



استفاده از روش پیش شرط ترکل جهت تسریع همگرایی حل جریان تراکم پذیر با ماخ پایین

محسن معتمدی^{1*}، سعید شیخی²

1- مربی، مهندسی هوافضا، دانشگاه پیام نور، تهران
2- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
* تهران، صندوق پستی 193953697، motamedi.mohsen@kh.isfpu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 19 اردیبهشت 1396
پذیرش: 29 خرداد 1396
ارائه در سایت: 17 شهریور 1396

کلید واژگان:

جریان تراکم پذیر
پیش شرطی
ترکل
ماخ پایین

چکیده

سیستم معادلات تراکم پذیر با استفاده از روش‌های عددی بالادست برای تحلیل جریان‌ها با سرعت کم، همگرایی بسیار پایینی دارند. در این نوشتار روش پیش شرطی به عنوان روشی که می‌تواند مشکل‌های عددی سیستم معادلات اویلر تراکم پذیر را در سرعت‌های پایین برطرف کند به معادلات اویلر اعمال شده و برای تحلیل جریان حول هندسه‌های دو بعدی استفاده شده است. روش پیش شرطی با تصحیح قسمت گذرای معادلات، مقادیر ویژه را به یکدیگر نزدیک می‌کند و سبب افزایش سرعت رسیدن به حل پایا می‌شود. در نتیجه در این‌جا ماتریس پیش شرطی ترکل که یکی از پرکاربردترین ماتریس‌های پیش شرطی است، در سیستم معادلات اویلر استاندارد ضرب می‌شود. با توجه این‌که در بیشتر حل‌کننده‌ها از متغیرهای بقایی استفاده می‌شود، ماتریس پیش شرطی ترکل برحسب متغیرهای بقایی ایجاد شده و مورد استفاده قرار گرفته است. برای گسسته‌سازی قسمت مکانی معادلات از روش حجم محدود بالادست «رو» در یک شبکه بی‌سازمان استفاده می‌شود. بخش زمانی معادلات نیز به کمک روش صریح رانگ کوتاه مرتبه چهار گسسته می‌شود. جهت بررسی دقت و کارایی روش پیش شرطی ترکل جریان غیرلزج دوبعدی حول ایرفویل NACA0012 با اعداد ماخ مختلف شبیه‌سازی شده و حل پایا به دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد که با به کار بردن روش پیش شرطی ترکل در ماخ‌های پایین سرعت همگرایی را می‌توان تا دو برابر افزایش داد.

Use of Turkel Precondition Method for Convergence Acceleration of Compressible Flow with low-Mach Number

Mohsen Motamedi^{1*}, Saeed Sheikhi²

1- Department of Mechanical Engineering, Payame Noor University, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 193953697, Tehran, Iran, motamedi.mohsen@kh.isfpu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 May 2017
Accepted 19 June 2017
Available Online 08 September 2017

Keywords:
Compressible Flow
Preconditioner
Turkel
Low Mach number

ABSTRACT

The system of compressible equations using upstream numerical methods has convergence problem to analyze low-Mach number flow. In this study precondition method is employed in Euler equations to solve convergence problem in low-Mach number flow and these preconditioned equations are used to analyze flow around a two-dimensional body. The preconditioner modifies the transient behavior of the Euler equations in a manner such that the stiffness of the eigenvalues is removed and allows for a faster convergence to the steady state. So, Turkel precondition method, one of the useful precondition matrices, is applied in system of Euler equations. As the majority of solvers use conservative variables, precondition matrix is recalculated for conservative variables and is employed in Euler equations. The upstream finite volume Roe method in an unstructured grid is employed for space discretization of equations. The transient part of equations is also discretized with fourth order explicit Runge-Kutta method. The performance of the proposed approach is vetted through an inviscid two-dimensional flow around the NACA0012 airfoil with different Mach number and the steady state solution is calculated. Numerical results show that Turkel preconditioner allows for a faster convergence to the steady state solution in low-Mach number.

1- مقدمه

توجه قرار گرفته است. جریان‌های آئرو دینامیکی یکی از مسائلی است که دینامیک سیالات محاسباتی به طور وسیع در آن استفاده می‌شود. مسائل پیچیده آئرو دینامیکی به کمک دینامیک سیالات محاسباتی قابل حل است. برای نمونه آمینایی و همکاران [1] گذار لایه مرزی درون میدان جریان ملخ را

دینامیک سیالات محاسباتی به شاخه‌ای از فیزیک محاسباتی اطلاق می‌شود که به بحث در مورد شبیه‌سازی جریان سیال می‌پردازد. به دلیل هزینه اندک شبیه‌سازی عددی نسبت به آزمایش‌های عملی این شاخه امروزه بسیار مورد

Please cite this article using:

M. Motamedi, S. Sheikhi, Use of Turkel Precondition Method for Convergence Acceleration of Compressible Flow with low-Mach Number, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 9, pp. 130-136, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

به کمک دینامیک سیالات محاسباتی شبیه‌سازی کردند. در مسائل آئرو‌دینامیکی به دلیل وجود اثرات تراکم‌پذیری معمولاً از سیستم معادلات تراکم‌پذیر اولر استفاده می‌شود، اما این معادلات در حل جریان‌ها با ماخ پایین که اثرات تراکم‌پذیری کم می‌شود دارای نرخ همگرایی بسیار پایینی هستند. با توجه به این‌که بیشتر جریان‌های آئرو‌دینامیکی ترکیبی از ماهیت‌های تراکم‌پذیری و تراکم‌ناپذیری است باید این مشکل برطرف گردد. راه‌های بسیاری برای حل این مشکل پیشنهاد شده است که استفاده از پیش شرط موضعی¹ یکی از موفق‌ترین آن‌هاست. با استفاده از این روش می‌توان با روش‌های مخصوص جریان‌های تراکم‌پذیر در اعداد ماخ بسیار کم (در حد 0.001) هم پاسخ‌های قابل قبولی به دست آورد.

