

روش انتگرال تکمیلی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش گالرکین بی‌المان و کاربرد آن در حل مسائل استاتیکی و دینامیکی

فرهنگ دانشمند¹، محمد جواد کاظم‌زاده پارسی^{2*}

1- استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

2- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

* شیراز، صندوق پستی 71345/1549

daneshmd@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: بهمن 1382، پذیرش مقاله: دی 1384)

چکیده - یکی از نقاط ضعف روش گالرکین بی‌المان، پیچیدگی اعمال شرایط مرزی اساسی در آن است. در این مقاله پس از معرفی روش گالرکین بی‌المان و تقریب کم‌ترین مربعات متحرک، نحوه گسسته‌سازی معادلات هدایت حرارتی و کشسانی دوبعدی در مسائل استاتیکی و دینامیکی بیان شده و با معرفی جمله‌ای به نام انتگرال تکمیلی، روشی جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی پیشنهاد شده است. همگرایی روش پیشنهادی به کمک آزمونهای همگرایی بررسی شده و با حل مثالهایی از معادله پواسون و معادلات تحلیل استاتیکی و دینامیکی کشسانی دوبعدی، دقت نتایج حاصل با جوابهای موجود در منابع و نتایج حاصل از روش المان‌های محدود مقایسه شده است. این مقایسه نشان می‌دهد که جوابهای حاصل از تحقیق حاضر نسبت به پاسخهای موجود در سایر منابع دقت بالاتری دارد.

کلید واژگان: روش گالرکین بی‌المان، شرایط مرزی اساسی، روش انتگرال تکمیلی.

1- مقدمه

می‌توان به موضوع گسترش ترک، بهینه‌سازی شکل، تغییر شکلهای بزرگ و مسائل سطح آزاد اشاره کرد که اصلاح شبکه محاسباتی در هر مرحله ضروری است. علت بروز چنین مشکلاتی به ارتباط تنگاتنگ روش المان‌های محدود با المان‌بندی مسئله مربوط می‌شود، در واقع المان‌های مورد استفاده باید در هر مرحله از فرایند حل مسئله تغییر هندسه را به‌نحو مقتضی دنبال کرده و در برخی موارد حتی لازم می‌شود که هندسه جدید مسئله مجدداً المان‌بندی شود.

در طی سالهای اخیر برای برخورد با مشکلاتی که روش المان‌های محدود در حل بعضی از مسائل با آنها روبه‌رو

روش المان محدود در دهه‌های اخیر توانایی خود را در عرصه‌های مختلف محاسباتی نشان داده و به همین دلیل به‌عنوان یکی از متداول‌ترین روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده محققین و متخصصین مختلف قرار گرفته است. علی‌رغم موفقیت‌های چشمگیری که این روش در حل مسائل مختلف خطی و غیرخطی از خود نشان داده موارد مختلفی نیز وجود دارد که این روش در آنها با مشکلاتی همراه می‌شود. یکی از این موارد مسائلی است که هندسه مسئله در آنها باید به‌نحوی در خلال انجام مراحل حل تغییر کند. از این نمونه مسائل

گسسته‌سازی می‌شوند. این روش یکی از روشهای معروف بدون المان است و تاکنون در بسیاری از زمینه‌های مکانیک محاسباتی به کار رفته و تواناییهای آن در برخورد با مسائل پیچیده بررسی شده است.

یکی از مشکلات مهمی که در استفاده از روش گالرکین بی‌المان به وجود می‌آید، پیچیدگی اعمال شرایط مرزی اساسی در این روش است. این اشکال به دلیل عدم ارضای خاصیت دلتای کرونیگر توسط توابع شکل استفاده شده در روش تقریب کم‌ترین مربعات متحرک است که باعث می‌شود نتوان شرایط مرزی اساسی را دقیقاً مانند روش المان‌های محدود اعمال نمود و به این دلیل، اعمال شرایط مرزی اساسی در این روش نیاز به تدابیر خاصی دارد. برای غلبه بر این مشکل، تاکنون روشهای مختلفی در مقالات مختلف پیشنهاد شده است. از این میان می‌توان به روش ضرایب لاگرانژ اشاره کرد که در آن شرایط مرزی، دقیقاً ارضا شده اما باعث افزایش تعداد مجهولات می‌شود و ماتریس ضرایب نیز دیگر مثبت معین نخواهد بود و به الگوریتمهای ویژه‌ای برای حل آن نیاز است [8]. روش دیگر پیشنهادی روش اصل وردشی اصلاح شده⁴ است که در آن ماتریس ضرایب، مثبت معین باقی می‌ماند اما شرایط مرزی به طور دقیق ارضا نمی‌شود [14]. روش توابع جریمه که در آن شرایط مرزی از طریق تابع جریمه اعمال می‌شود، روش دیگری است که در آن شرایط مرزی به طور دقیق ارضا نشده و برای جبران آن، تابع جریمه باید بزرگ انتخاب شود، که به نوبه خود باعث افزایش خطای حل دستگاه معادلات نیز می‌شود [15]. روش دیگر، استفاده از یک ردیف المان‌های چسبیده به مرز در کنار مرزها و ترکیب کردن توابع شکل مربوط به روش المان‌های محدود با توابع شکل روش بدون المان است. به این طریق می‌توان شرایط مرزی اساسی را اعمال کرد اما این روش علاوه بر آن که نیازمند ساختن المان‌هایی در اطراف مرزها است، باعث می‌شود که توابع

می‌شود، دسته جدیدی از روشهای محاسباتی ارائه شده است که به خلاف روش المان‌های محدود، برای حل معادلات دیفرانسیل، به شبکه‌بندی ناحیه مسأله احتیاج ندارند. این دسته از روشها را روشهای بدون المان¹ یا روشهای بدون شبکه² می‌نامند. در این‌گونه از روشها، تنها از مجموعه‌ای از گره‌ها که در ناحیه مسأله توزیع شده، برای ساخت توابع تقریب، گسسته‌سازی و حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب آرایش گره‌ها به صورت دلخواه ممکن بوده و مشکل به‌وجود آمدن المان‌های بدشکل به‌عنوان مثال در حل یک مسأله شامل تغییر شکلهای بزرگ³ - که در روش المان‌های محدود ممکن است پیش آید، با استفاده از روشهای بی‌المان ایجاد نخواهد شد.

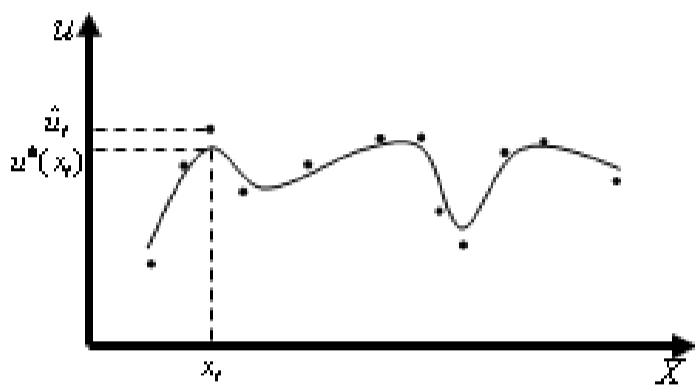
مزایای روشهای بدون المان باعث شده که در سالهای اخیر توجه بسیاری از محققین در زمینه مکانیک محاسباتی به این دسته از روشها جلب شده و تحقیقات گسترده‌ای در زمینه خواص و کاربردهای این‌گونه از روشها انجام شود. اولین نمونه از چنین روشهایی در سال 1977 معرفی شد [2,1]. این روش اساساً برای مدل سازی اثر متقابل ذرات در مسائل اخیر فیزیک مورد استفاده قرار گرفت و از آن به بعد روشهای بدون المان متفاوتی ارائه شد که از آن جمله می‌توان به [3-13] اشاره کرد.

روشی که در این مقاله بررسی می‌شود روش گالرکین بدون المان است. این روش در سال 1994 برای اولین بار معرفی و برای حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفت [8]. در این روش توابع تقریب به روش کم‌ترین مربعات متحرک ساخته شده و با استفاده از شکل انتگرالی تضعیف شده معادلات دیفرانسیل و با استفاده از روش گالرکین برای انتخاب توابع وزن در شکل انتگرالی، معادلات دیفرانسیل بر روی شبکه‌ای از گره‌ها

1. Element Free
2. Meshless
3. Large Deformation

4. Modified Variational Principle

درونیابی - که تابع تقریب ساخته شده به کمک آنها، در خود ایستگاهها مقداری برابر با مقدار اندازه‌گیری شده دارد - دارای مقداری متفاوت با مقدار اندازه‌گیری شده دارد. به بیان دیگر منحنی عبور داده شد از میان نقاط داده شده، از خود نقاط عبور نمی‌کند. در شکل 1 نمونه‌ای از تابع تقریب ساخته شده بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک آورده شده است.



