



## ارائه مدل تحلیلی جدید برای بررسی انتقال حرارت در مبدل های حرارتی گمانه در بازه زمانی کوتاه

عسگر مینایی<sup>1</sup>، مهدی معرفت<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران  
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران  
\* تهران، صندوق پستی 14115-111، maerefat@modares.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 10 اسفند 1394  
پذیرش: 30 فروردین 1395  
ارائه در سایت: 29 اردیبهشت 1395  
کلید واژگان:  
مدل تحلیلی  
مبدل حرارتی گمانه  
بازه زمانی کوتاه

### چکیده

در این مقاله مدل تحلیلی جدیدی برای بررسی رفتار حرارتی مبدل های حرارتی گمانه در بازه زمانی کوتاه ارائه شده است. انتقال حرارت در داخل و خارج گمانه به صورت گذرا در نظر گرفته شده است. برای این منظور حل تحلیلی در دو مرحله توسعه داده شده است. در مرحله اول، ابتدا پاسخ حرارتی بازه زمان کوتاه (تابع بی بعد  $G$ ) سیستم به دست آمده و در مرحله دوم دمای سیال خروجی از مبدل با استفاده از تابع پاسخ محاسبه شده است. برای مدل سازی انتقال حرارت در داخل گمانه از آنالوژی بین جریان الکتریکی و جریان حرارتی استفاده شده است. بدین منظور یک مدار معادل حرارتی در داخل گمانه توسعه داده شده و معادلات انرژی حاکم در داخل گمانه براساس مدار معادل حرارتی به دست آمده اند. در خارج از گمانه، انتقال حرارت به صورت هدایت در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است. مجموع معادلات حاکم با استفاده از تبدیل لاپلاس حل شده اند و در نهایت دمای متوسط سیال و تابع پاسخ بازه زمانی کوتاه محاسبه شده است. در مرحله بعد، دمای سیال در خروجی مبدل با استفاده از تابع پاسخ برای حالت کارکرد منقطع روشن و خاموشی سیستم محاسبه شده است. نتایج حل تحلیلی حاضر با مقادیر تجربی مقایسه شده و همخوانی بسیار خوبی بین مقادیر اندازه گیری شده تجربی و نتایج حل تحلیلی مشاهده شد.

## A new analytical model to study heat transfer in Borehole heat exchangers in short time periods

Asgar Minaei, Mehdi Maerefat\*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.  
\* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, maerefat@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 29 February 2016  
Accepted 18 April 2016  
Available Online 18 May 2016

#### Keywords:

Analytical solution  
Borehole heat exchanger  
short time periods

### ABSTRACT

This paper presents a new analytical model to study the thermal behavior of borehole heat exchangers (BHE) in short time periods. Transient heat transfer is considered inside the borehole and at the ground around the borehole, transient heat conduction is considered inside the borehole and ground around the borehole. For this purpose, the analytical solution has been developed in two stages. First, a new analytical equation is provided for the short-time thermal response of the BHE (dimensionless G-function). In the second phase, the outlet temperature calculation using the G-function is described. Inside the borehole, the analogy between thermal and electrical conduction is used for deriving heat balance equations. For this purpose, a new equivalent thermal network for modeling of the heat transfer inside the borehole is developed. In ground around the borehole, the conduction equation in the radial direction is considered. The governing equations are solved by Laplace transform. Finally, the mean fluid temperature and short thermal response of the BHE is computed. Then in the second phase, the outlet temperature in the on and off times of the system is calculated using the G-function. The solution of the proposed analytical model is compared with experimental measurements. Results show that the outlet temperature of the analytical model matches very well with the reference experimental measurements.

### 1- مقدمه

دمای زمین در فصل تابستان کمتر از دمای هوای محیط بیرون و در فصل زمستان بیشتر از هوای محیط بیرون است. به همین دلیل، زمین می تواند در فصل تابستان به عنوان چاه حرارتی و در فصل زمستان به عنوان چشمه

حرارتی مورد استفاده قرار گیرد که این اساس کار مبدل های حرارتی زمینی<sup>1</sup> است. متداول ترین نوع مبدل های زمینی، مبدل های حرارتی گمانه<sup>2</sup> می باشند. این مبدل ها به طور معمول متشکل از یک لوله U شکل است که در یک حفره عمیق داخل زمین به صورت عمودی قرار داده می شود. داخل این حفره

<sup>1</sup> Ground heat exchangers

<sup>2</sup> Borehole heat exchanger

Please cite this article using:

A. Minaei, M. Maerefat, A new analytical model to study heat transfer in Borehole heat exchangers in short time periods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 199-209, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

از موادی با ظرفیت حرارتی بالا پر می‌شود که دوغاب<sup>1</sup> نامیده می‌شود. شماتیک مبدل حرارتی گمانه در شکل 1 نشان داده شده است. مدل‌های متعددی برای انتقال حرارت در گمانه تا به حال توسعه داده شده‌اند. هدف از این مدل‌سازی‌ها عبارت‌اند از:

- تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از آزمون‌های تعیین ضریب هدایتی زمین؛
  - طراحی گمانه‌ها (تعیین قطر و طول گمانه و همچنین تعیین تعداد گمانه‌ها)؛
  - ادغام با سیستم شبیه‌سازی ساختمان. یعنی کوپل کردن مدل گمانه با سیستم تهویه مطبوع ساختمان و مدل‌های انتقال حرارت ساختمان برای مطالعه عملکرد کلی.
- مدل‌های ارائه شده برای بررسی انتقال حرارت در گمانه برحسب بازه زمانی مدل‌سازی به دو دسته تقسیم می‌شوند.
- مدل‌سازی در بازه زمانی بلند؛
  - مدل‌سازی در بازه زمانی کوتاه.

از مدل‌های با بازه زمانی بلند برای طراحی اولیه مبدل‌های حرارتی گمانه استفاده می‌شود. برای به دست آوردن طول موردنیاز گمانه نیاز به مدل‌سازی آن در دوره زمانی بلند (چند سال) است. در بازه زمانی خیلی بلند باید انتقال حرارت در راستای عمق گمانه نیز در نظر گرفته شود. از طرفی در این حالت چون گام زمانی بلند است می‌توان از ظرفیت حرارتی مواد داخل گمانه صرف‌نظر کرد. به همین دلیل در بازه زمانی بلند، انتقال حرارت را در داخل گمانه به‌صورت پایا و در خارج از آن به‌صورت گذرا در نظر گرفته می‌شود. [1]

مدل‌سازی با بازه زمانی کوتاه گمانه‌ها، در طراحی و مدل‌سازی دینامیکی پمپ‌های حرارتی به کار می‌رود. برای بررسی و برآورد مقدار انرژی مصرفی، نرخ انتقال حرارت مورد تقاضای ساعتی و روزانه، بررسی مزایای سیستم‌های زمینی و امکان‌سنجی این سیستم‌ها نیاز به مدل‌سازی دینامیکی این سیستم‌ها است.

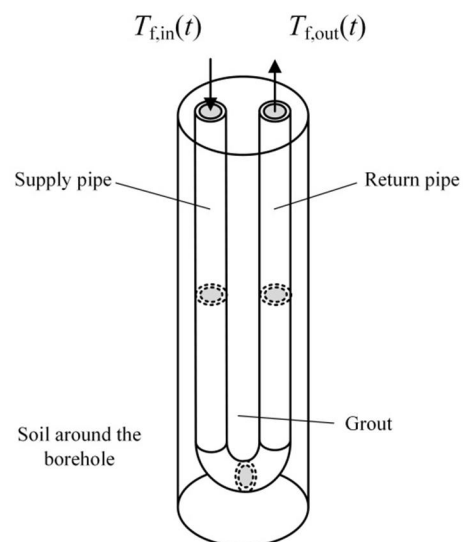


Fig.1 Schematic diagram Borehole heat exchanger.

شکل 1 طرح نمادینی از یک مبدل حرارتی گمانه

روش‌های مدل‌سازی انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی گمانه شامل روش‌های عددی، عددی-تحلیلی و تحلیلی است.

شبیه‌سازی عددی مایو و همکاران [2] در قالب کد عددی GEM3D، مطالعه عددی حجم محدود حیدری نژاد و همکاران [3] با استفاده از نرم‌افزار فلونتت، و همچنین مطالعه عددی المان محدود توسط الخوری و همکاران [4] نمونه‌هایی از کارهای عددی سه‌بعدی می‌باشند. مدل‌های عددی سه‌بعدی به علت شبکه محاسباتی زیاد، نیاز به زمان محاسباتی بالایی دارند و استفاده از این مدل‌ها در مدل‌سازی دینامیکی که برای یک بازه زمانی چندماهه انجام می‌شود، مناسب نیست.

