



Experimental, Analytical, and Numerical Investigation of Damage Mechanics of the Cross-ply Composite Laminate with Matrix Crack

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Ghadami M.¹,
Ghajar R.^{1*}

How to cite this article

Ghadami M, Ghajar R. Experimental, Analytical, and Numerical Investigation of Damage Mechanics of the Cross-ply Composite Laminate with Matrix Crack. Modares Mechanical Engineering, 2022; 22 (12):759-769.

¹ Mechanical Properties Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*Correspondence

Address: Mechanical Properties Research Lab, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

ghajar@kntu.ac.ir

Article History

Received: July 30, 2022
Accepted: September 26, 2022
ePublished: December 17, 2022

ABSTRACT

Once a composite laminate is subjected to quasi-static tensile or fatigue loading, some damage modes initiate and propagate in the laminate. The first damage mode is the matrix crack that forms in the layers with an angle to the loading direction. Although not leading to breakage, these cracks reduce the equivalent mechanical properties of the composite laminate. In this paper, a new nonlinear analytical model is presented and used to predict the stiffness degradation of the cross-ply composite laminates. For this purpose, a new third-order polynomial function is proposed as the Helmholtz free energy of the composite, and the appropriate equations are derived. A microscopic experimental test is designed and accompanied by the analytical model to investigate the damage progression in a glass/epoxy cross-ply laminate. Also, finite-element micromechanical models with periodic boundary conditions (PBC) are proposed and used to determine the damage constants. The model is validated against the 3D micromechanical models and the quasi-static uniaxial loading-unloading experimental tests. The validation shows a very good agreement between the model and the experiments.

Keywords Damage Mechanics, Cross-ply Composite Laminate, Continuum Damage Mechanics, Micromechanics, Nonlinear Model

CITATION LINKS

1- Effect of isotropic and anisotropic damage and plasticity on ductile crack initiation. 2- Investigation of the response of an aluminium plate subjected to repeated low velocity impact ... 3- A novel interface-treated micromechanics approach... 4- Multiscale modeling of the viscoelastic properties of CNT/polymer nanocomposites ... 5- Experimental and numerical investigation on repeated low velocity impact response ... 6- Analysis of composite skin/stringer debonding and failure ... 7- Modeling of the effects of progressive anisotropic damage ... 8- Assessment of delamination growth due to matrix cracking ... 9- Stochastic fatigue life prediction of Fiber-Reinforced laminated composites... 10- Damage-entropy model for fatigue life evaluation ... 11- Axial crush simulation of composites using ... 12- A continuum damage mechanics finite element model ... 13- Application of continuum damage mechanics to predict wear ... 14- Predicting the matrix cracking formation in symmetric composite laminates ... 15- Damage and failure of composite materials. 16- A synergistic damage mechanics approach to durability of composite material systems. 17- Damage analysis for structural integrity and durability of composite materials 18- Damage and fatigue in composites—a personal account. 19- Damage in composite laminates with off-axis plies. 20- Crack opening displacement and the associated response ... 21- A synergistic damage mechanics approach to viscoelastic response ... 22- Analysis of multiple off-axis ply cracks in composite laminates. 23- A synergistic damage mechanics approach for composite laminates ... 24- Evolution of ply cracks in multidirectional composite laminates. 25- A higher order synergistic damage model for prediction of stiffness changes ... 26- Progressive failure analysis of polymer composites ... 27- A synergistic damage mechanics based multiscale model ... 28- Predicting evolution of ply cracks in composite laminates subjected to biaxial loading. 29- Critical stiffness damage envelopes for multidirectional laminated structures ... 30- Development and implementation of a multi-scale model for matrix micro-cracking prediction ... 31- Performance analysis of composite helicopter blade ... 32- Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. 33- Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials ... 34- Tensor transformations and failure criteria for the analysis of fiber composite materials. 35- Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach ...

بررسی مکانیک آسیب تجربی، تحلیلی و عددی کامپوزیت متعامد دارای ترک ماتریس

مهرداد قدمی^{*}، رحمت الله قاجار^{*}

آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده

هرگاه یک ورق کامپوزیتی چندلایه، تحت بارگذاری کششی شبه‌استاتیکی یا بارگذاری خستگی قرار گیرد، چندین نوع آسیب در آن ایجاد می‌شود؛ از جمله ترک‌های ماتریس، ترک‌های ثانویه و لایه‌لایه‌شدگی. اولین نوع آسیب، ترک‌های ماتریس‌اند که در لایه‌های دارای زاویه نسبت به جهت بارگذاری بوجود می‌آیند. این ترک‌ها اگرچه منجر به گسیختگی نمی‌شوند، اما خواص مکانیکی معادل ورق کامپوزیت را کاهش می‌دهند و می‌توانند باعث واماندگی سازه گردند. در این مقاله، یک مدل تحلیلی غیرخطی جدید، برای پیش‌بینی کاهش سفتی ورق‌های کامپوزیت متعامد ارائه و بکار گرفته می‌شود. بدین منظور، یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم بعنوان انرژی آزاد هلمهولتز پیشنهاد و پس از بررسی تحلیلی تابع پیشنهادی، روابط مربوطه استخراج می‌گردند. سپس برای اعمال روند افزایش تعداد ترک‌های ماتریس در روابط، یک آزمایش تجربی میکروسکوپی طراحی و در مورد کامپوزیت متعامد شیشه/اپوکسی استفاده می‌شود. همچنین برای تعیین ثوابت آسیب موجود در روابط استخراج شده، مدل‌های میکرومکانیکی اجزا محدود به همراه شرایط مرزی تناوب (PBC) بکار می‌رود. نتایج این مدل با شبیه‌سازی‌های عددی میکرومکانیکی سه‌بعدی، آزمایش‌های تجربی بارگذاری-باربرداری تک‌محوره شبه‌استاتیکی و پژوهش‌های پیشین صحت‌سنجی می‌گردند. نتایج نشان می‌دهند که مدل پیشنهادی نسبت به مدل‌های خطی و غیرخطی پیشین، پیش‌بینی‌های دقیق‌تری ارائه می‌کند. همچنین با استفاده از روش میکروسکوپی پیشنهادی، روند افزایش تعداد ترک‌های ماتریس به راحتی شناسایی می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: مکانیک آسیب، کامپوزیت متعامد، مکانیک آسیب محیط پیوسته، میکرومکانیک، مدل غیرخطی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۰۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۰۴

*نویسنده مسئول: ghajar@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

زمانیکه یک کامپوزیت چندلایه‌ی متشکل از لایه‌های تک‌جهته تحت بار کششی یا خستگی قرار می‌گیرد، ترک‌های ماتریس یا ترک‌های عرضی، اولین نوع آسیبی‌اند که در لایه‌های با جهت‌گیری عرضی نسبت به جهت بارگذاری بوجود می‌آیند. این ترک‌ها پس از ایجاد، معمولاً بطور کاملاً ناپایدار و سریع در کل ضخامت لایه و پهنای آن رشد می‌کنند و در سطح مشترک بین لایه‌های حاوی ترک و لایه‌های بدون ترک متوقف می‌شوند. بنابراین چون منجر به گسیختگی ورق نمی‌گردند، امکان ادامه‌ی بارگذاری و ایجاد ترک‌های بیشتر فراهم است. ترک‌های ماتریس در ابتدای بارگذاری از یکدیگر دورند و کاهش خواص مکانیکی ناشی از آنها با تعدادشان رابطه‌ی خطی دارد. با افزایش بزرگی بار، تعدادشان افزایش یافته و به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در نتیجه، اغتشاشات

میدان تنش اطراف یک ترک، روی جابه‌جایی بازشدگی ترک‌های مجاور (COD) اثر گذاشته و خواص مکانیکی کامپوزیت با تعداد ترک‌ها به صورت غیرخطی تغییر می‌کند. به این اثر، اثر سپر ترک (Crack Shielding Effect) گفته می‌شود. همانطور که بیان گردید، ترک‌های ماتریس منجر به گسیختگی نمی‌گردند، اما خواص مکانیکی معادل کل کامپوزیت را کاهش می‌دهند. این امر می‌تواند در برخی سازه‌ها باعث از بین رفتن کارایی مناسب شود. نوع دوم آسیب، ترک‌های ثانویه‌اند. این ترک‌های کوچک بازای بارگذاری‌های بسیار زیاد از انتهای ترک‌های عرضی شروع و در راستای سطح مشترک لایه‌ها رشد می‌کنند. پس از افزایش بیشتر بارگذاری بعضی از این ترک‌های کوچک به یکدیگر می‌پیوندند که منجر به پدیده لایه‌لایه‌شدگی (Delamination) می‌شود. این نوع لایه‌لایه‌شدگی به شدت محلی و ناپایدار بوده و گسیختگی کامل سازه را به دنبال دارد.

