



## مدل سازی میکرومکانیکی سه بعدی ظرفیت میرایی نانوکامپوزیت های پلیمری تقویت شده با نانوالیاف

محمد جواد محمودی<sup>1\*</sup>، محمد وکیلی فرد<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران  
2- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران  
\*تهران، صندوق پستی 167651719، mj\_mahmoudi@sbu.ac.ir

### چکیده

در این پژوهش یک روش تحلیلی سه بعدی برای پیش بینی خواص دینامیکی نانوکامپوزیت های پلیمری ارائه می شود. در این روش با اعمال اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک بر تئوری میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده و با استفاده از روش انرژی و تعادل نیرو، مدول ذخیره، مدول اتلاف، فاکتور اتلاف و حلقه هیستریزس نانوکامپوزیت های پلیمری استخراج می شود. نانوکامپوزیت در نظر گرفته شده دارای زمینه پلی پروپیلن تقویت شده با نانوالیاف کربن رشد یافته در فاز بخار می باشد. المان حجمی نماینده دارای سه فاز ایزوتروپ شامل الیاف، فاز میانی و زمینه با رفتار ویسکوالاستیک خطی بر اساس مدل زنر است. همچنین با ارائه روش تبدیل فوریه و مدل شیبری خواص دینامیکی اجزاء نانوکامپوزیت در حوزه فرکانس استخراج می گردد. ابتدا نتایج بدست آمده از مدل حاضر با نتایج تجربی، جهت اعتبارسنجی مقایسه می گردد. سپس اثر پارامترهایی نظیر تعداد زیرسلول ها، کسر حجمی و نسبت منظر الیاف، فاکتور قدرت پیوند بین الیاف و زمینه و فاکتور اتلاف فاز میانی بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت بررسی می شود. نتایج بدست آمده، نشان می دهند که روش ارائه شده از سرعت و دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین افزایش نسبت منظر و کسر حجمی الیاف باعث کوچک تر شدن حلقه هیستریزس نانوکامپوزیت می شود، لذا ظرفیت میرایی آن کاهش می یابد. فاز میانی نیز تأثیر قابل توجهی بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت دارد، لذا مدل سازی آن اهمیت بالایی دارد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 19 تیر 1395  
پذیرش: 22 مرداد 1395  
ارائه در سایت: 29 شهریور 1395  
کلید واژگان:  
نانوکامپوزیت پلیمری  
ظرفیت میرایی  
میکرومکانیک

## Three dimensional micromechanical modeling of damping capacity of nano fiber reinforced polymer nanocomposites

Mohammad Javad Mahmoodi\*, Mohammad Vakilifard

Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.  
\* P.O.B. 167651719 Tehran, Iran, mj\_mahmoudi@sbu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 09 July 2016  
Accepted 12 August 2016  
Available Online 19 September 2016

Keywords:  
Polymer Nanocomposites  
Damping capacity  
Micromechanics

### ABSTRACT

In this research, a three dimensional analytical method is presented for predicting the dynamic properties of polymer nanocomposites. In the present method elastic-viscoelastic correspondence principle is applied on the simplified method of cell, and loss modulus, storage modulus, loss factor and Hysteresis loop are obtained using energy method as well as force balance method. The considered nanocomposite possesses Polypropylene as a matrix reinforced by vapor grown carbon fibers. The representative volume element consists of three isotropic phases including fiber, interphase and matrix with linear viscoelastic behavior based on Zener model. Furthermore, the nanocomposite constituents dynamic properties are extracted in frequency domain by employing Fourier transform method and Schapery model. First, to ensure validation of the model, the results are compared with experimental results. Parametric studies such as the effects of number of subcells, fibers volume fraction (FVF) and aspect ratio, matrix/fiber link strength factor and interphase loss factor on the nanocomposite dynamic properties are investigated. Obtained results reveal that the presented method has acceptable speed and accuracy. Moreover, fiber aspect ratio and FVF increasing leads to decreasing the nanocomposite hysteresis loop area, subsequently its damping capacity reduces. Interphase also contains considerable effects on the nanocomposite dynamic properties, so its modeling is of great importance.

