



## معرفی روش زیر فضای تصادفی بر پایه تحلیل همبستگی استاندارد برای تحلیل ارتعاش محیطی سازه‌ها

رضا تازی نژاد<sup>1\*</sup>، مهران پورقلی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز  
2- دانشجوی دکترا، مهندسی عمران، دانشگاه تبریز، تبریز  
\* تبریز، صندوق پستی 51666، r\_tarinejad@tabrizu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 23 اسفند 1393  
پذیرش: 09 اردیبهشت 1394  
ارائه در سایت: 03 خرداد 1394

کلید واژگان:

زیر فضای تصادفی  
تحلیل همبستگی کانونی  
فضای حالت  
ماتریس هانکل

### چکیده

اصلی‌ترین دلیل خطا در شناسایی سیستم با استفاده از نتایج آزمایش‌های ارتعاش محیطی وجود نویزهای محیطی و اندازه‌گیری و همچنین در نظر نگرفتن تحریک ورودی است. به همین جهت همواره یکی از اهداف اصلی ارائه تکنیک‌های جدید در حوزه ارتعاشات محیطی، کاهش عدم قطعیت پاسخ‌ها می‌باشد. در بین روش‌های آنالیز مودال محیطی، زیر فضای تصادفی به عنوان قدرتمندترین روش شناخته شده، مورد توجه است. در این تحقیق با استفاده از تکنیک تحلیل همبستگی استاندارد، روش آنالیز مودالی در حوزه زیر فضای تصادفی ارائه شده که بجای حل مسئله در فضای داده‌های آزمایش، با استخراج بردارهای پایه ارتو نرمال فضای داده‌ها، شناسایی را در فضای بهینه انجام می‌دهد. از مزایای این روش با توجه به ماهیت تحلیل همبستگی استاندارد، نویز کمتر در نتیجه دقت بیشتری در برآورد مشخصات مودال می‌باشد. بعلاوه به دلیل انجام شناسایی در فضای کوچکتر در مقایسه با روش‌های قبلی، فرآیند حل سرعت بیشتری نیز دارد. برای صحت‌سنجی روش ارائه شده، از مدل قاب دو بعدی تحریک شده تحت شتاب زلزله السترو و همچنین از نتایج آزمایش ارتعاش محیطی انجام گرفته بر روی پل دره آلاموسا استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که این روش علاوه بر حذف نویزهای بیشتر در مقایسه با روش‌های زیر فضای قبلی، دارای سرعت تحلیل بسیار بالایی در مسائل واقعی می‌باشد؛ بطوریکه فرآیند محاسبه پارامترهای دینامیکی و رسم شکل‌های مودی پل دره آلاموسا با 30 سنسور نمونه‌برداری، بعد ماتریس حالت 750 و تحریک 50 مد، با پردازنده 5 هسته‌ای با سرعت 2/30 گیگا هرتز در کمتر از 150 ثانیه انجام گرفته است.

## Processing of Ambient Vibration Results using Stochastic Subspace Identification based on Canonical Correlation Analysis

Reza Tarinejad\*, Mehran Pourgholi

Department of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.  
\* P.O.B. 51666 Tabriz, Iran, r\_tarinejad@tabrizu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 14 March 2015  
Accepted 29 April 2015  
Available Online 24 May 2015

**Keywords:**  
Subspace  
Canonical Correlation Analysis  
State Space  
Henkel Matrix

### ABSTRACT

The presence of environmental and measurement noises and ignoring the input effects are the main sources of error in system identification using ambient vibration test results. Therefore, reducing uncertainty or noise levels from the records has always been one of the main goals of the new techniques in the field of ambient vibration. Among the modal analysis techniques, stochastic subspace identification is considered as a powerful technique. In this study, the modal analysis method based on canonical correlation analysis in stochastic subspace is presented that identifies dynamic properties in optimized space instead of data space by extracting ortho-normal vector of data space. The advantage of this method, due to the nature of canonical correlation analysis, is lower noise which results in greater accuracy in estimating modal properties. Moreover, the presented process is faster due to the smaller space of identification compared to the previous methods. To validate the proposed method, an analytical model of two-dimensional frame excited under Elcentro earthquake acceleration and also the results of ambient vibration tests carried out on the Alamosa Canyon Bridge are used. The results indicate that this method eliminates more noise than other subspace methods and moreover it is faster in solving practical problems. The computation of dynamic properties, natural frequencies and mode shapes, of Alamosa Canyon Bridge with 30 sampling sensors, space matrix size of 750 and 50 excited modes are carried out in less than 150 seconds with a quad-core 2.30 GHz processor.

### 1- مقدمه

مهندسیین قرار گرفته است. اما از آنجائیکه در تشکیل مدل‌های کامپیوتری از فرضیات ساده‌کننده در تمام مراحل از جمله معادلات بارگذاری، شرایط مرزی، انعطاف‌پذیری و غیره استفاده می‌شود، این مدل‌ها قادر به بیان رفتار

استفاده از روش‌های عددی در تحلیل‌های دینامیکی و استاتیکی به دلیل کم هزینه بودن و عدم نیاز به ابزار خاص امروزه مورد توجه بسیاری از طراحان و

Please cite this article using:

R. Tarinejad, M. Pourgholi, Processing of Ambient Vibration Results using Stochastic Subspace Identification based on Canonical Correlation Analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 107-118, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

شناسایی سیستم بر اساس تحقق تصادفی در حوزه زیرفضا ارائه کرده‌اند که از آن به روش مرجع محور<sup>6</sup> نام برده می‌شود. اساس این روش بر پایه هم‌پوشانی سنسورهای اندازه‌گیری ارتعاش در سازه‌های بزرگ می‌باشد. الگوریتم فوق با استفاده از داده‌های ارتعاشی یک دکل فلزی که توسط باد تحریک شده است مورد بررسی قرار گرفته که نشان دهنده کارایی این روش در مقایسه با روش‌های کلاسیک زیر فضا می‌باشد [24].

در سال 2004 جی‌هاک و همکارانش، در موسسه علوم و تحقیقات پیشرفته کره جنوبی<sup>7</sup> ضمن ارائه مفاهیم چندین روش معروف شناسایی سیستم از جمله روش حوزه زمانی ابراهیم<sup>8</sup>، زیر فضا بر پایه کواریانس و روش پیشرفته حوزه فرکانسی به محاسبه مشخصات دینامیکی قالب سه بعدی 4 طبقه با شتاب اعمالی در راس آن اعمال شده، سازه 5 طبقه فلزی که روی میز لرزه در دانشگاه ان‌تی‌یو تایوان ساخته شده و مدل آزمایشگاهی پل فلزی با عرشه کامپوزیتی تحت بار معادل ترافیک، پرداخته‌اند. نتیجه سه آزمایش فوق کارآیی روش زیرفضای تصادفی در شناسایی مشخصات مودال در آزمایش‌های دینامیکی با اندازه‌گیری خروجی تنها، مستقل از نوع سازه را نشان می‌دهد [25].

در سال 2008 ژیان هوآنگ و همکارانش در دانشگاه ملی تایوان، مشخصات دینامیکی پل معلق 240 متری زی‌لو را به‌وسیله دو روش زیرفضای تصادفی و تجزیه حوزه فرکانسی با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری بی‌سیم، شناسایی کرده‌اند. ده مود فرکانسی و شکل‌های مودی مربوطه بوسیله نتایج ارتعاش ناشی از اندرکنش بین عرشه و کابل‌ها توسط دو روش فوق شناسایی شده است. از مهمترین نتایج این تحقیق می‌توان به ارزان بودن فرآیند آزمایش در مقایسه با روش‌های قبلی اشاره کرد [26].

در سال 1389 جواد یادگاری و امید بهار در پژوهشگاه بین‌المللی زلزله پارامترهای مودال پل بابلرود که قدمتی 70 ساله دارد را با استفاده از دو روش جستار قله و زیر فضای تصادفی محاسبه کرده‌اند. اساس کار در این آزمایش استفاده از سنسورهای است که با استفاده از جی‌پی‌اس قابلیت همزمانی و همگانی ثبت داده‌ها را دارند. نتیجه این آزمایش، شناسایی 8 مد اول این پل می‌باشد [27].

در سال 2011، درافوتی و همکارانش در دانشگاه دیپاری ایتالیا با استفاده از روش‌های مختلف به شناسایی مشخصات دینامیکی یک برج تاریخی در شهر رم از روی داده‌های ارتعاش محیطی پرداخته‌اند. هدف پژوهشگران این تحقیق کالیبراسیون مدل المان محدود سازه فوق بوده است. نتایج این تحقیق مبین کار آمدی روش‌های زیر فضا در مقایسه با سایر روش‌های آنالیز مودال عملیاتی مانند جستار قله و حوزه فرکانسی می‌باشد [28].

آنتونیشکا و همکارانش در سال 2012 در دانشگاه ترازون ترکیه دو روش قدرتمند زیر فضای تصادفی و تجزیه حوزه فرکانسی پیشرفته را برای شناسایی مدل مقیاس شده شاه تیر یک پل در شرایط آزمایشگاهی استفاده و با یکدیگر مقایسه کرده‌اند. در این تحقیق مدل شاهرتر در محیط آزمایشگاهی ساخته شده و با نسب سنسورهای در روی آن با استفاده از تابع تحریک ضربه تیر را مرتعش کرده‌اند. نتایج این تحقیق نیز قدرت روش‌های زیر فضا را نشان می‌دهد [29].

اصلی‌ترین دلیل خطا در تحلیل نتایج آزمایش‌های ارتعاش محیطی وجود نویز در داده‌های آزمایش و عدم اعمال تحریک ورودی است. به همین جهت

صحیح سازه‌ها در برابر بارهای دینامیکی نمی‌باشند. برای برطرف کردن این مشکل، امروزه از مجموعه آزمایش‌هایی که به تست مودال یا آزمایش‌های دینامیکی معروف است، استفاده می‌شود [1, 2].

آزمایش‌های دینامیکی مورد استفاده در شناسایی سیستم معمولاً شامل: آزمایش‌های ارتعاش اجباری، آزمایش‌های ارتعاش آزاد، آزمایش‌های ارتعاش محیطی می‌باشند. در آزمایش‌های اول و دوم سازه معمولاً توسط لرزاننده‌های مصنوعی مانند وزنه‌های سقوط‌کننده تحریک می‌شوند. انجام این آزمایش‌ها برای سازه‌های بزرگ و پیچیده به دلیل نیاز داشتن به نیروهای بزرگ برای تحریک تمام حالت‌های مدی و احتمال ایجاد رفتارهای غیر خطی به دلیل شدت نیروهای وارده، بسیار مشکل می‌باشد. اما در روش سوم به دلیل استفاده از نیروهای طبیعی مثل باد، زلزله و غیره برای تحریک نتایج بدست آمده از این آزمایش نشان‌دهنده عملکرد واقعی سازه بوده و به علاوه به دلیل نیاز نداشتن به تجهیزات خاص برای تحریک سازه بسیار کم هزینه‌تر نیز است [3].