روش‌های متعددی برای مطالعه‌ی مکانیک آسیب وجود دارد. اما همه‌ی این روش‌ها در دو دسته‌ی کلی مکانیک آسیب محیط پیوسته (CDM) و میکرومکانیک آسیب (MDM) طبقه‌بندی می‌شوند. مطالعات [1,2] و [3, 4] به ترتیب مثال‌هایی از کاربرد CDM و MDM را ارائه داده‌اند. برخی از مطالعات اخیر مکانیک آسیب شامل پاسخ به ضربه‌های کم‌سرعت ورق‌های آلومینیوم [5]، جدایش و واماندگی تحت بار استاتیکی [6]، آسیب پیش‌رونده ناهمسانگرد [7]، رشد لایه‌لایه‌شدگی ناشی از ترک ماتریس [8]، پیش‌بینی عمر خستگی اتفافی [9]، مدل آسیب-آنتروپی برای پیش‌بینی خستگی [10]، شبیه‌سازی خردشدگی (crush) محوری [11]، بررسی اثر زبری سطح بر خستگی [12]، پیش‌بینی سایس بر اثر بار متغیر [13] و پیش‌بینی تشکیل ترک ماتریس [14] می‌شود.

طبق مرجع [15]، روش‌های تحلیلی CDM و محاسباتی MDM بهترین نتایج را ارائه می‌دهند. با این وجود همچنان دارای محدودیت‌هایی می‌باشند. در مورد روش‌های تحلیلی مکانیک آسیب محیط پیوسته، هر معادله تعدادی ثابت مادی مرتبط با آسیب دارد. این ثوابت بایستی از طریق آزمایش‌های تجربی تعیین گردند. هرچه مدل دقیق‌تر و پیچیده‌تر شود، ثوابت بیشتری در روابط بوجود می‌آیند. در نتیجه به تعداد بسیار زیادی آزمایش برای تعیین این ثوابت نیاز است. روش‌های عددی میکرومکانیکی این مشکل را ندارند. اما زمانیکه یک پارامتر در یک مدل عددی تغییر کند، بایستی یک مدل‌سازی جدید صورت گیرد. بنابراین در یک مسأله با چند متغیر، مثل هندسه، لایه‌چینی، جنس مواد، بارگذاری و آسیب، تعداد بسیار زیادی شبیه‌سازی باید انجام شود. برای غلبه بر این محدودیت‌ها، تالرجا (Talreja) در سال ۱۹۹۶ [16]، برای اولین بار یک روش جدید معرفی نمود. در این روش مدل‌سازی تحلیلی، روابط خواص مکانیکی بر حسب آسیب ترک ماتریس، در چهارچوب ترمودینامیک و بر اساس CDM تعیین می‌شوند. سپس



الف) لایه‌چینی دستی لایه‌های شیشه/اپوکسی روی سطح قالب



ب) تحت فشار قرار دادن نمونه به مدت حداقل ۲۴ ساعت



ج) آماده‌سازی نمونه‌ها با اتصال تب‌ها و کرنش‌سنج‌ها بر حسب نیاز (شکل ۱) فرآیند ساخت و آماده‌سازی نمونه‌ها

ثوابت مادی تولید شده در روابط به کمک روش میکرومکانیک عددی تعیین می‌گردند. با این روش دیگر نیازی به انجام آزمایش‌ها یا شبیه‌سازی‌های بسیار زیاد نیست. از سال ۱۹۹۶، این روش پیوسته در حال توسعه و استفاده در مطالعات گوناگون بوده است؛ بعنوان مثال: مطالعات خستگی [17, 18]، ورق‌های دارای لایه‌های خارج‌محوری (off-axis) [19]، قیدهای مختلف [20]، پاسخ ویسکوالاستیک [21]، ورق‌های دارای ترک‌های چندجهته [22-24]، پیش‌بینی تغییرات غیرخطی خواص مکانیکی کامپوزیت [25]، و ماندگاری پیش‌رونده [26]، بارگذاری چندمحوره [27-29]، پیش‌بینی آسیب ناشی از ضربه سرعت پایین [30] و بررسی عملکرد پره‌های بالگرد [31].

تالرجا [16] یک مدل مکانیک آسیب خطی بر مبنای روش پیشنهادی خود برای پیش‌بینی کاهش سفتی کامپوزیت دارای ترک ماتریس ارائه داد. این مدل توانایی پیش‌بینی کاهش غیرخطی سفتی را نداشت. بنابراین سینگ [25] یک مدل غیرخطی بر مبنای روش تالرجا پیشنهاد کرد. مدل پیشنهادی او از یک تابع چندجمله‌ای درجه دوم از پارامترهای آسیب برای انرژی آزاد هلمهولتز بدست می‌آمد. بررسی‌های او نشان داد که اگرچه مدل درجه دوم دقت خوبی دارد، اما ممکن است در برخی حالات نتایج را بدرستی پیش‌بینی نکند. برای حل این مشکل در این مقاله، یک مدل تحلیلی غیرخطی جدید بر مبنای روش تالرجا ارائه و روابط خواص مکانیکی بر حسب پارامترهای آسیب استخراج می‌گردد که یک از نوآوری‌های این پژوهش می‌باشد. سپس نتایج این مدل برای یک کامپوزیت شیشه/اپوکسی به کمک آزمایش‌های تجربی و همچنین روش‌های خطی تالرجا و غیرخطی سینگ مقایسه و صحت‌سنجی می‌شود.

۲- آزمایش‌های تجربی

برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی، از یک کامپوزیت شیشه/اپوکسی با لایه‌چینی $[0/90_4]_s$ استفاده می‌شود. برای این منظور، خواص مکانیکی لایه‌های تک‌جهته شیشه/اپوکسی، نمودار ضریب ارتجاعی E_1 بر حسب بار اعمالی و نمودار بار اعمالی بر حسب چگالی ترک (تعداد ترک بر واحد طول) بایستی از طریق آزمایش‌های تجربی تعیین گردند. بنابراین ۲۱ آزمایش در قالب ۵ دسته انجام می‌شوند. در جدول ۱، آزمایش‌های این پژوهش به تفکیک دسته‌ها، مطرح شده‌اند.

جدول ۱) مشخصات آزمایش‌ها

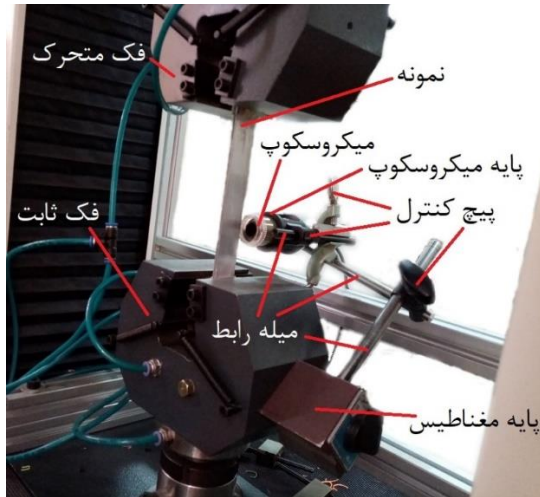
دسته	عنوان	استاندارد	هدف	جنس و لایه‌چینی نمونه	تکرار
الف	کشش	ASTM D3039	تعیین ضریب ارتجاعی E_1 و نسبت پواسون ν_{12}	شیشه/اپوکسی تک‌جهته صفردرجه	۵
ب	کشش	ASTM D3039	تعیین ضریب ارتجاعی E_2	شیشه/اپوکسی تک‌جهته ۹۰درجه	۵
پ	برش	ASTM D5379	تعیین ضریب برشی G_{12}	شیشه/اپوکسی تک‌جهته صفر درجه ناچدار	۵
ت	بارگذاری-باربرداری	-	تعیین منحنی ضریب ارتجاعی E_1 بر حسب بار اعمالی	شیشه/اپوکسی $[0/90_4]_s$	۳
ث	میکروسکوپی	-	تعیین منحنی بار اعمالی بر حسب چگالی ترک	شیشه/اپوکسی $[0/90_4]_s$	۳