### 1- مقدمه

ایجاد می کند [1]. انواع سیستم های دینامیکی در سازه های نظامی و عمرانی مستعد حرکت های ارتعاشی می باشند و این ارتعاشات در زمانی که سیستم به شرایط تشدید و ناپایداری آتروالاستیک نزدیک می شود، افزایش می یابند [2]. لذا نیاز به موادی که در عین استحکام بالا، ظرفیت میرایی قابل توجهی نیز

اعمال بارهای دینامیکی و ناگهانی بر سازه ها می تواند منجر به ارتعاشاتی شود که اثرات مخرب بیشماری مانند، نویز بالا، خستگی، فرسایش سطح<sup>1</sup> در سازه

<sup>1</sup> Premature wear

Please cite this article using:

M. J. Mahmoodi, M. Vakilifard, Three dimensional micromechanical modeling of damping capacity of nano fiber reinforced polymer nanocomposites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 257-266, 2016 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

منجر به ماکزیمم استحکام نمی‌شود [6]. لذا بسته به طراحی مورد نیاز، باید یک حالت بهینه بین استحکام و ظرفیت میرایی انتخاب شود.

مدل‌های میرایی کامپوزیت‌ها بر آمده از مدل‌های پیشنهاد شده برای مواد ویسکوالاستیک می‌باشند. همه‌ی مواد تا حدی رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند و چنین رفتاری معمولاً وابسته به شرایط محیطی مانند دما است. هنگامی که دما تا نیمی از دمای ذوب ماده افزایش یابد اثرات ویسکوالاستیک ظاهر می‌شوند. مواد پلیمری در دمای اتاق رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند [7]. ساده‌ترین مدل‌های نمایش میرایی، استفاده از مدل‌های خطی مواد ویسکوالاستیک مانند، کلونین-ویت<sup>6</sup>، ماکسول<sup>7</sup> و زنر<sup>8</sup> است. مزیت این مدل‌ها در تعداد کم پارامترهای مورد نیاز برای مشخص کردن رفتار مواد ویسکوالاستیک می‌باشد. لذا به علت سهولت، از این مدل‌ها در نرم‌افزارهای المان محدود بهره‌گیری می‌شود [5].

تحلیل میرایی ارتعاشات مواد ویسکوالاستیک در حوزه‌ی فرکانس منجر به استفاده از تبدیل فوریه و در نتیجه مدول مختلط می‌شود. تشابه بین روابط تنش- کرنش مواد ویسکوالاستیک در حوزه‌ی فرکانس و مواد الاستیک خطی بیانگر اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک<sup>9</sup> است [15]. ابتدایی‌ترین پژوهش‌ها در مورد مدول مختلط و ارتباط آن با میرایی توسط نیومارک در سال 1962 انجام گرفت [16]. او از سختی مختلط برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری استفاده کرد. هشین مدول مختلط مواد ویسکوالاستیک غیر همگن را با استفاده از اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار داد [17,18]. کاربرد ویژه‌ی اصل همخوانی برای تحلیل ویسکوالاستیک کامپوزیت‌ها توسط شیپری [19,20] به تفصیل بررسی شده است. هالپین و سای [21] با استفاده از اصل همخوانی، رابطه‌ای برای مدول‌های عرضی و برشی جهت پیش‌بینی ضرایب میرایی برای کامپوزیت‌های الاستیک-ویسکوالاستیک ارائه دادند. سای [22] رابطه‌ای بر اساس الاستیسیته و مدول‌های عرضی اصلاح‌شده‌ی کامپوزیت با آرایش منظم و بر اساس اتصال کامل بین الیاف و زمینه، پیشنهاد داد.