تاکنون ماتریس‌های پیش‌شرطی متفاوتی ارائه شده است. ترکل [2] با استفاده از مفهوم تراکم‌پذیری مصنوعی که برای نخستین بار توسط کورین در مرجع [3] بیان شده بود، یک ماتریس پیش‌شرطی جهت تسریع همگرایی جریان‌های تراکم‌پذیر با ماخ پایین ارائه کرد. اریکسون [4] و چوی و مرکل [5] ماتریس‌های پیش‌شرطی دیگری ارائه کردند. ترکل و همکاران [6] روش پیش‌شرطی را برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر هم گسترش دادند که این روش در گستره وسیعی از اعداد ماخ کارایی مناسبی دارد. هجران‌فر و کمالی‌مقدم در [7] ماتریس پیش‌شرطی اریکسون را برای حل ضمنی معادلات اولر تراکم‌پذیر به کار بردند. آن‌ها نشان دادند که استفاده از روش پیش‌شرطی به همراه روش ضمنی می‌تواند حل عددی را در سرعت‌های پایین به گونه چشمگیری افزایش دهد، همچنین آن‌ها در [8] ماتریس اریکسون را در یک حلگر صریح برحسب متغیرهای غیربقایی (ρ, u, v, P) اعمال کردند و کارایی آن را در این حلگر بررسی کردند. نیگرو و همکاران [9] ماتریس پیش‌شرطی را در روش گالرکین پیاده‌سازی کردند و با استفاده از شبکه‌های سه ضلعی و چهارضلعی تأثیر گسسته‌سازی مکانی را در کارایی روش‌های پیش‌شرطی مورد بررسی قرار دادند. ترکل و واتسا [10] روش پیش‌شرطی را در معادلات ناپایا و تراکم‌پذیر ناویر-استوکس با استفاده از روش گام زمانی دوگانه پیاده‌سازی کردند. آن‌ها اثرات زمان مجازی را در دقت و نرخ همگرایی معادلات با استفاده از دو نوع بردار حل معادله‌های بقایی و متغیرهای اولیه (غیربقایی) مقایسه کردند. پراچا [11] روش پیش‌شرطی موضعی را در جریان تراکم‌پذیر با ماخ پایین در اجسام دوار پیاده‌سازی کرد. او از ماتریس پیش‌شرطی ترکل استاندارد استفاده کرد و آن را برای اجسام دوار تغییر داد. برخی از محققین کارایی آن را در محدوده وسیع‌تری با اعمال روش پیش‌شرطی روی موارد مختلف مورد بررسی قرار دادند. برای نمونه شین و همکاران [12] روش پیش‌شرطی را برای حل جریان دوفازی گاز و مایع در یک جریان کاویتاسیون توسعه دادند.

در مطالعات پیشین روش‌های پیش‌شرطی طبق متغیرهای اولیه (غیربقایی) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به‌کارگیری معادلات بقایی $(\rho, \rho u, \rho v, E)$ در میدان‌هایی که دارای ناپیوستگی است نتایج بهتری نسبت به معادلات غیربقایی به دست می‌دهد. با توجه به این‌که تغییر متغیرها سبب تغییر مقادیر ویژه معادلات می‌شود و به طور کلی روش گسسته‌سازی و کارایی روش پیش‌شرطی را تحت تأثیر قرار می‌دهد، هدف اصلی این مقاله نحوه اعمال روش پیش‌شرطی در معادلات بقایی و بررسی کارایی آن است. برای این منظور روش پیش‌شرطی ترکل در معادلات بقایی حاکم بر جریان دو بعدی غیرلزج پیاده‌سازی می‌شود. قسمت مکانی معادلات طبق روش حجم محدود بالادستی «رو» و قسمت زمانی معادلات طبق روش رانگ کوتا

2- معادلات حاکم بر جریان

همان‌طور که می‌دانیم معادلات حاکم بر جریان غیرلزج معادلات اولر نام دارد که در فرم بقایی به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial \vec{Q}_c}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

در آن \vec{Q}_c بردار حل بقایی، \vec{E} و \vec{F} بردارهای شار غیرلزج است که طبق رابطه (2) تعریف می‌شوند.

$$\vec{Q}_c = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho E + P)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

ρ در رابطه (2) چگالی، P فشار استاتیکی، (u, v) سرعت‌های کارتزین و E انرژی کل است. ماهیت معادلات اولر ترکیبی از ماهیت هذلولوی و بیضوی است که به عدد ماخ جریان بستگی دارد. در اعداد ماخ پایین مقدار چگالی تقریباً ثابت می‌ماند و تغییرات آن نسبت به دیگر پارامترها بسیار کم است. در واقع در این حالت مقادیر ویژه معادلات اولر اختلاف زیادی پیدا می‌کند که این موضوع سبب بدرفتاری حل و کاهش نرخ همگرایی می‌شود؛ بنابراین برای همگرایی سریع‌تر باید مقادیر ویژه معادلات اولر تغییر پیدا کند و به یکدیگر نزدیک شود که این کار توسط روش پیش‌شرطی انجام می‌گیرد.

