M^2 توجه کنید که $N \gg M$. یعنی تعداد نقاط مرز عددی همواره از تعداد نقاط شبکه بسیار کوچکتر است.

3- جایگذاری مقادیر h در نقاط مرز عددی و حل معادله (7) با استفاده از حلگر سریع هلمهولتز با هزینه محاسباتی از مرتبه $(N\log N)$.

4- جایگذاری مقادیر $u(X)$ از مقادیر $u_f(X)$ در ناحیهٔ سیال که تقریبا ثابت آن را بدون هزینه فرض کرد. می‌توان

چنانکه دیده می‌شود، عملیات فوق شامل دو مرحله حل معادلات هلمهولتز (پواسون) دارای هزینه‌هایی از مرتبه $(N\log N)$ و یک مرحله عملیات با هزینه‌ای از مرتبه $M^2 \ll (N\log N)$ است و لذا می‌توان فرض کرد که هزینه عملیات در کل با $(N\log N)$ مقیاس می‌شود؛ و بدین ترتیب روشی بسیار سریع محسوب می‌شود. ضمنا در مسایل گذرا با مرزهای جامد ثابت، ماتریس ضرایب در رابطهٔ (15) تنها یک بار برآورد می‌شود و برای مسایل با مرز متحرک است که ماتریس ضرایب باید در هر گام زمانی اصلاح شود.

برای استفاده‌های بعدی الگوریتم چهار مرحله‌ای فوق را با عنوان IBC نامگذاری کرده و به آن ارجاع خواهیم داد[1].

4- الگوریتم کلی حل جریان سیال تراکم‌ناپذیر

با داشتن الگوریتم اعمال شرط مرزی‌های مستغرق از روش مسائل معکوس (IBC)، اکنون می‌توان الگوریتم کلی شبیه‌سازی جریان سیال را مطابق شکل 3 به‌صورت زیر خلاصه کرد:

1- در گام زمانی n توزیع تاوایی ω و شرایط مرزی ψ_Γ و ψ_s داده شده‌اند. لذا با استفاده از الگوریتم IBC توزیع تابع جریان ψ^n قابل محاسبه است. توجه کنید که همه شرایط مرزی، شامل شرایط مرزی کلاسیک و شرایط مرزی مستغرق به ψ اعمال شده‌اند.

2- حال با حل معادله (4) می‌توان در زمان انتگرال‌گیری انجام داد. توجه کنید که شرایط مرزی در گام زمانی n از طریق تابع نیروی سمت راست اعمال شده و شرایط مرزی در گام زمانی $n+1$ نیز از طریق الگوریتم IBC به ω اعمال می‌شوند.

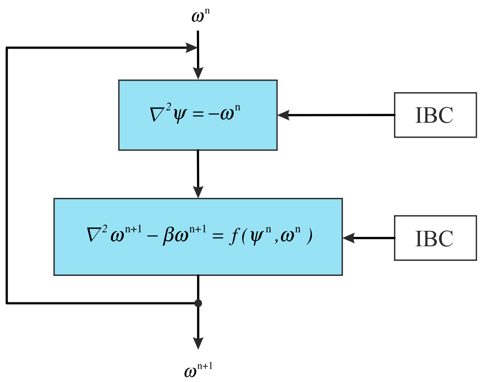

Fig. 3 In each time step a Poisson’s equation and Helmholtz equation are solved in which the immersed boundary conditions are imposed using the inverse problem method (i.e., the IBC algorithm).

شکل 3 در هر گام زمانی یک معادله پواسون و یک معادله هلمهولتز حل می‌شوند که در آنها شرایط مرزی مستغرق از طریق حل یک مسئله معکوس (الگوریتم IBC) اعمال می‌شوند.

[1] Inversed Boundary Conditions (IBC)

چنانکه دیده می‌شود هر گام زمانی شامل دو مرحله اعمال الگوریتم IBC خواهد بود. توجه شود که الگوریتم فوق کاملا بر الگوریتم‌های کلاسیک حل معادلات تاوایی-تابع جریان منطبق است [13]. لذا با استفاده از این روش، به سادگی می‌توان کدهای موجود را که برای دامنه‌های همبند ساده بر روی شبکه‌های دکارتی توسعه یافته‌اند، برای تحلیل جریان سیال حول اجسام صلب اصلاح کرد.