شکل 1 تقریب کمترین مربعات متحرک

فرض کنید می‌خواهیم تقریبی از تابع مجهول $u(x)$ را که بر روی ناحیه تعریف Ω تعریف شده، با در دست داشتن مقدار آن در تعدادی از نقاط گرهی مجزا به دست آوریم. برای این منظور فرض کنید مجموعه نقاط گرهی $\{x_i\}, i=1,2,\dots,n$ در درون دامنه تعریف تابع مشخص شده‌اند و تابع $u(x)$ در این نقاط دارای مقدار \hat{u}_i می‌باشد. در این صورت اگر x نقطه‌ای دلخواه از این ناحیه و Ω_x یک همسایگی از نقطه فوق در ناحیه مسأله باشد، تقریب کمترین مربعات متحرک در این نقطه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u^h(x) = p^T(x) a(x) \quad \forall x \in \Omega_x \quad (1)$$

که در آن $p^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]^T$ برداری است با m عضو که اعضای آن توابع پایه انتخاب شده برای تقریب هستند و $a(x)$ بردار مجهولی است که محاسبه آن در ادامه خواهد آمد. توابع پایه توابع از قبل انتخاب شده‌ای برحسب مختصات عمومی ناحیه هستند که روش تقریب کمترین مربعات متحرک از آنها به عنوان پایه‌ای برای ساختن تابع تقریب استفاده می‌کند. انتخاب مناسب این توابع می‌تواند در هرچه بهتر توصیف کردن

تقریب ترکیبی حاصل، سازگار¹ نبوده و مشتقات آنها نیز پیوسته نباشند [16].

در این مقاله روشی با عنوان روش انتگرال تکمیلی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش گالرکین بدون المان ارائه شده است. در این روش با انتگرال‌گیری روی مرز دارای شرایط مرزی اساسی، جمله‌ای به شکل تضعیف شده معادله دیفرانسیل اضافه شده و نشان داده شده است که با اضافه کردن آن می‌توان شرایط مرزی اساسی را دقیقاً مانند روش المان‌های محدود اعمال کرد. با حل چند مثال مختلف، دقت و کارایی روش بررسی شده است.

در این مقاله ابتدا به شرح تفصیلی تقریب کمترین مربعات متحرک و روش گالرکین بی‌المان پرداخته می‌شود. سپس با نوشتن شکل انتگرالی و شکل تضعیف شده² معادله پواسون و معادلات کشسانی دوبعدی و معرفی جمله انتگرال تکمیلی، روشی با عنوان روش انتگرال تکمیلی برای اعمال شرایط مرزی اساسی معرفی شده و با گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس این روش، معادلات جبری گسسته حاصل می‌شود. سرانجام دقت روش به دست آمده از طریق کاربرد آن برای مثالهای مختلفی از معادله پواسون و مسائل استاتیک و دینامیک کشسانی دوبعدی، بررسی و نتایج به دست آمده ارائه می‌شود.

2- تقریب کمترین مربعات متحرک

تقریب کمترین مربعات متحرک³ روشی برای ساختن تقریبی از یک تابع مجهول با داشتن مقدار آن در تعدادی نقاط مجزا است. این روش در ابتدا برای ترسیم منحنیهای جغرافیایی و خطوط هم‌تراز و ساختن سطوح هموار براساس مقادیر اندازه‌گیری شده یک کمیت در تعدادی ایستگاه مجزا معرفی و مطالعه شد [17-20]. تابع تقریب ساخته شده به وسیله این روش، به خلاف روشهای

1. Consistent
2. Weak Form
3. Moving Least Square Approximation

ساختن تابع تقریب استفاده می‌شود. همان‌طور که گفته شد برای پیدا کردن بردار ضرایب، باید نقطه کمینه $J(\mathbf{x})$ را نسبت به $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ پیدا کرد.

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0, \quad j=1,2,\dots,m \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n 2w_i(\mathbf{x})p_j(\mathbf{x}_i)[\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x})-\hat{u}_i] = 0, \quad j=1,2,\dots,m \quad (8)$$

مجموعه معادلات (8) شامل m معادله با m مجهول $a_j(\mathbf{x})$ است. دستگاه معادلات فوق را می‌توان به شکل زیر مرتب کرد:

$$\left[\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i) \right] \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \left[\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\hat{u}_i \right] \quad (9)$$

این معادله را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i) \quad (11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}_n)] \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]^T \quad (13)$$

اگر دو طرف رابطه (10) در معکوس ماتریس \mathbf{A} ضرب شود، بردار ضرایب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} \quad (14)$$

اگر رابطه (14) در رابطه (1) جایگذاری شود می‌توان توابع شکل را به صورت زیر معرفی کرد:

همچنان‌که از رابطه (14) دیده می‌شود، هنگامی می‌توان

بردار ضرایب را از این رابطه محاسبه کرد که ماتریس \mathbf{A} وارون پذیر باشد. برای تحقق این شرط لازم است که اولاً

حداقل m گره در همسایگی نقطه \mathbf{x} دارای تابع وزنی بزرگتر از صفر باشد و ثانیاً گره‌های مزبور در یک آرایش خاص قرار نگیرند. برای مثال در مسائل دوبعدی، گره‌ها بر روی یک خط راست قرار نداشته باشند.

اگر رابطه (14) در رابطه (1) جایگذاری شود می‌توان توابع شکل را به صورت زیر معرفی کرد:

$$u^h(\mathbf{x}) = \varphi^T(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})\hat{u}_i \quad (15)$$

تابع مجهول مؤثر باشد. به بیان دیگر رفتار تابع تقریب ساخته شده، مشابه رفتار توابع پایه انتخاب شده برای تقریب خواهد بود. این مطلب از آن جهت می‌تواند مفید باشد که گاهی ممکن است بتوان بر اساس فیزیک مسأله در دست حل، رفتار تابع مجهول یا به عبارتی رفتار جواب مسأله را پیش‌بینی کرد. در این صورت با انتخاب توابع پایه از میان توابعی که رفتار مشابهی دارند، تقریب خوبی برای تابع مجهول می‌توان یافت. به عنوان مثال اگر بخواهیم توابع پایه را از بین چند جمله‌ایهای کامل انتخاب کنیم، بردار $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ به صورت زیر برای مرتبه‌های متفاوت چند جمله‌ای‌ها نوشته می‌شود:

ناحیه دو بعدی، پایه خطی، $m=3$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x, y]^T \quad (2)$$

ناحیه دو بعدی، پایه مربعی، $m=6$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, y^2, xy]^T \quad (3)$$

ناحیه سه بعدی، پایه خطی، $m=4$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z]^T \quad (4)$$

ناحیه سه بعدی، پایه مربعی، $m=10$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz]^T \quad (5)$$

بردار $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})]^T$ شامل ضرایب مجهول است که تابعی از مختصات نقطه \mathbf{x} می‌باشد. این بردار از کمینه‌سازی نرم وزن‌دار زیر در هر نقطه به دست می‌آید.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})[\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x})-\hat{u}_i]^2 \quad (6)$$

در این رابطه $w_i(\mathbf{x})$ تابع وزن متعلق به گره i ام است که در نقطه \mathbf{x} محاسبه شده. تابع وزن برای تمامی گره‌ها و بر روی کل دامنه مسأله تعریف می‌شود به طوری که $w_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ و مقدار آن در نقطه \mathbf{x}_i حداکثر بوده و با دور شدن از نقطه \mathbf{x}_i مقدار آن کاهش یابد. \hat{u}_i مقدار مجازی تابع تقریب است که در گره i ام تعریف می‌شود. باید توجه کرد که \hat{u}_i جواب مسأله در گره i ام نیست، بلکه فقط مقداری مجازی است که از آن برای

هر گره به صورت دایره‌ای در اطراف آن گره فرض می‌شود. هرچند در حالت کلی این ناحیه اثر می‌تواند شکلی دلخواه داشته باشد، انتخاب ناحیه اثر دایره‌ای معمول است.

تابع وزن نقش مؤثری در تعیین کارایی روش تقریب کمترین مربعات متحرک ایفا می‌کند. توابع وزن باید همواره نامنفی بوده و در روی خود گره، یعنی در شعاع صفر بیشترین مقدار بوده و با دور شدن از گره، همواره کاهش یابد و در فاصله شعاع اثر آن گره، برابر صفر شود. به این ترتیب هر گره تنها یک ناحیه دایره‌ای اطراف خود را - که شعاع آن را شعاع اثر آن گره می‌گویند - تحت تأثیر قرار می‌دهد و هرچه از آن گره دورتر شویم، این تأثیرگذاری کمتر خواهد بود. البته باید توجه شود که شعاع اثر نمی‌تواند بیش از اندازه کوچک شود. به عبارت دیگر می‌توان حداقل شعاع اثر تابع وزن را به نحوی تعیین کرد که ماتریس A در رابطه (14) معکوس‌پذیر باشد. معمولاً شعاع اثر واقعی را برابر ضریبی از این حداقل شعاع قابل قبول انتخاب می‌کنند، تا معکوس‌پذیری ماتریس A با مشکل روبه‌رو نشود. درجه مشتق‌پذیری توابع تقریب ساخته شده از روش تقریب کمترین مربعات متحرک، برابر است با حداقل درجه مشتق‌پذیری تابع وزن و درجه مشتق‌پذیری توابع پایه [21].