مدل‌های عددی مقاومت-ظرفیت در سال‌های اخیر مورد استفاده زیادی قرار گرفته‌اند. در این مدل‌ها از آنالوژی جریان الکتریکی و جریان حرارتی برای مدل‌سازی انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی گمانه استفاده می‌شود. در این مدل‌ها، تعداد شبکه محاسباتی نسبت به مدل‌های سه‌بعدی تفاضل محدود، حجم محدود و المان محدود بسیار کمتر است. عامل مهم در این مدل‌ها چگونگی در نظر گرفتن مدار معادل حرارتی در داخل گمانه است. دی کارلی و همکاران [5] مدل CaRM را برای بررسی انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی گمانه ارائه کرده‌اند. شماتیک از این مدل در شکل 2 نشان داده شده است. در این مدل دی کارلی و همکاران فرض کرده‌اند که انتقال حرارت در زمین و دوغاب فقط در راستای شعاعی وجود دارد و از انتقال حرارت در راستای محوری صرف‌نظر کرده‌اند. بنابراین انتقال حرارت در هر لایه زمین به‌صورت انتقال حرارت هدایتی یک‌بعدی در نظر گرفته شده است. یکی از ایرادهای این مدل این است که از ظرفیت حرارتی دوغاب، لوله و سیال داخل لوله صرف‌نظر شده است که این امر در بازه‌های زمانی کوتاه، خطای قابل-توجهی ایجاد می‌کند. زارلا و همکاران [6] مدل CaRM را با در نظر گرفتن تاثیر ظرفیت حرارتی دوغاب و سیال داخل لوله در مدل‌سازی، بهبود داده‌اند. در مدل زارلا و همکاران [6] از روش‌های حل عددی مقاومت‌های داخل گمانه محاسبه می‌شوند که این امر استفاده از مدار معادل زارلا و همکاران [6] را با مشکل مواجه می‌کند.

مدل بعدی که توسط دی بوئر و همکاران [7] ارائه شده است مدل TRCM است. شماتیک مدار معادل TRCM برای یک گمانه با لوله‌ی U شکل در حالت دوبعدی در شکل 3 نشان داده شده است. در این مدل برای دوغاب دو گره در نظر گرفته شده است. یکی از ایرادات این روش این است که ممکن است مقدار مقاومت  $R_{gg}$  منفی بشود که این از لحاظ فیزیکی درست نیست. در یک مطالعه دیگر دی بوئر و همکاران مدل TRCM را به مدل سه‌بعدی توسعه داده‌اند [8].

لازم به ذکر است در تمامی مدل‌های مقاومت-ظرفیت ارائه شده، معادلات حاکم ابتدا برای هر گره به‌دست آمده و سپس معادلات حاکم به‌صورت عددی حل شده‌اند و هیچ حل تحلیلی از این معادلات تاکنون گزارش نشده است.

<sup>1</sup> Grout

$$G(t, \frac{r_b}{H}) = 2\pi k_s \frac{T_b(t) - T_G}{Q} \quad (1)$$

بعد از پیدا کردن تابع  $G$  برای یک شار پله‌ای، برای هر تغییرات شاری می‌توان دمای گمانه را از رابطه (2) به‌دست آورد.

$$T_b(t) = T_G + \sum_{i=1}^n \frac{(Q_i - Q_{i-1})}{2\pi k_s} G(t_n - t_{i-1}, \frac{r_b}{H}) \quad (2)$$

در روابط (1) و (2) بیانگر دمای زمین در فاصله دور از گمانه،  $T_b$  دمای متوسط دیوار گمانه،  $Q$  گرمای اعمال‌شده در سطح دیوار گمانه،  $r_b$  شعاع گمانه و  $H$  عمق گمانه است [9].

مدل گام زمانی بلند اسکیلسون جواب مناسب و قابل قبولی برای بازه زمانی بلند (از یک ماه تا چند سال) می‌دهد. اما چون این مدل هندسه داخل گمانه را در نظر نمی‌گیرد و از ظرفیت حرارتی دوغاب، لوله و سیال داخل لوله صرف‌نظر می‌کند، برای مدل‌سازی رفتار حرارتی گمانه در دوره‌های زمانی کوتاه مناسب نیست. یاووزترک [10] یک مدل دوبعدی عددی برای مدل‌سازی رفتار گمانه در گام زمانی کوچک توسعه داده است. در مدل وی هندسه و خواص حرارتی گمانه نیز در نظر گرفته شده است. وی با استفاده از روش گسسته‌سازی حجم محدود، مسئله انتقال حرارت گذرای دوبعدی را در داخل و خارج از گمانه حل کرده است.

دسته سوم مدل‌های انتقال حرارت در گمانه، مدل‌های تحلیلی می‌باشند. این مدل‌ها به دلیل سرعت محاسباتی بالا و سادگی، بیشتر از مدل‌های دیگر مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

مدل منبع خطی نامحدود ابتدا توسط کلون ارائه و سپس توسط اینگرسول و پلاس حل شد [11]. این مدل، ابتدایی‌ترین مدل برای محاسبه انتقال حرارت بین میدلهای زمینی و زمین است. در مدل منبع خطی نامحدود، زمین به‌عنوان یک جسم بی‌نهایت با دمای یکنواخت اولیه و گمانه به‌عنوان یک منبع خطی با طول بی‌نهایت در نظر گرفته شده است. از انتقال حرارت در جهت محور گمانه صرف‌نظر شده است و انتقال حرارت فقط در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است. یک شار حرارتی ثابت که در مرکز لوله گمانه اعمال می‌شود در نظر گرفته شده است. در این مدل از ظرفیت حرارتی دوغاب، لوله و سیال داخل لوله صرف‌نظر شده است. مدل بعدی، مدل منبع استوانه‌ای نامحدود است. مدل منبع استوانه‌ای نامحدود، یک منبع استوانه‌ای با شعاع گمانه و طول نامحدود را در داخل یک محیط نامحدود با خواص حرارتی ثابت در نظر می‌گیرد و معادله انتقال حرارت آن را به‌صورت تحلیلی حل می‌کند. این مدل توسط کارسلاو و یایگر [12] ارائه و بعداً توسط اینگرسول و همکاران [11] بهبود داده شده است. شرط مرزی در سطح لوله شار ثابت در نظر گرفته شده است.

براساس مدل اسکیلسون [9]، زنگ و همکاران [13] یک حل تحلیلی برای حل معادله انتقال حرارت در گمانه ارائه کرده‌اند. انتقال حرارت در راستای شعاعی و شعاعی در نظر گرفته شده است. در حل آن‌ها تأثیر شعاع گمانه در نظر گرفته نشده است و انتقال حرارت از گمانه به‌صورت یک شار خطی در نظر گرفته شده است. این مدل مشابه مدل خطی نامحدود بوده با این تفاوت که در این‌جا طول گمانه محدود در نظر گرفته شده است.

سه مدل تحلیلی منبع خطی نامحدود، منبع استوانه‌ای نامحدود و مدل منبع خطی محدود، مدل‌های کلاسیک نامیده می‌شوند. در مدل‌های کلاسیک انتقال حرارت در داخل گمانه به‌صورت پایا و در خارج از آن به‌صورت گذرا در نظر گرفته شده است. ایراد مدل‌های تحلیلی کلاسیک در

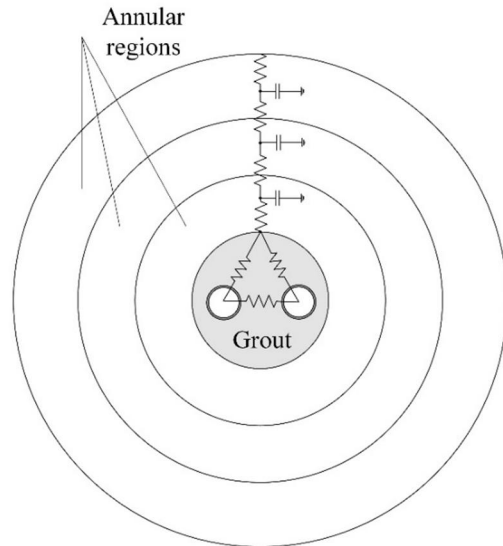


Fig. 2 Equivalent thermal circuit proposed by De Carli et al. [5]  
شکل 2 مدار معادل حرارتی در مطالعه دی کارلی و همکاران [5]

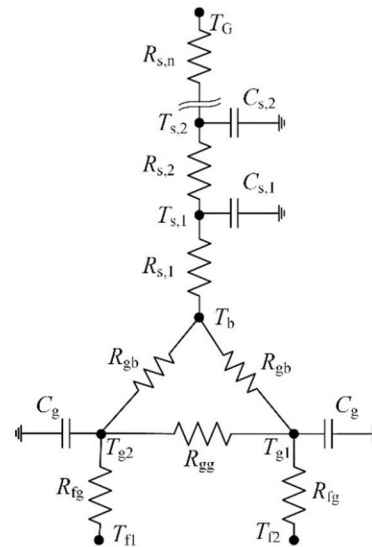


Fig. 3 Equivalent thermal circuit proposed by D. Bauer et al. [7]

شکل 3 مدار معادل حرارتی در مطالعه دی بوئر و همکاران [7]

مدل‌های عددی - تحلیلی دسته‌ای دیگر از مدل‌ها هستند که در آن‌ها، از ترکیب حل عددی و تحلیلی برای مدل‌سازی انتقال حرارت در گمانه استفاده شده است. مدل اسکیلسون [9] یکی از این مدل‌ها است. اسکیلسون برای اولین بار از مفهوم تابع  $G$  در مدل‌سازی انتقال حرارت در گمانه استفاده کرد. در این مدل تابع  $G$  بیانگر دمای متوسط گمانه به ازای شار پله‌ای واحد است. تابع  $G$  بعد است و در دو مرحله محاسبه می‌شود: در مرحله اول ابتدا یک حل عددی تفاضل محدود صریح برای معادله دوبعدی انتقال حرارت هدایت گذرا در مختصات استوانه‌ای (شعاعی و طولی) به ازای شار پله‌ای واحد برای یک گمانه انجام می‌شود. قطر و عمق گمانه به‌صورت محدود در نظر گرفته شده و همچنین از ظرفیت حرارتی دوغاب، لوله و سیال داخل لوله صرف‌نظر می‌شود. شرایط مرزی و اولیه ثابت در نظر گرفته می‌شوند. بعد از به‌دست آوردن تابع  $G$  می‌توان دمای دیوار گمانه را برحسب انتقال حرارت استخراج شده از زمین  $Q$  (W/m) به دست آورد.