برای تحلیل نتایج آزمایش‌های ارتعاش محیطی روش‌هایی براساس داده‌های خروجی تنها توسعه داده شده که از جمله این روش‌ها می‌توان به تجزیه حوزه فرکانسی<sup>1</sup> جستار قله<sup>2</sup> و روش زیر فضای تصادفی<sup>3</sup> اشاره کرد. در بین روش‌های فوق، زیر فضای تصادفی به عنوان قدرتمندترین روش شناخته شده آنالیز مودال محیطی، مورد توجه است [4].

ورود مباحث زیر فضای تصادفی به مسائل پردازش سیگنال و شناسایی سیستم، با ابداع الگوریتم موزیک<sup>4</sup> توسط اشمیت انجام شده است [5]. لازم بذکر است الگوریتم فوق توسعه یافته روش تجزیه هارمونیک پیسارنکو می‌باشد [6] که بسیار نزدیک به تئوری لوین در اواسط دهه 1960 است [7]. تحقیقات اولیه برای حل مسئله تحقق تصادفی با استفاده از مباحث زیرفضای تصادفی متعلق به اندرسون و فیوره می‌باشد [8]. بحث‌های جدید شناسایی سیستم بر اساس تجزیه مقادیر تکین در اواخر دهه 1980 توسط دی مور و مومن مطرح شد [9, 10]. این مباحث منجر به توسعه روش‌های شناسایی زیر فضای مختلفی توسط ورهگن و دیوید [11, 12]، وان و دی مور [13] و کاتا-یاما و پی‌سی شد [14]. نهایتاً در سال 1996 اولین کتاب جامع شناسایی سیستم‌های خطی توسط دی مور و ون اوشی به رشته تحریر در آمده است که مرجع اکثر تحقیقات کاربردی در این حوزه می‌باشد [15]. در دو دهه اخیر توسعه و تحقیق در مورد روش‌های زیر فضا توسط جی‌سون، والبرگ، باره [16]، کیوزه و پی‌سی [18, 19] انجام گرفته است.

اگر بخواهیم در مورد تاریخچه تحلیل همبستگی کانونی<sup>5</sup> در شناسایی سیستم مطالبی را بیان کنیم، می‌توان به آنالیز روابط خطی بین دو مجموعه متمیز آماری بوسیله تحلیل همبستگی کانونی توسط هتلینگ در سال 1963 اشاره کرد [20] که تئوری آن پیشتر توسط آندرسون در سال 1958 توسعه یافته بود [21]. در سال 1975 آکایک، فضای داده‌ها بین دو بردار آینده و گذشته را به وسیله تحلیلی همبستگی کانونی تحلیل کرده که منجر به ارائه روش نوین در تحقق تصادفی شده است [22]. این روش در سال 1999 توسط کاتایاما و پی‌سی با ادبیات جدید بازنویسی و ارائه شده است [23].

در سال 1999 بارت پیترز و روکی ضمن اشاره به مزیت آزمایش‌های ارتعاش محیطی نسبت به آزمایش‌های ارتعاش اجباری روش جدیدی از

1- Frequency Domain Decomposition(FDD)

2- Pick Peaking(PP)

3- Stochastic Subspace Identification(SSI)

4- Multiple Signal Classification(MUSIC)

5- Canonical Correlation Analysis (CCA)

6- Reference Based Stochastic Subspace Identification(SSI/ref)

7- Korean Advanced Institute of science and Technology

8- Ibrahim Time Domain(ITD)

اندازه‌گیری نیستند و یا در نظر گرفته نمی‌شوند. با استفاده از ماتریس‌های رابطه (8) و همچنین حذف اثر ورودی‌ها، معادلات زمان گسسته دینامیکی به صورت مجموعه روابط بازگشتی (9) بیان می‌شوند [31].

$$A = e^{A_c \Delta t} \quad B = \int_0^{\Delta t} e^{\tau A_c} d\tau B_c \quad (8)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + \omega_k$$

$$y_k = Cx_k + \vartheta_k \quad (9)$$

### 3- ساخت مدل فضای حالت از نتایج آزمایش‌های محیطی

داده‌های اندازه‌گیری شده در آزمایش ارتعاش محیطی بعنوان خروجی یا پاسخ سیستم زمان گسسته در نظر گرفته می‌شود. (رابطه (10)).

$$Y^d = \{[y_i(0), y_i(1), \dots, y_i(2k-1+N)]\} \in R^{i \times L} \quad (10)$$

با انتخاب لحظه دلخواه  $k$  به عنوان زمان حال در نتایج آزمایش، فضای هیلبرت<sup>4</sup> برای داده‌های  $Y^d$  به شکل ماتریس رابطه (11) تعریف می‌شود.

$$Y = \begin{bmatrix} \overbrace{y_i(0)}^p & y_i(1) & \dots & y_i(N-1) \\ y_i(1) & y_i(2) & \dots & y_i(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_i(k-1) & y_i(k) & \dots & y_i(k+N-1) \\ \underbrace{y_i(k)}_f & y_i(k+1) & \dots & y_i(k+N) \\ y_i(k+1) & y_i(k) & \dots & y_i(k+N+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_i(2k-1) & y_i(2k) & \dots & y_i(N+2k-2) \end{bmatrix}$$

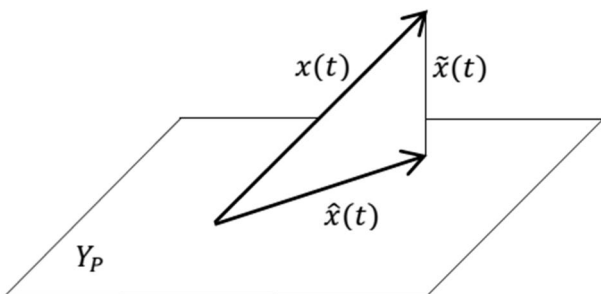
$$= \frac{Y_P}{Y_F} = \left[ \frac{\text{Span}(f)}{\text{Span}(p)} \right] \in R^{2ki \times N} \quad (11)$$

که در آن  $Y$ ،  $Y_P$  و  $Y_F$  به ترتیب به ماتریس هانکل داده‌ها، ماتریس زیر فضای گذشته و آینده معروف است. به راحتی می‌توان نشان داد که ستون اول ماتریس‌های  $Y_P$  و  $Y_F$  که به ترتیب با  $p$  و  $f$  نشان داده شده‌اند، یکی از بردارهای پایه فضاهای پایه هستند [15].

بر اساس تجزیه ولد<sup>5</sup> در فرآیندهای مرتبه دوم مانا<sup>6</sup>، داده‌های خروجی به صورت یک قابل تجزیه به دو مجموعه ناهمبسته<sup>7</sup> می‌باشند. در صورت عدم حضور نیروهای ورودی با توجه به شکل 1 و بر اساس شرایط گرانگر مطابق رابطه (12)، این دو مجموعه ناهمبسته از تصویر عمودی فضای گذشته بر فضای آینده به دست می‌آید [32, 33].

$$Y_P = \hat{E}\{Y_F | Y_P\} + \hat{E}\{Y_F | Y_P^\perp\} = \hat{X} + \hat{e} \quad (12)$$

که در آن  $Y_P^\perp$  فضای عمود بر گذشته،  $\hat{X}$  فضای پیش بینی و  $\hat{e}$  فضای خطای پیش‌بینی است. در فرآیندهای مانا با توزیع گوسی، تصویر عمودی دو فضا برهم، با میانگین شرطی بردارهای پایه آن‌ها معادل است. در نتیجه فضای



شکل 1 تخمین بردار حالت بهینه بر اساس داده‌های موجود

همواره یکی از اهداف اصلی ارائه تکنیک‌های جدید در این حوزه، کاهش عدم قطعیت پاسخ‌ها می‌باشد. در این تحقیق، هدف بر این است تا با استفاده از تکنیک تحلیل همبستگی استاندارد در حوزه مسائل زیرفضای تصادفی که توسط کاتایاما و پی‌سی در سال 1999 مطرح شده [23]، روش آنالیز مودالی ارائه شود که با توجه به ماهیت تحلیل همبستگی استاندارد انتظار می‌رود نویز کمتری در نتیجه دقت بیشتری در برآورد مشخصات مودال داشته باشد. برای صحت‌سنجی روش ارائه شده، از مدل قاب دو بعدی تحریک شده تحت شتاب زلزله السنترو<sup>1</sup> و همچنین از نتایج آزمایش ارتعاش محیطی انجام گرفته بر روی پل دره آلاموسا<sup>2</sup> استفاده شده است.

### 2- معادله ارتعاش دینامیکی در فضای حالت

رابطه حاکم بر ارتعاش سازه‌ها تحت تحریک نیروهای دینامیکی، بصورت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم رابطه (1) می‌باشد.

$$M\ddot{U}(t) + C_2\dot{U}(t) + KU(t) = F(t)B_2u(t) \quad (1)$$

با تعریف بردارهای جابجایی و سرعت بعنوان بردار حالت طبق رابطه (2)، معادله ارتعاش دینامیکی را به شکل معادله (3) بیان می‌شود [30].

$$x(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_2 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (3)$$

با فرض اینکه تعداد  $i$  سنسور بطور هم‌زمان شتاب، سرعت و جابجایی را در سازه اندازه‌گیری کنند، معادله خروجی سیستم یا پاسخ سازه به صورت رابطه (4) بیان می‌شود.

$$y(t) = C_a \ddot{U}(t) + C_u \dot{U}(t) + C_d U(t) \quad (4)$$

با جایگذاری جمله شامل شتاب از رابطه (1) در رابطه (4)، پاسخ سازه به معادلات فضای حالت تبدیل می‌شود (رابطه 5).

$$y(t) = C_a M^{-1} [-C_2 \dot{U}(t) - KU(t) + B_2 u(t)] C_u \dot{U}(t) + C_d U(t)$$

$$= [C_d - C_a M^{-1} K \quad C_u - C_a M^{-1} K C_2] \begin{bmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{bmatrix} + [C_a M^{-1} B_2]$$

$$= A_c x(t) + B_c u(t) \quad (5)$$

در عمل سیستم‌های دینامیکی شامل نویزهای اندازه‌گیری و محاسباتی می‌باشند. با اعمال عدم قطعیت‌های ناشی از این نویزها، روابط ارتعاش دینامیکی در فضای حالت به شکل رابطه (6) اصلاح می‌شود.

$$x(t+1) = A_c x(t) + B_c u(t) + \omega(t)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) + \vartheta(t) \quad (6)$$

لازم به یادآوری است که به دلیل عدم آگاهی از ماهیت نویزهای محیطی و اندازه‌گیری، فرض می‌شود که این کمیت‌ها، نویز سفید<sup>3</sup> با میانگین صفر هستند؛ یعنی از نظر آماری مستقل از هم می‌باشند. ماتریس کواریانس نویزهای محیطی و اندازه‌گیری به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود [24].