2-1- معادلات اولر پیش‌شرطی

در حل پایای معادلات اولر عبارت‌های زمانی در نهایت به سمت صفر میل می‌کند؛ بنابراین تغییر عبارت‌های زمانی هیچ تغییری در نتایج حل پایا ایجاد نمی‌کند که اساس روش پیش‌شرطی همین موضوع است [13]. در حقیقت در روش پیش‌شرطی با اضافه کردن عبارت‌هایی به بخش مشتقات زمانی معادلات اولر آن‌ها را طوری اصلاح می‌کند که مقادیر ویژه معادلات به یکدیگر نزدیک شود. این اصلاح با ضرب یک ماتریس در قسمت زمانی معادلات صورت می‌گیرد. معادلات اولر پیش‌شرطی شده طبق رابطه (3) به دست می‌آید [7].

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{Q}_c}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

در آن Γ ماتریس پیش‌شرطی است. ماتریس ترکل³ یکی از پرکاربردترین ماتریس‌های پیش‌شرطی است که براساس متغیرهای اولیه $\vec{Q}_p = [p, u, v, S]^T$ مانند رابطه (4) به دست می‌آید [2].

$$\Gamma(\vec{Q}_p) = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

در آن β پارامتر پیش‌شرطی است. برای استفاده از روش پیش‌شرطی ترکل در متغیرهای بقایی باید این ماتریس طبق متغیرهای بقایی به دست

¹ Local Preconditioning

² Roe

³ Turkle

شکل انتگرالی معادلات اویلر پیش‌شرطی روی سطح معیار Ω با مرز $\partial\Omega$ به صورت رابطه (11) است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \bar{Q}_c dA + \Gamma \oint_{\partial\Omega} H(\bar{Q}_c) \cdot \hat{n} ds = 0 \quad (11)$$

در رابطه (11) پارامتر \vec{H} شار عبوری از سطوح مرزی است و به صورت $\vec{H} = E(\bar{Q}_c)\hat{i} + F(\bar{Q}_c)\hat{j}$ است. برای گسسته‌سازی قسمت مکانی معادلات از یک شبکه بی‌سازمان که سلول‌های آن سه ضلعی و مانند "شکل 1" است استفاده می‌کنیم.

قسمت مکانی رابطه (11) طبق روش حجم محدود با استفاده از الگوریتم رو برای یک شبکه بی‌سازمان سه‌ضلعی مانند رابطه (12) است.

$$\Gamma \oint_{\partial\Omega} H(\bar{Q}_c) \cdot \hat{n} ds = \Gamma \sum_{k=1}^3 \vec{H}_k \cdot d\ell_k \quad (12)$$

در آن ℓ طول هر وجه سلول و \vec{H}_k شار عبوری از وجه k است که طبق رابطه (13) محاسبه می‌شود [8].

$$H_k = 0.5[H(\bar{Q}_L) + H(\bar{Q}_R)] - \bar{F}^{-1}[\bar{A}_T|\Delta Q]_k \quad (13)$$

در رابطه (13) جملات \bar{Q}_L و \bar{Q}_R به ترتیب بردار متغیرهای بقای در سمت چپ و راست وجه k ، نیز ماتریس ژاکوبین معادلات پیش‌شرطی و در آن علامت \sim بیانگر مقادیر میانگین رو است. ترم میرایی $\bar{F}^{-1}[\bar{A}_T|\Delta Q]$ در روش رو طبق رابطه (14) محاسبه می‌شود [15].

$$\bar{F}^{-1}[\bar{A}_T|\Delta Q] = \begin{bmatrix} |\bar{U}_n|\bar{\alpha}_1 & + d_2 \frac{\Delta p}{c^2} + d_1 \bar{\rho} \Delta U_n \\ |\bar{U}_n|\bar{\alpha}_1 \bar{u} & - \bar{\rho} |\bar{U}_n| n_y \Delta V_n + d_4 \frac{\Delta p}{c^2} + d_3 \bar{\rho} \Delta U_n \\ |\bar{U}_n|\bar{\alpha}_1 \bar{v} & + \bar{\rho} |\bar{U}_n| n_x \Delta V_n + d_6 \frac{\Delta p}{c^2} + d_5 \bar{\rho} \Delta U_n \\ |\bar{U}_n|\bar{\alpha}_1 \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} + \bar{\rho} |\bar{U}_n| \bar{V}_n \Delta V_n + d_8 \frac{\Delta p}{c^2} + d_7 \bar{\rho} \Delta U_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

در رابطه (14) مقدار $V_n = -un_y + vn_x$ است که در آن n_x و n_y تصویر بردار عمود بر وجه سلول در جهت x و y است. نحوه محاسبه α_1 و d_1 تا d_8 به طور کامل در [15] توضیح داده شده است. به این ترتیب با محاسبه شار عبوری از تمام وجه‌های یک سلول طبق رابطه (14) قسمت مکانی معادلات اویلر پیش‌شرطی شده گسسته می‌شود.

2-3- گسسته‌سازی زمانی

معادلات اویلر پیش‌شرطی را می‌توان به شکل نیمه‌گسسته مانند رابطه (15) نوشت.

$$\frac{d}{dt}(Q_j) = R_j \quad (15)$$

$j = 1, 2, \dots$

در آن j شماره سلول و R_j باقی‌مانده سلول j -ام است که به کمک رابطه (16) محاسبه می‌شود.

$$R_j = \Gamma \sum_{k=1}^3 \vec{H}_k \cdot d\ell_k \quad (16)$$

مقدار باقی‌مانده هر سلول مطابق آن‌چه در قسمت گسسته‌سازی مکانی گفته شده محاسبه می‌شود. قسمت مشتق زمانی نیز مانند معادلات دیفرانسیل معمولی طبق روش رانگ کوتاه مرتبه چهار گسسته می‌شود.