به صورت کوپل باهم و با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌شوند. در نهایت تابع پاسخ حرارتی (تابع  $G$ ) برای حل تحلیلی به دست می‌آید. در مرحله بعد با استفاده تابع پاسخ دمای خروجی از گمانه به ازای دما و دبی‌های ورودی متفاوت محاسبه می‌شود. ابتدا نحوه محاسبه تابع پاسخ توضیح داده می‌شود

### 1-2- تابع پاسخ بازه زمانی کوتاه

در این قسمت، هدف محاسبه تغییرات دمای سیال در لوله‌ها برحسب زمان به ازای اعمال انتقال حرارت مشخص بر واحد عمق هر کدام از لوله‌ها است. شماتیک هندسه حل در شکل 4 نشان داده است. در این شکل  $T_{f1}(t)$  و  $T_{f2}(t)$  دمای سیال در لوله‌های رفت و برگشت می‌باشند.  $q_{f1}$  و  $q_{f2}$  انتقال حرارت انتقال یافته بر واحد عمق می‌باشند. هدف در این قسمت، محاسبه  $T_{f1}(t)$  و  $T_{f2}(t)$  به ازای مقادیر مشخص  $q_{f1}$  و  $q_{f2}$  است. سپس تابع پاسخ بی‌بعد یعنی تابع  $G$  محاسبه خواهد شد. معادله (1) رابطه تابع  $G$  را برای بازه زمانی بلند نشان می‌دهد. در بازه زمانی کوتاه، تابع  $G$  به صورت رابطه (3) محاسبه می‌شود.

$$G_{st} = 2\pi k_s \frac{(T_{f1} + T_{f2})/2 - T_G}{q_{f1} + q_{f2}} \quad (3)$$

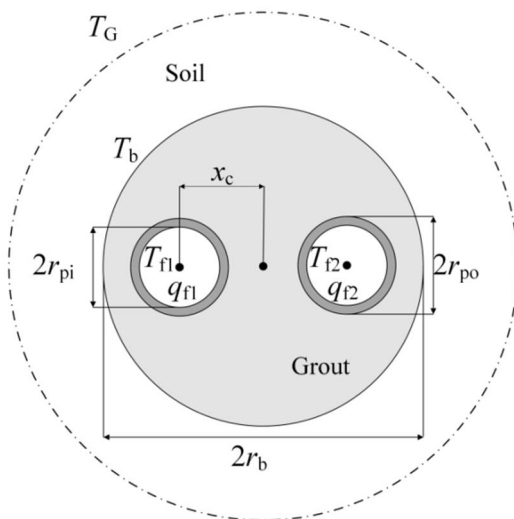


Fig.4 Schematic presentation of the problem

شکل 4 طرح نمادین هندسه حل

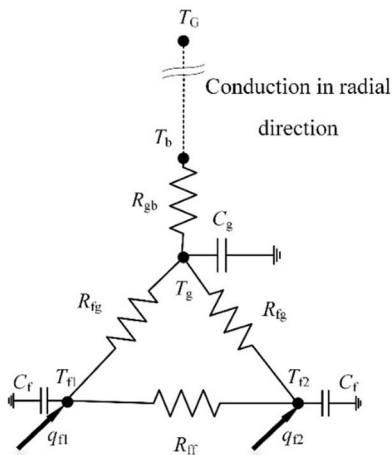


Fig. 5 Equivalent thermal network of the present study

شکل 5 مدار معادل حرارتی مطالعه حاضر

این است که در مدل‌سازی، تأثیر هندسه داخل گمانه، ظرفیت حرارتی سیال داخل لوله، لوله و دوغاب در نظر گرفته نشده است. به همین دلیل این مدل‌ها برای زمان‌های کوتاه (از چند ساعت تا چند روز) که در آن باید رفتار دینامیکی گمانه را در نظر گرفت مناسب نیستند.

اسکیلسون [9] معیار بازه زمانی کوتاه را عدد فوریه  $(Fo = \alpha_s t / r_b^2)$  کوچک‌تر از 5 بیان کرده است. و انگرسول و پلاس [11] این معیار را عدد فوریه کوچک‌تر از 20 بیان کرده‌اند. این مقدار برای یک گمانه معمول به صورت تقریبی بین 6 ساعت تا 1 روز است.

برای مدل‌سازی انتقال حرارت در گمانه‌ها در بازه زمانی کوتاه باید انتقال حرارت در داخل گمانه به صورت گذرا در نظر گرفته شود و همچنین باید تأثیر ظرفیت حرارتی مواد داخل گمانه در نظر گرفته شود.

از طرف دیگر، تغییرات بار حرارتی در بازه زمانی کوتاه اثرات قابل توجهی بر روی عملکرد پمپ حرارتی و سیستم کلی دارد و برای مدل‌سازی دینامیکی سیستم، حل انتقال حرارت در گمانه‌ها در دوره زمانی کوتاه لازم است.

لامارچ و بیوچمپ [14] انتقال حرارت در گمانه را با در نظر گرفتن گمانه و زمین اطراف به صورت ماده مرکب از روش تحلیلی حل کرده‌اند. آن‌ها لوله U شکل را به صورت یک لوله مستقیم با قطر معادل در نظر گرفته‌اند. در این روش تأثیر ظرفیت حرارتی دوغاب در نظر گرفته شده است، ولی تأثیر ظرفیت حرارتی سیال، لحاظ نشده است. در واقع انتقال حرارت در داخل لوله به صورت حالت پایا در نظر گرفته شده است.

همچنین جاود و کلاسون [15] یک حل تحلیلی و عددی برای بررسی انتقال حرارت در بازه زمانی کوتاه در گمانه ارائه کرده‌اند. در این مدل از تبدیل لاپلاس برای حل مسئله استفاده شده است. لوله U شکل به صورت یک لوله با قطر معادل در نظر گرفته شده است. در این مدل تأثیر ظرفیت حرارتی سیال داخل لوله و دوغاب در نظر گرفته شده است. همچنین گوبال و همکاران [16] مسئله انتقال حرارت در گمانه را با در نظر گرفتن دو لوله به صورت یک لوله معادل حل کرده‌اند.

در هر سه مطالعه ذکر شده برای زمانی کوتاه، یک مبدل با لوله U شکل به صورت یک مبدل با لوله مستقیم مدل شده است. این فرض ساده کننده باعث خطا در جواب نهایی می‌شود. چراکه هندسه پیچیده داخل گمانه با یک لوله مستقیم مدل شده و همچنین اثر پارامترهای هندسی مانند فاصله مرکز لوله‌ها از همدیگر در مدل‌سازی در نظر گرفته نمی‌شود.

هدف از این مقاله ارائه یک مدل تحلیلی جدید برای بررسی انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی گمانه در بازه زمانی کوتاه است. در این مدل‌سازی، شکل واقعی گمانه در نظر گرفته می‌شود. برای مدل‌سازی در داخل گمانه از روش‌های مقاومت-ظرفیت و در خارج از گمانه معادله هدایت در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است. انتقال حرارت در سیال داخل لوله‌ها، دوغاب و زمین اطراف لوله به صورت گذرا در نظر گرفته شده است. در نهایت نتایج حل حاضر با داده‌های تجربی مقایسه شده است.

### 2- مدل‌سازی

با توجه به این که مدل‌های مقاومت-ظرفیت قابلیت خود را در زمینه پیش‌بینی رفتار حرارتی مبدل‌های حرارتی گمانه نشان داده‌اند، در داخل گمانه برای مدل‌سازی از این مدل‌ها استفاده می‌شود. بدین منظور یک مدار حرارتی معادل جدید توسعه داده شده و معادلات حاکم در داخل گمانه به دست آمده‌اند. همچنین در خارج از گمانه نیز معادله انتقال حرارت هدایتی در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است. در نهایت معادلات استخراج شده

اولیه به صورت رابطه (10) است.

$$T(r, 0) = T_G \quad (10)$$

که  $T_G$  دمای اولیه زمین است. دمای زمین در فاصله خیلی دور از گمانه نیز برابر با  $T_G$  است بنابراین یکی از شرایط مرزی به صورت رابطه (11) است.

$$T(r \rightarrow \infty, t) = T_G \quad (11)$$

شرط مرزی دوم را به صورت شرط شار حرارتی در دیواره‌ی گمانه در نظر گرفته می‌شود.

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \cdot 2\pi r \Big|_{r=r_b} = q_b \quad (12)$$

در رابطه (12) شار حرارتی اعمال شده در دیوار گمانه است. با توجه به مدار معادل حرارتی شکل 5 از رابطه (13) محاسبه می‌شود.

$$q_b = \frac{T_g - T_b}{R_{gb}} \quad (13)$$

در نهایت شرط مرزی دوم به صورت رابطه (14) درمی‌آید.