جدول ۲) خواص مکانیکی شیشه/اپوکسی تک‌جهته

G_{23}^{**} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{23}	ν_{13}	ν_{12}	E_3 (GPa)	E_2 (GPa)	E_1 (GPa)
۱/۲	۲/۳	۲/۳	۰/۴	۰/۲۷	۰/۲۷	۳/۲	۳/۲	۳۴

* ν_{23} بر اساس مرجع [۳۴] محاسبه شده است.
 ** G_{23} برابر با ضریب برشی اپوکسی فرض شده است.

دستگاه تست کشش، لودسل، اکستنسومتر، میکروسکوپ دیجیتال، پایه مغناطیسی، پایه میکروسکوپ، پیچ‌های کنترل، میله‌های رابط و نمونه آزمایشی می‌باشد.

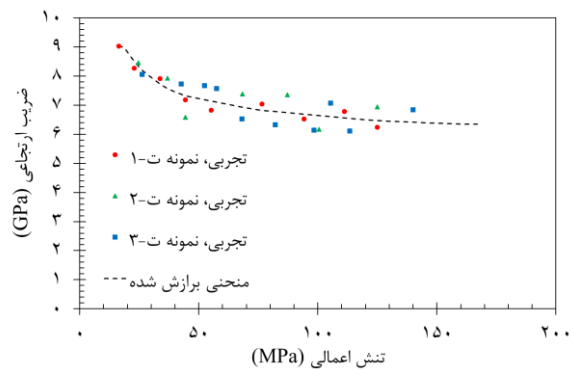


شکل ۳) چیدمان آزمایش میکروسکوپی

برای انجام تصویربرداری میکروسکوپی، ابتدا لبه‌ی نمونه‌ها باید به خوبی سمباده‌زنی شود. سپس نمونه در چیدمان شکل ۳ و تحت بارگذاری کشش شبه‌استاتیک با نرخ بارگذاری ۰/۵ میلی‌متر بر دقیقه قرار می‌گیرد. به ازای چندین مقدار مختلف، بارگذاری متوقف شده و با جابه‌جایی میکروسکوپ روی نقاط مختلف، از تمام لبه‌ی نمونه تصویربرداری می‌گردد. بزرگنمایی میکروسکوپ ۵۰ می‌باشد. قبل از تصویربرداری، بایستی لبه‌ی مورد آزمایش نمونه به کمک یک ماژیک و ایت‌برد بطور کامل رنگ شده و سپس به کمک یک قلم‌موی آغشته به اتانول، پاکسازی شود. در انتها، مطابق شکل ۴، یک منبع نور LED نقطه‌ای پشت لبه‌ی مخالف نمونه قرار گرفته و تصویربرداری انجام می‌گردد. بعد از پایان تصویربرداری، بارگذاری مجدد ادامه می‌یابد. این فرآیند تا گسیختگی کامل نمونه ادامه پیدا می‌کند. طبق شکل ۵، پس از آماده شدن تصاویر میکروسکوپی، فاصله‌ی بین ترک‌های عرضی مجاور بازای یک بارگذاری مشخص، اندازه‌گیری و میانگین‌گیری می‌شود. سپس به کمک نتایج بارگذاری‌های مختلف، منحنی چگالی ترک بر حسب بار اعمالی را می‌توان طبق شکل ۶، رسم کرد.

برای ساخت نمونه‌ها از پارچه‌ی شیشه تک‌جهته ۳۰۰ گرمی و اپوکسی/هاردنر CR209 شرکت ایران‌کامپوزیت با نسبت اپوکسی به هاردنر ۱۰۰ به ۵۵ استفاده شده است. مطابق شکل ۱، نمونه‌ها ابتدا به روش لایه‌چینی دستی روی یک قالب چیده می‌شوند و به مدت حداقل ۲۴ ساعت تحت فشار قرار می‌گیرند. سپس نمونه‌های مورد نیاز برای هر آزمایش به کمک ابزار برش واترجت از ورق مربوطه جدا و در نهایت، با اتصال تب‌ها و کرنش‌سنج‌ها بر حسب نیاز، برای انجام آزمایش آماده می‌گردند.

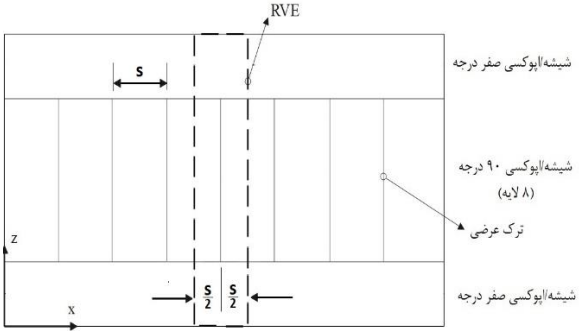
آزمایش‌های تعیین خواص مکانیکی طبق روش‌های اعلام شده در استانداردهای ASTM D3039 [32] و ASTM D5379 [33] صورت می‌پذیرد. نتایج آزمایش‌های تعیین خواص مکانیکی در جدول ۲ ارائه می‌گردد. برای تعیین تجربی منحنی ضریب ارتجاعی E_1 بر حسب بار اعمالی، از آزمایش مرسوم کششی بارگذاری-باربرداری تک‌محوره شبه‌استاتیک در راستای ۱ استفاده می‌شود. در این آزمایش، یک نمونه‌ی آزمایشی تحت کشش شبه‌استاتیک تک‌محوره تا گسیختگی کامل قرار می‌گیرد؛ اما به ازای تعدادی از مقادیر، بارگذاری متوقف و درصدی از بار بطور شبه‌استاتیک برداشته و شیب منحنی تنش-کرنش در باربرداری (ضریب ارتجاعی) اندازه‌گیری و مجدد بارگذاری می‌گردد. سپس با استفاده از شیب منحنی تنش-کرنش به ازای بارگذاری‌های مختلف، می‌توان طبق شکل ۲، منحنی ضریب ارتجاعی بر حسب بار اعمالی را بدست آورد. ابعاد نمونه‌ها و شرایط انجام این آزمایش مطابق استاندارد ASTM D3039 می‌باشد.



شکل ۲) منحنی ضریب ارتجاعی بر حسب بار اعمالی

در این مقاله، برای مطالعه تجربی پیش‌روی آسیب یا بعبارت دیگر تعیین منحنی چگالی ترک بر حسب بار اعمالی، یک آزمایش طراحی می‌شود. چیدمان این آزمایش طبق شکل ۳، شامل

سلول واحد کاملاً یکسان تقسیم کرد. در این مسأله می‌توان این سلول واحد را بعنوان RVE در نظر گرفت. با این انتخاب، طول جزء حجمی نماینده در هر شبیه‌سازی برابر با فاصله بین دو ترک مجاور (s) است. بنابراین برای تعیین منحنی ضریب ارتجاعی بر حسب چگالی ترک ($1/s$)، بایستی چندین شبیه‌سازی با طول‌های مختلف انجام شود.