برای پیشروی در زمان نیاز به داشتن مقدار گام زمانی Δt است. با توجه به این‌که در این مطالعه دستیابی به پاسخ پایا مورد نظر بوده، جهت تسریع در نرخ همگرایی حل و کاهش زمان محاسباتی از گام زمانی موضعی در هر

آید که برای این کار از رابطه (5) استفاده می‌شود [6].

$$\Gamma(\bar{Q}_c) = \frac{\partial Q_c}{\partial Q_p} \Gamma(\bar{Q}_p) \frac{\partial Q_p}{\partial Q_c} \quad (5)$$

مقادیر مشتق بقایی و فرعی در [6] آورده شده است؛ بنابراین ماتریس پیش‌شرط ترکل برای متغیرهای بقایی طبق رابطه (6) به دست می‌آید.

$$\Gamma(\bar{Q}_c) = \begin{bmatrix} \phi \frac{M^2}{2} + 1 & -\frac{\phi u}{c^2} & & & \\ \phi \frac{uM^2}{2} & -\frac{\phi u^2}{c^2} + 1 & & & \\ \phi \frac{vM^2}{2} & -\frac{\phi uv}{c^2} & & & \\ \left(\frac{\phi M^2}{4} + \frac{\beta^2 - 1}{2}\right) V_t & -\left(\frac{\phi M^2}{2} + \beta^2 - 1\right) u & & & \\ -\frac{\phi v}{c^2} & \frac{\phi}{c^2} & & & \\ -\frac{\phi uv}{c^2} & \frac{\phi u}{c^2} & & & \\ \dots & \frac{\phi v}{c^2} & & & \\ -\left(\frac{\phi M^2}{2} + \beta^2 - 1\right) v & \frac{\phi M^2}{2} + \beta^2 & & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

رابطه (7) را در ماتریس رابطه (6) داریم.

$$\begin{aligned} \phi &= (\gamma - 1)(\beta^2 - 1) \\ V_t &= u^2 + v^2 \\ c &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \\ M &= \frac{\sqrt{V_t}}{c} \end{aligned} \quad (7)$$

برای رفع تکینگی ماتریس پیش‌شرطی در نواحی سکون پارامتر پیش‌شرطی β با استفاده از رابطه قطع به صورت رابطه (8) تعیین می‌شود [14].

$$\beta^2 = \min[1, \max(M_\infty^2, M^2)] \quad (8)$$

این انتخاب سبب می‌شود پارامتر پیش‌شرطی به سمت صفر میل نکند و تکینگی در نقاط سکون از بین برود.

با اعمال ماتریس پیش‌شرطی ترکل در معادلات اویلر، مقادیر ویژه سیستم معادلات طبق رابطه (9) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = U_n, \\ \lambda_{3,4} &= U'_n \pm c' \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه (9) سرعت عمود بر وجه سلول به شکل $U_n = un_x + vn_y$ است و مقادیر c' و U'_n طبق رابطه (10) به دست می‌آید [13].

$$U'_n = 0.5(1 + \beta^2)U_n, \quad c' = 5\sqrt{4c^2 + (1 + \beta^2)^2 U_n^2} \quad (10)$$

پس از اعمال ماتریس پیش‌شرط معادلات باید گسسته‌سازی شوند که در ادامه به طور کامل توضیح داده می‌شود.

3- گسسته‌سازی معادلات

برای گسسته‌سازی معادلات اویلر دو بعدی از یک شبکه بی‌سازمان و روش حجم محدود با الگوریتم بالادست رو استفاده می‌شود. قسمت زمانی معادلات نیز طبق روش رانگ کوتاه مرتبه 4 گسسته می‌شود.

1-3- گسسته‌سازی مکانی

هدف این مقاله تحلیل کارایی و دقت روش پیش شرطی ترکل در شرایط مختلف جریان است. برای این منظور ابتدا جریان با $M_\infty=0.5$ و زاویه حمله صفر حل می‌شود. برای حل این مسأله عدد CFL برابر 1.32 قرار داده می‌شود. توزیع فشار روی سطح ایرفویل و مقایسه نرخ همگرایی حل برای روش‌های پیش شرطی و غیرپیش شرطی به ترتیب در "شکل‌های 3 و 4" به ازای ماخ 0.5 و زاویه حمله صفر آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش پیش شرطی و غیرپیش شرطی از نظر دقت یکسان بوده و توزیع ضریب فشار آن‌ها روی سطح ایرفویل با داده‌های تجربی تطابق خوبی دارند. مقایسه نرخ همگرایی در "شکل 4" نشان می‌دهد که در اعداد ماخ بالا عملکرد ماتریس پیش شرطی همچون روش غیرپیش شرطی است به طوری که در روش غیرپیش شرطی با 10984 تکرار و در زمان 272 ثانیه به همگرایی می‌رسیم و در روش پیش شرطی همگرایی با 10414 تکرار و در مدت زمان 246 ثانیه حاصل می‌شود. بنابراین در روش پیش شرطی تعداد تکرار و زمان محاسبات اندکی کاهش می‌یابد، ولی این کاهش چشمگیر نیست. یعنی در اعداد ماخ بالا روش پیش شرطی کارایی خود را از دست می‌دهد و تأثیر زیادی در نرخ همگرایی ایجاد نمی‌کند.