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t)^T & \vartheta(t)^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{pq} \quad (7)$$

از آنجائیکه در آزمایش‌های ارتعاش محیطی داده‌برداری در بازه‌های زمانی معین مانند  $k\Delta t$  انجام می‌شود. در نتیجه فرض زمان‌پیوسته بودن این فرآیندها اشتباه است. بعلاوه در این آزمایش‌ها داده‌های ورودی‌ها یا قابل

4- Hilbert subspace  
5- Wold decomposition  
6- second-order stationary  
7- uncorrelated

1- Elcentro  
2- Loss Alamosa Canyon Bridge  
3- White Noise

پیش‌بینی با رابطه (13) محاسبه می‌شود [34].

$$\hat{X} = E\{fp^T\}E\{pp^T\}^{-1}Y_p = HT^{-1}Y_p \quad (13)$$

در رابطه فوق  $H$  و  $T_-$  به ترتیب ماتریس کواریانس بردارهای گذشته و آینده و ماتریس واریانس بردار گذشته است. به علاوه با توجه به مفهوم فیلتر کالمن، مطابق رابطه (14) فضای پیش‌بینی قابل تجزیه به ماتریس مشاهده‌پذیری و بردار حالت بهینه می‌باشد.

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} [\hat{x}_k \quad \hat{x}_{k+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{k+N-1}] = O_k \hat{X}_k \quad (14)$$

در روش‌های معمول زیر فضای تصادفی بردارهای حالت با استفاده از ماتریس هانکل داده‌ها که بردارهای گذشته و آینده بردارهای پایه آن هستند استخراج می‌شود [15]. اما در این پژوهش قصد بر این است که با استفاده از تحلیل همبستگی کانونی بردارهای ارتو نرمال فضای داده‌ها استخراج شود. همان‌طور که در ادامه اثبات می‌شود این بردارها، بردارهای پایه فضای پیش‌بینی هستند. در نتیجه بردارهای حالت سیستم مستقیماً از فضای بهینه استخراج شود. این فضا در مقایسه با فضای اصلی کوچکتر بوده و همچنین با توجه به یک بودن بردارهای پایه آن از نویز کمتری برخوردار است.

#### 4- تحقق تصادفی بر پایه تحلیل همبستگی کانونی [32, 35]

منظور از تحلیل همبستگی استاندارد، یافتن سیستم مختصات جدید بین دو مجموعه با حداکثر وابستگی متقابل در فضای مشترک بین آن‌ها می‌باشد. اگر فرض شود،  $\bar{P} = a^T p$  و  $\bar{f} = a^T f$  دو بردار دلخواه در فضاهای گذشته و آینده باشند همبستگی بین آن‌ها با توجه به معادله (15) تشکیل می‌شود.

$$\rho = \frac{\Sigma_{(\bar{f}, \bar{p})}}{\sqrt{\Sigma_{(\bar{p}, \bar{p})}} \sqrt{\Sigma_{(\bar{f}, \bar{f})}}} = \frac{aHb^T}{\sqrt{a^T T_- a} \sqrt{a^T T_+ b}} \quad (15)$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ اثبات می‌شود که حداکثر مقادیر همبستگی بین دو بردار فوق تحت شرایط (16) ایجاد می‌شود و مقادیر حداکثر همبستگی نیز معادل مقادیر ویژه ماتریس هانکل نرمالیزه مطابق معادله (17) می‌باشند.

$$\Sigma_{(\bar{p}, \bar{p})} = I_k \quad \Sigma_{(\bar{f}, \bar{f})} = I_k \quad (16)$$

$$H_N = T_+^{-1/2} HT_-^{-T/2} \quad (17)$$

در عمل برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس هانکل نرمالیزه، از تجزیه مقادیر تکین استفاده می‌شود (رابطه (18)).

$$L^{-1}HM^{-T} = U\Sigma V^T \quad (18)$$

در این رابطه  $T_+ = LL^T$  و  $T_- = MM^T$  تجزیه چولسکی ماتریس‌های مربوطه،  $U \in R^{n \times n}$  و  $V \in R^{n \times n}$  ماتریس‌های متعامد ( $UU^T = I_n$ )، ( $VV^T = I_n$ ) و  $\Sigma \in R^{n \times n}$  ماتریس قطری مقادیر ویژه ماکزیمم یا همان مقادیر حداکثر همبستگی می‌باشد.

با توجه به معادله (18) ماتریس کواریانس بردارهای گذشته و آینده در حالت بهینه مطابق رابطه (19) محاسبه می‌شود.

$$H = LU\Sigma M^T V^T \quad (19)$$

از جایگذاری رابطه (16) و (19) در معادله (15)، بردارهای استاندارد گذشته و آینده به شکل روابط (20) محاسبه می‌شوند.

$$\bar{p} = VM^{-1}p \quad \bar{f} = U^T L^{-1}f \quad (20)$$

با محاسبه مجدد فضای پیش‌بینی مشاهده می‌شود که این فضا ضریبی از بردار استاندارد گذشته می‌باشد (رابطه (21)).

$$\hat{E}\{Y_F|Y_P\} = E\{fp^T\}E\{pp^T\}^{-1}Y_p = HT_-^{-1}p = LU\Sigma V^T M^T (MM^T)^{-1} = LU\Sigma \bar{p} \quad (21)$$

با مقایسه روابط (21) و (14)، بردار حالت مینیمال بر حسب بردار استاندارد گذشته استخراج می‌شود (رابطه (22)).

$$\hat{x}_k = \Sigma^{1/2} \bar{p}_k \quad (22)$$

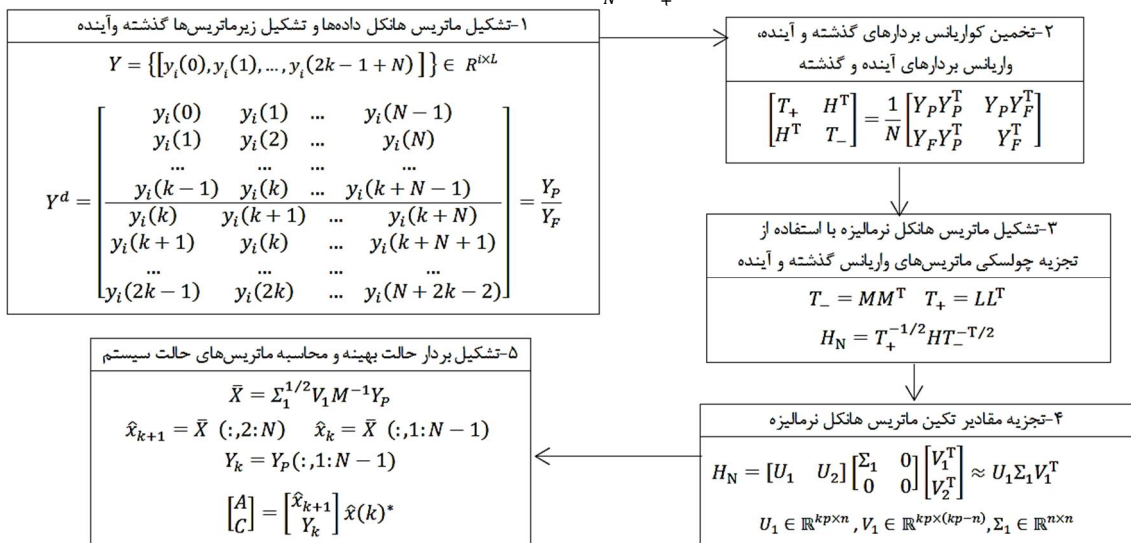
برای تکمیل مدل حالت بایستی عبارت  $\hat{x}_{k+1}$  را نیز محاسبه کنیم که با توجه به یک بودن بردار حالت محاسبه شده، از جایجایی جمله اول بردار یک کانونی گذشته مطابق رابطه (23) بدست می‌آید.

$$\hat{x}_{k+1} = \Sigma^{1/2} \bar{p}(k+1) \quad (23)$$

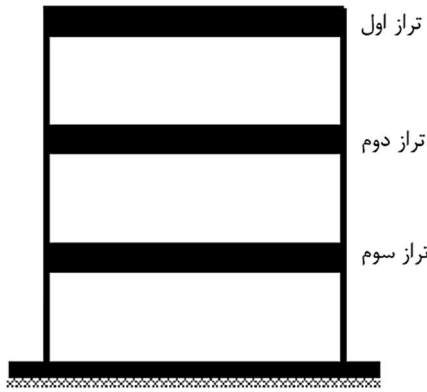
در نهایت ماتریس‌های حالت سیستم از طریق حل معادله (24) به روش حداقل مربعات به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ Y_k \end{bmatrix} \hat{x}(k)^* \quad (24)$$

در رابطه (24)،  $Y_k$  ردیف  $k$  ام ماتریس هانکل داده‌ها می‌باشد. برای تبیین نحوه کاربرد الگوریتم پیشنهادی، در شکل 2 فلوچارت روش نمایش داده شده است.



شکل 2 فلوچارت روش شناسایی زیرفضای تصادفی بر پایه کواریانس



شکل 3 مدل تحلیلی قاب سه طبقه

متلب [38] به وسیله شتاب السنترو به مدت 40 ثانیه تحریک گردیده، سپس از پاسخ شتاب آن در هر 0/01 ثانیه نمونه برداری شده است.

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در آن‌ها  $m=10$  ton و  $k=1200$  kN/m می باشد. در نهایت با داشتن پاسخ های شتاب سیستم 3 درجه آزادی و نیز بکارگیری روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی کانونی، پارامترهای مودال استخراج گردیده و با نتایج روش جستار قله و روش ترکیبی تجزیه حوزه فرکانسی و تحلیل موجک<sup>2</sup> که توسط تازی نژاد و همکارانش انجام گرفته [28]، مقایسه شده است. ضرایب میرایی مودی بکار در هر سه مدل ثابت بوده و طبق رابطه (33) اعمال شده است.

$$\xi = \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 0.03 \\ 0.02 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

### 8-1- تحلیل مودی

رابطه مودال تحت شتاب زمین لرزه به صورت رابطه (34) بیان می شود:

$$\ddot{U}(t) + 2m_i\omega_i^2\dot{U}(t) + \xi_i^2 U(t) = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} L_i \ddot{u}_g(t) \quad (34)$$

که در آن  $L_i$  ماتریس توزیع جرمی و  $\ddot{u}_g(t)$  شتاب می باشد. برای تحلیل رابطه فوق از روش رانگ کوتای مرتبه 4 با ساخت مدار شکل 4 در محیط سیمولینک متلب استفاده شده است. در شکل 5 شتاب زلزله السنترو و در شکل 6 بعنوان نمونه، پاسخ شتاب طبقه اول برای سیستم با توزیع منظم جرم و سختی نشان داده شده است [39].