شکل ۷) سطح مقطع جزء حجمی نماینده

لایه‌های غیرهم‌جهت به صورت یک بخش سه‌بعدی تغییرشکل-پذیر جداگانه ایجاد و سپس قید گره (tie)، بین لایه‌های مجاور اعمال می‌شود. خواص مکانیکی شیشه/اپوکسی از جدول ۲ وارد نرم‌افزار و اجزاء آجری ۸ گرهی خطی (C3D8) بعنوان نوع جزء انتخاب می‌گردد. برای اطمینان از انتخاب صحیح RVE و تناوب آن، بایستی شرایط مرزی تناوب (Periodic Boundary Condition) در شبیه‌سازی اعمال شود. شکل کلی این شرایط مرزی به صورت روابط (۱-الف) تا (۱-ج) است:

$$u_i(x_\alpha + \Delta x_\alpha) = u_i(x_\alpha) + \Delta x_\beta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} \right) \quad (۱-الف)$$

$$\varepsilon_{ij}(x_\alpha + \Delta x_\alpha) = \varepsilon_{ij}(x_\alpha) \quad (۱-ب)$$

$$\sigma_{ij}(x_\alpha + \Delta x_\alpha) = \sigma_{ij}(x_\alpha) \quad (۱-ج)$$

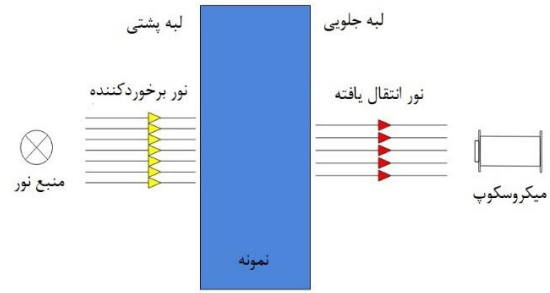
که در آن u_i ، ε_{ij} ، σ_{ij} ، Δx_β و $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} \right)$ به ترتیب جابه‌جایی، کرنش، تنش، بردار تناوب و میانگین حجمی گرادیان جابه‌جایی‌اند. در واقع این شرایط مرزی بیان می‌کند که میدان تنش، کرنش و جابه‌جایی روی مرزهای RVE باید متناوب باشد. برای اعمال این شرایط مرزی، ابتدا باید این روابط بسط داده شوند. برای این منظور طبق شکل ۸، دو نقطه‌ی R و U روی وجوه راست و بالای RVE و نقاط متناظر آنها (L و D) روی وجوه چپ و پایین در نظر گرفته می‌شود.

بارگذاری برای محاسبه‌ی خواص مکانیکی به یکی از سه حالت زیر است:

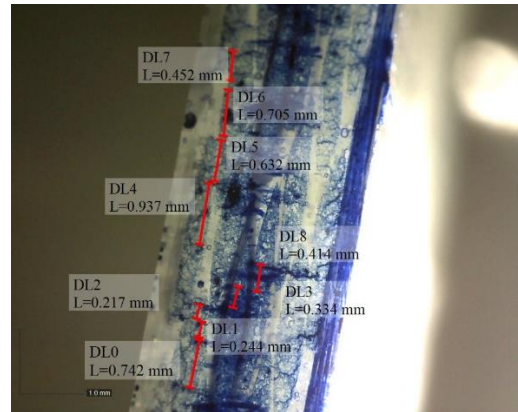
۱- بارگذاری کشش شبه‌استاتیکی روی صفحه yz

۲- بارگذاری کشش شبه‌استاتیکی روی صفحه xz

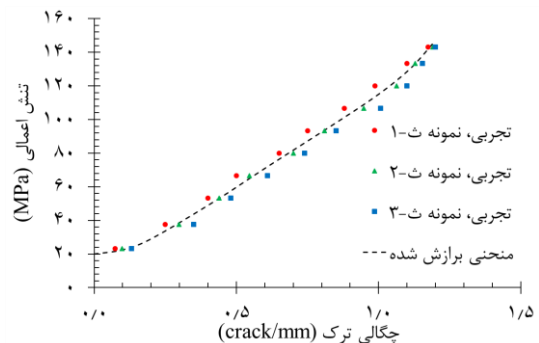
۳- بارگذاری برشی شبه‌استاتیکی روی صفحه‌ی yz در راستای y یا روی صفحه xz در راستای x



شکل ۴) نحوه‌ی تصویربرداری از نمونه



شکل ۵) یک نمونه تصویر میکروسکوپی و اندازه‌گیری فاصله‌ی ترک-های عرضی (آزمایش گروه ث)

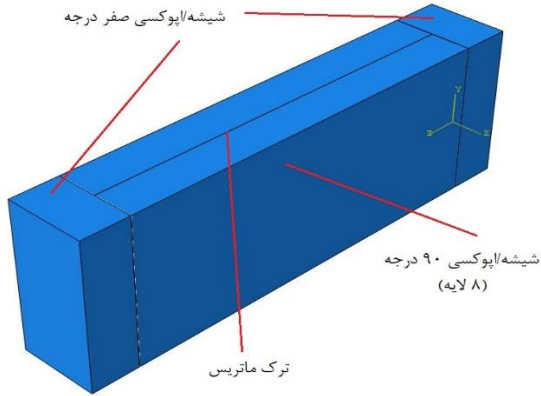


شکل ۶) منحنی بار اعمالی بر حسب چگالی ترک

۳- شبیه‌سازی عددی

علاوه بر روش‌های تجربی و تحلیلی، کاهش سفتی ناشی از ترک-های عرضی به کمک شبیه‌سازی‌های عددی اجزا محدود در مقیاس میکرو نیز محاسبه می‌گردد. همچنین برای تعیین ثوابت موجود در روابط تحلیلی بخش بعدی، از نتایج شبیه‌سازی‌های عددی استفاده خواهد شد. بنابراین در این بخش نحوه‌ی شبیه‌سازی جزء حجمی نماینده (RVE) یک ورق کامپوزیت شیشه/اپوکسی با لایه-چینی $[0/90_4]_s$ در نرم‌افزار آباکوس (Abaqus) ارائه می‌گردد. ترک‌های ماتریس با فاصله‌های یکسان، مشابه، مستقیم و کاملاً رشد یافته در راستای ضخامت و عرض لایه‌ی ۹۰ درجه در نظر گرفته می‌شود. با این فرضیات، ورق کامپوزیتی دارای یک هندسه‌ی متناوب است. یعنی می‌توان آن را مطابق شکل ۷ به تعداد زیادی

$u_3(U) = u_3(D)$
 رابطه (۲) شرط مرزی تناوب برای حالت کشش خالص در صفحه yz یا xz و رابطه (۳) شرط مرزی تناوب برای حالت بارگذاری برشی است.



شکل ۹) جزء حجمی نماینده شبیه‌سازی شده در نرم افزار

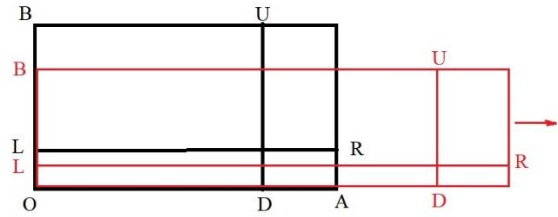
شرایط مرزی تناوب بایستی روی تمام گره‌های موجود روی وجوه چپ، راست، بالا و پایین جزء حجمی نماینده اعمال گردد. این کار به روش دستی بسیار زمانبر و دشوار است. بنابراین به کمک کدنویسی پایتون بطور خودکار صورت می‌پذیرد. همچنین شرط مرزی روی وجوه جلو و عقب (RVE، تنش سطحی صفر Traction Free) است. برای تعیین E_1 و ν_{12} از حالت اول بارگذاری، E_2 حالت دوم و G_{12} حالت سوم استفاده می‌شود. جزء حجمی نماینده شبیه‌سازی شده در محیط نرم‌افزار در شکل ۹، نشان داده شده است.