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} \cdot 2\pi r \Big|_{r=r_b} = \frac{T_g - T_b}{R_{gb}} \quad (14)$$

معادلات دیفرانسیل (6 تا 8) و معادله مشتق جزئی (9) را می‌شود با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرد. قبل از تبدیل لاپلاس برای راحتی از تغییر متغیر  $\theta = T - T_G$  استفاده می‌شود. اگر بعد از تغییر متغیر از معادلات (6 تا 8) تبدیل لاپلاس گرفته شود، معادلات پس از مرتب کردن به صورت روابط (15 تا 17) در می‌آیند (ارائه رفرنس در صورت نیاز).

$$(C_f s + \frac{1}{R_{ff}} + \frac{1}{R_{fg}}) \bar{\theta}_{f1}(s) - \frac{1}{R_{ff}} \bar{\theta}_{f2}(s) - \frac{1}{R_{fg}} \bar{\theta}_g(s) = \frac{q_{f1}}{s} \quad (15)$$

$$(C_f s + \frac{1}{R_{ff}} + \frac{1}{R_{fg}}) \bar{\theta}_{f2}(s) - \frac{1}{R_{ff}} \bar{\theta}_{f1}(s) - \frac{1}{R_{fg}} \bar{\theta}_g(s) = \frac{q_{f2}}{s} \quad (16)$$

$$(C_g s + \frac{2}{R_{fg}} + \frac{1}{R_{gb}}) \bar{\theta}_g(s) - \frac{1}{R_{fg}} \bar{\theta}_{f1}(s) - \frac{1}{R_{fg}} \bar{\theta}_{f2}(s) - \frac{1}{R_{gb}} \bar{\theta}_b(s) = 0 \quad (17)$$

معادله‌های (9، 14 و 15) نیز پس از تغییر متغیر و تبدیل لاپلاس به صورت روابط (18 تا 20) در خواهد آمد (ارائه رفرنس در صورت نیاز).

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}(r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}(r, s)}{\partial r} - \frac{s}{\alpha_s} \bar{\theta}(r, s) = 0 \quad (18)$$

$$\bar{\theta}(r \rightarrow \infty, 0) = 0 \quad (19)$$

$$-k \frac{\partial \bar{\theta}(r, s)}{\partial r} \cdot 2\pi r \Big|_{r=r_b} = \frac{\bar{\theta}_g(s) - \bar{\theta}_b(s)}{R_{gb}} \quad (20)$$

جواب کلی معادله (20) به صورت رابطه (21) است.

$$\bar{\theta}(r, s) = c_1(s) I_0(r\sqrt{s/\alpha_s}) + c_2(s) K_0(r\sqrt{s/\alpha_s}) \quad (21)$$

با توجه به این که  $I_0$  در  $r \rightarrow \infty$  دارای مقدار  $\infty$  است. بنابراین  $c_1(s)$  برابر با صفر است.

با اعمال شرط مرزی دوم معادله (20)  $c_2(s)$  به دست می‌آید. در نهایت توزیع دما در خاک اطراف لوله به صورت رابطه (22) به دست می‌آید.

تابع  $G$  برای بازه زمانی بلند مشابه تابع  $G$  برای بازه زمانی بلند است. با این تفاوت که به جای دمای گمانه در رابطه بازه بلند دمای متوسط سیال جایگزین شده است. دلیل این امر آن است که در بازه زمانی بلند داخل گمانه به صورت پایا در نظر گرفته می‌شود و حل گذرا در خارج از گمانه انجام می‌شود. به همین دلیل در رابطه تابع  $G$ ،  $T_b$  در نظر گرفته می‌شود. ولی در بازه زمانی کوتاه چون داخل گمانه نیز به صورت گذرا مدل می‌شود. بجای  $T_b$ ،  $T_f$  در نظر گرفته می‌شود.

همان‌طور که اشاره شد در داخل گمانه معادلات حاکم از اعمال معادله بقای انرژی در گره‌های مدار معادل حرارتی داخل گمانه به دست می‌آید. مدار معادل حرارتی در داخل گمانه به صورت شکل 5 در نظر گرفته شده است. دلیل استفاده از این مدار این است که در این مدار، همان‌طور که در بخش 2-2 توضیح داده خواهد شد، مقاومت‌ها از طریق تحلیلی مشخص می‌شوند و هم این که برخلاف مدل دی بوئر و همکاران [7] هیچ کدام از مقاومت‌ها امکان منفی شدن را ندارند. در این مدار ظرفیت حرارتی سیال با ظرفیت الکتریکی و مقاومت حرارتی با مقاومت الکتریکی معادل‌سازی شده است. در مدار معادل حرارتی حاضر سه گره داخل گمانه در نظر گرفته شده است و گره چهارم بر روی دیوار گمانه قرار داده شده است. برای سه گره داخل گمانه معادلات حاکم بر اساس اعمال قانون بقای انرژی بر گره به دست می‌آید. معادله بقای انرژی در هر گره به صورت رابطه (4) نوشته می‌شود.

$$C_j \frac{dT_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{T_k - T_j}{R_k} \quad \forall j = 1 \dots n \quad (4)$$

در رابطه (4)،  $j$  بیانگر گره مورد نظر،  $T$  دمای گره، شمارشگر  $k$  بیانگر گره‌های همسایه و  $n_j$  بیانگر تعداد گره‌های همسایه است.  $R_k$  بیانگر مقاومت حرارتی بین گره  $j$  و  $k$  و  $C_j$  بیانگر ظرفیت حرارتی گره  $j$  است که مقدار آن از رابطه (5) به دست می‌آید.

$$C_j = \rho_j A_j c_{p,j} \quad (5)$$

در رابطه (5)،  $\rho$  بیانگر چگالی،  $A$  سطح مقطع و  $c_p$  گرمای ویژه در فشار ثابت است. با اعمال رابطه (5) بر گره‌های داخل گمانه در شکل 5 روابط (6 تا 8) حاصل می‌شود.

$$C_f \frac{dT_{f1}}{dt} = q_{f1} + \frac{T_{f2} - T_{f1}}{R_{ff}} + \frac{T_g - T_{f1}}{R_{fg}} \quad (6)$$

$$C_f \frac{dT_{f2}}{dt} = q_{f2} + \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{ff}} + \frac{T_g - T_{f2}}{R_{fg}} \quad (7)$$

$$C_g \frac{dT_g}{dt} = \frac{T_{f1} - T_g}{R_{fg}} + \frac{T_{f2} - T_g}{R_{fg}} + \frac{T_b - T_g}{R_{gb}} \quad (8)$$

در روابط (6 تا 8)  $R_{ff}$  مقاومت سیال-سیال،  $R_{fg}$  مقاومت سیال-دوغاب و  $R_{gb}$  مقاومت حرارتی بین دوغاب و دیوار گمانه است.  $C_f$  و  $C_g$  به ترتیب بیانگر ظرفیت حرارتی سیال و دوغاب می‌باشند.  $T_g$  بیانگر دمای دوغاب است.

در خاک اطراف گمانه نیز توزیع دما از حل معادله هدایت در راستای شعاعی به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

این معادله برای حل نیاز به یک شرط اولیه و دو شرط مرزی دارد. شرط

$$D(j, K) = \frac{(-1)^{j+M}}{\min(j, M)} \sum_{n=m}^{M-j} \frac{n^M (2n)!}{(M-n)! n! (n-1)! (j-n)! (2n-j)!} \quad (31)$$

که

$$\bar{\theta}(r, s) = \frac{\bar{\theta}_g(s) - \bar{\theta}_b(s)}{R_{gb}} \varphi(s) \quad (22)$$

که در آن

$$\varphi(s) = \frac{1}{2k_s \pi r_b \sqrt{s/\alpha_s} K_0(r_b \sqrt{s/\alpha_s})} \frac{K_0(r_b \sqrt{s/\alpha_s})}{K_1(r_b \sqrt{s/\alpha_s})} \quad (23)$$

با جاگذاری  $r = r_b$  در معادله (22) و اندکی کار ریاضی رابطه (24) حاصل می‌شود.

$$\left(1 + \frac{1}{R_{gb}} \varphi(s)\right) \bar{\theta}_b(s) - \frac{1}{R_{gb}} \varphi(s) \bar{\theta}_g(s) = 0 \quad (24)$$

معادلات (15 تا 17) به همراه معادله (24) تشکیل چهار معادله جبری چهار مجهولی در فضای لاپلاس را می‌دهند. می‌توان این معادلات را به صورت رابطه (25) نوشت:

$$[M][\bar{\theta}] = [B] \quad (25)$$

در رابطه (25)  $[M]$  ماتریس  $4 \times 4$  ضرایب است.  $[\bar{\theta}]$  بردار دماهای مجهول و  $[B]$  بردار معلومات است.  $[\bar{\theta}]$  از رابطه (26) به دست می‌آید.

$$[\bar{\theta}] = [M]^{-1}[B] \quad (26)$$

در نهایت دمای متوسط سیال به صورت رابطه (27) به دست می‌آید.

$$\bar{\theta}_f(s) = \frac{\bar{\theta}_{f1}(s) + \bar{\theta}_{f2}(s)}{2} = \frac{q_{f1} + q_{f2}}{2s \left( C_f s + \frac{1}{R_{fg}} - \frac{2}{\psi(s) R_{fg}^2} \right)} \quad (27)$$

که در آن

$$\psi(s) = C_g s + \frac{2}{R_{fg}} + \frac{1}{R_{gb}} - \frac{1}{R_{gb}(1 + R_{gb}/\varphi(s))} \quad (28)$$

دمای دیوار گمانه و دمای سیال در هر یک از لوله‌ها نیز از رابطه (26) محاسبه می‌شود. با توجه به این که هدف در این مقاله محاسبه تابع پاسخ حرارتی است فقط رابطه دمای متوسط ارائه شده است. در نهایت با استفاده از رابطه‌های (3 و 28) تابع  $G$  برای بازه زمانی کوتاه در فضای لاپلاس به صورت رابطه (29) در می‌آید.

$$\bar{G}_{st}(s) = \frac{2\pi k_s}{2s \left( C_f s + \frac{1}{R_{fg}} - \frac{2}{\psi(s) R_{fg}^2} \right)} \quad (29)$$

با توجه به پیچیدگی رابطه (29) نمی‌توان به صورت مستقیم از این رابطه تبدیل معکوس لاپلاس گرفت. به همین دلیل از تبدیل معکوس لاپلاس عددی برای یافتن تابع  $G$  استفاده می‌شود.