در این‌جا به سه نوع تابع که معمولاً از آنها استفاده می‌شود اشاره می‌شود:

Exponential

$$W = \begin{cases} e^{-(s/c)^2} & s \leq 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases} \quad (23)$$

Cubic Spline

$$W = \begin{cases} (2 - 12s^2 + 12s^3) / 3 & s \leq 1/2 \\ (4 - 12s + 12s^2 - 4s^3) / 3 & 1/2 \leq s \leq 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases} \quad (24)$$

$$\phi^T(x) = P^T(x)A^{-1}(x)B(x) \quad (16)$$

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m P_j(x) [A^{-1}(x)B(x)]_{ji} \quad (17)$$

$\phi_i(x)$ را تابع شکل متعلق به گره i ام در نقطه x می‌نامیم. هر چند به دلیل شباهت رابطه (15) با روابط المان محدود، ϕ_i ها را تابع شکل نامیدیم، لیکن باید توجه داشت که توابع شکل معرفی شده در این جا خواص توابع شکل معرفی شده در روش المان محدود را ندارند. به بیان دیگر

$$\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$u(x_i) \approx u^h(x_i) \neq \hat{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

به‌علاوه همانطور که پیشتر گفته شد، \hat{u}_i مقداری مجازی است که در هر گره تعریف می‌شود و برابر با مقدار تابع مجهول در آن گره نیست. البته توابع شکل در این‌جا یکی از خاصیت‌های معرفی شده در روش المان محدود را دارند که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (20)$$

قدم بعدی محاسبه مشتقات توابع شکل است. برای این منظور از رابطه (17) نسبت به مختصات نقطه x مشتق گرفته می‌شود:

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^m \left\{ P_{j,k} [A^{-1}B]_{ji} + P_j [(A^{-1})_{,k} B + A^{-1}(B)_{,k}]_{ji} \right\} \quad (21)$$

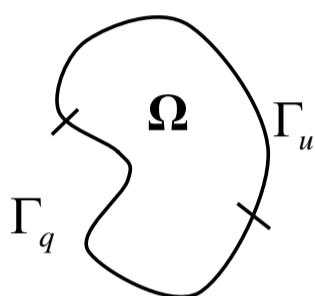
که در آن علامت کاما به معنی مشتق‌گیری نسبت به مؤلفه k ام بوده و مشتق معکوس ماتریس A به صورت زیر است:

$$(A^{-1})_{,k} = A^{-1}A_{,k}A^{-1} \quad (22)$$

3- تابع وزن

یکی از جنبه‌های روش تقریب کمترین مربعات متحرک، تعریف یک تابع وزن برای هر گره است. تابع وزن بیان می‌کند که گره مورد نظر در چه ناحیه‌ای از اطراف خود و به چه مقدار بر جواب تأثیر گذاری دارد. معمولاً ناحیه اثر

همین ترتیب Γ_q آن قسمت از مرز ناحیه مسأله است که شرایط مرزی نیومن بر روی آن اعمال می‌شود و \bar{q} شار معین شده ورودی به آن قسمت از مرز است. همان‌طور که از رابطه (29) دیده می‌شود، اگر Γ کل مرز ناحیه باشد، Γ_u و Γ_q بدون این‌که در نقطه‌ای اشتراک داشته باشند، کل مرز را خواهند پوشاند. در این روابط n بردار یکه عمود بر مرز ناحیه مسأله و اشاره کننده به طرف بیرون مرز و n_x, n_y کسینوسهای هادی این بردار است.



شکل 3 ناحیه دو بعدی Ω با مرزهای اساسی و طبیعی

مطابق روش رایلی-ریتز برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل، انتگرال وزن دار شده معادل رابطه (26) را به صورت زیر می‌توان نوشت [21].

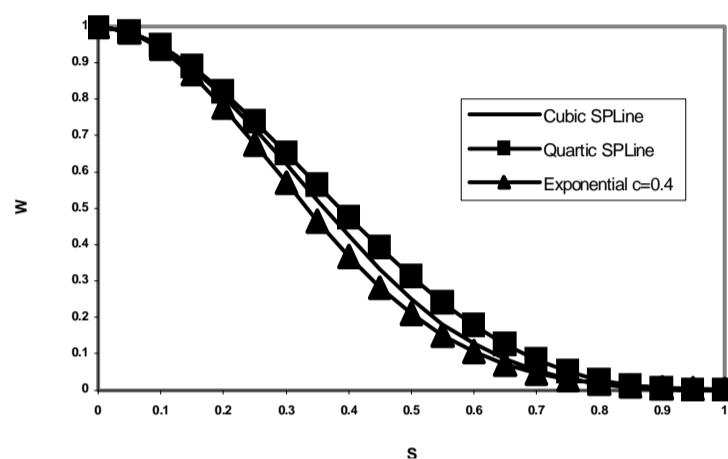
$$\int_{\Omega} w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - f \right] d\Omega = 0 \quad (30)$$

مطابق رابطه فوق، انتگرال وزن دار شده خطاها، بر روی ناحیه مسأله باید صفر باشد. به بیان دیگر در این روش تقریبی برای حل معادله، به دنبال توابعی به عنوان جواب می‌گردیم که نسبت به توابع وزن دلخواهی عمود باشند. این روش به ما اجازه می‌دهد تا با انتخاب توابع وزن مستقل روابطی مستقل به دست آوریم و از حل هم‌زمان آنها، مقادیر مجهول را محاسبه کنیم. دیگر امکانی که شکل انتگرالی فوق به ما می‌دهد این است که می‌توان به کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء، مشتقات فضایی را از روی متغیر وابسته u به تابع وزن منتقل کرد، و با این کار با کاهش مرتبه مشتق‌گیری، شرایط پیوستگی لازم برای تابع تقریب را کاهش داد. انتگرال‌گیری جزء به جزء در دوبعد به کمک روابط زیر انجام می‌شود [21].

Quartic Spline

$$W = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & s \leq 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases} \quad (25)$$

در این روابط $s = r/R_m$ و r فاصله تا گره مورد نظر و R_m شعاع اثر تابع وزن است. c در رابطه (23) مقدار ثابتی است که شکل تابع وزن را کنترل می‌کند. در شکل 2 این سه تابع برای مقایسه رسم شده‌اند.



شکل 2 مودار سه نمونه از توابع وزن

4- شکل انتگرالی، شکل تضعیف شده و شکل گسسته شده معادله پواسون

معادله دیفرانسیل پواسون یا معادله هدایت حرارتی که اغلب در بررسی مسائل انتقال حرارت، حرکت سیال پتانسیل، پیچش شفتهای غیر دایروی یا در مسائل الکترومغناطیس و میدان به آن برخورد می‌شود، بر روی ناحیه دوبعدی Ω به صورت زیر نوشته می‌شود (شکل 3):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (26)$$

شرایط مرزی در این مسأله به صورت زیر است:

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (27)$$

$$k(x, y) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = k(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (28)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_q = 0, \quad \Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma \quad (29)$$

در این روابط Γ_u قسمتی از مرز ناحیه مسأله است که شرایط مرزی دیریشله بر روی آن اعمال می‌شود و \bar{u} مقدار معین شده برای متغیر وابسته روی مرز است. به

در روش گالرکین بی‌المان، توابع شکل استفاده شده به نحوی است که ممکن است مقدار تابع شکل مربوط به گره‌های داخلی، مقداری مخالف صفر بر روی مرز دیریشله داشته باشند و در چنین شرایطی محاسبه انتگرال تکمیلی در رابطه (34) الزامی است.

برای گسسته‌سازی معادلات حاکمه باید تابع تقریب متغیر وابسته و مشتقات اول آن بر حسب مقادیر گرهی بیان شوند و با جای‌گذاری آنها در رابطه (34)، شکل گسسته معادلات حاصل شود. همان‌طور که پیشتر اشاره شد تابع تقریب و مشتقات آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (35)$$

$$\frac{\partial u^h(\mathbf{x})}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \phi_{i,x}(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (36)$$

$$\frac{\partial u^h(\mathbf{x})}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \phi_{i,y}(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (37)$$

اگر روابط فوق در رابطه (34) جای‌گذاری شده و مطابق روش گالرکین، توابع وزن از میان توابع شکل انتخاب شود، شکل گسسته شده معادله (34) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} k \left[\phi_{j,x} \left(\sum_{i=1}^n \phi_{i,x} \hat{u}_i \right) + \phi_{j,y} \left(\sum_{i=1}^n \phi_{i,y} \hat{u}_i \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \phi_j k \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_{i,x} \hat{u}_i \right) n_x + \left(\sum_{i=1}^n \phi_{i,y} \hat{u}_i \right) n_y \right] d\Gamma \quad (38)$$

$$= \int_{\Omega} \phi_j f d\Omega + \int_{\Gamma_q} \phi_j \bar{q} d\Gamma \quad j=1,2,\dots,n$$

دستگاه معادلات فوق شامل n معادله و n مجهول \hat{u}_i بوده و بعد از اعمال شرایط مرزی دیریشله قابل حل است. این دستگاه معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر مرتب کرد:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{G})\mathbf{U} = \mathbf{f} + \mathbf{q} \quad (39)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k (\phi_{i,x} \phi_{j,x} + \phi_{i,y} \phi_{j,y}) d\Omega \quad (40)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_u} \phi_i (\phi_{j,x} n_x + \phi_{j,y} n_y) d\Gamma \quad (41)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial x} G d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G d\Omega + \int_{\Gamma} w G n_x d\Gamma \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial}{\partial y} G d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G d\Omega + \int_{\Gamma} w G n_y d\Gamma \quad (32)$$

با استفاده از روابط فوق برای انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (29)، شکل کاهش یافته معادله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} k \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} w k \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w f d\Omega = 0 \quad (33)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، در استفاده از شکل کاهش یافته، شرایط مرزی نیومن در روابط ظاهر شده و اعمال این دسته از شرایط مرزی به راحتی انجام می‌شود. با شکستن انتگرال روی مرز در رابطه (33) به دو انتگرال خطی مربوط به مرزهای دیریشله و نیومن و جای‌گذاری مستقیم شرایط مرزی نیومن از رابطه (28) در آن، معادله فوق به شکل زیر مرتب می‌شود:

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega \quad (34)$$

$$- \int_{\Gamma_u} w k \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_q} w \bar{q} d\Gamma$$