ماهیت تراکم‌ناپذیری معادلات با کاهش عدد ماخ جریان غالب می‌گردد و سیستم معادلات تراکم‌پذیر دچار مشکل شده و روش پیش شرطی کارایی

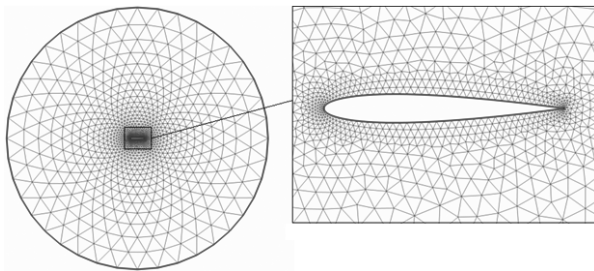


Fig. 2 The airfoil and computational grid

شکل 2 ایرفویل و شبکه محاسباتی مورد مطالعه

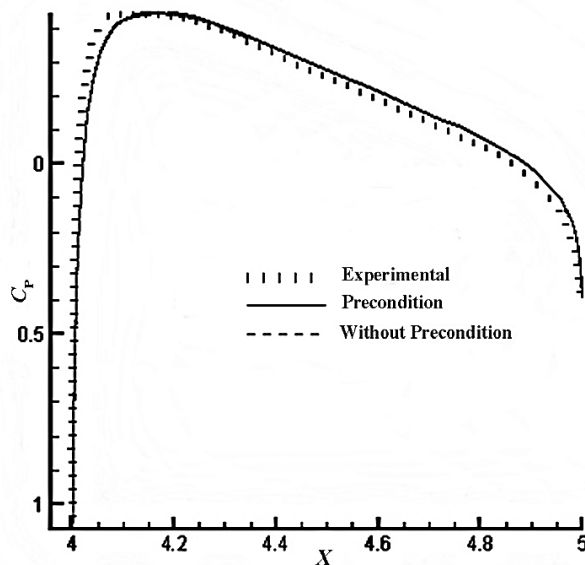


Fig.3 C_p around airfoil with standard and preconditioned method in $M_\infty=0.5$

شکل 3 مقایسه ضریب فشار حاصل از روش استاندارد و پیش شرطی در اطراف ایرفویل در $M_\infty=0.5$

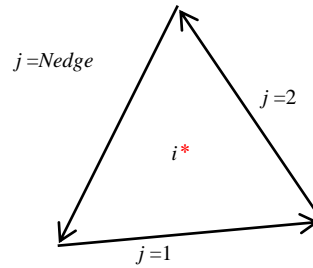


Fig. 1 A cell in computational grid

شکل 1 سلول شبکه محاسباتی مورد استفاده

سلول استفاده می‌شود. مقدار گام زمانی برای سلول j -ام با استفاده از رابطه (17) تعیین می‌شود.

$$\Delta t_j \leq \frac{CFL \times \Omega_j}{\sum_{k=1}^{Nedge} (\lambda_{\max})_k d\ell_k} \quad (17)$$

در رابطه (17) پارامتر Ω_j مساحت سلول j و CFL عدد کورانت است. با توجه به رابطه (9) بزرگ‌ترین مقدار ویژه معادلات اویلر پیش شرطی برابر $\lambda_{\max} = U_n' + c'$ است.

پس از گسسته‌سازی معادلات باید شرایط مرزی تعیین و معادلات حل شود. در ادامه نحوه اعمال شرایط مرزی بیان می‌شود.

4- شرایط مرزی

شبیه‌سازی عددی پدیده‌های آئودینامیکی نیازمند بررسی ناحیه محدودی از جریان حول یک جسم است. با محدود کردن میدان محاسباتی حول یک جسم مرزهای دوردست به وجود می‌آیند که مقادیر جریان روی آن‌ها باید توسط شرایط مرزی دوردست مشخص شوند. معمولاً شرایط مرزی مشخصه‌ها بر مبنای لایته‌های ریمان به عنوان شرایط مرزی دوردست استفاده می‌شوند. تئوری مشخصه‌ها برای جریان ورودی زیرصوت نشان می‌دهد که شیب یکی از خطوط مشخصه منفی بوده و بنابراین در فضای دوبعدی و در مرز ورودی باید سه عدد از خواص فیزیکی جریان مشخص بوده و یکی از خواص نیز از داخل میدان گرفته شود تا بدین ترتیب امواج صوتی ایجاد شده در جریان جذب شوند. در جریان خروجی زیرصوت دو خط مشخصه از داخل میدان و یک خط مشخصه از خارج میدان اطلاعات را به مرز خروجی می‌رسانند. با توجه به متغیرهای ریمان که روی این خطوط منتشر می‌شوند معادلات لازم برای محاسبه خواص جریان روی مرز به دست می‌آیند. در این جا شرایط مرزی دور دست طبق روش مشخصه‌ها تعیین می‌شود.

در جریان غیرلزج شرایط مرزی روی سطح جسم باید به گونه‌ای اعمال شود که مؤلفه سرعت عمود بر سطح صفر شود. این شرط سبب ساده شدن بردار شار در مرزهای دیوار می‌شود به طوری که برای تعیین شار مرزی فقط نیاز به محاسبه مقدار فشار روی این اضلاع است. با فرض این که فاصله مرکز نخستین سلول تا سطح دیوار به اندازه کافی کوچک است مقدار فشار روی دیوار را می‌توان برابر فشار روی سلول مجاور آن گرفت.

5- نتایج

برای بررسی کارایی روش پیش شرطی ترکل در تحلیل عددی جریان حول هندسه‌های دوبعدی، یک جریان غیرلزج دوبعدی هوا حول ایرفویل NACA0012 با اعداد ماخ مختلف شبیه‌سازی می‌شود و نتایج به دست می‌آید. با ایجاد یک شبکه محاسباتی در اطراف ایرفویل معادلات اویلر پیش شرطی شده با روش حجم محدود گسسته می‌شوند. در این جا شبکه محاسباتی به شکل بی‌سازمان شامل 3218 سلول و مانند "شکل 2" است.