۴- روابط تحلیلی

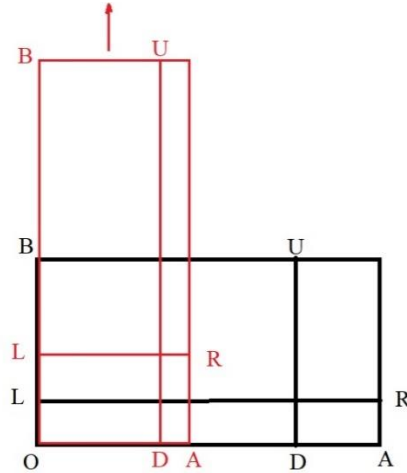
در این بخش نحوه‌ی مدلسازی تحلیلی مکانیک آسیب بر اساس CDM بیان می‌شود. عبارتی یک مدل CDM باید قوانین اول و دوم ترمودینامیک را ارضا نماید. مدل پیشنهادی برای تعیین خواص مکانیکی درون صفحه‌ای (مدل دو بعدی) یک کامپوزیت چندلایه نازک $[0/90]_s$ دارای ترک‌های ماتریس است. بنابراین تنها پارامترهای آسیب، تنش و کرنش درون صفحه‌ای وارد محاسبات می‌شوند. همانند آنچه در بخش شبیه‌سازی عددی مطرح گردید، فرض می‌شود که ترک‌های ماتریس با فاصله‌های یکسان، مشابه، مستقیم و کاملاً رشد یافته در راستای ضخامت و عرض لایه‌ی ۹۰ درجه هستند. قانون اول و دوم ترمودینامیک به شکل نامساوی کلازیوس-دوهم (Clasius-Duhem) در رابطه (۴) ارائه شده‌اند:

$$\sigma : \dot{\varepsilon} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - q \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (۴)$$

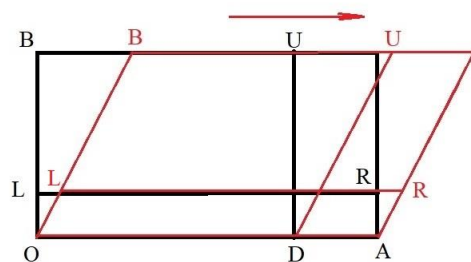
در این رابطه σ ، ε ، ρ ، ψ ، T ، s و q به ترتیب تنش، کرنش، چگالی جرمی، انرژی آزاد هلمهولتز، دما، آنتروپی و بردار شار حرارتی‌اند. همچنین علامت نقطه به معنای مشتق نسبت به زمان است. این



الف) بارگذاری کششی روی صفحه yz



ب) بارگذاری برشی روی صفحه xz



ج) بارگذاری برشی روی صفحه xz در راستای x

شکل ۸) تغییرات سطح مقطع جزء حجمی نماینده

مطابق شکل ۸-الف و ۸-ب، در حالت اول و دوم، سطح مقطع جزء حجمی نماینده پس از تغییر شکل همچنان به صورت مستطیل باقی می‌ماند؛ اما در حالت سوم (شکل ۸-ج) سطح مقطع به شکل متوازی‌الاضلاع می‌شود. پس از انجام محاسباتی، رابطه (۱-الف) برای بارگذاری کششی و برشی برای نقاط L و R و همچنین U و D به ترتیب به روابط (۲) و (۳) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(R) &= u_1(L) + u_1(A) \\ u_2(R) &= u_2(L) \\ u_3(R) &= u_3(L) \\ u_1(U) &= u_1(D) \\ u_2(U) &= u_2(D) + u_2(B) \\ u_3(U) &= u_3(D) \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} u_1(R) &= u_1(L) + u_1(A) \\ u_2(R) &= u_2(L) + u_2(A) \\ u_3(R) &= u_3(L) \\ u_1(U) &= u_1(D) + u_1(B) \\ u_2(U) &= u_2(D) + u_2(B) \end{aligned} \quad (۳)$$

$$E_y = \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_2 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 \right)^2 / \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_1 \right) \quad (۱۰-ب)$$

$$\nu_{xy} = \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 \right) / \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_2 \right) \quad (۱۰-ج)$$

$$G_{xy} = G_{xy}^0 + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_3 \quad (۱۰-د)$$

در این روابط E, ν, G و $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ به ترتیب ضریب ارتجاعی، نسبت پواسون، ضریب برشی و ثوابت رابطه‌ی آسیب هستند. همچنین بالانویس صفر نشان‌دهنده‌ی حالت اولیه (بدون آسیب) است. این مدل، تغییرات خواص مکانیکی با آسیب (چگالی ترک) را بطور خطی پیش‌بینی می‌کند. این پیش‌بینی در اوایل بارگذاری که ترک‌ها از یکدیگر دورند، دقت خوبی دارد. اما همانطور که در بخش مقدمه ذکر شد، با افزایش بارگذاری، ترک‌های ماتریس به یکدیگر نزدیکتر شده و بر هم اثر می‌گذارند. در نتیجه تغییر خواص به صورت غیرخطی می‌شود و مدل خطی برای آن دقت خوبی ندارد. سینگ [۲۵] برای رفع این مشکل، رابطه (۱۱) را بعنوان تابع هلمهولز پیشنهاد داد:

$$\rho\psi = \{c_1 \varepsilon_1^2 + c_2 \varepsilon_2^2 + c_3 \varepsilon_3^2 + c_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2\} + \{c_5 D_1 + c_6 D_2\} \varepsilon_1^2 + \{c_7 D_1 + c_8 D_2\} \varepsilon_2^2 + \{c_9 D_1 + c_{10} D_2\} \varepsilon_3^2 + \{c_{11} D_1 + c_{12} D_2\} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \{c_{13} \varepsilon_1 \varepsilon_3 D_3 + c_{14} \varepsilon_2 \varepsilon_3 D_3\} + \{c_{15} D_1^2 + c_{16} D_2^2\} \varepsilon_1^2 + \{c_{17} D_1^2 + c_{18} D_2^2\} \varepsilon_2^2 + \{c_{19} D_1^2 + c_{20} D_2^2\} \varepsilon_3^2 + \{c_{21} D_1^2 + c_{22} D_2^2\} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \{c_{23} \varepsilon_1 \varepsilon_3 D_3^2 + c_{24} \varepsilon_2 \varepsilon_3 D_3^2\} \quad (۱۱)$$

این تابع شامل توان دوم پارامترهای آسیب می‌شود. سپس سینگ روابط (۱۲-الف) تا (۱۲-د) را برای پیش‌بینی تغییرات خواص مکانیکی کامپوزیت بر اثر آسیب ترک ماتریس استخراج نمود [25]:

$$E_x = \left(\frac{E_x^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_1 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_1 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_4 \right)^2 / \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_2 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_2 \right) \quad (۱۲-الف)$$

$$E_y = \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_2 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_2 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_4 \right)^2 / \left(\frac{E_x^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_1 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_1 \right) \quad (۱۲-ب)$$

$$\nu_{xy} = \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_4 \right) / \left(\frac{E_x^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_1 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_1 \right) \quad (۱۲-ج)$$

$$G_{xy} = G_{xy}^0 + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_3 + 2 \frac{\kappa^2 t_c^4}{s^2 t^2} b_3 \quad (۱۲-د)$$

برای استفاده از روابط (۱۲-الف) تا (۱۲-د)، بایستی ثوابت موجود در آنها برای کامپوزیت شیشه/اپوکسی تعیین شود. در مدل خطی تالرجا ۴ ثابت κa_i و در مدل غیرخطی سینگ ۸ ثابت κa_i و $\kappa^2 b_i$ وجود دارد. در این روش، ثوابت از طریق نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی برای حالات مرجع تعیین می‌گردند. بطور مثال برای مدل خطی، خواص مکانیکی بازای یک حالت مرجع $s = s_1$ با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی مطرح شده در بخش ۳ تعیین و در روابط (۱۰-الف) تا (۱۰-د) جایگذاری می‌شود. با این کار، یک دستگاه

نامساوی برای هر فرآیندی باید برقرار باشد و اساس مکانیک آسیب محیط پیوسته CDM است. تابع انرژی آزاد هلمهولز برای یک کامپوزیت دارای ترک ماتریس در شرایط دما ثابت به شکل رابطه (۵) تعریف می‌شود [15]:

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, D_{ij}) \quad (۵)$$

که D_{ij} پارامترهای آسیب ناشی از ترک ماتریس‌اند. با جایگذاری (۵) در (۴) و دیفرانسیل‌گیری، رابطه (۶) بدست می‌آید:

$$d\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} \quad (۶)$$

بنابراین ماتریس سفتی به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود [15]:

$$C_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (۷)$$

با فرض آسیب‌های درون صفحه‌ای [15]:

$$D_{11} \equiv D_1 = \frac{\kappa t_c^2}{st} \sin(\theta) \quad (۸-الف)$$

$$D_{22} \equiv D_2 = \frac{\kappa t_c^2 \cos^2(\theta)}{st \sin(\theta)} \quad (۸-ب)$$

$$D_{12} \equiv D_3 = \frac{\kappa t_c^2}{st} \cos(\theta) \quad (۸-ج)$$

در روابط (۸-الف) تا (۸-ج) $\theta, \kappa, t, s, t_c$ به ترتیب یک عدد ثابت، زاویه ترک‌های ماتریس نسبت به راستای بارگذاری، فاصله ترک‌های مجاور، ضخامت کل و ضخامت لایه دارای ترک ماتریس-اند. آسیب ناشی از ترک ماتریس در روش پیشنهادی تالرجا بر اساس جابه‌جایی بازشدگی ترک COD مشخصه‌سازی می‌شود. اما پس از ساده‌سازی، مطابق روابط (۸-الف) تا (۸-ج)، پارامترهای آسیب تابعی از فاصله ترک‌های مجاور s یا چگالی ترک $1/s$ (تعداد ترک بر واحد طول) می‌گردند. بنابراین مقدار چگالی ترک در این روش اهمیت زیادی هم در محاسبه تغییرات خواص مکانیکی و هم در بررسی پیش‌روی آسیب دارد. برای تعیین ماتریس سفتی از رابطه (۷)، بایستی تابع انرژی آزاد هلمهولز مشخص باشد. در روش ترکیبی تالرجا، یک تابع چندجمله‌ای برای این انرژی پیشنهاد شده و در رابطه (۷) جایگذاری می‌گردد. سپس با انجام یک روند تحلیلی، رابطه‌ی بین خواص مکانیکی و آسیب تعیین می‌شود. تالرجا [15] یک تابع چندجمله‌ای شامل مرتبه‌ی اول پارامترهای آسیب به شکل رابطه (۹) ارائه کرد:

$$\rho\psi = \{c_1 \varepsilon_1^2 + c_2 \varepsilon_2^2 + c_3 \varepsilon_3^2 + c_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2\} + \{c_5 \varepsilon_1^2 D_1 + c_6 \varepsilon_1^2 D_2\} + \{c_7 \varepsilon_2^2 D_1 + c_8 \varepsilon_2^2 D_2\} + \{c_9 \varepsilon_3^2 D_1 + c_{10} \varepsilon_3^2 D_2\} + \{c_{11} \varepsilon_1 \varepsilon_2 D_1 + c_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 D_2\} + \{c_{13} \varepsilon_1 \varepsilon_3 D_3 + c_{14} \varepsilon_2 \varepsilon_3 D_3\} \quad (۹)$$

که در آن $c_i, i = 1, 2, \dots$ ثوابت رابطه هستند. پس از جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۷)، انجام محاسبات ریاضی و بسط ماتریس سفتی، روابط (۱۰-الف) تا (۱۰-د) برای حالت $\theta = 90^\circ$ بدست می‌آیند [15]:

$$E_x = \left(\frac{E_x^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_1 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_c^2}{st} a_4 \right)^2 / \left(\frac{E_y^0}{1 - \nu_{xy}^0 \nu_{yx}^0} + 2 \frac{\kappa t_c^2}{st} a_2 \right) \quad (۱۰-الف)$$

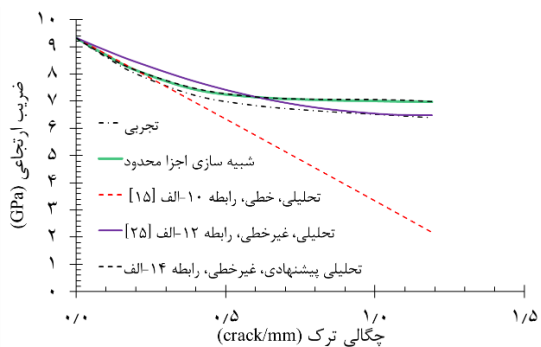
می‌گردد که بارگذاری مربوطه باعث باز شدن دهانه ترک شود. دهانه ترک‌های بین لایه‌ای فقط بر اثر بارگذاری خارج صفحه‌ای یا بارگذاری فشاری امکان بازشدگی دارند. چون در این مقاله تنها خواص مکانیکی و بارگذاری کششی درون صفحه‌ای بررسی و مدلسازی می‌شود، می‌توان از اثر این آسیب‌های بین‌لایه‌ای صرف‌نظر نمود. شایان ذکر است که این ترک‌های بین‌لایه‌ای روی پیشروی آسیب، واماندگی و در نتیجه روی منحنی کاهش سفتی بر حسب بار اعمالی اثر قابل‌توجهی دارند؛ اما بررسی این منحنی موضوع مطالعه‌ی این مقاله نیست.

۵- صحت‌سنجی، نتایج و بحث

در بخش‌های قبل، نحوه‌ی تعیین کاهش سفتی ورق کامپوزیت شیشه/اپوکسی ناشی از آسیب ترک‌های ماتریس به سه روش تجربی، تحلیلی و عددی مطرح و توضیح داده شد. با بررسی صحت ضریب ارتجاعی E_1 و بدلیل وابسته بودن روابط به یکدیگر، می‌توان از صحت تمام نتایج اطمینان حاصل نمود [15] برای مقایسه‌ی مدل پیشنهادی با مدل‌های مراجع [15] و [25] و همچنین صحت-سنجی آن با نتایج تجربی و شبیه‌سازی، شکل ۱۰ ارائه می‌شود.

با توجه به شکل ۱۰، بیشترین اختلاف بین نتایج تجربی و شبیه‌سازی عددی، در بارگذاری‌های نزدیک به گسیختگی بوده و مقدار آن حدود ۹ درصد است. بنابراین شبیه‌سازی عددی میکرومکانیکی انجام شده، دقت بسیار خوبی دارد. البته شبیه‌سازی عددی، سفتی را بیش از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند. زیرا برخی از آسیب‌هایی که در نمونه‌های تجربی بوجود می‌آیند در شبیه‌سازی لحاظ نمی‌گردد. تعداد این آسیب‌ها در ابتدا کم است؛ اما هر چه بارگذاری افزایش می‌یابد، تعداد این آسیب‌ها بیشتر شده و در نتیجه در بارگذاری‌های بالاتر رفته‌رفته اختلاف بین نتایج عددی و تجربی بیشتر می‌شود. با توجه به نتایج شکل ۱۰، روش میکرومکانیک عددی دقت خوبی داشته و می‌تواند بعنوان معیاری برای صحت-سنجی مدل‌های تحلیلی و همچنین کالیبره کردن آنها مورد استفاده قرار گیرد.

تا حدود چگالی ۰/۲ ترک بر میلی‌متر، مدل تحلیلی خطی پیش-بینی‌های بسیار خوبی ارائه می‌دهد. اما با افزایش چگالی ترک،



شکل ۱۰) منحنی ضریب ارتجاعی بر حسب چگالی ترک

معادلات خطی ۴ معادله - ۴ مجهول (مجهولات ثابت‌اند) تشکیل شده که با حل آنها ثابت بدست می‌آیند. به همین ترتیب در مدل غیرخطی پیشنهادی سینگ، دو حالت مرجع $s = s_1$ و $s = s_2$ برای تعیین ثابت نیاز است. با جایگذاری این دو حالت مرجع در روابط (۱۲-الف) تا (۱۲-د) یک دستگاه ۸ معادله - ۸ مجهول ایجاد و با حل آن ثابت تعیین می‌گردند.