### 8-2- شناسایی مشخصات مودال

فرآیند شناسایی سیستم در این روش با انتخاب مرتبه ماتریس هانکل داده‌ها آغاز می‌شود. حداکثر مرتبه ماتریس با توجه به تعداد کانال‌های اندازه‌گیری و تعداد داده‌ها به دست می‌آید؛ در این مثال مرتبه ماتریس 200 در نظر گرفته شده است. برای بررسی کفایت مرتبه ماتریس سیستم، تعداد مودهای تحریک شده و همچنین انتخاب مدل بهینه، یعنی مدل با حداقل خطا بین داده‌های اندازه‌گیری شده و داده‌های تولید شده توسط الگوریتم، از معیار حداقل خطای پیش‌بینی استفاده شده است. معیار حداکثر خطای نهایی برای سیستم با

### 5- آنالیز مودال [36]

آنالیز مودال با تجزیه مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم به شکل مجموعه روابط (25) و (26) آغاز می‌شود.

$$A = \psi [\mu_i] \psi^{-1} \quad (25)$$

$$\lambda_i^c = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (26)$$

با توجه به خواص مقادیر ویژه ماتریس‌ها، قطب‌های پیوسته حاوی فرکانس و نسبت میرایی سیستم به شکل مقادیر مختلط، مطابق رابطه (27) می‌باشد.

$$\lambda_i^c, \lambda_i^{c*} = -\xi_i i + j\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (27)$$

در نهایت شکل‌های مودی در محل نصب سنسورها از رابطه (28) بدست می‌آید.

$$\Phi = C\Psi \quad (28)$$

### 6- نمودار پایداری [25]

از لحاظ تئوری با محاسبه ماتریس‌های حالت سیستم و پیدا کردن مرتبه‌های غیر صفر و مقادیر قطب‌های مربوطه آن فرکانس، درصد میرایی و در نهایت مسئله شناسایی سیستم تصادفی مورد نظر حل می‌شود. اما در عمل عدم قطعیت‌ها که ناشی از نویزهای محیطی و اندازه‌گیری است، باعث ایجاد قطب‌های ناپایدار در سیستم می‌شود. از معروف‌ترین ابزارها برای شناسایی قطب‌های حقیقی، نمودار پایداری است که مکانیزم بسیار ساده، اما کاربردی دارد. اساس کار بر این اصل استوار است که قطب‌های واقعی با توجه به اینکه از مشخصات ذاتی سیستم است؛ در هر مرتبه با حداقل اختلاف از مرتبه قبلی، رویت می‌شوند. میزان این اختلاف به صورت درصد بیان می‌شود که به عنوان یک شرط قوی آن‌را برای مقادیر فرکانسی، درصد میرایی 1% در نظر می‌گیرند. اگر  $n$  مرتبه سیستم باشد، شرایط فوق به زبان ریاضی به شکل رابطه (29) بیان می‌شوند.

$$\frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{f_i^{n-1}} < 0.01 \quad \frac{\xi_i^n - \xi_i^{n-1}}{\xi_i^{n-1}} < 0.05 \quad (29)$$

### 7- معیار خطای پیش‌بینی نهایی [37]

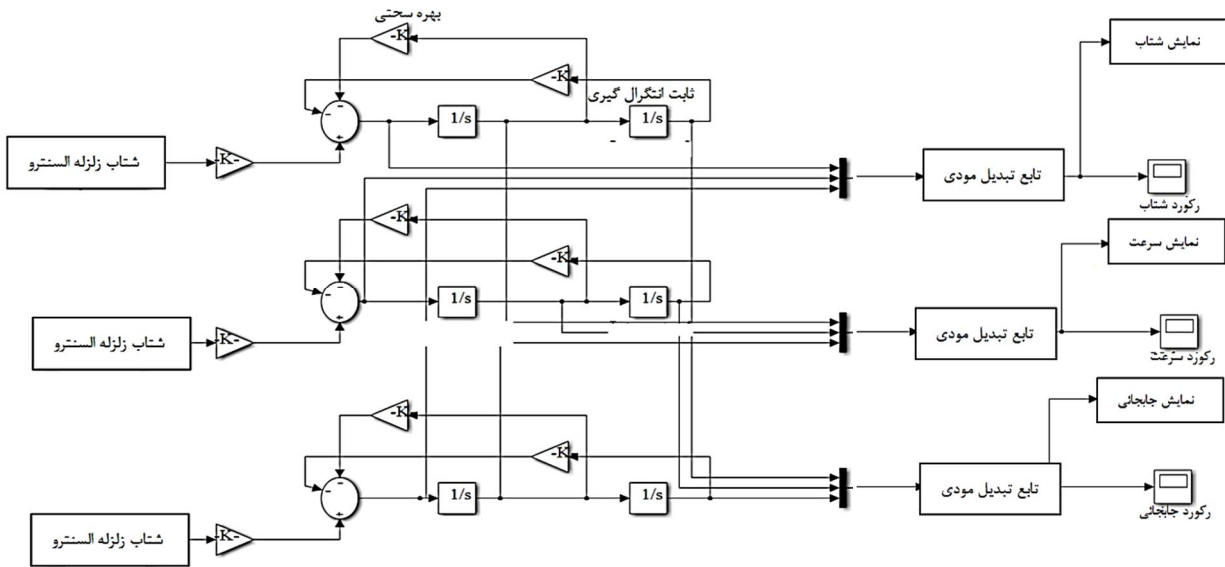
پس از رسم نمودار پایداری، مدل‌های زیادی بعنوان پاسخ ارائه می‌شوند که از بین آن‌ها فقط یکی بعنوان مدل بهینه می‌باشد. برای انتخاب مرتبه مدل با حداقل خطا یا همان مدل بهینه از معیار خطای پیش‌بینی نهایی مطابق رابطه (30) استفاده خواهد شد.

$$FPE(n) = \frac{1}{N} \left( \sum_n^{N-1} (y_n - \hat{y}_n) \right)^2 \left( \frac{N+n+1}{N-k-1} \right) \quad (30)$$

که در آن  $y_n$  داده‌های اندازه‌گیری شده و  $\hat{y}_n$  مقادیر تخمینی می‌باشد.

### 8- مدل‌سازی عددی

برای صحت‌سنجی روش ارائه شده، از مدل‌سازی قاب دو بعدی بتونی تحت شتاب زلزله السنترو استفاده شده است. بدین منظور مدل تحلیلی قاب شکل 3 به ترتیب در دو حالت سیستم سه درجه آزادی با توزیع منظم جرم و سختی و سیستم سه درجه آزادی با دو مد نزدیک و قوی (توزیع نامنظم جرم و سختی) مطابق روابط (31) و (32)، در محیط سیمولینک نرم افزار



شکل 4 مدار سیمسو لینک بوجود آمده از معادلات حرکت مودی سیستم سه درجه

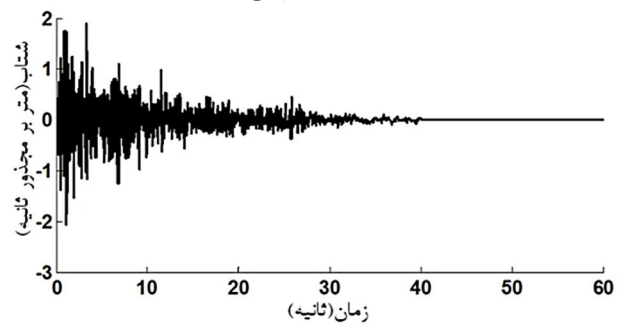
### 8-3- شناسایی فرکانس‌های طبیعی

در رسم نمودار پایداری برای شناسایی موده‌های اصلی و حذف قطب‌های ناپایدار و نویزی، از شرط فرکانسی 1 درصد و میرایی 5 درصد، استفاده شده است. نمودار پایداری سیستم با توزیع منظم جرم و سختی در شکل 8 نشان داده شده است. با توجه به جدول 1، الگوریتم فوق با حداکثر خطای 2/3 درصد تقریباً بدون هیچگونه فرکانس مجازی، فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کرده است. همانطور که شکل 9 نشان می‌دهد، در سیستم با دو مد نزدیک و قوی، نیز مقادیر فرکانس‌های طبیعی بدون نویز و با دقت بسیار خوبی در مقایسه با روش حوزه فرکانسی-موجک تخمین زده شده است. به طوری که حداکثر خطای تخمین در مدل اول به میزان 3/1 درصد می‌باشد. لازم به ذکر است، از مزیت‌های این روش ساز و کار نسبتاً ساده و سرعت بالای فرآیند شناسایی می‌باشد؛ بطوریکه کل فرآیند شناسایی، با ماتریس حالت از مرتبه 600 با تحریک 60 مود، به‌وسله پردازنده 5 هسته ای با سرعت 2/30 گیگا هرتز در کمتر از 360 ثانیه انجام گرفته است.