5- شرایط مرزی کلاسیک

علاوه بر جسم صلب قرار گرفته در جریان، مرزهای ورود و خروج سیال و همچنین دیواره‌های صلب کانال نیز باید به معادلات اعمال شوند. با توجه به اینکه این مرزها منطبق بر شبکه دکارتی هستند، لذا در تحقیق حاضر برای سادگی بیشتر، با آنها به‌صورت مرزهای کلاسیک برخورد شده‌است.

1- دیواره‌های کانال:

برای اعمال شرط مرزی تاوایی بر روی دیواره از رابطه وود [19] استفاده شده‌است:

$$\omega_b = \frac{3(\psi_b - \psi_i)}{d^2} - \frac{1}{2}\omega_i \tag{16}$$

که در آن اندیس b بیانگر مرز و i مبین اولین گره در نزدیک مرز در داخل دامنهٔ سیال است. مقادیر تابع جریان بر روی مرزهای جامد به دلیل شرط عدم نفوذ به صورت $\psi_b = \text{Cte.}$ در نظر گرفته شده است.

2- مرز ورودی:

در مرز ورودی پروفیل سرعت داده شده فرض شده است. لذا مقادیر تاوایی از مشتقات پروفیل سرعت ورودی و شرط مرزی تابع‌جریان از انتگرال‌گیری پروفیل سرعت ورودی طبق تعریف این دو کمیت حاصل می‌شود.

3- شرط مرزی خروج:

برای استخراج دینامیک ناپایای جریان، در مرز خروجی از شرط مرزی جابجایی استفاده شده است:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U_0\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = 0 \tag{17}$$

که در آن ϕ کمیت مورد نظر (تابع جریان و یا تاوایی) و τ بردار یکه در راستای جریان و U_0 بیشترین مقدار سرعت در راستای τ است.

6- نتایج

با نگاهی به فرمولاسیون ارایه شده، دیده می‌شود که اعمال آن به هندسه‌های پیچیده به سادگی انجام می‌شود. اما سوال اصلی دقت اعمال شرط‌های عدم لغزش و عدم نفوذ، و به‌صورت همزمان ارضای بقاء جرم در همسایگی مرز جامد است. لذا برای تخمین کارایی روش، در اینجا هندسه‌ای در نظر گرفته می‌شود که بتوان میزان موفقیت الگوریتم را بدون وارد شدن تقریب‌های ناشی از میان‌یابی‌ها و تقریب‌های عددی دیگر سنجید.

با چنین استدلالی در اینجا جریان سیال حول یک مانع مربعی قرار گرفته در یک کانال، حل عددی شده‌است (شکل 4 را ببینید). این مسئله یکی از مسائل کلاسیک دینامیک سیالات محاسباتی است که بارها به‌صورت عددی و تجربی برای محدوده نسبتا بزرگی از اعداد رینولدز بررسی شده‌است [21,20,18,3] و لذا داده‌هایی معتبر برای مقایسه نتایج در دسترس است.

مشخصات هندسی مسئله در جدول 1 آمده‌است. توجه کنید که با چنین ابعادی ضریب انسدادی[2] برابر با 1/8 بدست آمده‌است که برای آن داده‌های

[2] blockage ratio

معتبری وجود دارند. در ورودی کانال پروفیل سرعت سهموی اعمال شده که شرایط عدم لغزش و عدم نفوذ را ارضاء می‌کند. همچنین عدد رینولدز جریان به صورت $\mathrm{Re}=U_0 d/\vartheta$ تعریف شده که در آن U_0 سرعت حداکثر در ورودی کانال و ϑ ضریب لزجت سینماتیکی سیال است.