یکی از عوامل بسیار تاثیر گذار بر خواص نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌ی کربن، وجود ناحیه‌ی فاز میانی بین فاز تقویت کننده و زمینه در کامپوزیت‌های چند فازی است. این فاز واسط، لایه نازکی بین تقویت کننده و زمینه می‌باشد که به طور عمده به دلیل واکنش‌های شیمیایی پیچیده بین فاز تقویت کننده و زمینه به وجود می‌آید [23]. در ابعاد نانو، درصد حجمی فاز میانی قابل توجه است. به طوری که در یک نانوکامپوزیت وجود تنها 1 درصد کسر حجمی ذرات نانو با اندازه‌ی 2nm، منجر به اشغال 63 درصد فضای ماده توسط فاز میانی می‌شود [11]. لذا اثرات عمده‌ای بر پاسخ کل نانوکامپوزیت دارد. محققین بسیاری به بررسی اثر ناحیه فاز واسط بر روی خواص نانوکامپوزیت پرداختند که برخی از آن‌ها در [24-26] آمده است.

به وسیله مدل‌سازی‌های میکرومکانیکی، خواص ماکروسکوپی مواد چندجنسی که ذاتاً تابعی از برهم‌کنش‌های میکرووی از ریزساختارهای تشکیل‌دهنده آن ماده است، حاصل می‌شود. از ابتدایی‌ترین و ساده‌ترین این مدل‌ها، می‌توان به مدل‌های ویت<sup>10</sup> و روس<sup>11</sup> اشاره کرد، که معادل اعمال قانون مخلوط‌ها<sup>12</sup> به ترتیب بر تانسور سختی و نرمی اجزای سازنده‌ی

داشته باشند ضروری به نظر می‌رسد. به طور طبیعی همه مواد دارای ظرفیت میرایی ذاتی هستند [3]. فلزات بر خلاف دارا بودن استحکام بالا، ظرفیت میرایی پایینی دارند لذا برای استفاده از آن‌ها تحت بارگذاری‌های ارتعاشی، نیاز به استفاده از میراگرهای فعال و یا غیر فعال می‌باشد [3]. میراگرهای غیر فعال شامل اضافه کردن ماده‌ی جدید با ظرفیت میرایی بالا است. در حالی که میراگرهای فعال بر اساس استفاده از سنسورها و عملگرهای مکانیکی<sup>1</sup> برای شناسایی و کنترل ارتعاشات می‌باشد [4].

کامپوزیت‌ها گزینه‌ی مناسبی برای میراگرهای غیر فعال می‌باشند و مورد توجه بسیاری از صنایع قرار گرفته‌اند [5]. در بین کامپوزیت‌ها، به علت هزینه‌های کمتر و خواص میرایی بیشتر، اکثر پژوهش‌های انجام شده، در مورد کامپوزیت‌های زمینه پلیمری، صورت گرفته است [5]. ظرفیت میرایی کامپوزیت‌های زمینه پلیمری می‌تواند چندین برابر مواد معمولی باشد، و علت اصلی این امر ویسکوالاستیسیته‌ی زمینه‌ی پلیمری است [5]. استفاده از نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی که فاز تقویت آن در مقیاس نانومتری است، منجر به ایجاد نانوکامپوزیت‌ها می‌شود. یکی از انواع تقویت کننده‌هایی که در نانوکامپوزیت‌ها استفاده می‌گردد، الیاف کربن رشد یافته در بخار<sup>2</sup> (VGCF) می‌باشند. این نوع الیاف طبقه‌ی جدایی از نانوالیاف هستند که از دیگر انواع نانوالیاف کربن در روش تولید، خواص فیزیکی و هزینه ساخت پایین، متفاوتند [6]. در نانوکامپوزیت‌ها، به علت استفاده از تقویت کننده‌های در ابعاد نانو و افزایش سطح تماس بین فازهای تقویت کننده و زمینه و در نتیجه لغزش همراه با اصطکاک نانوالیاف [7]، ظرفیت میرایی افزایش می‌یابد. تغییر شکل پلاستیک عامل اصلی پراکندگی انرژی در نانوکامپوزیت‌هاست [3].