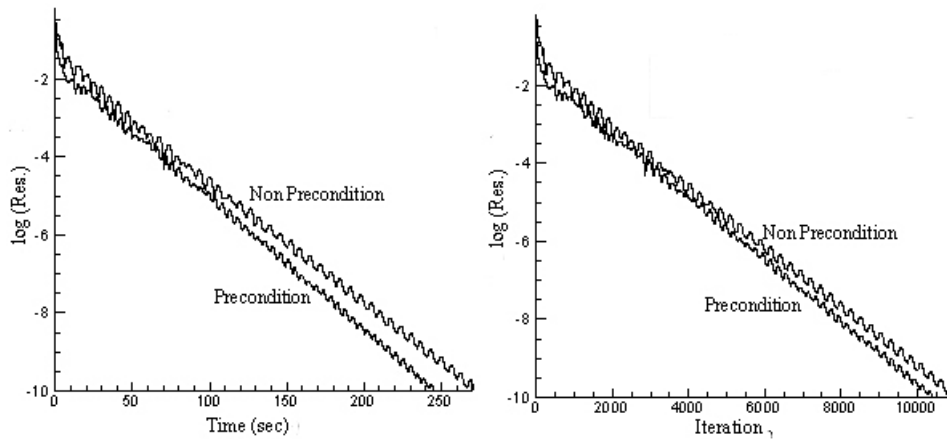


Fig. 4 Convergence rate based on iteration and time for standard and preconditioned method in $M_\infty=0.5$

شکل 4 مقایسه نرخ همگرایی برحسب تعداد تکرار و زمان برای روش‌های استاندارد و پیش‌شرطی در $M_\infty=0.5$

حاصل می‌شود، در واقع سرعت همگرایی حدود 15.5 برابر می‌شود. به این ترتیب هرچه عدد ماخ به صفر نزدیک‌تر شود روش پیش‌شرطی کارایی بهتری در افزایش دقت و بهبود نرخ همگرایی دارد.

6- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در تحقیق حاضر ماتریس پیش‌شرطی ترکل برای سیستم معادلات اولبر برحسب متغیرهای بقایی ایجاد شد و برای بررسی کارایی آن جریان غیرلزج دوبعدی حول ایرفویل با اعداد ماخ مختلف شبیه‌سازی شد. با توجه به نتایج دریافتیم که با افزایش سرعت جریان چون معادلات تراکم‌پذیر غالب می‌شوند تأثیر ماتریس‌های پیش‌شرطی از بین می‌رود و کارایی خیلی خوبی ندارند. در این حالت تعداد تکرار لازم برای رسیدن به همگرایی اندکی کاهش می‌یابد و زمان همگرایی نیز کاهش اندکی دارد، اما هرچه عدد ماخ کاهش پیدا کند ماتریس پیش‌شرطی تأثیر خود را بیشتر نشان می‌دهد. برای نمونه در عدد ماخ 0.1 نسبت به عدد ماخ 0.5 نرخ همگرایی با به‌کار بردن روش پیش‌شرطی افزایش بیشتری پیدا می‌کند. دقت نتایج در این عدد ماخ تفاوتی با روش غیرپیش‌شرطی ندارد. در واقع در عدد ماخ 0.1 بدون استفاده از روش‌های پیش‌شرطی نتایج با دقت منطقی به دست می‌آید، ولی با استفاده از

خود را نشان می‌دهد. برای بررسی این اثر جریان حول ایرفویل NACA0012 در اعداد ماخ پایین‌تر $M_\infty=0.1, 0.01$ مورد بررسی قرار گرفته است. جهت مقایسه صحیح کارایی روش پیش‌شرطی مقدار عدد CFL در هر دو روش پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی یکسان در نظر گرفته شده که این مقدار برای تحلیل جریان در ماخ 0.1 برابر 1.32 انتخاب شده است. توزیع فشار روی سطح ایرفویل حاصل از روش پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی و نتایج تجربی مرجع [8] در "شکل 5" آورده شده‌اند. نتایج حاکی از تفاوت ناچیز بین نتایج حاصل از روش پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی از لحاظ دقت در این عدد ماخ و انطباق خوب توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل با نتایج ارائه شده در مرجع [8] است. مقدار خطای موجود می‌تواند به دلیل تفاوت در ابعاد مسأله و شرایط جریان باشد. مقایسه نرخ همگرایی روش پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی در "شکل 6" برای ماخ 0.1 نشان می‌دهد که در اعداد ماخ پایین روش پیش‌شرطی کارایی بهتری نسبت به روش غیر پیش‌شرطی دارد و می‌تواند زمان همگرایی را به طور محسوس کاهش دهد به طوری که در روش غیر پیش‌شرطی با 16350 تکرار و در زمان 410 ثانیه به همگرایی می‌رسیم و در روش پیش‌شرطی همگرایی با 6162 تکرار و در مدت زمان 152 ثانیه حاصل می‌شود.