روش‌های عددی متعددی برای تبدیل لاپلاس معکوس وجود دارند که هر کدام از آن‌ها برای شکل‌های مختلفی از توابع مناسب می‌باشند. روشی که در گمانه‌ها توسط محققین مختلف از جمله گوپال و همکاران [16] مورد استفاده قرار گرفته است روش گاور-استهفست<sup>1</sup> است. اگر  $G_{st}(t)$  تابع در فضای زمان و  $\bar{G}_{st}(s)$  تابع در فضای لاپلاس باشد، طبق روش گاور-استهفست  $G_{st}(t)$  از رابطه (30) به دست می‌آید.

$$G_{st}(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{j=1}^K D(j, K) \bar{G}_{st}(j \frac{\ln 2}{t}) \quad (30)$$

<sup>1</sup> Gaver-Stehfest algorithm

در رابطه فوق  $K$  یک عدد طبیعی زوج و  $M = K/2$  است.  $K$  براساس دقت مورد نظر انتخاب می‌شود. برای محاسبات در این مقاله  $K = 12$  انتخاب شده است. با تغییر  $K$  تا 20 هیچ تغییر در نتایج مشاهده نشد. افزایش مقدار  $K$  به بیش از 24 باعث نوسانی شدن نتایج می‌شود.

همان‌طور که اعلام شد این مدل برای بازه زمانی کوتاه است. در این مدل انتقال حرارت فقط در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است و از انتقال حرارت در راستای محوری صرف‌نظر شده است. بررسی‌های اسکیلسون نشان می‌دهد که انتقال حرارت هدایتی در راستای محوری (عمق گمانه) در زمان‌های  $t < H^2/(90\alpha_s)$  ناچیز بوده و می‌شود از آن صرف‌نظر کرد [9]. این مقدار برای یک گمانه معمول بیشتر از یک سال است. بنابراین حل حاضر می‌تواند برای بررسی رفتار گمانه در بازه زمانی یک‌ساله مورد استفاده قرار گیرد.

## 2-2- محاسبه مقاومت‌ها و ظرفیت‌ها

مقاومت‌های  $R_{fg}$  و  $R_{gb}$  با استفاده از مقاومت حرارتی گمانه به دست می‌آید. مقاومت حرارتی گمانه شامل مقاومت حرارتی سیال داخل لوله، لوله و دوغاب است و برای لوله  $U$  شکل به صورت رابطه (32) محاسبه می‌شود.

$$R_b = \frac{R_{conv} + R_{cond}}{2} + R_g \quad (32)$$

که  $R_{cond}$  مقاومت هدایتی لوله،  $R_{conv}$  مقاومت جابجایی سیال داخل لوله و  $R_g$  مقاومت هدایتی دوغاب می‌باشند.

مقاومت هدایتی لوله و مقاومت جابجایی سیال داخل لوله به صورت رابطه‌های (33) و (34) تعریف می‌شود.

$$R_{cond} = \frac{\ln(r_{po}/r_{pi})}{2\pi k_p} \quad (33)$$

$$R_{conv} = \frac{1}{2\pi r_{pi} h} \quad (34)$$

که  $r_{pi}$  شعاع داخلی لوله،  $r_{po}$  شعاع خارجی لوله،  $k_p$  ضریب هدایت حرارتی لوله و  $h$  ضریب جابجایی سیال داخل لوله است. ضریب جابجایی لوله در حالتی که سیستم روشن است (سیال در داخل لوله‌ها جریان دارد) از رابطه (34) محاسبه می‌شود [17].

$$h = \frac{k_f}{2r_{pi}} \frac{f/8(\text{Re} - 1000)\text{Pr}}{1 + 12.7\sqrt{(f/8)(\text{Pr}^{2/3} - 1)}} \quad (35)$$

که

$$f = (0.79 \ln(\text{Re}) - 1.64)^{-2} \quad (36)$$

که  $k_f$  ضریب هدایت حرارتی سیال  $f$  ضریب اصطکاک،  $\text{Re}$  عدد رینولدز و  $\text{Pr}$  عدد پراوتل است.

زمانی که سیستم خاموش است، ضریب جابجایی سیال از رابطه (37) محاسبه می‌شود [18].

$$h = \frac{k_f}{r_{pi}(1 - \sqrt{0.5})} \quad (37)$$

هدف از این قسمت به دست آوردن دمای سیال خروجی از گمانه به ازای دما و دبی‌های متغیر ورودی به گمانه با استفاده از این تابع پاسخ است. ابتدا حالت روشن سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. دمای متوسط سیال به ازای اعمال انتقال حرارت بر واحد عمق مشخص از رابطه (47) به دست می‌آید.

$$T_f(t) - T_G = \frac{1}{2\pi k_s} q_f \cdot G_{st}(t) \quad (47)$$

رابطه (47) براساس نرخ انتقال حرارت ثابت برحسب زمان به‌دست آمده است. با توجه به این که در واقعیت انتقال حرارت بین سیال عامل و زمین اطراف  $q_f$  برحسب زمان تغییر می‌کند، با استفاده از اصل برهم‌نهی قضیه دوهمامل [21] برای بارهای حرارتی گسسته، می‌توان رابطه (47) را برای بارهای متغیر با زمان توسعه داد. اگر  $q_f$  برحسب زمان به‌صورت بارهای گسسته شکل 6 باشد در این صورت با استفاده از رابطه (48) می‌توان دمای متوسط سیال را در هر لحظه محاسبه کرد.

$$T_f(t_n) = T_G + \frac{1}{2\pi k_s} \sum_{i=1}^n (q_{f,i} - q_{f,i-1}) G_{st}(t_n - t_{i-1}) \quad (48)$$

در رابطه فوق  $T_f$  برابر با دمای متوسط سیال می‌باشد. برای درک بهتر شماتیک سه‌بعدی در شکل 1 همراه با دماهای سیال در دو نقطه ورودی و خروجی نشان داده شده است. دمای متوسط سیال به صورت رابطه (49) تعریف می‌شود [14].

$$T_f(t) = \frac{T_{f,in}(t) + T_{f,out}(t)}{2} \quad (49)$$

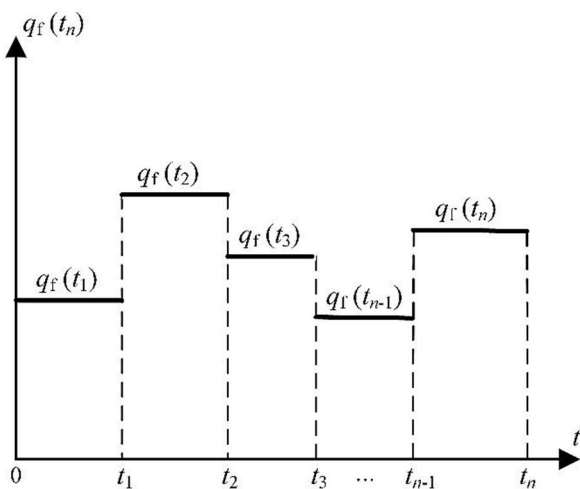
$T_{f,in}(t)$  دمای سیال در ورودی گمانه و  $T_{f,out}(t)$  دمای سیال در خروجی گمانه است.

مقدار کل انتقال حرارت انتقالی بین زمین و سیال عامل از رابطه (50) به دست می‌آید.

$$Q_f(t) = \dot{m} c_{pf} (T_{f,in}(t) - T_{f,out}(t)) \quad (50)$$

از طرفی طبق رابطه (51) داریم:

$$q_f(t) = \frac{Q_f(t)}{H} \quad (51)$$



Stepwise varying heat flux Fig. 6

شکل 6 شار گسسته پله‌ای

به علت هندسه پیچیده‌ی داخل گمانه نمی‌توان مقاومت حرارتی دوغاب را به‌صورت سر راست و مستقیم حساب کرد. تاکنون روش‌های متعددی برای محاسبه مقدار مقاومت دوغاب ارائه شده‌اند. لامارچ و همکاران [19] دقت روش‌های مختلف را بررسی کرده‌اند. نتایج مطالعات آن‌ها نشان می‌دهد که روش تحلیلی بنت و همکاران [20] نسبت به بقیه روش‌ها از دقت بیشتری برخوردار است. در مقاله بنت و همکاران کد فرتن روش تحلیلی موجود است. در کار حاضر این کد به زبان برنامه‌نویسی متلب برگردانده شده است و برای محاسبه مقاومت حرارتی گمانه به‌کار رفته است.