پژوهش‌های مختلفی جهت پیش‌بینی میرایی کامپوزیت‌ها و نانوکامپوزیت‌ها انجام شده است. در [8,9] لغزش لایه‌میانی<sup>3</sup> در کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کوتاه بررسی شده است، و این نتیجه حاصل شد که هرچه اتصال بین الیاف و زمینه ضعیف‌تر باشد، به علت حرکت نسبی الیاف، میرایی ماده افزایش می‌یابد. لذا خرابی‌هایی مانند جدایی بین‌لایه‌ای<sup>4</sup> و یا جدایی الیاف و زمینه<sup>5</sup>، منجر به افزایش ظرفیت میرایی این نوع کامپوزیت‌ها می‌شود. در [10] با استفاده از ظرفیت میرایی ویژه همچنین با روش سلولی پیشنهاد شده توسط ابودی، ماتریس میرایی بر حسب ظرفیت میرایی ویژه برای کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با الیاف کربن بدست آمد. پاتل و همکاران [11]، نیز با استفاده از روش سلولی، ظرفیت میرایی نانوکامپوزیت‌ها با زمینه ویسکوالاستیک و با شرایط مرزی متناوب را بر حسب تابعی از فرکانس بدست آوردند. یدالله‌پور و همکاران [1,3] ظرفیت میرایی نانوکامپوزیت‌ها را به صورت عددی و تجربی بررسی کردند. سان و همکاران [12] یک مدل تحلیلی بر اساس تعادل نیرویی برای تخمین میرایی، در کامپوزیت زمینه پلیمری ارائه دادند. همچنین در پژوهشی دیگر، مطالعه‌ی فوق بر اساس مدل‌های المان محدود نیز برای پیش‌بینی میرایی داخلی نیز انجام گرفت [13]. آن‌ها به طور تحلیلی نشان دادند که یک نسبت منظر بهینه و یک جهت‌گیری بهینه برای الیاف در راستای رسیدن به میرایی بیشینه وجود دارد. افزایش ظرفیت میرایی کامپوزیت‌ها در اثر استفاده از الیاف با نسبت منظر کم (کمتر از 20) توسط محققین متعددی به اثبات رسیده است [10,14]. هر چند که ماکزیمم میرایی در یک کامپوزیت لزوماً

<sup>6</sup> Kelvin-Voigt

<sup>7</sup> Maxwell

<sup>8</sup> Zener

<sup>9</sup> Elastic-viscoelastic correspondence principle

<sup>10</sup> Voigt

<sup>11</sup> Reuss

<sup>12</sup> Rule of mixtures

<sup>1</sup> Actuators

<sup>2</sup> Vapor grown carbon fibers

<sup>3</sup> Interfacial slip

<sup>4</sup> Delamination

<sup>5</sup> Debonding

اعتبارسنجی مقایسه می‌گردد. اثر پارامترهایی نظیر تعداد زیرسلول های المان حجمی نماینده، کسر حجمی و نسبت منظر الیاف، فاکتور قدرت پیوند بین الیاف و زمینه و فاکتور اتلاف فاز میانی بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت‌ها بررسی می‌شود. همچنین با ارائه روش فوریه و مدل شیپری خواص دینامیکی اجزاء نانوکامپوزیت در حوزه فرکانس استخراج می‌گردد.

## 2- ملاحظات مدل سازی میرایی

در این بخش ابتدا روابط ساختاری مواد ویسکوالاستیک در حوزه فرکانس ارائه می‌شوند، سپس نحوه بدست آوردن مدول ذخیره و فاکتور اتلاف این نوع مواد بررسی می‌گردد.