سینگ اعلام کرد که مدل غیرخطی پیشنهادی او نسبت به انتخاب حالات مرجع حساس بوده و امکان خطا در پیش‌بینی‌ها وجود دارد. در این مقاله برای غلبه بر این مشکل، یک تابع غیرخطی جدید بعنوان تابع هلمهولتز به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\rho\psi = \{c_1\varepsilon_1^2 + c_2\varepsilon_2^2 + c_3\varepsilon_3^2 + c_4\varepsilon_1\varepsilon_2\} + \{c_5D_1 + c_6D_2\}\varepsilon_1^2 + \{c_7D_1 + c_8D_2\}\varepsilon_2^2 + \{c_9D_1 + c_{10}D_2\}\varepsilon_3^2 + \{c_{11}D_1 + c_{12}D_2\}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \{c_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3D_3 + c_{14}\varepsilon_2\varepsilon_3D_3\} + \{c_{15}D_1^2 + c_{16}D_2^2\}\varepsilon_1^2 + \{c_{17}D_1^2 + c_{18}D_2^2\}\varepsilon_2^2 + \{c_{19}D_1^2 + c_{20}D_2^2\}\varepsilon_3^2 + \{c_{21}D_1^2 + c_{22}D_2^2\}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \{c_{23}\varepsilon_1\varepsilon_3D_3^2 + c_{24}\varepsilon_2\varepsilon_3D_3^2\} + \{c_{25}D_1^3 + c_{26}D_2^3\}\varepsilon_1^2 + \{c_{27}D_1^3 + c_{28}D_2^3\}\varepsilon_2^2 + \{c_{29}D_1^3 + c_{30}D_2^3\}\varepsilon_3^2 + \{c_{31}D_1^3 + c_{32}D_2^3\}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \{c_{33}\varepsilon_1\varepsilon_3D_3^3 + c_{34}\varepsilon_2\varepsilon_3D_3^3\} \quad (13)$$

این تابع شامل جملات درجه سوم از پارامترهای آسیب ترک ماتریس می‌باشد. با انجام فرآیند ریاضی مشابه، خواص مکانیکی به صورت روابط (۱۴-الف) تا (۱۴-د) تعیین می‌شوند:

$$E_x = \left(\frac{E_x^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_1 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_1 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_1 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_4 + \frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_4 \right)^2 / \left(\frac{E_y^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_2 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_2 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_2 \right) \quad (14-الف)$$

$$E_y = \left(\frac{E_y^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_2 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_2 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_2 \right) - \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_x^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_4 + \frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_4 \right)^2 / \left(\frac{E_x^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_1 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_1 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_1 \right) \quad (14-ب)$$

$$\nu_{xy} = \left(\frac{\nu_{xy}^0 E_y^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + \frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_4 + \frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_4 + \frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_4 \right) / \left(\frac{E_y^0}{1-\nu_{xy}^0\nu_{yx}^0} + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_2 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_2 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_2 \right) \quad (14-ج)$$

$$G_{xy} = G_{xy}^0 + 2\frac{\kappa t_\varepsilon^2}{st} a_3 + 2\frac{\kappa^2 t_\varepsilon^4}{s^2 t^2} b_3 + 2\frac{\kappa^3 t_\varepsilon^6}{s^3 t^3} f_3 \quad (14-د)$$

در این روابط، ۱۲ ثابت $\kappa^3 f_i$ و $\kappa^2 b_i$ ، κa_i وجود دارد که بایستی به کمک ۳ حالت مرجع و تشکیل یک دستگاه معادلات خطی ۱۲ معادله - ۱۲ مجهول و حل آن، تعیین گردند.

آنچه که تا اینجا مطرح گردید، بررسی اثر آسیب ترک‌های ماتریس بر خواص مکانیکی کامپوزیت بود. اما همانطور که در مقدمه اشاره شد، انواع دیگری از آسیب وجود دارد؛ ترک‌های کوچک ثانویه و ترک‌های لایه‌لایه‌شدگی. نکته حائز اهمیت در مورد این آسیب‌ها آن است که تنها روی خواص مکانیکی خارج از صفحه اثر دارند. زیرا آسیب ناشی از ترک تنها زمانی باعث تغییر خواص مکانیکی

پیوسته (CDM)، پیشنهاد و بکار گرفته شد. روش‌های عددی و تحلیلی به کمک نتایج تجربی صحت‌سنجی شدند. توافق بسیار خوبی بین نتایج تجربی، عددی و تحلیلی وجود داشت. همچنین مدل تحلیلی پیشنهادی جدید با مدل‌های مشابه پیشین مقایسه گردید. مدل پیشنهادی جدید ضمن دقت مناسب در پیش‌بینی کاهش سفتی، حساسیت کمتری نیز نسبت به انتخاب حالات مرجع دارد. سه معیار برای انتخاب حالات مرجع برای دستیابی به کمترین خطا و انطباق نتیجه مدل تحلیلی بر نتیجه شبیه‌سازی عددی پیشنهاد شد. بطور خلاصه نکات برجسته این مقاله عبارتند از:

- ۱- یک مدل تحلیلی غیرخطی جدید برای پیش‌بینی کاهش سفتی ورق کامپوزیت متعامد دارای ترک ماتریس پیشنهاد شد.
- ۲- ترک‌های ثانویه و ترک‌های لایه‌لایه‌شدگی روی خواص مکانیکی درون صفحه‌ای در حالت بارگذاری کششی درون صفحه‌ای اثر ندارند.
- ۳- روش شبیه‌سازی عددی جزء حجمی نماینده تحت بار برشی و اعمال شرایط مرزی تناوب روی آن پیشنهاد و اجرا گردید.

تاییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیر ایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله از برخی نتایج حاصل از رساله دکتری نویسنده اول استفاده شده است. هیچ تعارض منافع دیگری برای اظهار وجود ندارد.

منابع مالی: هزینه‌های این پژوهش از بودجه شخصی و همچنین حمایت مالی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تأمین گردیده است.

منابع

- 1- Keshavarz A, Ghajar R. Effect of isotropic and anisotropic damage and plasticity on ductile crack initiation. *International Journal of Damage Mechanics*. 2019 Jun;28(6):918-42.
- 2- Ghajar R, Khalili SM, Yarmohammad Tooski M, Alderliesten RC. Investigation of the response of an aluminium plate subjected to repeated low velocity impact using a continuum damage mechanics approach. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2015 Apr;38(4):475-88.
- 3- Karimi M, Ghajar R, Montazeri A. A novel interface-treated micromechanics approach for accurate and efficient modeling of CNT/polymer composites. *Composite Structures*. 2018 Oct 1;201:528-39.
- 4- Shajari AR, Ghajar R, Shokrieh MM. Multiscale modeling of the viscoelastic properties of CNT/polymer nanocomposites, using complex and time-dependent homogenizations. *Computational Materials Science*. 2018 Feb 1;142:395-409.
- 5- Ghajar R, Khalili SM, Yarmohammadi M. Experimental and numerical investigation on repeated low velocity impact response of aluminum plate using

اختلاف بین مدل تحلیلی، تجربی و شبیه‌سازی زیاد و بازای چگالی ترک‌های بالا، سفتی کامپوزیت بسیار کم پیش‌بینی می‌شود. با توجه به شکل ۱۰، علت این موضوع کاملاً واضح است. زیرا ترک‌های ماتریس در ابتدای بارگذاری از یکدیگر دورند و دهانه آنها تحت بار برآحتی باز می‌شود. در نتیجه هر چه تعداد ترک‌ها در این حالت بیشتر باشد، بازای بار یکسان، تغییر طول نمونه بیشتر است؛ بنابراین می‌توان گفت که کاهش سفتی ناشی از ترک‌های ماتریس با تعدادشان رابطه‌ی خطی دارد. اما با افزایش بزرگی بار، تعداد این ترک‌ها افزایش یافته و به یکدیگر نزدیک می‌شوند و اغتشاشات میدان تنش اطراف یک ترک، بازشدگی دهانه ترک مجاورش را محدود می‌کند. در نتیجه شیب نمودار سفتی بر حسب چگالی ترک کاهش می‌یابد و روند آن غیرخطی می‌شود.