مقاومت  $R_{ff}$  برابر با مقاومت اتصال کوتاه بین دو لوله ( $R_a$ ) است. همانند مقاومت حرارتی دوغاب برای محاسبه مقاومت حرارتی اتصال کوتاه نیز روش‌های مختلفی ارائه شده است. براساس مطالعه لامارچ و همکاران [19] روش تحلیلی بنت و همکاران [20] برای محاسبه مقاومت اتصال کوتاه نیز از دقت بیشتری نسبت به بقیه روش‌ها برخوردار است. به همین دلیل در این مقاله، این روش برای محاسبه مقاومت اتصال کوتاه استفاده شده است. یک پارامتر مهم در روش ظرفیت-مقاومت حاضر مکان شعاعی گره دوغاب ( $r_g$ ) است. به‌صورت رابطه (38) محاسبه شده می‌شود (ارائه فرانس).

$$r_g = \sqrt{\frac{r_b^2 + r_e^2}{2}} \quad (38)$$

که در آن

$$r_e = \frac{r_b}{e^{2\pi k_g R_g}} \quad (39)$$

در نهایت مقاومت‌های  $R_{ff}$ ,  $R_{gb}$  و  $R_{fg}$  به‌صورت روابط (40) تا (42) محاسبه می‌شوند.

$$R_{ff} = R_a \quad (40)$$

$$R_{gb} = \frac{1}{2\pi k_g} \ln\left(\frac{r_b}{r_g}\right) \quad (41)$$

$$R_{fg} = 2(R_b - R_{gb}) \quad (42)$$

ظرفیت‌های حرارتی  $C_f$  و  $C_g$  از روابط (43 و 44) محاسبه می‌شوند.

$$C_f = \rho_f c_{pf} (\pi r_{pi}^2) \quad (43)$$

$$C_g = \rho_g c_{pg} (\pi r_b^2 - 2\pi r_{po}^2) \quad (44)$$

بررسی نتایج نشان می‌دهد که استفاده از یک ضریب تصحیح، برای  $C_f$  باعث بهبود نتایج در زمان‌های اولیه می‌شود.  $C_{f,mod}$  به‌صورت رابطه (45) تعریف می‌شود.

$$C_{f,mod} = C_f \cdot ff \quad (45)$$

که

$$ff = \frac{\pi}{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{r_b}{x_c}\right)} \quad (46)$$

بررسی‌ها نشان می‌دهد که این ضریب باعث بهبود اندک نتایج در 40 دقیقه اول می‌شود و در بقیه زمان‌ها تاثیری بر روی نتایج ندارد.

### 3-2- محاسبه دمای خروجی

در قسمت 1-2 روابط (29 تا 31) تابع پاسخ بازه زمانی کوتاه استخراج شد.

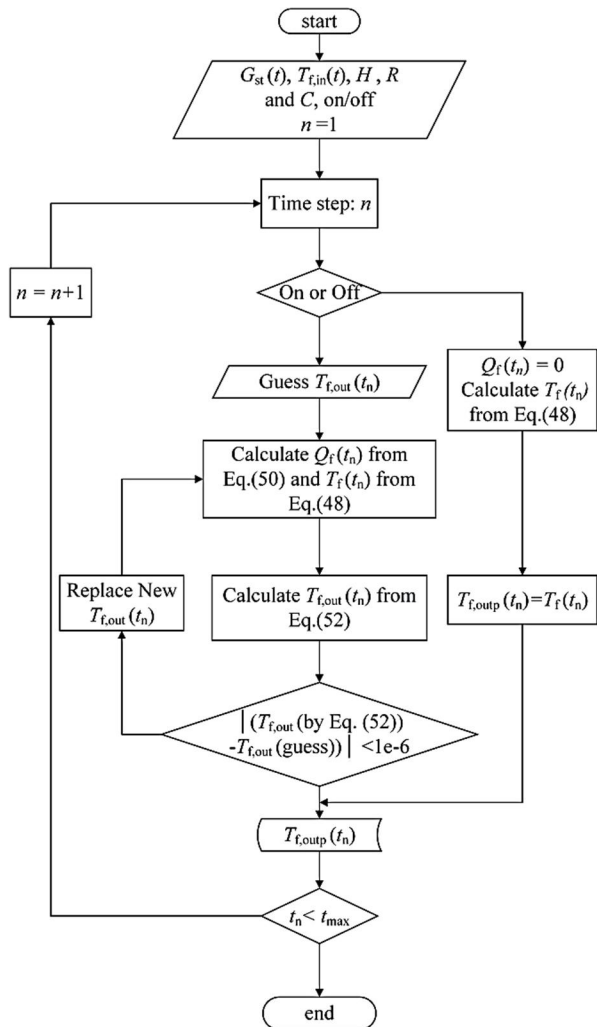


Fig. 7 flowchart of the solution algorithm

شکل 7 فلوچارت الگوریتم حل

جدول 1 خواص ترموفیزیکی مرجع [22]

Table 1 Thermal properties of reference [22]

مواد	$\rho$ ( $\text{kgm}^{-3}$ )	$c_p$ ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	$K$ ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
خاک	2000	1250	2.88
پی‌وی‌سی	1100	1450	0.39
دوغاب	2000	1900	0.9
آب	998	4200	0.6

جدول 2 مشخصات هندسی مرجع [22]

Table 2 Geometric parameters of the reference [22]

عمق گمانه	18.3(m)
قطر گمانه	6.5(cm)
شعاع داخلی لوله U-شکل	1.3665(cm)
شعاع خارجی لوله U-شکل	1.67(cm)
فاصله دو لوله U-شکل	5.3(cm)

همچنین نتایج حاصل از حل حاضر با نتایج حل تحلیلی لامارچ و بیوچمپ [14] و جاود و کلاسون [15] مقایسه شده است. هر دو حل مورد نظر برای بازه زمانی کوتاه ارائه شده‌اند. با توجه به طولانی بودن فرمول‌ها در حل‌های تحلیلی اشاره شده برای اختصار از آوردن این فرمول‌ها اجتناب شده است. از

$m$  دبی جرمی سیال در داخل لوله است. با استفاده از روابط (49) و (50) دمای خروجی به صورت رابطه (52) حساب می‌شود.

$$T_{f,out}(t) = T_f(t) - \frac{Q_f(t)}{2\dot{m}c_{pf}} \quad (52)$$

برای محاسبه دمای خروجی در لحظه  $t_n$  یعنی  $T_{f,out}(t_n)$  نیاز به مقدار  $Q_f(t_n)$  است. درحالی‌که برای محاسبه  $Q_f(t_n)$  طبق رابطه (50) نیاز به مقدار  $T_{f,out}(t_n)$  است. به همین دلیل در این قسمت از روش سعی خطا برای پیدا کردن مقدار  $T_{f,out}(t_n)$  استفاده می‌شود. بدین ترتیب ابتدا یک مقدار برای  $T_{f,out}(t_n)$  حدس زده می‌شود سپس با استفاده از معادله (50) مقدار  $Q_f(t_n)$  به دست می‌آید. در ادامه از معادله (49) مقدار  $T_f(t_n)$  محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از معادله (52) مقدار  $T_{f,out}(t_n)$  جدید به دست می‌آید. مقدار جدید به دست آمده  $T_{f,out}(t_n)$  با مقدار حدس زده شده اولیه مقایسه می‌گردد، اگر اختلاف این دو مقدار کمتر از  $10^{-6}$  باشد، فرایند در گام زمانی بعدی ادامه می‌یابد، و اگر این امر رخ ندهد مقدار جدید به دست آمده  $T_{f,out}(t_n)$  با مقدار حدس اولیه جایگزین می‌شود، و این حلقه تا محقق شدن شرط همگرایی ادامه می‌یابد.

در زمانی خاموشی سیستم با توجه به رابطه (50) مقدار  $Q_f(t_n)$  برابر صفر است. در این حالت دمای سیال در تمامی نقطه‌ها برابر دمای متوسط سیال در نظر گرفته می‌شود. همچنین در زمان خاموشی چون دمای خروجی وجود ندارد. در نتیجه دمای سیال در لوله برگشت در عمق  $z = 0$  محاسبه شده و مقدار آن برابر با مقدار دمای خروجی در نظر گرفته می‌شود.

$$T_{f,out}(t) = T_{f2}(0, t) = T_f(t) \quad (53)$$

با توجه به این‌که در زمان خاموشی سیستم مقدار  $Q_f(t_n)$  مشخص و برابر صفر است لذا برای پیدا کردن دمای سیال در خروجی نیازی به روش سعی و خطا نیست و دمای سیال طبق رابطه (53) به صورت مستقیم محاسبه می‌شود. برای درک بهتر پروسه حل، فلوچارت مربوطه در زمان روشن و خاموش در شکل 7 نشان داده شده است.

### 3- اعتبارسنجی

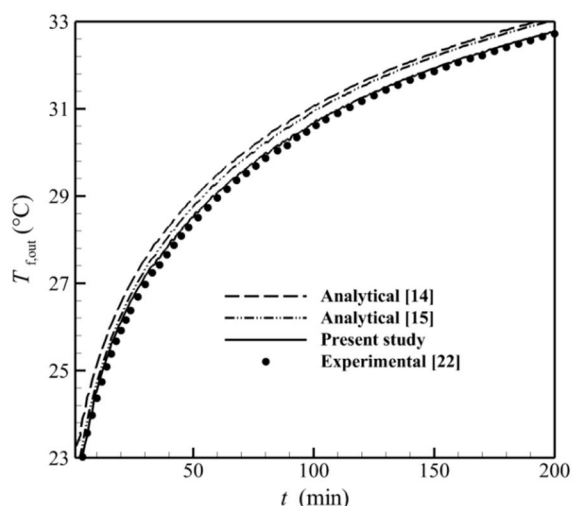
اعتبارسنجی نتایج حل تحلیلی با حاضر با استفاده داده‌های تجربی بی‌یر و همکاران [22] انجام گرفته است. هدف از مطالعه تجربی بی‌یر و همکاران [22]، ارائه داده‌های تجربی مرجع برای محققین است تا مطالعات و مدل‌های خود را با نتایج تجربی اعتبارسنجی کنند.