### 1-2 مدل سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی و مدول مختلط

در این تحقیق از مدل زنر جهت بیان رفتار ویسکوالاستیک زمینه نانو کامپوزیت استفاده می‌شود. در مدل زنر یا جامد خطی استاندارد<sup>8</sup>، یک فنر با ضریب  $k_1$  و یک میراگر با ضریب  $\mu_1$  سری با یک فنر دوم با ضریب  $k_0$  موازی شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر این مدل به صورت رابطه (1) است [40].

$$\sigma + \frac{\mu_1}{k_1} \frac{d\sigma}{dt} = k_0 \varepsilon + \frac{\mu_1}{k_1} (k_0 + k_1) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1)$$

با انتگرال گیری از رابطه (1)، نرمی خزشی  $S$  و مدول رهاسازی  $C$  مدل زنر به صورت رابطه (2) بدست می‌آید.

$$S(t) = \frac{1}{k_0} \left( 1 - \frac{k_1}{k_0 + k_1} e^{-t/\lambda_1} \right) \quad (2)$$

$$C(t) = k_0 + k_1 e^{-t/\tau_1}$$

که در رابطه (2)،  $\lambda_1$  و  $\tau_1$  به ترتیب زمان تأخیر و زمان رهاسازی<sup>10</sup> نام گذاری و در رابطه (3) تعریف می‌شوند.

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 (k_0 + k_1)}{k_0 k_1}, \quad \tau_1 = \frac{\mu_1}{k_1} \quad (3)$$

مدل های خطی مواد ویسکوالاستیک نمی‌توانند به خوبی رفتار این گونه مواد را توصیف کنند، اما مدل زنر با استفاده از سری پرونی<sup>11</sup> که میرایی را با جمع عبارات نمایی توصیف می‌نماید، بهبود پیدا می‌کند. با در نظر گرفته عبارات بیشتر، نتایج دقیق تری بدست خواهد آمد [5].

با در نظر گرفتن تنش هارمونیک با فرکانس زاویه ای  $\omega$ ، تنش مختلط را می‌توان به صورت رابطه (4) در نظر گرفت.

$$\sigma_n(t) = A_n e^{i\omega t} \quad (4)$$

که در رابطه (4)،  $n = 1, 2, \dots, 6$  و  $i = \sqrt{-1}$  می‌باشد.

معادله ی ساختاری سه بعدی ماده ی ویسکوالاستیک خطی با استفاده از اصل جمع آثار بولتزمن<sup>12</sup>، به صورت رابطه (5) است [40].

$$\varepsilon_m(t) = \int_{-\infty}^t S_{mn}(t - \tau) \frac{d\sigma_n(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (5)$$

که در رابطه (5)،  $m, n = 1, \dots, 6$ ، با جایگذاری رابطه (4) در (5) و با استفاده از تعریف تبدیل فوریه، رابطه تنش- کرنش را می‌توان به صورت روابط (6) نوشت.

$$\varepsilon_m(t) = i\omega S_{mn}(\omega) \sigma_n(t) = S_{mn}^*(\omega) \sigma_n(t) \quad (6)$$

$$\sigma_m(t) = i\omega C_{mn}(\omega) \varepsilon_n(t) = C_{mn}^*(\omega) \varepsilon_n(t)$$

که در رابطه (6)،  $S_{mn}(\omega)$  و  $C_{mn}(\omega)$  به ترتیب تبدیل فوریه نرمی