جهت بررسی اثرات اعمال روش پیش‌شرطی در اعداد ماخ پایین‌تر جریان حول ایرفویل NACA0012 در $M_\infty=0.01$ نیز بررسی شده است. مقدار عدد کورانت برای تحلیل جریان در این ماخ برای هر دو روش پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی یکسان و برابر 1.32 در نظر گرفته شده است. "شکل 7" مقایسه توزیع ضریب فشار روی سطح ایرفویل برای روش‌های پیش‌شرطی و غیرپیش‌شرطی و نتایج تجربی مرجع [8] را نشان می‌دهد. همان‌طور که در "شکل 7" مشاهده می‌شود نتایج حاصل از روش پیش‌شرطی با نتایج تجربی که در [8] آورده شده است تطابق بهتری نسبت به نتایج روش غیرپیش‌شرطی دارد، در واقع نتایج سیستم معادلات غیرپیش‌شرطی در عدد ماخ 0.01 خطای بیشتری دارد. "شکل 8" مقایسه نرخ همگرایی حل بین روش پیش‌شرطی و روش غیرپیش‌شرطی را نشان می‌دهد. در "شکل 8" مشاهده می‌شود که با کاهش عدد ماخ کارایی ماتریس پیش‌شرطی افزایش پیدا کرده و زمان همگرایی نسبت به روش غیر پیش‌شرطی کاهش چشمگیری پیدا کرده است به طوری که در روش غیرپیش‌شرطی با 46422 تکرار و در زمان 1133 ثانیه به همگرایی می‌رسیم و در روش پیش‌شرطی همگرایی با 3100 تکرار و در مدت زمان 74 ثانیه

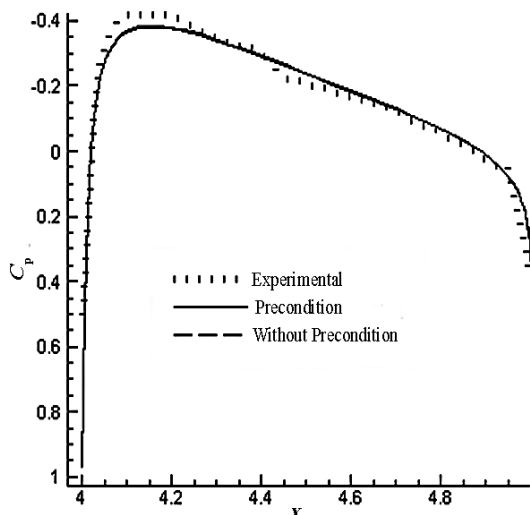


Fig.5 C_p around airfoil with standard and preconditioned method in $M_\infty=0.1$

شکل 5 مقایسه ضریب فشار حاصل از روش استاندارد و پیش‌شرطی در اطراف ایرفویل در $M_\infty=0.1$

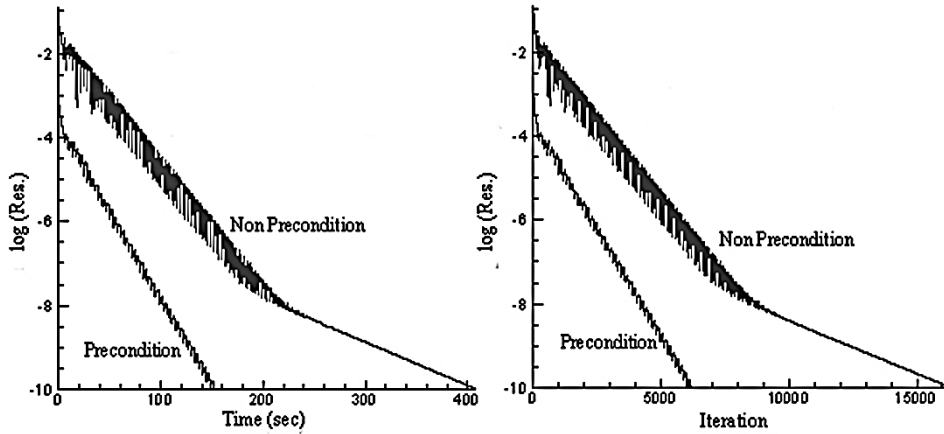


Fig. 6 Convergence rate based on iteration and time for standard and preconditioned method in $M_\infty=0.1$

شکل 6 مقایسه نرخ همگرایی برحسب تعداد تکرار و زمان برای روش‌های استاندارد و پیش‌شرطی در $M_\infty=0.1$

روش پیش‌شرطی زمان کمتری جهت همگرایی لازم است و سرعت همگرایی حدود 2.7 برابر می‌شود. در عدد ماخ 0.01 روش استاندارد و غیرپیش‌شرطی پاسخ‌های مناسبی نمی‌دهد و استفاده از روش پیش‌شرطی در این عدد ماخ علاوه بر این که پاسخ را با دقت بهتری محاسبه می‌کند زمان لازم جهت همگرایی را نیز به شدت کاهش می‌دهد، به طوری که سرعت همگرایی 15.5 برابر می‌شود.

7- فهرست علائم

c	سرعت صوت (ms^{-1})
CFL	عدد کورانت
E	انرژی کل
M	عدد ماخ
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
u	سرعت در جهت x (ms^{-1})
v	سرعت در جهت y (ms^{-1})
Δt	گام زمانی (s)