بی‌یر و همکاران [22] دو مجموعه آزمایش را برای بررسی رفتار گمانه در کارکرد 50 ساعته سیستم انجام داده‌اند. در مجموعه آزمایش اول گمانه 50 ساعت به صورت مداوم کار می‌کند (آزمایش بدون تداخل). ولی در آزمایش دوم سیستم دو ساعت در زمان بین 9-11 ساعت خاموش می‌شود و دوباره روشن می‌شود (آزمایش با تداخل).

بی‌یر و همکاران به مقادیر بعضی از خواص ترموفیزیکی اشاره‌ای نکرده‌اند. اما این خواص در مرجع [23] به صورت کامل آمده است. به همین دلیل در مطالعه حاضر از این خواص برای اعتبارسنجی نتایج تجربی و تحلیلی استفاده خواهد شد.

خواص ترموفیزیکی مواد مورد استفاده در مطالعه تجربی بی‌یر و همکاران در جدول 1 و مشخصات هندسی نیز در جدول 2 آمده است.





**Fig. 9** Comparisons of the present method and uninterrupted test measurements in 200 first minutes operation.

شکل 9 مقایسه دمای خروجی حل تحلیلی حاضر با آزمایش بدون تداخل در 200 دقیقه اول کارکرد سیستم

جدول 3 مقایسه نتایج حل تحلیلی حاضر با مدل‌های تحلیلی دیگر

**Table 3** comparison of present analytical method against other research

	$t = 200$ (min)		$t = 3000$ (min)	
	$Q_f$	Diff %	$Q_f$	Diff %
تجربی [22]	1037.5	-	1050.0	-
حل حاضر	988.9	4.69	999.6	4.80
تحلیلی [15]	786.3	24.22	781.2	25.60
تحلیلی [14]	729.5	29.69	806.4	23.20

تحلیلی حاضر و نتایج تجربی در هر دو زمان مورد بررسی کمتر از 5 درصد است در حالی که این مقدار برای حل‌های لامارچ و بیوچمپ [14] و جاود و کلاسون [15] بالاتر از 20 درصد می‌باشد. جدول 3 نشان می‌دهد که مدل تحلیلی حاضر با دقت بالاتری نسبت به مدل تحلیلی دیگر انتقال حرارت انتقالی بین زمین و سیال را برآورد می‌کند.

در شکل 10 نتایج حل تحلیلی حاضر و داده‌های تجربی برای کل زمان مورد بررسی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. مشاهده می‌شود که در کل زمان کارکرد سیستم، داده‌های تجربی و حل تحلیلی تطابق بسیار خوبی باهم دارند. مقدار متوسط زمانی اختلاف نسبی در کل زمان مورد بررسی برابر با عدد 7.3 درصد است.

مجموعه آزمایش دوم بی‌یر و همکاران [22] آزمایش با تداخل است. در این آزمایش، سیستم در بازه زمانی 9-11 ساعت خاموش می‌شود. بعد از 11 دوباره روشن می‌شود. برای این حالت نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر و داده‌های تجربی در شکل 11 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالت باتداخل نیز تطابق خوبی بین نتایج تجربی و تحلیلی حاضر در زمان روشن بودن سیستم وجود دارد. اما در زمان خاموشی داده‌های تجربی اندکی با نتایج تحلیلی اختلاف دارند. در مرجع [22] اشاره نشده است که ترموکوپل در چه فاصله شعاعی از محور لوله قرار گرفته است و تا چه اندازه می‌تواند معرف دمای بالک سیال در داخل لوله باشد. این امر می‌تواند علت خطا در

روابط (40 تا 44) در مطالعه لامارچ و بیوچمپ [14] و روابط (21-26) در مطالعه جاود و کلاسون [15] برای محاسبه تابع پاسخ استفاده شده است. شکل 8 تغییرات دما و دبی جرمی ورودی به مبدل حرارتی گمانه را در مطالعه تجربی بی‌یر و همکاران [22] برای آزمایش بدون تداخل نشان می‌دهد.

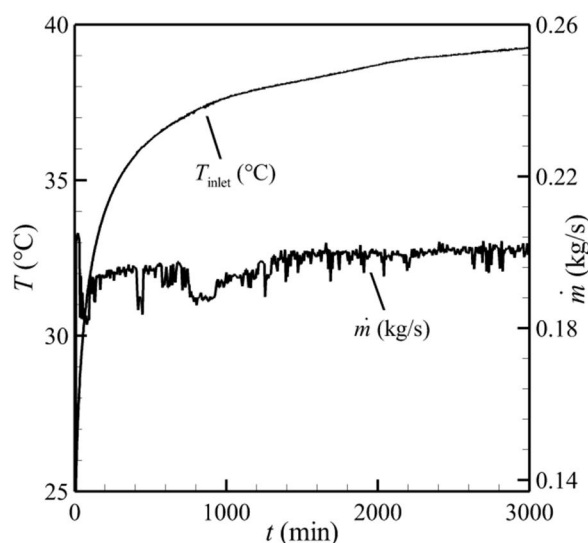
دما و دبی جرمی سیال ورودی به مبدل حرارتی گمانه، ورودی‌های مسئله می‌باشند. در نهایت هدف به دست آوردن خروجی مسئله یعنی دمای سیال خروجی از گمانه به ازای این ورودی‌ها است.

در شکل 9 دمای سیال خروجی محاسبه شده توسط مدل تحلیلی حاضر، مدل تحلیلی لامارچ و بیوچمپ [14]، مدل تحلیلی جاود و کلاسون [15] و داده‌های تجربی بی‌یر و همکاران [22] نشان داده شده است. در شکل 9 برای بررسی دقیق‌تر تغییرات در زمان‌های اولیه کارکرد، فقط 200 دقیقه اولیه کارکرد سیستم نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 9 مشاهده می‌شود، نتایج حل تحلیلی حاضر تطابق بسیار خوبی با مقادیر تجربی حتی در زمان‌های اولیه دارد. حل تحلیلی حاضر نتایج بهتری نسبت به مدل‌های تحلیلی لامارچ و بیوچمپ [14] و جاود و کلاسون [15] می‌دهد. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد مدل‌های تحلیلی لامارچ و بیوچمپ [14] و جاود و کلاسون [15] از فرض قطر معادل استفاده کرده‌اند که این فرض تاثیر هندسه واقعی گمانه را در نظر نمی‌گیرد و باعث خطا در نتایج می‌شود.

در جدول 3 اختلاف نسبی مقدار انتقال حرارت تجربی و تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته است. اختلاف نسبی بین نتایج حل تحلیلی حاضر و نتایج عددی به صورت رابطه (54) تعریف شده است

$$\text{Diff \%} = \frac{Q_{f,\text{Analytical}} - Q_{f,\text{Experimental}}}{Q_{f,\text{Experimental}}} \times 100 \quad (54)$$

در پمپ‌های حرارتی مساله اصلی مقدار انتقال حرارت تبادل شده بین زمین و سیال اهمیت دارد و به همین دلیل در جدول 3 مقدار انتقال حرارت انتقالی بین زمین و سیال در مدل‌های تحلیلی و تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است. مقایسه بین نتایج تجربی و تحلیلی در دو زمان 200 دقیقه و 3000 دقیقه انجام گرفته است. مشاهده می‌شود که اختلاف نسبی بین نتایج حل



**Fig. 8** Inlet fluid temperature and mass flow rate variation in experimental tests of Beier et al. [22]

شکل 8 دمای و دبی سیال ورودی به گمانه در مطالعه تجربی بی‌یر و همکاران [22]

#### 4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل تحلیلی جدیدی برای بررسی انتقال حرارت در مبدل حرارتی گمانه برای بازه زمانی کوتاه ارائه شد. حل تحلیلی در دو مرحله توسعه داده شده است. در مرحله اول یک حل تحلیلی برای محاسبه تابع  $G$  پاسخ بازه زمانی کوتاه (تابع  $G$ ) ارائه شد. در مرحله دوم با استفاده از تابع  $G$  نحوه محاسبه دمای سیال خروجی از مبدل بیان شده است. در این قسمت معادلات هم در حالت روشن بودن سیستم و هم در حالت خاموشی ارائه شده‌اند.

در نهایت نتایج حل تحلیلی با نتایج تجربی و سایر مدل‌های تحلیلی مقایسه شده است. با مقایسه‌ای که از جواب‌های مدل جدید با مطالعه تجربی صورت گرفت، همخوانی بسیار خوبی بین جواب‌های مدل حاضر و کار تجربی مشاهده شد. همچنین نتایج نشان دهد که مدل حاضر بهتر از سایر مدل‌های تحلیلی دمای خروجی از مبدل و مقدار گرمای انتقال یافته بین زمین و سیال را برآورد می‌کند.

مهمترین مزیت مدل تحلیلی جدید این است که به ازای توابع زمانی متفاوت دمای و دبی ورودی به مبدل قادر است دمای خروجی سیال از مبدل را با دقت قابل قبولی محاسبه نماید. به همین دلیل این مدل می‌تواند در بررسی دینامیکی سیستم‌های پمپ حرارتی استفاده شود.