کامپوزیت است. هیچ کدام از این دو مدل دقت قابل قبولی ندارند اما هیل نشان داد که خواص واقعی کامپوزیت بین دو مقدار پیش‌بینی شده توسط این دو مدل است [27]. هشین و همکارش [28] توانستند یک ناحیه ی کوچکتري برای حد بالا و پایین خواص کامپوزیت بدست آورند. مدل دیگری به نام مدل خود سازگار<sup>1</sup> وجود دارد که ابتدایی ترین کارهای آن توسط هیل [29] انجام شده است. تخمین خواص معادل کامپوزیت‌ها با دقتی قابل قبول، با مدل مری و تاناکا [30] آغاز شد. البته این مدل در مواقعی که حجم ماتریس در نظر گرفته شده نسبت به حجم تقویت کننده بسیار بزرگ باشد، نتایج قابل قبولی را می‌دهد [27]. مدل‌های عددی نیز برای بدست آوردن خواص معادل کامپوزیت‌ها استفاده شده‌اند، که می‌توان به روش‌های المان محدود، تفاضل محدود و المان مرزی اشاره کرد. ابتدایی ترین کارها در روش المان محدود توسط فوی [31] انجام شده است. روش‌های عددی هر چند که از دقت بالاتری نسبت به روش‌های تحلیلی برخوردارند اما هزینه ی محاسباتی بسیاری بالاتری دارند. تمام مدل‌های تحلیلی ذکر شده برای بعضی از خواص کامپوزیت و همچنین در حالت‌های غیر الاستیک دقت قابل قبولی ندارند [27]. مدل سلول واحد<sup>2</sup> از جمله مدل‌های میکرومکانیکی تحلیلی با فرضیات ساده شونده ی هندسه کامپوزیت‌ها می‌باشد. این مدل علاوه بر اینکه معایب مدل‌های پیشین را ندارد، دارای ریاضیات ساده و بر پایه مقاومت مصالح است که پارامترهای سطح میکرو به‌سادگی در آن مدل می‌شوند و در عین حال نتایج خوبی در مقایسه با نتایج تجربی داده است [27]. در مدل‌های سلول واحد، سطح مقطع المان حجمی نماینده<sup>3</sup> کامپوزیت، شامل الیاف مستطیلی احاطه شده با مواد زمینه به صورت مستطیلی می‌باشد. روش سلولی<sup>4</sup> [33,32] و روش سلولی تعمیم یافته<sup>5</sup> [35,34] جزء معروف ترین مدل‌های سلول واحد هستند. مدل سلول واحد ساده شده<sup>6</sup> [36] یک مدل تحلیلی میکرومکانیکی است. دقت پاسخ این مدل میکرومکانیکی بستگی به مدل سازی دقیق فازها و عکس‌العمل بین آن‌ها در المان حجمی انتخاب شده برای کامپوزیت خواهد داشت. قابلیت کاربرد این مدل در پیش‌بینی رفتار کامپوزیت‌های دو فازی تحت شرایط مختلف بارگذاری با توجه به اعتبارسنجی‌های انجام گرفته با داده‌های تجربی و روش‌های عددی، به اثبات رسیده است [37]. همچنین این مدل جهت بررسی خرابی در کامپوزیت‌های با الیاف بلند دو فازی [38] و بررسی خواص کامپوزیت با الیاف کوتاه<sup>7</sup> [39] مورد استفاده قرار گرفته است.

در پژوهش حاضر یک روش تحلیلی سه بعدی برای پیش‌بینی خواص دینامیکی نانوکامپوزیت‌های پلیمری ارائه می‌شود. در این روش با اعمال اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک بر تئوری میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده و با استفاده از روش انرژی و تعادل نیرو، مدول ذخیره، مدول اتلاف، فاکتور اتلاف و حلقه ی هیستریزس نانوکامپوزیت‌های پلیمری، استخراج می‌شود. نانوکامپوزیت در نظر گرفته شده دارای زمینه پلی‌پروپیلن تقویت شده با VGCF می‌باشد. المان حجمی نماینده دارای سه فاز ایزوتروپ شامل زمینه، فاز میانی و الیاف با رفتار ویسکوالاستیک خطی است. مدل زنر با استفاده از اصل جمع آثار بولتزمن برای بیان رفتار ویسکوالاستیک استفاده می‌شود. ابتدا نتایج بدست آمده از مدل حاضر با نتایج تجربی، جهت

<sup>1</sup> Self-consistent model

<sup>2</sup> Unit cell model

<sup>3</sup> Representative volume element

<sup>4</sup> Method of cell

<sup>5</sup> Generalized method of cell

<sup>6</sup> Simplified unit cell model

<sup>7</sup> Short fiber

<sup>8</sup> Standard linear solid

<sup>9</sup> Delay time

<sup>10</sup> Relaxation time

<sup>11</sup> Prony series

<sup>12</sup> Boltzmann superposition integral

سازنده نانوکامپوزیت می باشد. روش اول موسوم به روش تعادل نیرو است، که در این روش با اعمال اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک بر تئوری الاستیسیته می توان میرایی نانوکامپوزیت را تعیین نمود [7]. روش دیگر روش انرژی است. این روش نانوکامپوزیت را به صورت یک سیستم با المان های ویسکوالاستیک خطی در نظر می گیرد. هر المان دارای فاکتور اتلاف مربوط به خود می باشد. فاکتور اتلاف نانوکامپوزیت طبق رابطه (10) تعیین می شود [7].