برای پیش‌بینی کاهش غیرخطی، مدل پیشنهادی سینگ [25]، طبق رابطه (۱۲-الف) در شکل ۱۰ مورد استفاده قرار گرفت. با وجود اینکه طبیعت غیرخطی منحنی در این مدل در نظر گرفته شده، اما دقت پیش‌بینی‌ها به اندازه کافی نیست. این موضوع قبلاً توسط سینگ نیز مطرح شده بود. علاوه بر این او نشان داده بود که مدل غیرخطی درجه دوم به انتخاب حالات مرجع حساس است و حتی می‌تواند در برخی حالات نتایج اشتباهی ارائه دهد. بنابراین برای کاهش خطا پیشنهاد داد که یک حالت مرجع از چگالی ترک کم و یک حالت مرجع از چگالی ترک بسیار زیاد استفاده شود.

با توجه به شکل ۱۰، مدل جدیدی که در این مقاله پیشنهاد و روابط آن استخراج گردید با دقت مناسبی بازای تمام چگالی ترک‌ها، کاهش سفتی را پیش‌بینی می‌کند و بر منحنی بدست‌آمده از روش عددی منطبق است. همچنین حساسیت این مدل نسبت به انتخاب حالات مرجع بسیار کم بوده و در صورتیکه معیارهای زیر رعایت شود، پیش‌بینی مدل کاملاً منطبق بر نتایج عددی می‌شود:

- ۱- یک حالت مرجع در محدوده چگالی ترک کمتر $0/2$ (ناحیه خطی) انتخاب شود.
- ۲- یک حالت مرجع در محدوده‌ی چگالی ترک $0/4$ تا $0/6$ انتخاب گردد.
- ۳- یک حالت مرجع در نواحی پایانی منحنی بازای چگالی ترک بیشتر از ۱ باشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کاهش سفتی ورق کامپوزیت چندلایه شیشه/اپوکسی نازک $[0/90_4]_s$ ناشی از ترک‌های ماتریس به سه روش تجربی، تحلیلی و عددی بررسی شد. برای تعیین تجربی منحنی بار اعمالی بر حسب چگالی ترک، یک آزمایش طراحی و اجرا گردید. شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی اجزا محدود در مقیاس میکرو جزء حجمی نماینده کامپوزیت متعامد دارای ترک ماتریس با اعمال شرایط مرزی تناوب (PBC) معرفی و انجام شد. همچنین یک مدل تحلیلی غیرخطی جدید بر اساس مکانیک آسیب محیط

- 20- Varna J, Akshantala NV, Talreja R. Crack opening displacement and the associated response of laminates with varying constraints. *International Journal of Damage Mechanics*. 1999 Apr;8(2):174-93.
- 21- Varna J, Krasnikovs A, Kumar RS, Talreja R. A synergistic damage mechanics approach to viscoelastic response of cracked cross-ply laminates. *International Journal of Damage Mechanics*. 2004 Oct;13(4):301-34.
- 22- Singh CV, Talreja R. Analysis of multiple off-axis ply cracks in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 2008 Aug 1;45(16):4574-89.
- 23- Singh CV, Talreja R. A synergistic damage mechanics approach for composite laminates with matrix cracks in multiple orientations. *Mechanics of materials*. 2009 Aug 1;41(8):954-68.
- 24- Singh CV, Talreja R. Evolution of ply cracks in multidirectional composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*. 2010 May 15;47(10):1338-49.
- 25- Singh CV. A higher order synergistic damage model for prediction of stiffness changes due to ply cracking in composite laminates. *CMC: Computers, Materials*. 2013 Apr 1:227-49.
- 26- Montesano J, Singh CV. Progressive failure analysis of polymer composites using a synergistic damage mechanics methodology. In *Advanced Composites for Aerospace, Marine, and Land Applications 2014* (pp. 147-155). Springer, Cham.
- 27- Montesano J, Singh CV. A synergistic damage mechanics based multiscale model for composite laminates subjected to multiaxial strains. *Mechanics of Materials*. 2015 Apr 1;83:72-89.
- 28- Montesano J, Singh CV. Predicting evolution of ply cracks in composite laminates subjected to biaxial loading. *Composites Part B: Engineering*. 2015 Jun 15;75:264-73.
- 29- Montesano J, Singh CV. Critical stiffness damage envelopes for multidirectional laminated structures under multiaxial loading conditions. *Materials & Design*. 2016 Feb 5;91:218-29.
- 30- Berton T, Najafi F, Singh CV. Development and implementation of a multi-scale model for matrix micro-cracking prediction in composite structures subjected to low velocity impact. *Composites Part B: Engineering*. 2019 Jul 1;168:140-51.
- 31- Pao WY, Halder S, Singh CV. Performance analysis of composite helicopter blade using synergistic damage mechanics approach. *AIAA Journal*. 2020 Feb;58(2):968-76.
- 32- ASTM. D3039/D3039M-17, Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. ASTM International; 2017.
- 33- ASTM. D5379/D5379M-19e1, Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method. ASTM International; 2021.
- 34- Christensen RM. Tensor transformations and failure criteria for the analysis of fiber composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1988 Sep;22(9):874-97.
- 35- Murakami S. Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach to the analysis of continuum damage mechanics approach. *Modares Mechanical Engineering*. 2014 Sep 10;14(6):52-62.
- 6- Mohammadi B, Salimi-Majd D, Hossain Ali-Bakhshi M. Analysis of composite skin/stringer debonding and failure under static loading using cohesive zone model. *Modares Mechanical Engineering*. 2015 Jan 1;14(1):1-10.
- 7- Roknabadi MH, Mahmoodi MJ. Modeling of the effects of progressive anisotropic damage on the elastoplastic behavior of metal matrix composites. *Modares Mechanical Engineering*. 2016 Oct 10;16(8):65-74.
- 8- Farrokhabadi A, Neyestani S, Akbari D, Sarkhosh R. Assessment of delamination growth due to matrix cracking in hybrid Glass-Kevlar composite laminates using experimental, numerical and analytical methods. *Engineering Fracture Mechanics*. 2021 Apr 15;247:107691.
- 9- Gholami P, Farsi MA, Kouchakzadeh MA. Stochastic fatigue life prediction of Fiber-Reinforced laminated composites by continuum damage Mechanics-based damage plastic model. *International Journal of Fatigue*. 2021 Nov 1;152:106456.
- 10- Mohammadi B, Shokrieh MM, Jamali M, Mahmoudi A, Fazlali B. Damage-entropy model for fatigue life evaluation of off-axis unidirectional composites. *Composite Structures*. 2021 Aug 15;270:114100.
- 11- Reiner J, Feser T, Waimer M, Poursartip A, Voggenreiter H, Vaziri R. Axial crush simulation of composites using continuum damage mechanics: FE software and material model independent considerations. *Composites Part B: Engineering*. 2021 Nov 15;225:109284.
- 12- Lorenz SJ, Sadeghi F, Trivedi HK, Rosado L, Kirsch MS, Wang C. A continuum damage mechanics finite element model for investigating effects of surface roughness on rolling contact fatigue. *International Journal of Fatigue*. 2021 Feb 1;143:105986.
- 13- Ghatrehsamani S, Akbarzadeh S, Khonsari MM. Application of continuum damage mechanics to predict wear in systems subjected to variable loading. *Tribology Letters*. 2021 Dec;69(4):1-9.
- 14- Farrokhabadi A, Bahrami M, Babaei R. Predicting the matrix cracking formation in symmetric composite laminates subjected to bending loads. *Composite Structures*. 2019 Sep 1;223:110945.
- 15- Talreja R, Singh CV. *Damage and failure of composite materials*. Cambridge University Press; 2012 Jun 7.
- 16- Talreja R. A synergistic damage mechanics approach to durability of composite material systems. *Progress in Durability Analysis of Composite Systems*. 1996:117-29.
- 17- Talreja R. Damage analysis for structural integrity and durability of composite materials. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2006 Jul;29(7):481-506.
- 18- Talreja R. Damage and fatigue in composites—a personal account. *Composites Science and Technology*. 2008 Oct 1;68(13):2585-91.
- 19- Varna J, Joffe R, Akshantala NV, Talreja R. Damage in composite laminates with off-axis plies. *Composites Science and Technology*. 1999 Nov 1;59(14):2139-47.

damage and fracture. Springer Science & Business Media; 2012 Feb 24.