علائم یونانی

β	پارامتر پیش‌شرطی
ρ	چگالی (kgm^{-3})
Γ	ماتریس پیش‌شرطی

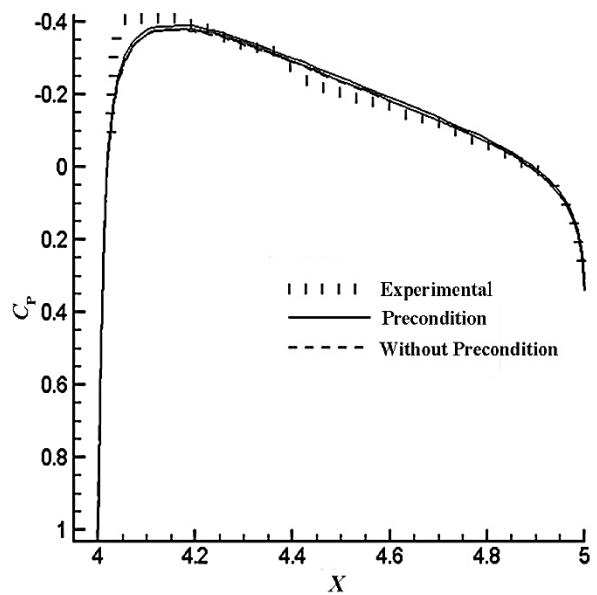


Fig. 7 C_p around airfoil with standard and preconditioned method in $M_\infty=0.01$

شکل 7 مقایسه ضریب فشار حاصل از روش استاندارد و پیش‌شرطی در اطراف ایرفویل در $M_\infty=0.01$

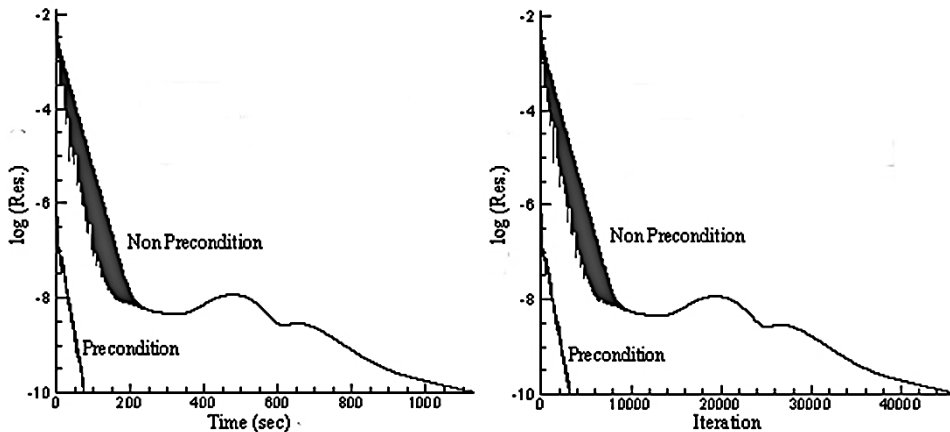


Fig. 8 Convergence rate based on iteration and time for standard and preconditioned method in $M_\infty=0.01$

شکل 8 مقایسه نرخ همگرایی برحسب تعداد تکرار و زمان برای روش‌های استاندارد و پیش‌شرطی در $M_\infty=0.01$

8- مراجع

- [8] K. Hejranfar, R. Kamali Moghadam, Evaluation of preconditioned method for solving two-dimensional compressible flows with low mach number using upstream finite volume Roe algorithm in unstructured grid, *Proceedings of The 8th International Conference on Aerospace*, Isfahan, Iran, February 17-19, 2009. (in Persian فارسی)
- [9] F. Bassi, C. De Bartolo, R. Hartmann, A. Nigro, A discontinuous Galerkin method for inviscid low Mach number flows, *Computational Physics*, Vol. 228, No. 11, pp. 3996-4011, 2009.
- [10] E. Turkel, V. N. Vatsa, Choice of variables and preconditioning for time dependent problems, *Proceedings of The 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Orlando, Florida, USA, 2003.
- [11] A. Prachar, Local low speed preconditioning in rotating reference frame, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, No. 5, pp. 209-218, 2015.
- [12] B. R. Shin, S. Yamamoto, X. Yuan, Application of preconditioning method to gas-liquid two-phase flow computations, *Proceedings of The 4th Joint Fluids Summer Engineering Conference*, Honolulu, Hawaii, USA, July 6-10, 2003.
- [13] D. Lee, *Local preconditioning of the Euler equations*, PhD Thesis, University of Michigan, 1991.
- [14] L. Xue-song, G. Chun-wei, Mechanism of Roe-type schemes for all-speed flows and its application, *Computers & Fluids*, Vol. 86, No. 1, pp. 56-70, 2013.
- [15] H. Guillard, C. Viozat, On the Behavior of Upwind Schemes in the low Mach number limit, *Computers & Fluids*, Vol. 28, No. 1, pp. 63-86, 1999.
- [1] H. Aminaei, M. Dehghan Manshadi, A. R. Mostofizadeh, Numerical estimation of the wing boundary layer transition in propeller flowfield, *Moades Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 157-165, 2017. (in Persian فارسی)
- [2] E. Turkle, Precondition methods for solving the incompressible and low speed compressible equations, *Computational Physics*, Vol. 72, No. 2, pp. 277-298, 1987.
- [3] A. J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problem, *Computational Physics*, Vol. 2, No. 1, pp. 12-26, 1967.
- [4] L. E. Eriksson, A preconditioned Navier-Stokes solver for low Mach number flows, *Proceedings of The 3rd ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, Paris, France, September 9-13, 1996.
- [5] Y. H. Choi, C. L. Merkle, The application of preconditioning in viscous flows, *Computational Physics*, Vol. 105, No. 2, pp. 207-223, 1993.
- [6] E. Turkel, A. Fiterman, B. Van Leer, *Preconditioning and the Limit to the Incompressible Flow Equations*, NASA Contractor Report 191500, 1993.
- [7] K. Hejranfar, R. Kamali Moghadam, implicit solution of two-dimensional preconditioned compressible flow with low mach number using an upstream finite volume algorithm, *Proceedings of The 18th International Conference on Mechanical Engineering*, Tehran, Iran, May 11-13, 2010. (in Persian فارسی)