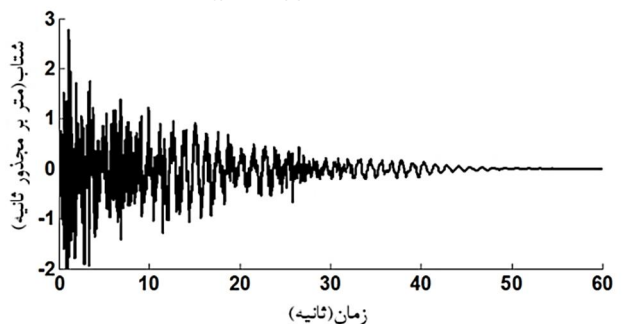
### 8-4- شناسایی مقادیر میرایی و تخمین اشکال مودی

روش‌های مختلف شناسایی سیستم معمولاً در تخمین مقادیر فرکانسی مشکل چندانی ندارند و ضعف اکثر این روش‌ها در محاسبه مقادیر میرایی می‌باشد. بر خلاف روش‌های حوزه فرکانسی، در روش‌های زیر فضا مقادیر میرایی با توجه به رابطه (27) بر اساس قطب‌های بدست آمده از نمودارهای پایداری، مستقیماً محاسبه می‌شوند. با توجه به جدول 2 در سیستم با توزیع منظم جرم و سختی مقادیر میرایی حداکثر با 2/67 درصد خطا نسبت به مقادیر بدست آمده از حل دقیق تخمین زده شده است. بعلاوه در مد سوم که روش تحلیل حوزه فرکانسی-موجک بیشترین خطا را در برآورد فرکانس دارد، این الگوریتم با 1 درصد خطا مقدار فوق را برآورد کرده است. در سیستم دوم نیز روش زیرفضا بر پایه همبستگی کانونی، مقادیر میرایی را به خوبی و با حداکثر 9/1 درصد خطا نسبت به مقادیر اولیه محاسبه کرده است. در کلیه روش‌های شناسایی سیستم از طریق آزمایش‌های ارتعاش محیطی، به علت ناشناخته بودن ورودی، یک مقیاس نرمال کننده برای شکل‌های مودی شناخته شده وجود ندارد. به عبارت دیگر نرمال کردن اشکال مودی نسبت به

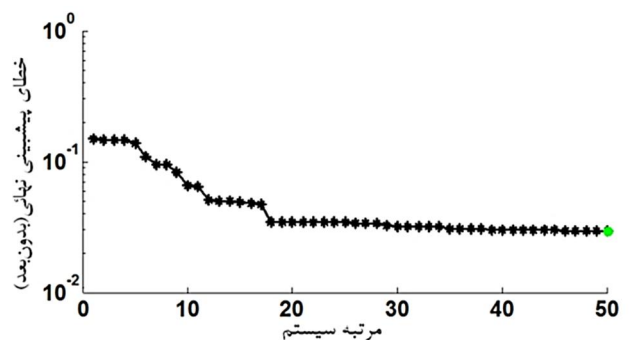
توزیع منظم جرم و سختی مطابق شکل 7 از مرتبه 20 همگرا شده که نشان دهنده کفایت مرتبه ماتریس حالت سیستم می‌باشد.



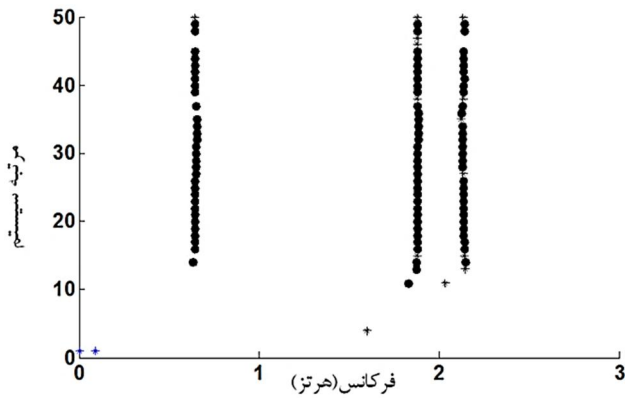
شکل 5 شتاب زلزله سنترو



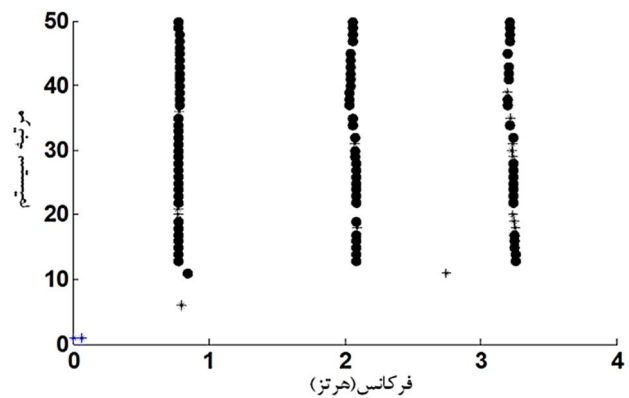
شکل 6 رکورد شتاب طبقه اول سیستم با توزیع منظم جرم و سختی



شکل 7 نمودار خطای پیش‌بینی نهایی سیستم با توزیع منظم جرم و سختی



شکل 9 نمودار پایداری سیستم با توزیع نامنظم جرم و سختی



شکل 8 نمودار پایداری سیستم با توزیع منظم جرم و سختی

جدول 1 فرکانس‌های طبیعی تخمین تخمین زده شده و دقیق سیستم سه درجه آزادی

شماره سیستم	شماره مد	حل دقیق (هرتز)	زیرفضا-همبستگی (هرتز)	میزان خطا (%)	
				فرکانس-موجک [40]	فرکانس-موجک
1	اول	0/776	0/781	2/03	0/64
	دوم	2/174	2/145	-1/33	-2/30
	سوم	3/172	3/118	-1/70	-0/92
2	اول	0/651	0/671	3/10	0/61
	دوم	1/905	1/902	-0/15	-1/31
	سوم	2/135	2/114	-0/79	-0/80

جدول 2 درصد میرایی تخمین تخمین زده شده و دقیق سیستم سه درجه آزادی و ضرایب همبستگی مودی

شماره سیستم	شماره مد	حل دقیق (%)	زیرفضا-همبستگی (%)	میزان خطا (%)		همبستگی مودی (%)
				فرکانس-موجک [40]	فرکانس-موجک	
1	اول	5	4/88	-2/40	-0/60	100
	دوم	3	2/92	-2/67	0/33	77/83
	سوم	2	1/98	-1	-9	97/94
2	اول	5	4/63	-7/40	5/08	100
	دوم	3	2/72	-9/33	0/60	99/87
	سوم	2	2/05	2/05	1	99/22

یکی از مشکلات روش‌های آنالیز مودال عملیاتی وجود مقادیر نویزی در نتایج می‌باشد که روش‌های جدید سعی در کاهش آن دارند. برای بررسی کارایی الگوریتم مورد نظر در تخمین پارامترهای مودال و تشخیص مقادیر نویزی با توجه به ماهیت روش ارائه شده، بررسی مشخصات دینامیکی پل دره آلاموسا در نظر گرفته شده است. این پل در سال 1937 ساخته شده و همانطور که در شکل 12 دیده می‌شوند، از 7 دهانه مجزا به عرض 7/3 و طول 15/2 متر تشکیل شده که هر دهانه از یک دال بتنی و 6 تیر فولادی با مقطع استاندارد تشکیل شده است. بین سال‌های 1994 تا 1997 موسسه تحقیقات و توسعه آزمایشگاه ملی لس آلاموسا<sup>2</sup> در ایالات متحده آمریکا به منظور بررسی قابلیت روش‌های مختلف شناسایی سیستم از جمله روش الگوریتم مقادیر ویژه<sup>3</sup> گویا در تشخیص مشخصات مودال، مجموعه آزمایش‌های ارتعاش محیطی و ارتعاش اجباری را بر روی این پل انجام داده است. با توجه به ماهیت الگوریتم ارائه شده در این تحقیق نتایج آزمایش ارتعاش محیطی، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

جرم امکان پذیر نیست. برای رسم شکل‌های مودی در روش ارائه شده به این طریق عمل می‌شود که پس از تعیین فرکانس‌ها و درصد‌های میرایی اصلی سیستم بوسیله نمودار پایداری، قطب‌های پایدار هم مرتبه آن‌ها از ماتریس رابطه (28) استخراج می‌شوند. سپس با مرجع قرار دادن یکی از قطب‌ها نسبت به سایر قطب‌ها، نسبت آن‌ها محاسبه می‌شوند. در نتیجه شکل‌های مودی در محل نصب سنسورها قابل رسم می‌شوند. در مثال حاضر طبقه اول به عنوان مرجع قرار گرفته و شکل‌های مودی نسبت به این طبقه نرمال شده-اند. برای بررسی همبستگی شکل‌های مودی از معیار معیار تضمین<sup>1</sup> مودی که در رابطه (35) تعریف شده استفاده می‌شود.

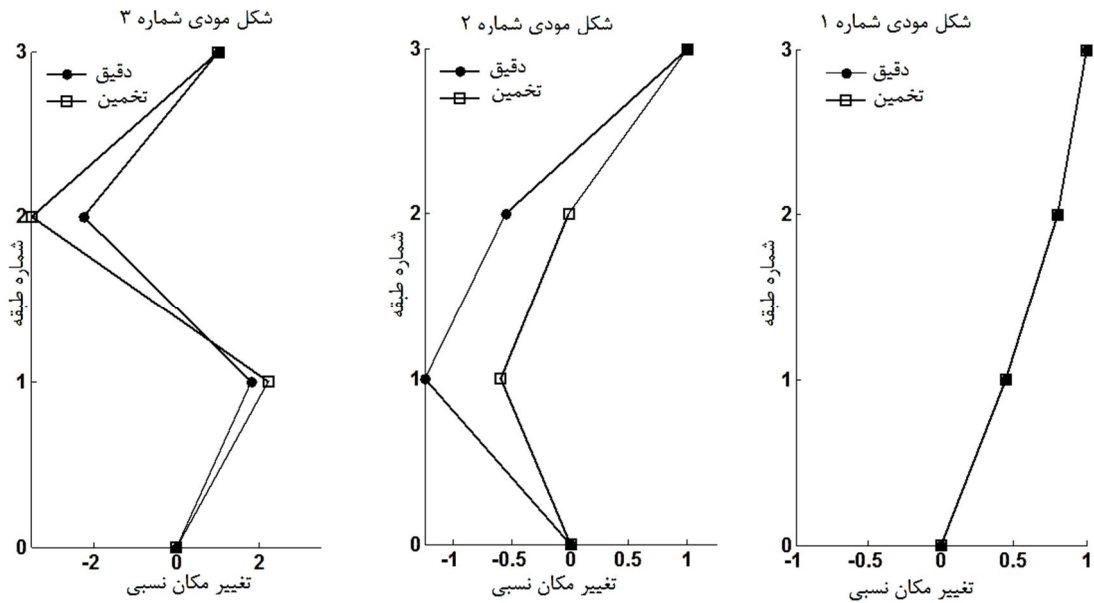
$$MAC = \frac{|\psi^T \phi|^2}{|(\psi^T \psi)(\phi^T \phi)|} \quad (35)$$

با توجه به جدول و همچنین شکل‌های 10 و 11، شکل‌های مودی تخمین زده شده بوسیله الگوریتم پیشنهادی دارای همبستگی بسیار خوبی با مقادیر دقیق دارند.