رابطه (34) شکل انتگرالی کاهش یافته همراه با شرایط مرزی نیومن برای معادله پواسون است. مطلب قابل توجه در این معادله، انتگرال دوم در سمت چپ معادله است. این انتگرال که در این مقاله با عنوان انتگرال تکمیلی نام‌گذاری می‌شود، بیانگر شار ورودی از طریق مرزهای دیریشله است. در روش المان‌های محدود، توابع وزن w به نحوی انتخاب می‌شوند که تابع وزن در روی مرز دیریشله دارای مقدار صفر باشد. بنابراین در روش المان‌های محدود، این انتگرال برابر صفر خواهد بود. اما در روش گالرکین بی‌المان به دلیل خواص ویژه توابع شکل، این انتگرال مقداری غیر صفر دارد و باید در محاسبات وارد شود. این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از جمله‌های حاوی مشتقات فضایی در روابط (48) و (49) شکل تضعیف شده معادلات حاکمه به دست می‌آید:

$$-\int_{\Omega} \rho w \ddot{v} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right) d\Omega \quad (50)$$

$$+ \int_{\Gamma} w (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} w f_y d\Omega = 0$$

$$-\int_{\Omega} \rho w \ddot{v} d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right) d\Omega \quad (51)$$

$$+ \int_{\Gamma} w (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} w f_y d\Omega = 0$$

با جایگذاری مستقیم از روابط (47) در روابط فوق و مرتب‌سازی آنها، معادلات انتگرالی کاهش یافته همراه با شرایط مرزی نیومن برای معادلات دیفرانسیل کشسانی دوبعدی، به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\int_{\Omega} \rho w \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega \quad (52)$$

$$- \int_{\Gamma_u} w (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) d\Gamma = \int_{\Omega} w f_x d\Omega + \int_{\Gamma_t} w \bar{t}_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \rho w \ddot{v} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_y \right) d\Omega \quad (53)$$

$$- \int_{\Gamma_u} w (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) d\Gamma = \int_{\Omega} w f_y d\Omega + \int_{\Gamma_t} w \bar{t}_y d\Gamma$$

همان‌طور که در مورد معادله پواسون نیز گفته شد، جمله سمت چپ در معادلات فوق را جمله انتگرال تکمیلی می‌نامیم و در اینجا بیان‌کننده تنش روی مرزهای دارای شرایط مرزی تکیه‌گاهی است. همان‌طور که گفته شد، به خلاف روش المان‌های محدود، این جمله مخالف صفر خواهد بود و باید محاسبه شود.

بر طبق قانون هوک روابط تنش کرنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (55)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ ، $\boldsymbol{\varepsilon}$ به ترتیب بردار تنش و کرنش است. \mathbf{D} ماتریس کشسانی است که برای شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_i = \int_{\Omega} \phi_i f d\Omega \quad (42)$$

$$q_i = \int_{\Gamma_q} \phi_i \bar{q} d\Gamma \quad (43)$$

$$\mathbf{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]^T \quad (44)$$

5- شکل انتگرالی، شکل تضعیف شده و شکل گسسته شده معادلات کشسانی

معادلات دیفرانسیل حاکم بر جسم کشسان خطی دوبعدی همراه با شرایط مرزی حاکم بر آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [21].

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = \rho \ddot{v} \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (46)$$

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{t}_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{t}_y \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (47)$$

همانند معادله پواسون در قسمت قبل، در اینجا نیز مرز ناحیه به دو قسمت مجزا که هیچ نقطه مشترکی ندارند تقسیم شده است. بر روی مرز دیریشله که با Γ_u نشان داده شده، \bar{u}, \bar{v} مقادیر از پیش تعیین شده برای جابه‌جاییها است. بر روی مرز نیومن که با Γ_t نشان داده شده \bar{t}_x, \bar{t}_y شدت نیروهای سطحی وارد شده بر مرز است. در این روابط n_x, n_y کسینوسهای هادی بردار یکه عمود بر سطح، ρ چگالی و \bar{t}_x, \bar{t}_y نشان‌دهنده مشتق دوم کمیت مورد نظر نسبت به زمان است.

مطابق مطالب قسمت قبل، برای دستیابی به یک حل تقریبی شکل انتگرالی معادلات دیفرانسیل فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x - \rho \ddot{u} \right) d\Omega = 0 \quad (48)$$

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y - \rho \ddot{v} \right) d\Omega = 0 \quad (49)$$

تنش صفحه‌ای:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

کرنش صفحه‌ای:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

در این روابط E مدول کشسانی یانگ و ν نسبت پواسون است. بر طبق روابط کرنش-جابجایی و با استفاده از روابط (36) و (37) برای مشتق‌گیری از جابه‌جاییها، کرنشها را به صورت زیر بر حسب مقادیر مجهول \hat{u}_i, \hat{v}_i می‌توان به دست آورد:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \phi_{i,x} \hat{u}_i \\ \sum_{i=1}^n \phi_{i,y} \hat{v}_i \\ \sum_{i=1}^n \phi_{i,y} \hat{u}_i + \sum_{i=1}^n \phi_{i,x} \hat{v}_i \end{Bmatrix} \quad (58)$$

با معرفی بردار U به عنوان بردار مقادیر مجهول گرهی و معرفی ماتریس N به عنوان ماتریس تبدیل- که حاوی توابع شکل است- رابطه فوق را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\varepsilon = NU \quad (59)$$

$$N = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \dots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \dots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \dots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$U = [\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_2, \dots, \hat{u}_n, \hat{v}_n]^T \quad (61)$$

با جایگذاری رابطه (59) در رابطه (54) رابطه تنش جابه‌جایی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = DNU \quad (62)$$

سرانجام با جایگذاری رابطه فوق در روابط (52) و (53) و مرتب‌سازی آنها، شکل ماتریسی نهایی معادلات گسسته شده به صورت زیر است:

$$M\ddot{U} + (K - G)U = f + t \quad (63)$$

$$M_{ij} = \rho \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (64)$$

$$K = \int_{\Omega} N^T DN d\Omega \quad (65)$$

$$G = \int_{\Gamma_u} WnDN d\Gamma \quad (66)$$

$$f = \int_{\Omega} W \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} d\Omega \quad (67)$$

$$t = \int_{\Gamma_t} W \begin{bmatrix} \bar{t}_x & 0 \\ 0 & \bar{t}_y \end{bmatrix} d\Gamma \quad (68)$$

$$W = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix}^T \quad (69)$$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (70)$$

رابطه (63) شکل استاندارد معادله ارتعاشی است که در آن M ماتریس جرم، $K-G$ ماتریس سختی و $f+t$ بردار نیروهای خارجی وارد شده بر سیستم است.

6- اعمال شرایط مرزی اساسی

همان‌طور که پیشتر گفته شد، یکی از پیچیدگیهای کاربرد روش گالرکین بی‌المان، اعمال شرایط مرزی اساسی است و اعمال شرایط مرزی اساسی در این روش، به سادگی روش المان محدود ممکن نیست.

در این مقاله نشان داده می‌شود که با محاسبه و اضافه کردن جمله انتگرال تکمیلی در شکل تضعیف شده معادلات می‌توان شرایط مرزی اساسی را به راحتی و با دقت بالا مطابق همان راهی که در روش المان محدود استفاده می‌شود، ارضا کرد. به طور کلی شرایط مرزی اساسی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u = u^h = \bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \phi_i = \bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \quad (72)$$

دستگاه‌های متقارن استفاده کرد و باید از روشهای عمومی‌تری برای این منظور استفاده شود.

7- مثالهای عددی

برای نشان دادن قابلیت‌های روش ارائه شده در این مقاله، چند مثال مختلف حل و نتایج به دست آمده ارائه شده است و در مواردی با جواب دقیق مسأله، جوابهای به دست آمده از روش المان‌های محدود یا با نتایج موجود در منابع مقایسه شده است.

7-1- معادله پواسون بر روی ناحیه مربعی با

شرایط مرزی اساسی

مسأله‌ای که در این مثال حل می‌شود، در منابع مختلف حل و نرم خطا برای آن ارائه شده است. در اینجا نیز به منظور مقایسه روش پیشنهادی با روشهای موجود حل آن آورده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \quad 0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 2 \quad (74)$$

$$u^h(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{on } \Gamma \quad (75)$$

می‌توان نشان داد که تابع $u(x, y) = x^2 + y^2$ جواب دقیق این مسأله است. مسأله فوق مجموعاً برای 19 حالت مختلف از نظر مرتبه توابع پایه، فاصله بین گره‌ها و شعاع اثر تابع وزن حل شده است. این حالتها عبارتند از:

- پنج حالت برای تعداد گره‌ها شامل 9، 25، 49، 81 و 441 گره که به ترتیب در شبکه‌های 3×3 ، 5×5 ، 7×7 ، 9×9 و 21×21 گره به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند.
- دو حالت مربوط به شعاع اثر تابع وزن که به صورت $R_m = 1/5$ و $R_m = 2/5$ انتخاب شده است.
- دو حالت برای مرتبه توابع پایه که به صورت چند جمله‌ایهای کامل مرتبه اول و مرتبه دوم انتخاب شده است.