مسألهٔ فوق بر روی شبکه‌های دکارتی با تراکم‌های مختلف، از (64×256) تا (256×1024) و برای اعداد رینولدز مختلف با استفاده از الگوریتم پیشنهادی حل شده‌است. شکل 5 شبکه (128×512) را در نزدیکی مانع مربعی نشان داده‌است. شکل 6 توزیع تاوایی در نزدیکی جسم مربعی را برای اعداد رینولدز مختلف نشان می‌دهد. برای جریان دائم، جریان‌های با اعداد رینولدز 10 و 40 و 60 و برای جریان گذرا، جریان با عدد رینولدز 200 نمایش داده شده‌است.

یکی از معیارهای سنجش صحت جواب‌های این مسئله طول ناحیه

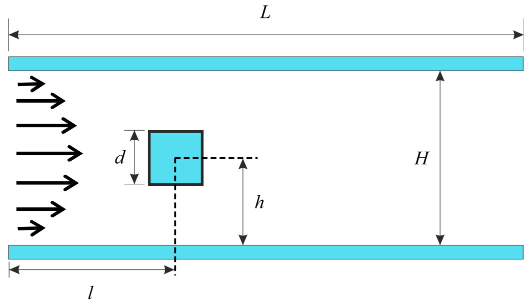

Fig. 4 Square obstacle placed in a channel. The dimensions are provided in Tab. 1. Since the obstacle boundaries are coinciding with the computational grids, the satisfaction of the no-slip/no-penetration and the conservation of mass can be evaluated without confronting the approximations of the interpolations.

شکل 4 مسئله مانع مربعی قرار گرفته در یک کانال. ابعاد در جدول 1 داده شده‌اند. منطبق بودن مرزهای جامد مستغرق بر شبکه محاسباتی باعث می‌شود بتوانیم بدون وارد شدن تقریب‌های ناشی از میان‌یابی‌ها، تخمین دقیق‌تری از موفقیت الگوریتم در اعمال شرط‌های عدم لغزش و عدم نفوذ و ارضاء همزمان بقاء جرم بدست آوریم.

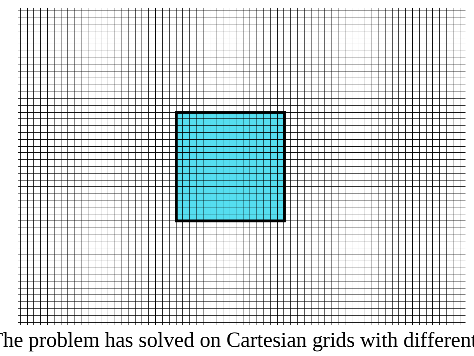

Fig. 5 The problem has solved on Cartesian grids with different resolutions, from (64×256) to (256×1024). In the present figure, as an example, the (128×512) grid is shown in the vicinity of the square obstacle.

شکل 5 مساله بر روی شبکه‌های دکارتی با تراکم‌های مختلف، از (64×256) تا (256×1024) حل شده‌است. در این شکل، بعنوان نمونه، شبکه (128×512) در نزدیکی مانع مربعی نمایش داده شده است.

جدول 1 مشخصات هندسی مسئله مانع مربعی، قرار گرفته در یک کانال (شکل 4). ابعاد به‌نحوی در نظر گرفته‌شده که ضریب انسدادی برابر با 1/8 بدست آید.

Table 1 The geometric dimensions of the problem of Fig.4. The dimensions are chosen such that 1/8 blockage ratio is obtained.

L	H	l	h
$16d$	$8d$	$8d$	$H/2$

بازچرخش[1] است، که برای جریان‌های دائم کمیتی قابل اندازه‌گیری با دقتی قابل قبول محسوب می‌شود. به همین دلیل بر روی این کمیت تحقیقات تقریبا وسیعی انجام شده‌است. از جمله در مرجع [20] با استفاده از دو روش عددی متفاوت (یعنی روش‌های اختلاف محدود و شبکه بولتزمن) برای نسبت انسداد $d/H=1/8$ و برازش منحنی بر روی داده‌های استخراج شده رابطهٔ

$$\frac{Lc}{d}=-0.065+0.0554\mathrm{Re}\,,\quad 5<\mathrm{Re}<60 \tag{18}$$

برای طول بی‌بعد ناحیه بازچرخش بدست آمده‌است که در آن مطابق شکل 7، طول ناحیه بازچرخش با Lc و پهنای مانع مربع با d نمایش داده شده‌است. در شکل 7 نتایج حاصل از تحلیل با روش پیشنهادی و رابطهٔ (18) مقایسه شده‌اند. بیشترین خطا در عدد رینولدز آستانه $(\mathrm{Re}=60)$ اتفاق افتاده که مقدار 2% بوده‌است که برای بسیاری از کاربردها دقتی قابل قبول است.