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \eta^i W^i}{\sum_{i=1}^n W^i} \quad (10)$$

که  $\eta^i$  فاکتور اتلاف هر المان و  $W^i$  انرژی کرنشی ذخیره شده در هر المان می باشد، که طبق رابطه (11) تعیین می گردد.

$$W^i = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (11)$$

### 3- مدل میکرومکانیک استخراج میرایی

تحلیل نانوکامپوزیت با استفاده از روش سلول واحد ساده شده انجام می شود. در بیشتر مدل های تحلیلی و عددی، سطح مقطع کامپوزیت به صورت آرایش تکرار شونده و چیدمان الیاف درون زمینه به صورت مربعی می باشد. برای کاهش محاسبات و زمان تحلیل، کوچکترین بخش تکرار شونده که در عین حال جامع اطلاعات باشد را به عنوان المان حجمی نماینده در نظر گرفته می شود. در واقع تمام خواص و رفتار کامپوزیت و المان حجمی نماینده یکسان فرض می شوند. در مدل سه بعدی حاضر فرض می شود که الیاف، فاز میانی و زمینه کاملاً متصل به یکدیگر باشند.

به علت محدودیت ریاضیات مسأله، سطح مقطع هر یک از الیاف با وجود دایروی بودن، به صورت چهارگوش در نظر گرفته می شود، هم چنین چیدمان الیاف به صورت منظم لحاظ می گردد (شکل 2 [41]).

محور 1 در راستای الیاف انتخاب می گردد. الیاف، ترد و زمینه به صورت نرم با رفتار الاستیک-ویسکوپلاستیک در نظر گرفته، و هر دو، همگن و همسانگرد فرض می شوند. تغییرات جابجایی در داخل سلول های المان نماینده، خطی لحاظ می گردد. مکعب مستطیلی مانند شکل 3، با طول ضلع  $L_x$ ،  $L_y$  و  $L_z$  به ترتیب در جهات 1، 2 و 3 در نظر گرفته می شود و این اضلاع به ترتیب به  $c$  و  $r$  قسمت، تقسیم می گردند. متغیر شمارنده نیز به ترتیب با  $i$ ،  $k$  و  $j$  نشان داده می شود. هر سلول با نام  $ijk$  نام گذاری شده و طول هر یک در جهات 1، 2 و 3 به ترتیب با  $d_k$ ،  $a_i$  و  $b_j$  مشخص می گردد. سلول های با هسته مشکی و لایه ی خاکستری اطراف آن به ترتیب معرف فاز الیاف تقویت کننده و فاز میانی هستند. در مواد مرکب الیاف کوتاه، پارامتری برای الیاف تحت عنوان نسبت منظر  $(s)$  به صورت رابطه (12) تعریف می شود.

$$s = \frac{d_k}{a_i} \quad (12)$$

برای مدل سازی هر چه واقعی تر نانوکامپوزیت های تقویت شده با الیاف دارای سطح مقطع دایره ای شکل، می توان تغییراتی در هندسه المان حجمی نماینده ایجاد کرد. سطح مقطع مدل مربعی شامل یک چهارم رشته و

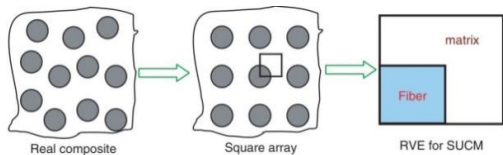


Fig. 2 Fiber arrangement and the representative volume element [41]

شکل 2 چیدمان الیاف در کامپوزیت و المان حجمی نماینده [41]

کرنشی و مدول رهاسازی در حوزه زمان می باشد. طبق رابطه (6) نرمی کرنشی و مدول رهاسازی مختلط در حوزه فرکانس به صورت روابط (7) بدست می آیند.