نرم خطای مطلق از رابطه زیر محاسبه شده است. در جدول 1 مقادیر نرم خطای متغیر وابسته ارائه شده است:

رابطه فوق بیان کننده ارتباط تمامی گره‌هایی است که در یک نقطه مرزی خاص، دارای تابع شکل مخالف صفرند. به بیان دیگر مقادیر گرهی گره‌هایی که در نزدیکی یک مرز خاص هستند، باید طوری محاسبه شود که مقدار تابع تقریب در آن مرز، برابر مقدار از پیش تعیین شده گردد. با نوشتن این رابطه برای هر یک از درجه‌های آزادی تعریف شده برای هر گره مرزی، یک معادله به معادلات سیستم اضافه می‌شود و برای برابر شدن تعداد معادلات و مجهولات، باید یکی از معادلات سیستم حذف شود. این کار با حذف معادله گسسته شده‌ای که برای گره مورد نظر نوشته شده، انجام می‌شود و معادله (72) به جای آن در سیستم معادلات جایگذاری می‌شود.

این فرایند دقیقاً همان فرایندی است که در روش المان محدود برای اعمال شرایط مرزی انجام می‌شود. با این تفاوت که به دلیل خواص ویژه توابع شکل در روش المان‌های محدود رابطه (72) به شکل ساده‌تر زیر تقلیل می‌یابد:

$$\hat{u}_i = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (73)$$

و چون این رابطه در سیستم معادلات به صورت یک درایه مساوی یک بر روی قطر اصلی ماتریس ضرایب ظاهر می‌شود، بنابراین این معادله از کل سیستم مستقل بوده و بنابراین می‌توان با حذف کردن سطر و ستون متناظر با گره مورد نظر یک واحد از درجه‌های آزادی سیستم کم کرد و با بازسازی بردار نیروهای خارجی، مابقی سیستم را به طور مستقل حل کرد. اما به خلاف روش المان‌های محدود، در این روش معادله (72) از دیگر معادلات سیستم مستقل نیست و باید همراه با دیگر معادلات حل شود. به این ترتیب روش فوق باعث کاهش مرتبه دستگاه سیستم معادلات نمی‌شود.

در روش ارائه شده در این مقاله، متقارن نبودن جمله انتگرال تکمیلی باعث خارج شدن ماتریس ضرایب از حالت تقارن می‌شود و نمی‌توان از روشهای حل

ضرایب لاگرانژ - که در منبع مذکور از آن استفاده شده - از خود نشان داده است.

7-2- تست همگرایی مرتبه اول برای معادله

کشسانی

در این قسمت آزمون همگرایی مرتبه اول را برای معادله کشسانی اعمال می‌کنیم. در این آزمون با در نظر گرفتن یک میدان خطی برای جابه‌جاییها باید یک میدان ثابت برای کرنشها به دست آید. برای انجام این آزمون، ناحیه‌ای مربعی به ابعاد 2×2 در نظر گرفته شده و میدان جابه‌جایی خطی زیر به صورت شرایط مرزی دیریشله بر روی تمامی مرزهای آن اعمال شده است:

$$u_x = a_0 + a_1x + a_2y \quad (77)$$

$$u_y = b_0 + b_1x + b_2y \quad (78)$$

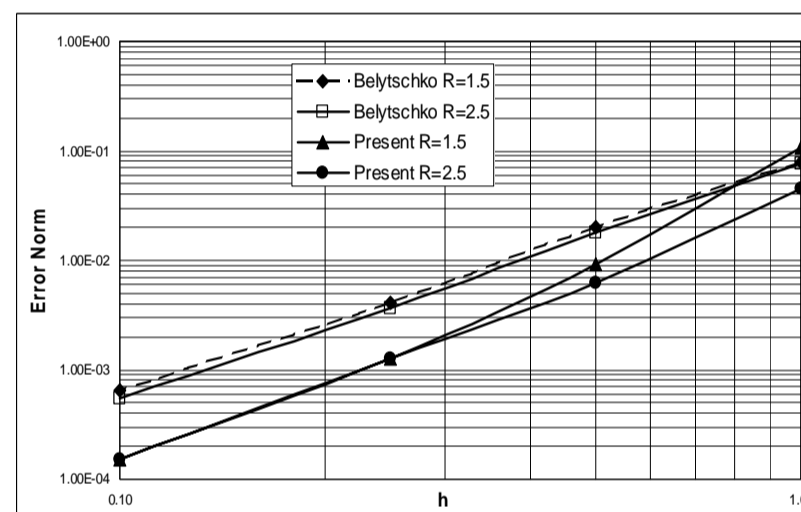
که در آن $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ضرائب ثابت است. مطابق شکل 5 این آزمون برای 8 حالت مختلف توزیع گره‌ها حل شده است: در حالت (a) توزیع هموار و در حالت (b) توزیع غیرهموار گره‌ها در نظر گرفته شده است که در جدول 2 مختصات گره‌ها آورده شده است. در حالت (c) موقعیت مکانی گره شماره 5 بر طبق جدول 3 در شش محل مختلف جابه‌جا شده و در هر حالت مسأله حل شده است. نتایج به دست آمده از اعمال روش حاضر مؤید این واقعیت است که روش مذکور آزمون را کاملاً ارضا نموده و میدان جابه‌جایی خطی داده شده در سراسر ناحیه مسأله برقرار بوده و بعلاوه، کرنشها نیز دارای مقدار ثابتی می‌باشند.

جدول 1 نرم خطا برای مثال اول

شبهه					توابع پایه	شعاع اثر
21*21	9*9	7*7	5*5	3*3		
$1/500 \times 10^{-4}$	$1/28 \times 10^{-3}$	$2/39 \times 10^{-3}$	$9/189 \times 10^{-3}$	$1/067 \times 10^{-1}$	خطی	1/5
$1/500 \times 10^{-3}$	$1/28 \times 10^{-3}$	$2/45 \times 10^{-3}$	$6/253 \times 10^{-3}$	$4/515 \times 10^{-2}$	خطی	2/5
$1/642 \times 10^{-8}$	$3/65 \times 10^{-7}$	$4/89 \times 10^{-5}$	$1/933 \times 10^{-3}$	-	مربعی	1/5
$1/642 \times 10^{-8}$	$1/21 \times 10^{-7}$	$1/24 \times 10^{-11}$	$3/452 \times 10^{-6}$	$1/030 \times 10^{-4}$	مربعی	2/5

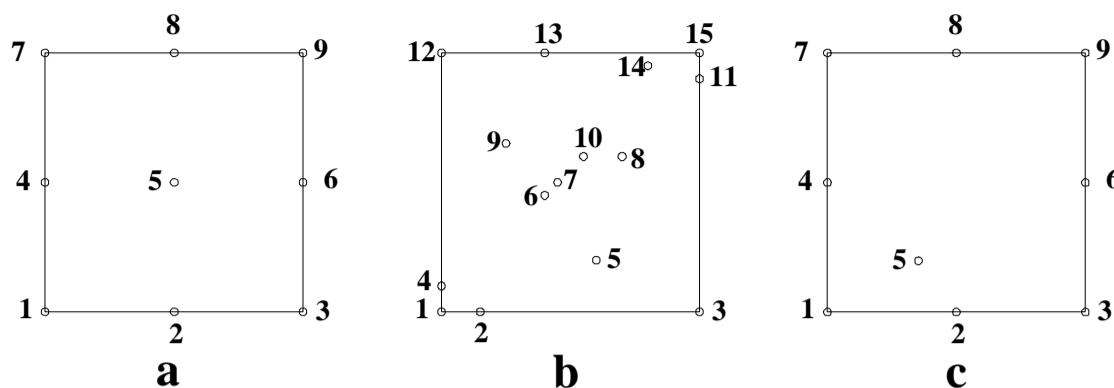
$$\|E_u\| = \left(\int_{\Omega} (u^{Num} - u^{Exact})^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (76)$$

در این رابطه u^{Num} و u^{Exact} به ترتیب جوابهای عددی و دقیق معادله مورد نظر است. همچنان که دیده می‌شود در حالتی که مسأله با توابع پایه مرتبه دوم حل شده، جوابهای به دست آمده با دقت بسیار بالایی معادله داده شده را ارضا کرده و خطاهای عددی در محدوده قابل قبول باقی مانده است. ضمناً توابع وزن مورد استفاده در این مثال از نوع نمایی انتخاب شده‌اند و پارامتر c برای این نوع تابع وزن برابر $\sqrt{2}h$ انتخاب شده که h فاصله بین گره‌ها است. در شکل 4 مقادیر خطا با خطاهای ارائه شده در [22] مقایسه شده است.