برای جریان‌های دائم، استقلال جواب از شبکه را نیز می‌توان با استفاده

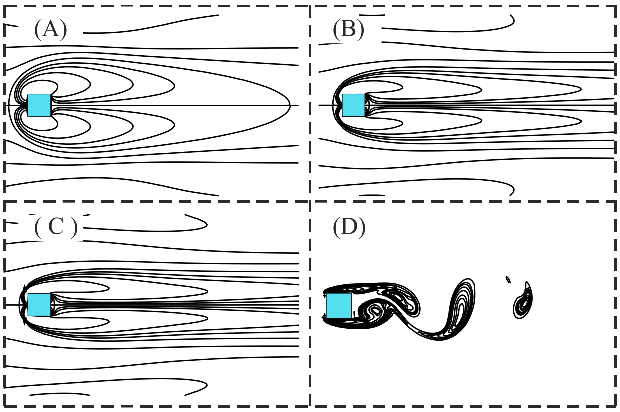

Fig. 6 Vorticity distribution near the square obstacle for different Reynolds numbers: (A) Re=10, (B) Re=40, (C) Re=60, (D) Re=200. The vorticity iso-lines of levels ±40, ±20, ±10, ±5, 0 are shown.

شکل 6 توزیع تاوایی در نزدیکی مانع مربعی برای اعداد رینولدز مختلف: (A) Re=10, (B) Re=40, (C) Re=60, (D) Re=200 . خطوط همتراز تاوایی با مقادیر ±40, ±20, ±10, ±5, 0 نمایش داده شده‌است.

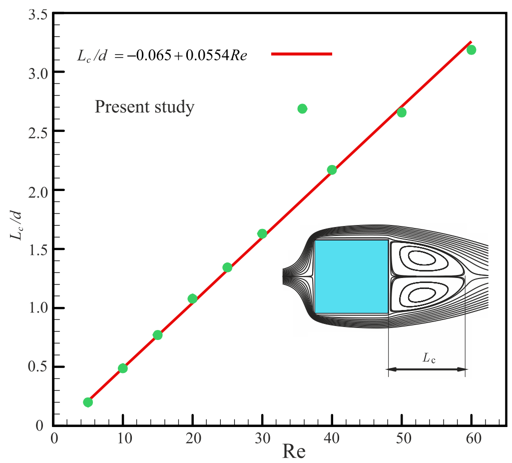

Fig. 7 Non-dimensional circulation length Lc versus Reynolds number. Comparison of the results of the proposed algorithm with the results of Ref. [20]

شکل 7 طول بی‌بعد ناحیه بازچرخش برحسب عدد رینولدز. داده‌ها با نتایج مرجع [20] مقایسه شده‌اند.

[1] circulation

از طول ناحیه بازچرخش بررسی کرد. جدول 2 نسبت L_c/d حاصل از اجرای کد برای جریان با عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 40$ ، حل شده بر روی شبکه‌های با تراکم مختلف را با مقدار حاصل از معادله (18) نشان می‌دهد. چنانکه دیده می‌شود، جواب را می‌توان مستقل از تراکم شبکه دانست.