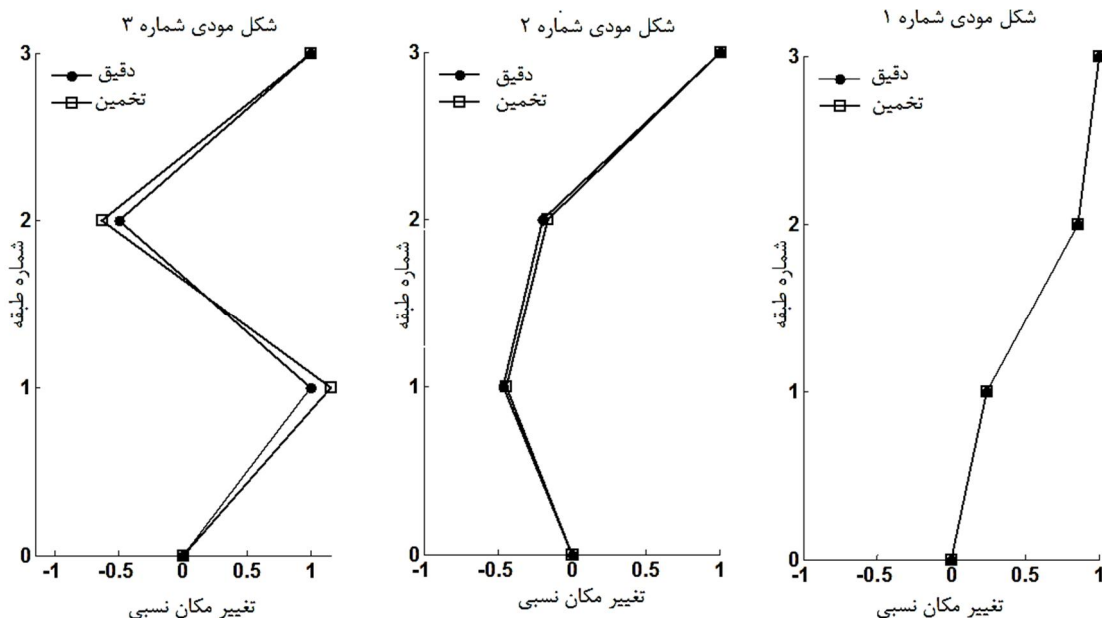
## 9- مطالعه موردی [41, 42]

2- Laboratory Direct Research and Development (LDRD)  
3- Eigenvalue Rational Algorithm (ERA)

1- Modal Assurance Criteria(MAC)



شکل 10 شکل‌های مودی دقیق و تخمین زده شده سیستم سه درجه آزادی با توزیع منظم جرم و سختی



شکل 11 شکل‌های مودی دقیق و تخمین زده شده سیستم سه درجه آزادی با توزیع نامنظم جرم و سختی

### 9-1- آزمایش ارتعاش محیطی بر روی پل آلاموسا

با توجه به یکسان بودن دهانه پل‌ها و شرایط تکیه گاهی، آزمایش‌های دینامیکی بر روی دهانه اول پل انجام شده است. در اولین گام برای انجام آزمایش ارتعاش محیطی، کامیونی از روی پل عبور داده شد اما با توجه به غالب بودن اثر تحریک کامیون، داده‌های ثبت شده مطلوب واقع نشدند. به همین دلیل کامیون فوق را از روی پل مجاور عبور داده و شتاب تحریک را روی پل مذکور اندازه‌گیری کرده‌اند. با توجه به شکل 13 تعداد 5 سنسور در روی هر تیر فولادی عرشه نصب شده که در مجموع شامل 30 سنسور می‌شوند. مدت زمان هر نمونه برداری 16 ثانیه بوده و تعداد داده‌های ثبت شده در این مدت 2048 عدد می‌باشد. همچنین کل آزمایش به تعداد 11 بار در مدت 45 دقیقه تکرار شده است. نتایج آزمایش هشتم به دلیل تحریک تمام حالات مودی برای انجام تحلیل در نظر گرفته شده است.



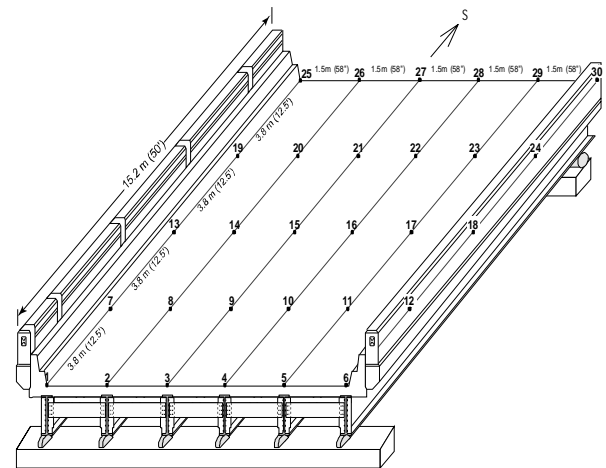
شکل 12 زیر سازه پل دره آلاموسا



(28) رسم می‌شوند. در پایان هم شکل‌های مودی رسم شده در مرجع [42] که در شکل 18 نشان داده شده، برای مقایسه با شکل‌های مودی رسم شده، ارائه می‌گردند.

### 10- بررسی نتایج

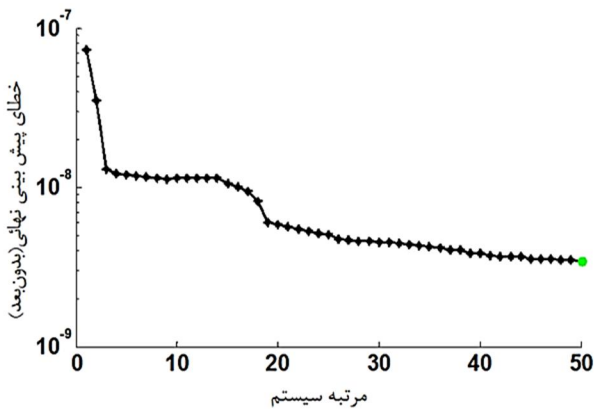
در جدول 3 شش فرکانس اول حاصل از تحلیل به روش المان محدود و همچنین نتایج آزمایش ارتعاش محیطی که در مرجع [42] با استفاده از روش مقادیر ویژه گویا آنالیز شده، نمایش داده شده است. در روش فوق پس از استخراج پارامترهای مودال، عدم قطعیت آن‌ها به وسیله روش مونت کارلو بررسی شده است؛ که با توجه به وسعت داده‌ها و تعداد کانال‌های اندازه‌گیری فرآیند ارائه شده فوق‌العاده وقت‌گیر می‌باشد. با توجه به نمودار پایداری شکل 16، همان‌طور که انتظار می‌رفت با توجه به ماهیت بهینه روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی، این روش دارای فرکانس نویزی کمتری در مقایسه با روش زیرفضا بر پایه کواریانس می‌باشد. بطوریکه روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی در بازه 30 هرتز، 8 فرکانسی مودی را تشخیص داده که در مقایسه با روش زیرفضا بر پایه کواریانس که 11 فرکانس مودی را در همین بازه تخمین زده، بهتر عمل کرده است.



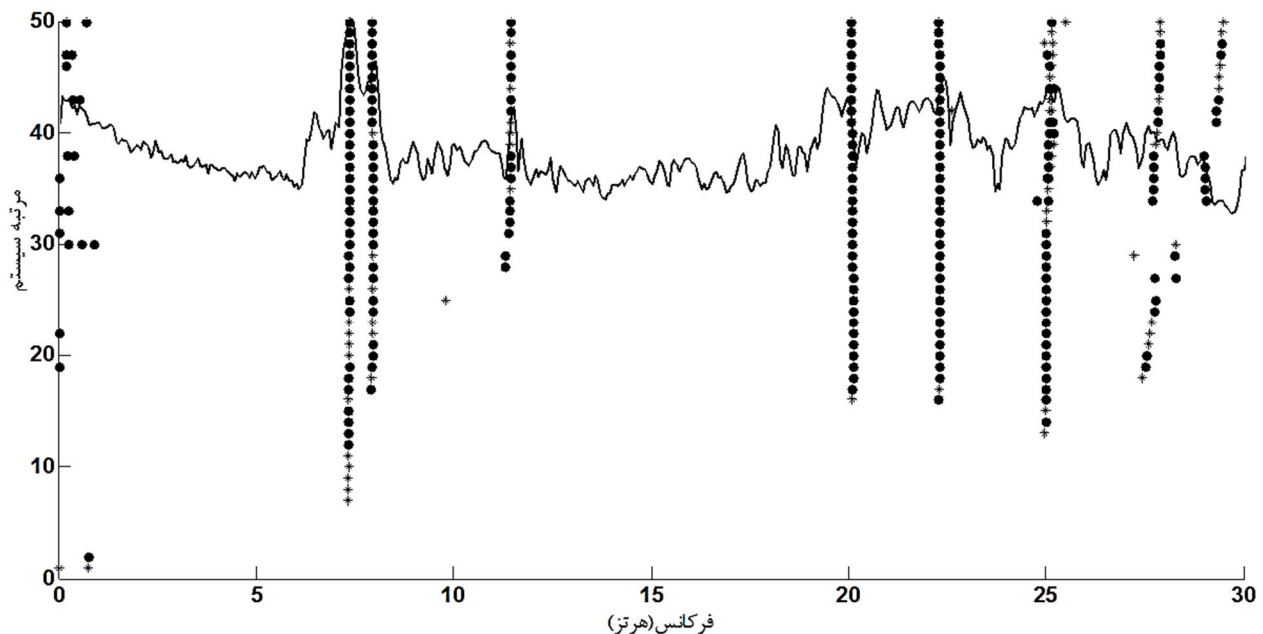
شکل 13 مشخصات و نحوه چیدمان سنسورها در آزمایش