شکل 4 مقایسه نرم خطا در مثال اول با نتایج موجود در منابع

از جدول 1 دیده می‌شود که با کم شدن فاصله بین گره‌ها و افزایش مرتبه توابع پایه از یک به دو، دقت نتایج بیشتر شده اما افزایش شعاع توابع وزن - مگر در دو مورد - تأثیر قابل توجهی نداشته است. همان‌طور که از شکل 4 دیده می‌شود، بجز در یک حالت، در دیگر حالت‌های مقایسه شده، روش ارائه شده، دقت بیشتری نسبت به روش



شکل 5 حالات مختلف توزیع گره‌ها در مثال سوم

جدول 6 نتایج آزمون همگرایی مرتبه اول برای جابه‌جایی

در جهتهای X و Y حالت C

درصد خطا (Y)	درصد خطا (X)	Y	X	
$9/28 * 10^{-9}$	$9/28 * 10^{-9}$	1/1	1/1	1
$1/66 * 10^{-8}$	$1/66 * 10^{-8}$	0/1	0/1	2
$9/86 * 10^{-10}$	$2/18 * 10^{-8}$	1/8	0/1	3
$9/81 * 10^{-10}$	$1/14 * 10^{-9}$	1/8	1/9	4
$1/13 * 10^{-8}$	$1/13 * 10^{-8}$	0/9	0/9	5
$1/03 * 10^{-8}$	$7/59 * 10^{-9}$	0/4	0/3	6

جدول 2 موقعیت گره‌ها برای توزیع غیر هموار در حالت b

گره	2	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
X	0/3	0/0	1/2	0/8	0/9	1/4	0/5	1/1	2/0	0/8	1/6
Y	0/0	0/2	0/4	0/9	1/0	1/2	1/3	1/2	1/8	2/0	1/9

جدول 3 موقعیت گره شماره 5 برای حالت c

	6	5	4	3	2	1	
X	0/3	0/9	1/9	0/1	0/1	1/1	X
Y	0/4	0/9	1/8	1/8	0/1	1/1	Y

7-3- آزمون همگرایی مرتبه دوم برای معادله

کشسانی

در این آزمون یک میدان درجه دوم برای جابه‌جاییها فرض شده و بر این اساس باید یک میدان خطی برای کرنشها به دست آید. برای این آزمون تیری به طول $L=8$ و عرض $D=1$ با مشخصات $E=1$ و $\nu=0/25$ در نظر گرفته شده و یک توزیع تنش نرمال خطی مطابق شکل 6 روی مقطع انتهایی آن اعمال شده است. حل دقیق این مسأله به صورت زیر است:

$$u_x = \frac{\sigma}{E} xy \quad (79)$$

$$u_y = -\frac{\sigma}{2E} (x^2 + \bar{\nu}y^2) \quad (80)$$

که در آن σ مطابق شکل 6 مقدار بیشینه تنش نرمالی است که در انتهای تیر اعمال می‌شود و \bar{E} و $\bar{\nu}$ نیز به صورت زیر برای حالات تنش صفحه‌ای محاسبه می‌شود.

$$\bar{E} = E \quad (81)$$

$$\bar{\nu} = \nu$$

در جداول 4، 5 و 6 مقادیر دقیق و محاسبه شده جابه‌جاییها همراه با درصد خطا برای آزمون همگرایی مرتبه اول داده شده است.

جدول 4 نتایج آزمون همگرایی مرتبه اول برای جابه‌جایی در

جهتهای X و Y در حالت a

گره	5	X	Y	درصد خطا (X)	درصد خطا (Y)
	1	1	1	0	0

جدول 5 نتایج آزمون همگرایی مرتبه اول برای جابه‌جایی در

جهتهای X و Y حالت b

گره	5	X	Y	درصد خطا (X)	درصد خطا (Y)
گره 5	1/2	0/4	2/13 * 10 ⁻⁸	1/96 * 10 ⁻⁷	
گره 6	0/8	0/9	4/26 * 10 ⁻⁸	1/17 * 10 ⁻⁷	
گره 7	0/9	1	2/94 * 10 ⁻⁸	1/07 * 10 ⁻⁷	
گره 8	1/4	1/2	2/05 * 10 ⁻⁸	8/02 * 10 ⁻⁸	
گره 9	0/5	1/3	6/25 * 10 ⁻⁸	4/39 * 10 ⁻⁸	
گره 10	1/1	1/2	2/11 * 10 ⁻¹⁰	7/98 * 10 ⁻⁸	

مقادیر نرم خطاهای نسبی جابه‌جایی و انرژی کرنشی برای تمامی حالت‌های گفته شده بر طبق روابط زیر محاسبه و در جدول 7 ارائه شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، همان‌طور که انتظار داریم انتخاب توابع پایه درجه دوم توانست آزمون مرتبه دوم را با دقت بسیار خوبی ارضا کند. حتی انتخاب پایه مرتبه اول نیز خطاهای نسبی بسیار کوچکی را ایجاد کرده است که در مقایسه با خطاهای تولید شده برای توابع پایه مرتبه دوم ارائه شده در [15] نیز بسیار اندک است:

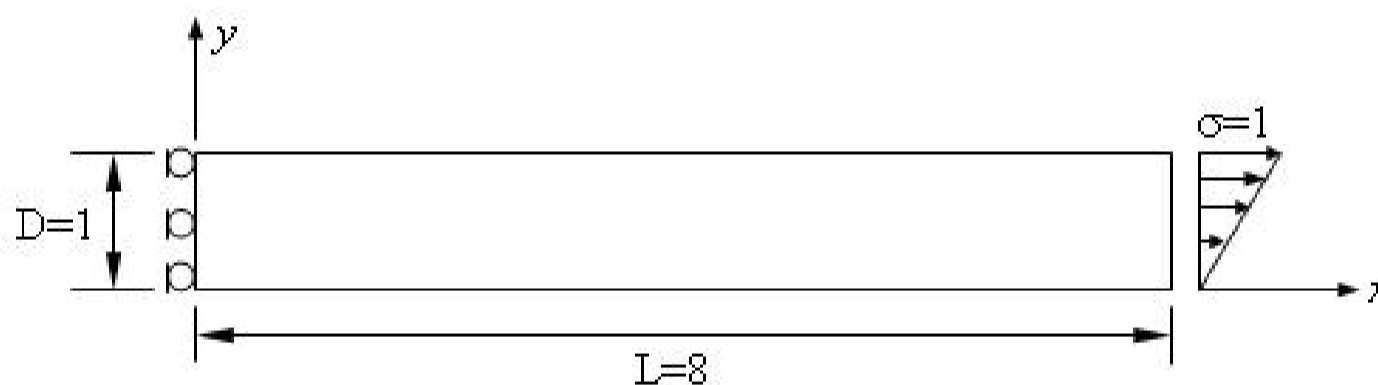
$$E_u = \left(\frac{\int_{\Omega} (u^{Num} - u^{Exact})^T \cdot (u^{Num} - u^{Exact}) d\Omega}{\int_{\Omega} (u^{Exact})^T \cdot (u^{Exact}) d\Omega} \right)^{1/2} \quad (83)$$

و از رابطه زیر برای کرنش صفحه‌ای استفاده می‌شود:

$$\bar{E} = E / (1 - \nu^2) \quad (82)$$

$$\bar{\nu} = \nu / (1 - \nu)$$

مسئله فوق با فرض تنش صفحه‌ای برای توزیع هموار گره‌ها به تعداد 17 گره در طول و 3 گره در عرض و برای شش حالت متفاوت از نظر درجه توابع پایه و شعاع اثر تابع وزن حل شده است. شرایط مرزی اعمال شده به این صورت است که در ضلع سمت چپ ناحیه یا $x=0$ جابه‌جاییها در برای افقی محدود شده و در ضلع پایین یا $y=0$ مقادیر جابه‌جاییهای قائم از رابطه (80) محاسبه شده و به صورت جابه‌جایی از پیش تعیین شده‌ای اعمال گردیده‌اند. ضمناً تابع وزن به کار برده شده از نوع نمایی بوده است. همچنین اندازه شعاع اثر تابع وزن همراه با ضریب ثابت c در جدول 7 آورده شده است.



شکل 6 آزمون همگرایی مرتبه دوم

جدول 7 نرم خطای نسبی برای مثال سوم

E_e	E_u	C	R	توابع پایه	روش
$2/004 * 10^{-2}$	$1/856 * 10^{-4}$	0/50	2/0	خطی	روش حاضر
$4/340 * 10^{-5}$	$4/664 * 10^{-5}$	0/75	3/0	خطی	روش حاضر
$1/675 * 10^{-3}$	$1/736 * 10^{-5}$	1/00	4/0	خطی	روش حاضر
$2/347 * 10^{-5}$	$3/425 * 10^{-7}$	0/50	2/0	مربعی	روش حاضر
$2/480 * 10^{-6}$	$3/460 * 10^{-8}$	0/75	3/0	مربعی	روش حاضر
$5/348 * 10^{-6}$	$5/577 * 10^{-8}$	1/00	4/0	مربعی	روش حاضر
$8/313 * 10^{-2}$	$1/391 * 10^{-3}$	0/50	2/0	مربعی	روش ارائه شده در [15]
$4/628 * 10^{-2}$	$8/173 * 10^{-4}$	0/75	3/0	مربعی	روش ارائه شده در [15]
$2/233 * 10^{-5}$	$3/032 * 10^{-6}$	1/00	4/0	مربعی	روش ارائه شده در [15]

• سه حالت متفاوت برای تعداد گره‌ها شامل 27، 85 و 175 گره که به ترتیب در شبکه‌های 3×9 ، 5×17 و 7×25 یکنواخت توزیع شده‌اند.

• چهار حالت متفاوت برای انتخاب شعاع اثر تابع وزن که به صورت $R_m = 1/5d$ ، $R_m = 2d$ ، $R_m = 3d$ و $R_m = 4d$ انتخاب شده‌اند. شعاع اثر تابع وزن d کوچکترین شعاعی است که به ازای آن تعداد گره‌های قرار گرفته در ناحیه اثر تابع وزن حداقل باشد.

• دو حالت متفاوت برای انتخاب تابع وزن که توسط روابط (24) و (25) تعریف شده‌اند.

در این مثال $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$ ، $D = 12 \text{ m}$ ، $L = 48 \text{ m}$ ، $v = 0.3$ و $p = 1000 \text{ lb}$ در نظر گرفته شده و مسأله برای حالت تنش صفحه‌ای حل شده است. در جدول 8 مقدار حداکثر جابه‌جایی در انتهای تیر همراه با خطا در انرژی کرنشی برای سومین انتخاب شعاع اثر تابع وزن ارائه شده است.