#### 5- فهرست علائم

$A$	سطح مقطع (m)
$B$	بردار معلومات
$C$	ظرفیت حرارتی
$c_p$	گرمای ویژه در فشار ثابت ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
Diff	اختلاف مقدار انتقال حرارت تجربی و تحلیلی (%)
$ff$	ضریب تصحیح
$Fo$	عدد فوریه
$G$	تابع پاسخ زمانی
$H$	طول مبدل (m)
$h$	ضریب جابجایی ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ )
$k$	ضریب هدایت حرارتی ( $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
$M$	ماتریس ضرایب
$\dot{m}$	دبی جرمی ( $\text{kgs}^{-1}$ )
$Pr$	عدد پراوتل
$q$	نرخ انتقال حرارت بر واحد طول لوله ( $\text{Wm}^{-1}$ )
$Q$	نرخ انتقال حرارت (W)
$R$	مقاومت حرارتی ( $\text{mKW}^{-1}$ )
$r$	شعاع (m)
$Re$	عدد رینولدز
$T$	دما (K)
$t$	زمان (min)
$x_c$	فاصله مرکز لوله-مرکز گمانه
$z$	مشخصه طول در راستای عمق گمانه (m)

#### علائم یونانی

$\alpha$	ضریب نفوذ حرارتی ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )
$\beta$	عامل انتگرال‌گیری (m)

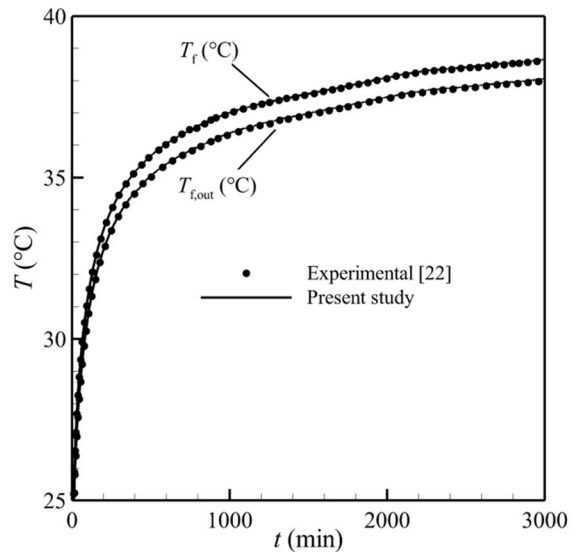


Fig. 10 Comparisons of the present method and uninterrupted test measurements in all operation times.

شکل 10 مقایسه دمای خروجی حل تحلیلی حاضر با آزمایش بدون تداخل در کل زمان کارکرد سیستم

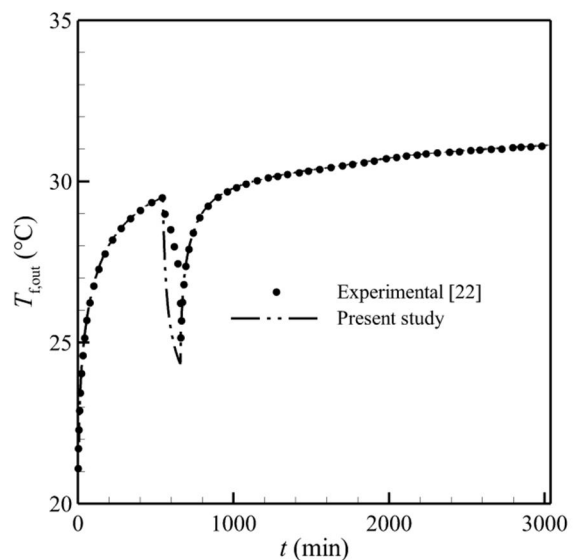


Fig. 11 Comparisons of the present method and interrupted test measurements in all operation times.

شکل 11 مقایسه دمای خروجی حل تحلیلی حاضر با آزمایش با تداخل در کل زمان کارکرد سیستم

حالت خاموشی باشد. البته ذکر این نکته هم ضروری است که برای شبیه‌سازی مبدل حرارتی زمینی، دقیق بودن دمای خروجی در زمان روشن بودن سیستم مهم است و در زمان خاموش بودن سیستم، به علت عدم جریان سیال در داخل مبدل اهمیتی ندارد.

مشاهده می‌شود که حل حاضر چه در حالت کارکرد پیوسته و چه در حالت کارکرد منقطع (روشن-خاموش) به خوبی رفتار حرارتی گمانه را پیش‌بینی می‌کند. از طرف دیگر همان‌طور که در این مقاله اشاره شد این مدل می‌تواند تا دوره‌ی زمانی یک ساله استفاده شود. به همین دلیل مدل فوق می‌تواند در بررسی رفتار دینامیکی مبدل‌های حرارتی گمانه به کار رود.

- [6] A. Zarrella, M. Scarpa, M. De Carli, Short time step analysis of vertical ground-coupled heat exchangers: The approach of CaRM, *Renewable Energy*, Vol. 36, No. 9, pp. 2357–2367, 2011.
- [7] D. Bauer, W. Heidemann, H. Mu, H. G. Diersch, Thermal resistance and capacity models for borehole heat exchangers, *International Journal of Energy Research*, Vol. 35, No. 4, pp. 312–320, 2011.
- [8] D. Bauer, W. Heidemann, H.-J. G. Diersch, Transient 3D analysis of borehole heat exchanger modeling, *Geothermics*, Vol. 40, No. 4, pp. 250–260, 2011.
- [9] P. ESKILSON, *Thermal Analysis of Heat Extraction Boreholes*, PhD Thesis, University of Lund, Lund, Sweden, 1987.
- [10] C. Yavuzturk, A short time step response factor model for vertical ground loop heat exchangers, *ASHRAE Transactions*, Vol. 105, No. 2, pp. 475–485, 1999.
- [11] L. Ingersoll, H. J. Plass, Theory of the ground pipe source for the heat pump, *ASHRAE Transactions*, Vol. 54, pp. 339–348, 1948.
- [12] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*. Oxford UK: Clarendon Press, 1946.
- [13] H. Y. Zeng, N. R. Diao, Z. H. Fang, A finite line-source model for boreholes in geothermal heat exchangers, *Heat Transfer Asian Research*, Vol. 31, No. 7, pp. 558–567, 2002.
- [14] L. Lamarche, B. Beauchamp, New solutions for the short-time analysis of geothermal vertical boreholes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 7, pp. 1408–1419, 2007.
- [15] S. Javed, New analytical and numerical solutions for the short-term analysis of vertical ground heat exchangers, *ASHRAE Transactions*, Vol. 117, No. 1, pp. 3–12, 2011.
- [16] G. Bandyopadhyay, W. Gosnold, M. Mann, Analytical and semi-analytical solutions for short-time transient response of ground heat exchangers, *Energy and Buildings*, Vol. 40, No. 10, pp. 1816–1824, 2008.
- [17] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt, *Fundamentals of heat and mass transfer*, Seventh Edition, pp. 518–567, United States of America: John Wiley & Sons, 2011.
- [18] M. Wetter, A. Huber, *Vertical borehole heat exchanger EWS Model, TRNSYS type 451*, 1997.
- [19] L. Lamarche, S. Kajl, B. Beauchamp, A review of methods to evaluate borehole thermal resistances in geothermal heat-pump systems, *Geothermics*, Vol. 39, No. 2, pp. 187–200, 2010.
- [20] J. Bennet, J. Claesson, G. Hellström, Multipole method to compute the conductive heat flows to and between pipes in a composite cylinder, *Notes on Heat Transfer*, 1987.
- [21] D. Hahn, M. Ozisik, *Heat conduction*, pp. 273–299, New Jersey: John Wiley & Sons, 1993.
- [22] R. a. Beier, M. D. Smith, J. D. Spitler, Reference data sets for vertical borehole ground heat exchanger models and thermal response test analysis, *Geothermics*, Vol. 40, No. 1, pp. 79–85, 2011.
- [23] P. Pasquier, D. Marcotte, Joint use of quasi-3D response model and spectral method to simulate borehole heat exchanger, *Geothermics*, Vol. 51, pp. 281–299, 2014.

$\theta$  پارامتر اختلاف دما (K)  
 $\rho$  چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )

#### زیرنویس‌ها

b دیوار گمانه  
 cond هدایت  
 conv جابجایی  
 f1 سیال در لوله رفت  
 f2 سیال در لوله برگشت  
 ff سیال - سیال  
 fg سیال - دوغاب  
 G خاک خیلی دور از گمانه  
 g دوغاب  
 gb دوغاب - دیوار گمانه  
 in ورودی  
 mean متوسط  
 out خروجی  
 pi دیوار داخلی لوله  
 po دیوار خارجی لوله  
 St بازه زمانی کوتاه

#### 6- مراجع

- [1] L. Lamarche, B. Beauchamp, A new contribution to the finite line-source model for geothermal boreholes, *Energy and Buildings*, Vol. 39, No. 2, pp. 188–198, 2007.
- [2] S. J. Rees, M. He, A three-dimensional numerical model of borehole heat exchanger heat transfer and fluid flow, *Geothermics*, Vol. 46, pp. 1–13, 2013.
- [3] G. Heidarinejad, V. Khalajzadeh, S. Delfani, Performance analysis of a ground-assisted direct evaporative cooling air conditioner, *Building and Environment*, Vol. 45, No. 11, pp. 2421–2429, 2010.
- [4] R. Al-Khoury, T. Kölbl, R. Schramedei, Efficient numerical modeling of borehole heat exchangers, *Computers & Geosciences*, Vol. 36, No. 10, pp. 1301–1315, 2010.
- [5] M. De Carli, M. Tonon, A. Zarrella, R. Zecchin, A computational capacity resistance model (CaRM) for vertical ground-coupled heat exchangers, *Renewable Energy*, Vol. 35, No. 7, pp. 1537–1550, 2010.