علاوه بر پارامترهای بزرگ مقیاسی مانند طول ناحیه بازچرخش، می‌توان بر روی نحوه عملکرد روش به‌صورت موضعی در همسایگی مرز جامد نیز اظهار نظر کرد؛ از جمله در مورد میزان موفقیت روش در اعمال شرط‌های عدم لغزش و عدم نفوذ. در شکل 8 دو مولفه سرعت u و v بر روی مرز جامد و در راستای آن، برای رژیم جریان دائم با عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 40$ ارائه شده است. در قسمت بالای شکل، مولفه افقی سرعت، یعنی مولفه u در راستای مرز برای شبکه‌های با تراکم‌های مختلف نمایش داده شده‌است. توجه شود که این مولفه سرعت برای وجوه B و D سرعت نفوذی (عمود بر سطح)، و برای وجوه A و C سرعت لغزشی (مماس بر سطح) محسوب می‌شود. همانگونه که دیده می‌شود، شرط عدم نفوذ (یعنی وجوه B و D) تقریبا به‌صورت کامل و شرط عدم لغزش (یعنی وجوه A و C) با تقریب بیشتری اعمال شده‌اند. باید توجه کرد که این عدم یکسانی در دقت اعمال شرایط عدم لغزش و عدم نفوذ قابل انتظار است؛ زیرا در روش پیشنهادی، اعمال شرط عدم لغزش بدلیل وجود لزجت در معادله انتقال تاوایی انجام می‌شود در حالیکه شرط عدم نفوذ مستقیما بدلیل ارضای معادله پواسون خط جریان اعمال شده‌است. به هر

جدول 2 با بررسی تغییرات طول ناحیه بازچرخش در عدد رینولدز $\mathrm{Re} = 40$ استقلال جواب از تراکم شبکه نشان داده شده‌است.

Table 2 Grid independency of the solution is shown via study of the non-dimensionalized circulation length at $\mathrm{Re} = 40$.

Grid resolution	64	128	256	Eq. (18)
Lc/d	2.0	2.09	2.1	2.151

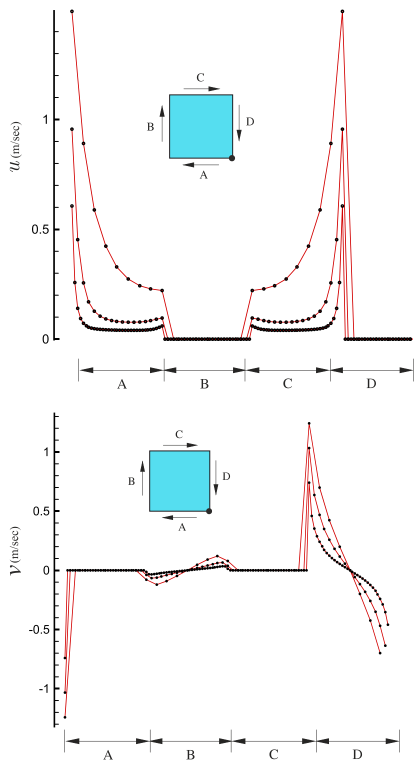

Fig. 8 The velocity components at the solid boundary, along it, for the flow with $\mathrm{Re} = 40$.

شکل 8 مولفه‌های سرعت روی مرز صلب و در راستای آن در جریان با $\mathrm{Re} = 40$.

حال همانگونه که دیده می‌شود، با افزایش تراکم شبکه، دقت اعمال شرط عدم لغزش افزایش یافته‌است.

در قسمت پایین شکل 8 مولفه سرعت عمودی v در راستای مرز جامد ارایه شده‌است. همانگونه که دیده می‌شود، نکات بیان شده در پاراگراف فوق، در مورد مولفه سرعت v نیز کاملا معتبر هستند؛ یعنی شرط عدم نفوذ (وجوه A و C) دقیق‌تر از شرط عدم لغزش (وجوه B و D) اعمال شده‌است

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای شبیه‌سازی جریان سیال دو بعدی تراکم‌ناپذیر در حضور جسم جامد ارایه شد. در این روش ابتدا معادلات حاکم بر جریان سیال در فرم تاوایی-تابع جریان با انتگرال‌گیری در زمان به دو معادله پواسون و هلمهولتز تبدیل می‌شوند. سپس حضور اجسام جامد از روش مسایل معکوس به این معادلات اعمال می‌شود. فرمولاسیون به‌نحوی است که همه عملیات بر روی شبکه دکارتی انجام شده و لذا برای حل معادلات پواسون و هلمهولتز از یک حلگر سریع هلمهولتز (پواسون) استفاده شده‌است. بدین ترتیب تلاش محاسباتی روش از مرتبه $(N\log N)$ است که بسیار سریع محسوب می‌شود.