5-7- ارتعاشات آزاد تیر یک سر درگیر

در این قسمت برای نشان دادن توانایی روش ارائه شده در حل مسأله دینامیکی مسأله تعیین فرکانسهای طبیعی یک تیر یک سر درگیر بررسی می‌شود. برای این منظور تیر یک سر درگیر مثال قبل را در نظر گرفته و ماتریس‌های جرم و سختی آن از روابط (64)، (65) و (66) محاسبه می‌شود.

$$E_e = \left(\frac{\int_{\Omega} (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact})^T . D . (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact}) d\Omega}{\int_{\Omega} (\varepsilon^{Exact})^T . D . (\varepsilon^{Exact}) d\Omega} \right)^{1/2} \quad (84)$$

4-7- تیر یک سر درگیر

همانطور که در شکل 7 دیده می‌شود، تیر یک سر درگیر که در این مثال بررسی شده طول L و عرض D دارد و نیروی برشی گسترده‌ای با توزیع سهموی بر انتهای آزاد آن وارد می‌شود. جواب تحلیلی این مسأله به صورت زیر داده شده است [23].

$$u = -\frac{py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \bar{v})(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad (85)$$

$$v = \frac{p}{6EI} \left[3\bar{v}y^2(L - x) + (4 + 5\bar{v})\frac{D^2x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (86)$$

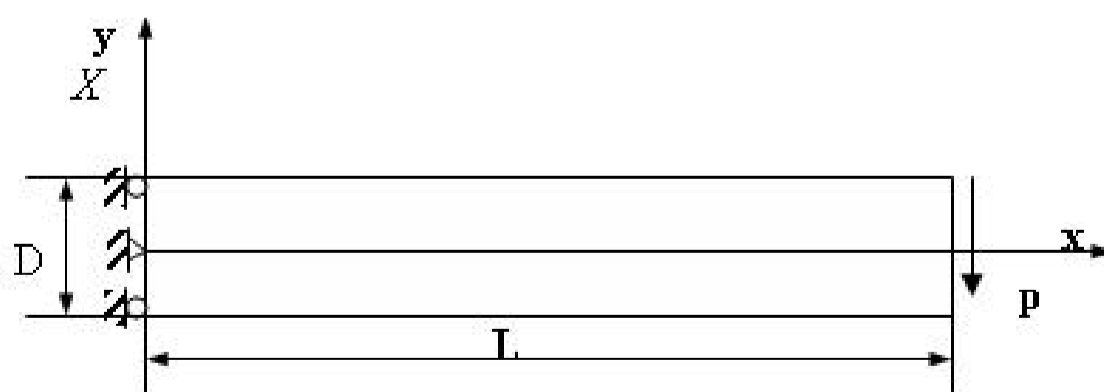
که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ ممان اینرسی تیر و \bar{E} و \bar{v} برای حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مطابق روابط (81) و (82) است. بر این اساس تنشهای ایجاد شده در تیر از روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_x = -\frac{p(L-x)y}{I} \quad (87)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (88)$$

$$\sigma_z = -\frac{p}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (89)$$

در روابط داده شده، p کل نیروی اعمال شده است. حالت‌های در نظر گرفته شده برای حل این مسأله عبارتند از:



شکل 7 تیر یک سر درگیر

جدول 8 نتایج حاصل از حل استاتیکی تیر یک سر درگیر

E_e	E_u	درصد خطا	جابه‌جایی انتهای تیر	تابع وزن	R	شبکه	حالت
$2/3176 * 10^{-1}$	$5/3462 * 10^{-2}$	5/3172	0/00842677	مکعبی	9	27	1
$1/1379 * 10^{-1}$	$1/7916 * 10^{-2}$	1/6680	0/008751548	مکعبی	12	27	2
$7/7923 * 10^{-2}$	$9/9552 * 10^{-3}$	0/9446	0/008815932	مکعبی	18	27	3
$7/8161 * 10^{-2}$	$5/8510 * 10^{-3}$	0/5703	0/008849245	مکعبی	24	27	4
$1/0871 * 10^{-1}$	$1/7240 * 10^{-2}$	1/7278	0/008746226	مکعبی	4/5	85	5
$4/0413 * 10^{-2}$	$8/3956 * 10^{-3}$	0/8307	0/008826066	مکعبی	6	85	6
$1/4034 * 10^{-2}$	$6/8414 * 10^{-3}$	0/6878	0/008838782	مکعبی	9	85	7
$8/2482 * 10^{-3}$	$6/4661 * 10^{-3}$	0/6528	0/008841905	مکعبی	12	85	8
$7/0353 * 10^{-2}$	$1/1250 * 10^{-2}$	1/1286	0/008799556	مکعبی	3	175	9
$2/2952 * 10^{-2}$	$7/4035 * 10^{-3}$	0/7360	0/008834499	مکعبی	4	175	10
$8/9135 * 10^{-3}$	$6/9027 * 10^{-3}$	0/6907	0/008838524	مکعبی	6	175	11
$7/1985 * 10^{-3}$	$6/8426 * 10^{-3}$	0/6859	0/008838957	مکعبی	8	175	12
$1/8957 * 10^{-1}$	$3/6300 * 10^{-2}$	3/5442	0/008584566	درجه چهار	9	27	13
$1/0363 * 10^{-1}$	$5/3462 * 10^{-2}$	1/5517	0/008761896	درجه چهار	12	27	14
$8/0162 * 10^{-2}$	$7/6937 * 10^{-3}$	0/7440	0/008833788	درجه چهار	18	27	15
$8/1836 * 10^{-2}$	$4/4069 * 10^{-3}$	0/4309	0/008861646	درجه چهار	24	27	16
$8/2898 * 10^{-2}$	$1/2629 * 10^{-2}$	1/2560	0/008788217	درجه چهار	4/5	85	17
$3/6144 * 10^{-2}$	$8/2199 * 10^{-3}$	0/8156	0/008827414	درجه چهار	6	85	18
$1/2827 * 10^{-2}$	$6/7051 * 10^{-3}$	0/6748	0/008839938	درجه چهار	9	85	19
$1/1248 * 10^{-2}$	$6/6816 * 10^{-3}$	0/6712	0/008840263	درجه چهار	12	85	20
$5/2000 * 10^{-2}$	$9/1754 * 10^{-3}$	0/9164	0/008818441	درجه چهار	3	175	21
$2/1146 * 10^{-2}$	$7/3803 * 10^{-3}$	0/7339	0/008834685	درجه چهار	4	175	22
$8/8234 * 10^{-3}$	$6/9026 * 10^{-3}$	0/6911	0/008838488	درجه چهار	6	175	23
$7/8889 * 10^{-3}$	$6/9457 * 10^{-3}$	0/6945	0/008838194	درجه چهار	8	175	24

سنگین است بر روی آن درجه‌های آزادی که در آنها شرایط مرزی اساسی اعمال شده، قرار گرفته است. در جدول 9 فرکانسهای طبیعی برای ده مد اول ارتعاشی تیر یک سر درگیر مثال قبل، برای هفت حالت مختلف آورده شده است. این حالتها عبارتند از چهار نوع شبکه که با دو روش المان‌های محدود، و روش گالرکین بی‌المان حل شده‌اند.

باید این نکته اضافه شود که در این روش به خلاف روش المان‌های محدود معادلات مربوط به شرایط مرزی اساسی از دیگر معادلات سیستم مستقل نیست و از مجموعه معادلات حذف نمی‌شود، لذا ماتریس جرم نیز باید مطابق با این معادلات اصلاح شود. برای این منظور فرض شده که یک جرم نقطه‌ای که جرم آن در مقابل جرم سازه بسیار

جدول 9 فرکانس ارتعاشات طبیعی تیر یک سر در گیر برای ده مد اول ارتعاشی

شماره مد	المان محدود (27)	المان محدود (85)	المان محدود (175)	المان محدود (297)	بدون المان (27)	بدون المان (85)	بدون المان (175)
1	4/5595	4/3447	4/2849	4/1803	4/4275	4/3028	4/2647
2	23/2598	21/8069	21/5021	21/2338	22/3512	21/5167	21/3601
3	27/2149	27/1383	27/1192	27/0969	27/1773	27/1262	27/1129
4	55/3336	50/6286	49/6460	48/7765	52/3184	49/6679	49/1775
5	82/4186	81/3004	80/6920	78/6839	81/5717	80/6978	79/6328
6	93/3784	82/8758	81/0817	80/8231	86/7288	81/0621	80/9703
7	135/5173	117/1519	113/2388	109/4870	124/7443	113/2301	111/3154
8	139/7610	134/6488	133/6586	132/4090	136/0315	133/5350	133/1354
9	157/9463	142/7405	138/9604	134/7750	154/3652	139/2523	137/0126
10	180/6624	159/0988	154/4516	149/5020	171/3822	154/7730	152/2912