### 2-9- شناسایی مشخصات دینامیکی پل

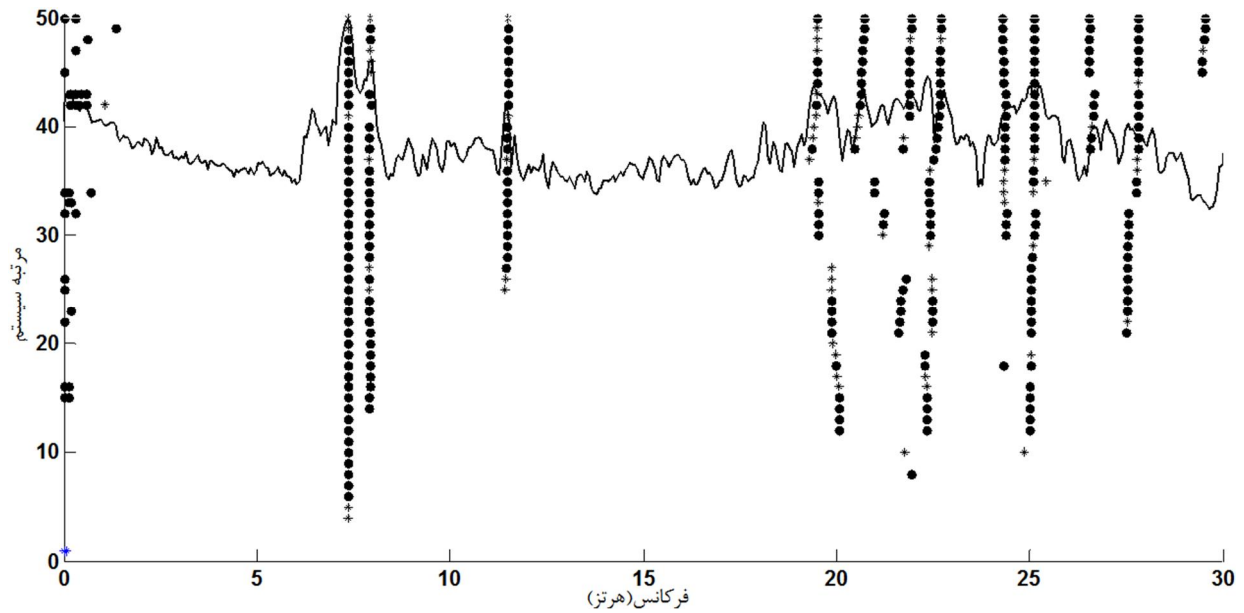
با توجه به تعداد کانال‌های اندازه‌گیری و تعداد داده‌ها مرتبه ماتریس سیستم 32 در نظر گرفته شده است. در اولین گام تحلیل معیار حداکثر خطای نهایی کنترل می‌گردد. همان‌طور که در شکل 14 نشان داده شده است، این معیار از مرتبه 35 به بعد همگرا شده که نشان دهنده کفایت مرتبه ماتریس حالت و همچنین تعداد مودهای در نظر گرفته شده می‌باشد. با رسم نمودار پایداری مطابق شکل 15، فرآیند شناسایی سیستم به پایان می‌رسد. در ضمن برای مقایسه کارایی روش ارائه شده نسبت به روش‌های قبلی زیر فضای تصادفی، داده‌های فوق مجدداً با روش زیر فضای تصادفی بر پایه کواریانس [43, 44]، تحلیل شده است که در شکل 16 نمودار پایداری مربوطه را می‌توان مشاهده کرد. در نهایت در جدول 3 نتایج تحلیل‌ها ارائه شده و با مقادیر حاصل از تحلیل اجزاء محدود و روش الگوریتم مقادیر ویژه گویا که در مرجع [42] به آن اشاره شده، مقایسه شده است. پس از مشخص شدن مقادیر میرایی و فرکانس، قطب‌های پایدار مربوطه با توجه به رابطه (27) بازسازی شده و شکل‌های مودی مطابق شکل 17 با استفاده از رابطه



شکل 14 نمودار خطای بیش بینی نهایی ارتعاش محیطی پل آلاموسا



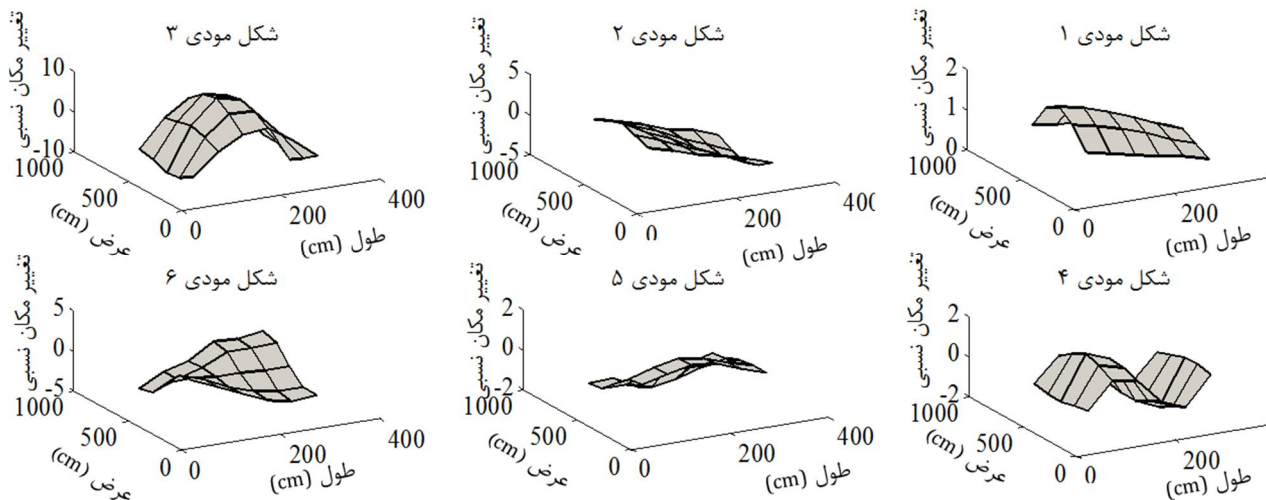
شکل 15 نمودار پایداری روش زیر فضای تصادفی بر پایه تحلیل همبستگی کانونی



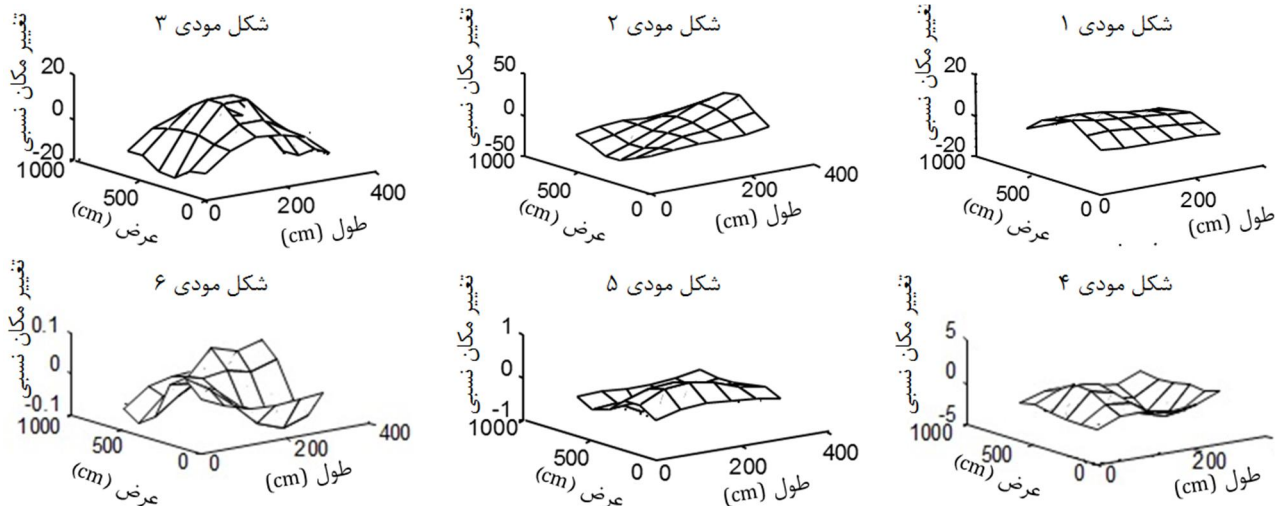
شکل 16 نمودار پایداری روش زیر فضای تصادفی بر پایه کواریانس

جدول 3 مشخصات مودال دقیق و تخمین زده شده پل دره آلاموسا

شماره مود	مقدار میرائی (%)			فرکانس طبیعی (هرتز)		
	زیرفضا - همبستگی	زیرفضا - کواریانس	مقادیر ویژه گویا [42]	زیرفضا - همبستگی	زیرفضا - کواریانس	مقادیر ویژه گویا [42]
1	0/88	0/40	1/30	7/34	7/35	7/46
2	1/67	0/36	0/58	7/93	7/95	8/01
3	1/78	0/67	0/68	11/46	11/50	11/50
4	1/48	0/46	1/10	20/07	19/48	19/90
4-الف	-	2/81	-	-	20/65	-
4-ب	-	1/58	-	-	21/87	-
5	1/50	1/61	2	22/27	22/67	22/60
5-الف	1/18	0/64	-	25/13	25/10	25/60
6	0/90	1/80	0/93	27/35	26/53	27/20
6-الف	-	0/59	0	-	27/79	28/10
7	1/14	1/31	-	29/50	29/50	-



شکل 17 شکل های مودی شش فرکانس اول حاصل از زیرفضای تصادفی بر پایه تحلیل همبستگی استاندارد



شکل 18 شکل‌های مودی شش فرکانس اول حاصل از الگوریتم مقادیر ویژه گویا [42]

روش علاوه بر حذف نویزهای بیشتر در مقایسه با روش‌های زیرفضای قبلی دارای سرعت تحلیل بسیار بالایی در مسائل واقعی می باشد به طوری که کل فرآیند محاسبات این مقاله برای پردازنده 5 هسته ای با سرعت 2/30 گیگا هرتز در کمتر از 150 ثانیه انجام گرفته است.

در مورد مقادیر فرکانسی نیز می‌توان گفت که هر سه ارائه شده در سه فرکانس اول مودی همخوانی خوبی با هم دارند و در مقایسه با مقادیر المان محدود به خوبی آن را حدس زده‌اند. در مورد مود چهارم روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی بدون نشان دادن مقادیر نویزی که زیرفضا بر پایه مودی پنجم و ششم هر سه مقدار را حدس زده‌اند که در پاسخ تحلیلی مشاهده نشده است. در نهایت روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی، در شناسایی فرکانس مود ششم هم با میزان خطای 3/5 درصد نسبت به مقدار المان محدود موفق عمل کرده‌است. در مورد مقادیر میرایی هم به جز سه مود اول تقریباً مقادیر میرایی بین روش زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی و الگوریتم مقادیر ویژه گویا دارای همخوانی خوبی هستند.

با توجه به شکل‌های 17 و 18 می‌توان مشاهده کرد که زیرفضا بر پایه تحلیل همبستگی به خوبی توانسته شکل‌های مودی را در مقایسه با روش الگوریتم مقادیر ویژه گویا محاسبه کند. البته به دلیل عدم دسترسی به مقادیر مودی روش الگوریتم مقادیر ویژه گویا، محاسبه ضریب همبستگی مودی امکان پذیر نبود.