روش پیشنهادی بر روی یک مسئله نمونه اعمال شده و دقت اعمال شرایط عدم لغزش و عدم نفوذ همراه با اعمال شرط بقاء جرم نشان داده شد.

8- مراجع

[1] C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 2, pp. 252-271, 1972.

[2] D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich, Modeling a no-slip flow boundary with an external force field, *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 354-366, 1993.

[3] F. Sotiropoulos, X. Yang, Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 65, pp. 1-21, 2014.

[4] R. Mittal, G. Iaccarino, Immersed boundary methods, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 37, pp. 239-261, 2005.

[5] A. A. Hosseinjani, A. Ashrafizadeh, A numerical study on the effects of oscillation frequency and amplitude on flow around a flapping airfoil via an improved immersed boundary method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16 pp. 291-301, 2015. (in Persian فارسی)

[6] J. Mohd-Yusof, Combined immersed-boundary/B-spline methods For simulations of flow in complex geometries, *Annual Research Briefs*, pp. 317-327, 1997.

[7] L. Lee, R. J. LeVeque, An immersed interface method for incompressible Navier--Stokes equations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 3, pp. 832-856, 2003.

[8] D. Calhoun, A Cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions, *Journal of Computational Physics*, Vol. 176, No. 2, pp. 231-275 2002.

[9] W. W. Ren, J. Wu, C. Shu, W. M. Yang, A stream function–vorticity formulation-based immersed boundary method and its applications, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 70, No. 5, pp. 627-645 2012 .

[10] F. Sabetghadam, M. Badri, S. Sharafatmandjoor, H. Kor, An Immersed boundary fourier pseudo-spectral method for simulation of confined two-dimensional incompressible flows, *arXiv:1110.5984*, 2011.

[11] F. Sabetghadam, S. Sharafatmandjoor, M. Badri, Construction of solenoidal immersed velocity vectors using the kinematic velocity-vorticity relation, *arXiv:1204.1916*, 2012.

[12] F. Sabetghadam, E. Soltani, Simulation of solid body motion in a Newtonian fluid using a vorticity-based pseudo-spectral immersed boundary method augmented by the radial basis functions, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 26, No. 5, pp. 25-47, 2015.

[13] D. Rempfer, On boundary conditions for incompressible Navier-Stokes problems, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 59, No. 3, pp. 107-125, 2006.

[14] Z. Wang, J. Fan, K. Cen, Immersed boundary method for the simulation of 2D viscous flow based on vorticity–velocity formulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 5, pp. 1504-1520, 2009.

[15] F. Sabetghadam, S. Sharafatmandjoor, F. Norouzi, Fourier spectral embedded boundary solution of the Poisson's and Laplace equations with Dirichlet boundary conditions, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 1, pp. 55-74, 2009.

[16] A. Bogomolny, Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 22, No. 4, pp. 644-669, 1985.

[17] F. Sabetghadam, Pseudo-spectral Vorticity based immersed boundary method (IBM) for interactive real time Direct Numerical Simulation (DNS) of Fluid-Structure Interactions Problem, https://www.youtube.com/watch?v=t6AYZOn-6Eg, 2014.
[18] X. H. Sun, Y. Zhuang, A high-order direct solver for Helmholtz equations with Neumann boundary conditions, *NASA ICASE Technical Report*, No. 97-11, 1997.
[19] S. C. R. Dennis, F. T. Smith, Steady flow through a channel with a symmetrical constriction in the form of a step, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 372, No. 1750, pp. 393-414, 1980.
[20] M. Breuer, J. Bernsdorf, T. Zeiser, F. Durst, Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 21, No. 2, pp. 186-196, 2000.
[21] R. W. Davis, E. F. Moore, L. P. Purtell, A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders, *The Physics of Fluids*, Vol. 27, No. 1, pp. 46-59, 1984.