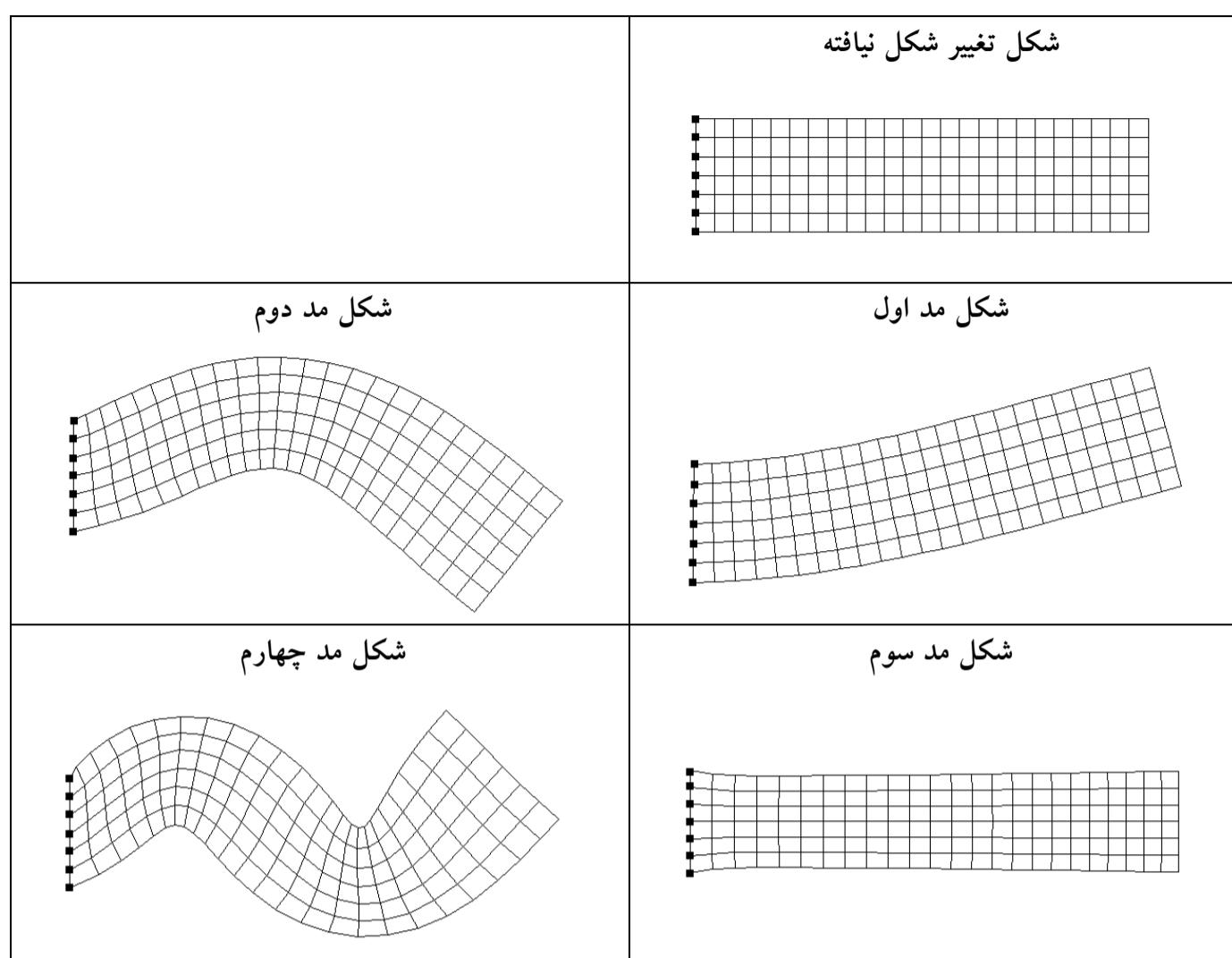
از این میان برای مقایسه دقت روش حاضر با روش المان‌های محدود، سه شبکه با تعداد 27، 85 و 175 گره انتخاب شده و مسأله با هر دو روش حل شده است. علاوه بر آن برای مقایسه، از یک حل معیار برای بررسی دقت روش استفاده شده است. به عنوان معیار، یک حالت مشابه با روش المان‌های محدود و با یک شبکه ریز حل شده و نتایج همراه با نتایج حاصل از روش پیشنهادی در جدول 9 ارائه شده است. اگر فرض کنیم که این حل معیار در مقایسه با دیگر حالتها به جواب دقیق نزدیک‌تر است، می‌توان گفت که نتایج حاصل از روش ارائه شده در مقایسه با روش المان‌های محدود، دقت بیشتری در محاسبه فرکانسهای طبیعی دارد. در شکل 8 مدهای ارتعاشی تیر یک سر در گیر برای چهار فرکانس طبیعی اول آن آورده شده است.

8- نتیجه گیری

به کار بردن روش المان‌های محدود در حل مسائلی از مکانیک محاسباتی با مشکلاتی مانند تولید شبکه در مسائل دارای هندسه پیچیده یا تغییر مداوم شبکه در مسائل دارای هندسه متغیر، روبه‌رو است. بروز چنین

مشکلاتی، کاربرد عملی روشهایی را که وابسته به شبکه‌های مرسوم محاسباتی هستند را در مسائل یاد شده با محدودیت روبه‌رو می‌نماید. روشهای بدون المان یا بدون شبکه، دسته جدیدی از روشهای محاسباتی هستند که در دهه اخیر برای غلبه بر مشکلات فوق پیشنهاد شده‌اند. در این گونه از روشها به دلیل استفاده نشدن از مفهوم مرسوم المان، ساخت توابع تقریب تنها بر اساس نقاط گرهی انجام می‌شود. این قابلیت باعث ساده‌تر شدن عملیات تولید شبکه گرهی در مسائل دارای هندسه پیچیده یا تطبیق شبکه در مسائل دارای هندسه متغیر می‌شود.

یکی از نکاتی که در روشهای بی‌المان باید به دقت مورد توجه قرار گیرد، چگونگی اعمال شرایط مرزی اساسی است. در مقاله حاضر راهکاری جدید برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روشهای بی‌المان ارائه شده است. روش گالرکین بی‌المان یکی از روشهای معروف بدون المان است. در این مقاله کاربرد روشی جدید با عنوان روش انتگرال تکمیلی برای اعمال شرایط مرزی اساسی در آن بررسی شده است.



شکل 8 شکل مد ارتعاشات طبیعی تیر یک سر درگیر برای چهار مد اول ارتعاشی از روش حاضر

[2] Gingold, R.A.; Monaghan, J.J.; "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars"; Mon. Not. R. Astron. Soc.; 181; 1977; pp. 275-289.

[3] Liszka, T.; "An interpolation method for irregular net of nodes"; International Journal for Numerical Methods in Engineering; 20; 1984; pp. 1599-1612.

[4] Monaghan, J.J.; "An introduction to SPH"; Computer Physics Communications; 48; 1982; pp. 89-96.

[5] Nayroles, B.; Touzot, G.; "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements"; Computational Mechanics; 10; 1992; pp. 307-318.

[6] Qian, S.; Weiss, J.; "Wavelet and numerical solution of partial differential equations"; Journal of Computational Physics; 106; 1993; pp. 155-175.

[7] Liu, W.K.; Jun, S.; "Reproducing kernel particle methods"; International Journal for

در این مقاله نشان داده شده است که با اضافه کردن یک جمله به شکل انتگرالی تضعیف شده می‌توان از یک طرف دقت حل عددی را بالا برد و از طرف دیگر شرایط مرزی اساسی را با سهولت بیشتری اعمال نمود. دقت روش پیشنهادی با حل چند مثال بررسی شد. مقایسه نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر با نتایج موجود حاکی از دقت بالای مقادیر به دست آمده به کمک روش انتگرال تکمیلی است. هرچند این روش باعث سادگی اعمال شرایط مرزی و افزایش دقت در این روش می‌شود اما از طرف دیگر موجب نامتقارن شدن ماتریس ضرایب می‌شود.

9- منابع

[1] Lucy, L; "A numerical approach to testing the fission hypothesis"; A.J.; 82; 1977; pp. 1013-1024.

- [15] Zhu, T.; Atluri, S.N.; "A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method"; *Computational Mechanics*; 21; 1998; pp. 211-222.
- [16] Krongauz, Y.; Belytschko, T.; "Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements"; *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*; 131; 1996; pp. 133-145.
- [17] Lancaster, P.; Salkauskas, K.; "Surface generated by moving least square methods"; *Math. Comput.*; 37; 1981; pp.141-158
- [18] McLain, D.H.; "Drawing contours from arbitrary data points"; *Comput. J.*; 17; 1974; pp. 318-324.
- [19] Gordon, W.J.; Wixom, J.A.; "Shepard's method of metric interpolation to bivariate and multivariate data"; *Math. Comp.*; 32; 1976; pp. 253-264.
- [20] Barnhill, R.E.; *Representation and approximation of surfaces*; in *Mathematical Software III*, Academic Press, New York; 32; 1977; pp. 69-120.
- [21] Reddy, J.N.; *An introduction to the finite element method*; 2nd ed., McGraw-Hill; 1993; pp. 683.
- [22] Belytschko, T.; Krongauz, Y.; "Meshless methods: An overview and recent developments"; *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*; 139; 1996; pp. 3-47.
- [23] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N.; *Theory of elasticity*; 3rd ed , McGraw-Hill, New York; 1970; pp. 453.
- Numerical Methods in Fluids; 20; 1995; pp. 1081-1106.
- [8] Belytschko, T.; Lu, Y.Y.; "Element free Galerkin methods"; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 37; 1994; pp. 229-256.
- [9] Melenk, J.M.; Babuska, I.; "The partition of unity finite element method: basic theory and applications"; *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*; 139; 1996; pp. 289-314.
- [10] Onate, E.; Idelsohn, S.; "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow"; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 39; 1996; pp. 3839-3866.
- [11] Zhu, T.; Zhang, J.D.; "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach"; *Computational Mechanics*; 21; 1998; pp. 223-235.
- [12] Atluri, S.N.; Zhu, T.; "A new meshless local Petrov Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics"; *Computational Mechanics*; 22; 1998; pp. 117-127.
- [13] De, S.; Bathe, K.J.; "The Method of Finite Spheres"; *Computational Mechanics*; 25; 2000; pp. 329-345.
- [14] Lu, Y.Y.; Belytschko, T.; "A new implementation of the element free Galerkin method"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 11; 1994; pp. 397-414.