### 11- نتیجه گیری

اصلی‌ترین دلیل خطا در تحلیل نتایج آزمایش‌های ارتعاش محیطی با توجه به ماهیت این آزمایش‌ها، وجود نویز در داده‌های آزمایش و عدم اعمال یا ناشناخته بودن تحریک ورودی است. به همین جهت همواره یکی از اهداف اصلی ارائه تکنیک‌های جدید در این حوزه، کاهش عدم قطعیت پاسخ‌ها یا به عبارت دیگر حذف اثر نیروهای ورودی و همچنین اثر نویزهای محیطی می باشد. بعلاوه با توجه به داده محور بودن این روش‌ها، سرعت تحلیل نتایج آزمایش‌ها یکی از فاکتورهای مهم در استفاده از این روش‌ها می باشد. به همین دلیل در این پژوهش، آنالیز مودال‌ای بر پایه تحلیل همبستگی استاندارد ارائه شد که با توجه به ماهیت بهینه بودن روش ارائه شده انتظار می‌رفت که علاوه بر دقت بیشتر از سرعت بیشتری هم در مقایسه با روش‌های قبلی حوزه زیر فضا داشته باشد. در اولین گام برای صحت سنجی روش فوق از مدل قاب بتونی سه درجه آزادی که استفاده شده که به خوبی از عهده حل مسئله برآمد. در ادامه برای بررسی قدرت روش ارائه شده در تحلیل نتایج آزمایش‌های واقعی در مقایسه با سایر روش‌های شناسایی، از نتایج آزمایش ارتعاش محیطی پل دره آلاموسا استفاده شد. همانطور که نتایج نشان می‌دهد این

### 12- فهرست علائم

- $A_C$  ماتریس موقعیت
- $B_C$  ماتریس ضریب تأثیر
- $C_2$  ماتریس قطری میرایی
- $C_a$  ماتریس موقعیت خروجی شتاب
- $C_d$  ماتریس موقعیت خروجی تغییر مکان
- $C_k$  ماتریس کنترل پذیری
- $C_u$  ماتریس موقعیت خروجی سرعت
- $H$  ماتریس هانکل کواریانس بردار آینده و گذشته
- $I$  ماتریس همانی
- $K$  ماتریس سختی سیستم
- $k$  مرتبه بردار حالت سیستم
- $L$  تعداد داده‌های آزمایش
- $M$  ماتریس قطبی جرم
- $N$  تعداد داده‌های تشکیل دهنده ماتریس هانکل
- $n$  مرتبه سیستم
- $O_k$  ماتریس مشاهده پذیری
- $T_-$  ماتریس واریانس بردار گذشته
- $T_+$  ماتریس واریانس بردار آینده
- $U$  ماتریس متعامد حاصل از تجزیه مقادیر تکین
- $V$  ماتریس متعامد حاصل از تجزیه مقادیر تکین
- $x(t)$  بردار حالت سیستم
- $y(t)$  بردار اندازه‌گیری یا خروجی سیستم
- $Y_F$  ماتریس زیر فضای آینده
- $Y_P$  ماتریس زیر فضای گذشته
- $Z^{-1}$  اپراتور انتگرال‌گیری

## علائم یونانی

$\Delta t$	بازه زمانی نمونه‌برداری
$\delta_{pq}$	تابع دلتای کرونگر
$\mu$	ماتریس مقادیر تکین حالت گسسته
$\xi$	فرکانس مودی
$\vartheta$	بردار نویز اندازه‌گیری
$\rho$	ماتریس همبستگی
$\Sigma$	ماتریس مقادیر تکین
$\Psi$	ماتریس بردارهای ویژه
$\omega$	بردار نویز محیطی

## زیرنویس‌ها

$i$  شماره قطب شناسایی شده

## 13-مراجع

- [18] A. Chiuso, G. Picci, On the ill-conditioning of subspace identification with inputs, *Automatica*, Vol. 40, No. 4, pp. 575-589, 2004.
- [19] A. Chiuso, G. Picci, Numerical conditioning and asymptotic variance of subspace estimates, *Automatica*, Vol. 40, No. 4, pp. 677-683, 2004.
- [20] H. Hotelling, Relations between two sets of variates, *Biometrika*, pp. 321-377, 1936.
- [21] T. W. Anderson, *An introduction to multivariate statistical analysis*: Wiley New York, 1958.
- [22] H. Akaike, Markovian representation of stochastic processes by canonical variables, *SIAM Journal on Control*, Vol. 13, No. 1, pp. 162-173, 1975.
- [23] T. Katayama, G. Picci, Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods, *Automatica*, Vol. 35, No. 10, pp. 1635-1652, 1999.
- [24] B. Peeters, G. De Roeck, Reference based stochastic subspace identification in civil engineering, *Inverse Problems in Engineering*, Vol. 8, No. 1, pp. 47-74, 2000.
- [25] J.-H. Yi, C.-B. Yun, Comparative study on modal identification methods using output-only information, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 17, No. 3-4, pp. 445-466, 2004.
- [26] J.-H. Weng, C.-H. Loh, J. P. Lynch, K.-C. Lu, P.-Y. Lin, Y. Wang, Output-only modal identification of a cable-stayed bridge using wireless monitoring systems, *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 7, pp. 1820-1830, 2008.
- [27] J. Yadegari, O. Bahar, Modal Parameter Identification using Ambient Vibration Testing with Introducing a new Software, *University College of Engineering* Vol. 44, No. 1, pp. 121-130, 2010. (In Persian)
- [28] D. Foti, M. Diaferio, N. I. Giannoccaro, M. Mongelli, Ambient vibration testing, dynamic identification and model updating of a historic tower, *NDT & E International*, Vol. 47, pp. 88-95, 2012.
- [29] A. C. Altunışika, A. Bayraktara, B. Sevimb, Operational modal analysis of a scaled bridge model using EFDD and SSI methods, *Indian Journal of Engineering & Materials Sciences*, Vol. 19, pp. 320-330, 2012.
- [30] B. Peeters, *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, ph.D. Thesis, Faculteit Toegepaste Wetenschappen Arenbergkasteel, Katholieke Universiteit Leuven, Heverlee (Belgium), 2000.
- [31] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*: Oxford University Press, Inc., 1995.
- [32] T. Katayama, *Subspace methods for system identification*: Springer, 2006.
- [33] C. W. J. Granger, Economic processes involving feedback, *Information and control*, Vol. 6, No. 1, pp. 28-48, 1963.
- [34] H.-F. Chen, P. Kumar, J. Van Schuppen, On Kalman filtering for conditionally Gaussian systems with random matrices, *Systems & Control Letters*, Vol. 13, No. 5, pp. 397-404, 1989.
- [35] U. B. DESAI, D. PAL, R. D. KIRKPATRICK, A realization approach to stochastic model reduction, *International Journal of Control*, Vol. 42, No. 4, pp. 821-838, 1985.
- [36] B. Peeters, G. De Roeck, Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis, *Mechanical systems and signal processing*, Vol. 13, No. 6, pp. 855-878, 1999.
- [37] A. M. Aibinu, A. R. Najeeb, M. J. E. Salami, A. A. Shafie, Optimal model order selection for transient error autoregressive moving average (TERA) MRI reconstruction method, in *International Conference on Medical system Engineering (ICMSE)*, 2008.
- [38] D. K. Chaturvedi, *Modeling and simulation of systems using MATLAB and Simulink*: CRC Press, Inc., 2009.
- [39] A. K. Chopra, *Dynamics of structures*: Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [40] R. Tarinejad, M. Damadipour, Modal identification of structures by a novel approach based on FDD-wavelet method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 3, pp. 1024-1045, 2014.
- [41] S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, A summary review of vibration-based damage identification methods, *Shock and vibration digest*, Vol. 30, No. 2, pp. 91-105, 1998.
- [42] C. R. Farrar, P. J. Cornwell, S. W. Doebling, M. B. Prime, *Structural health monitoring studies of the Alamosa Canyon and I-40 bridges*, Thesis, Los Alamos National Lab., NM (US), 2000.
- [43] P. Zeiger, J. McEwan, Approximate Linear Realizations of Given Dimension Via Ho's Algorithm: CU-CS-012-73, 1973.
- [44] B. HO, R. E. Kálmán, Editorial: Effective construction of linear state-variable models from input/output functions, *Automatisierungstechnik*, Vol. 14, No. 1-12, pp. 545-548, 1966.
- [1] C. Ventura, B. Laverick, R. Brincker, P. Andersen, Comparison of dynamic characteristics of two instrumented tall buildings, in *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 2003.
- [2] R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen, Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition, *Smart materials and structures*, Vol. 10, No. 3, pp. 441, 2001.
- [3] W.-X. Ren, Z.-H. Zong, Output-only modal parameter identification of civil engineering structures, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 17, No. 3-4, pp. 429-444, 2004.
- [4] M. Damadi pour, R. Tarinejad, *System identification of a concrete arch dam and calibration of its finite element model with emphasis on nonuniform ground motion*, Master of Science Thesis, Civil Engineering, Tabriz, Tabriz, 2012. (In Persian)
- [5] R. O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, Vol. 34, No. 3, pp. 276-280, 1986.
- [6] V. F. Pisarenko, The retrieval of harmonics from a covariance function, *Geophysical Journal International*, Vol. 33, No. 3, pp. 347-366, 1973.
- [7] M. J. Levin, Estimation of a system pulse transfer function in the presence of noise, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 9, No. 3, pp. 229-235, 1964.
- [8] P. L. Faurre, Stochastic realization algorithms, *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 126, pp. 1-25, 1976.
- [9] M. Moonen, B. De Moor, L. Vandenberghe, J. Vandewalle, On-and off-line identification of linear state-space models, *International Journal of Control*, Vol. 49, No. 1, pp. 219-232, 1989.
- [10] M. Moonen, J. Vandewalle, QSDV approach to on-and off-line state-space identification, *International Journal of Control*, Vol. 51, No. 5, pp. 1133-1146, 1990.
- [11] M. Verhaegen, P. Dewilde, Subspace model identification part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms, *International journal of control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1187-1210, 1992.
- [12] M. Verhaegen, P. Dewilde, Subspace model identification part 2. Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm, *International journal of control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1211-1241, 1992.
- [13] P. Van Overschee, B. De Moor, N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems, *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93, 1994.
- [14] G. Picci, T. Katayama, Stochastic realization with exogenous inputs and 'subspace-methods' identification, *Signal Processing*, Vol. 52, No. 2, pp. 145-160, 1996.
- [15] P. Van Overschee, B. L. De Moor, *Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications*: Kluwer academic publishers Dordrecht, 1996.
- [16] M. Jansson, B. Wahlberg, On consistency of subspace methods for system identification, *Automatica*, Vol. 34, No. 12, pp. 1507-1519, 1998.
- [17] D. Bauer, M. Jansson, Analysis of the asymptotic properties of the MOESP type of subspace algorithms, *Automatica*, Vol. 36, No. 4, pp. 497-509, 2000.