$$S_{mn}^*(\omega) = i\omega S_{mn}(\omega), \quad C_{mn}^*(\omega) = i\omega C_{mn}(\omega) \quad (7)$$

از آنجایی که مدول مختلط یک متغیر مختلط می باشد، می توان آن را به صورت بخش های حقیقی و موهومی همانند رابطه (8) نوشت.

$$C_{mn}^*(\omega) = C_{mn}'(\omega) + iC_{mn}''(\omega) \\ = C_{mn}'(\omega)[1 + i\eta_{mn}(\omega)] \\ = |C_{mn}^*(\omega)| e^{-i\delta_{mn}(\omega)} \quad (8)$$

که در رابطه (7)،  $C_{mn}'(\omega)$ ،  $C_{mn}''(\omega)$ ،  $\eta_{mn}(\omega)$  و  $\delta_{mn}(\omega)$  به ترتیب بیانگر مدول ذخیره، مدول اتلاف، فاکتور اتلاف و تأخیر فاز بین  $\sigma_m(t)$  و  $\epsilon_m(t)$  می باشند. روابط تنش کرنش (9) برای مواد ویسکوالاستیک خطی مشابه مواد الاستیک خطی می باشند. چنین شبیه سازی بین روابط ساختاری برای تحلیل مواد الاستیک و ویسکوالاستیک را اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک گویند [40].

$$\{\epsilon(t)\} = [S^*(\omega)]\{\sigma(t)\} \\ \{\sigma(t)\} = [C^*(\omega)]\{\epsilon(t)\} \quad (9)$$

### 2-2- حلقه های هیستریزس

برای یک تنش اعمالی که به صورت هارمونیک با زمان تغییر می کند، پاسخ نانوکامپوزیت با اجزاء ویسکوالاستیک خطی برای دامنه ی تنش کم به صورت کرنش هارمونیک خواهد بود و نمودار تنش-کرنش در حالت پایدار، یک حلقه ی هیستریزس مطابق شکل 1 را تشکیل می دهد. کرنش نانوکامپوزیت با اجزاء ویسکوالاستیک خطی دارای تأخیر فازی نسبت به تنش اعمالی است. این تأخیر فاز ناشی از زمان اضافی لازم برای حرکت های مولکولی و رهاسازی های می باشد [15].

جهت به دست آوردن مدول ذخیره ی  $E'$  از حلقه ی هیستریزس، همان طور که در شکل 1 مشخص است، از تقسیم تنش در زمان ماکزیمم کرنش، بر کرنش ماکزیمم به دست می آید. همچنین برای به دست آوردن نرمی ذخیره ی  $J'$  کافی است تنش ماکزیمم را بر کرنش در زمان تنش ماکزیمم تقسیم نمود [15].

### 3-2- روش های تعیین فاکتور اتلاف ( $\eta$ )

اگر مکانیزم میرایی از نوع ویسکوالاستیک خطی باشد، دو روش پایه برای توسعه ی مدل های تحلیلی وجود دارد که هر دو روش بر اساس میرایی اجزاء

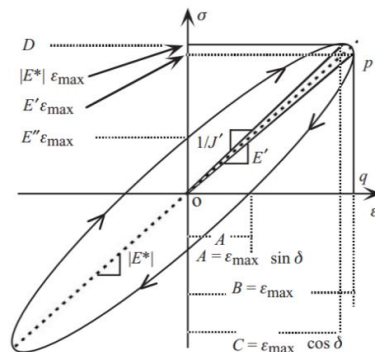


Fig. 1 Steady state stress-strain diagram of a nanocomposite with linear viscoelastic inclusions under harmonic loading [15]

شکل 1 نمودار حالت پایدار تنش-کرنش یک نانوکامپوزیت با اجزاء ویسکوالاستیک خطی تحت بارگذاری هارمونیک [15]

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{ij1} = \sigma_{11}^{ijk}, & (k > 1) \\ \sigma_{22}^{1jk} = \sigma_{22}^{ijk}, & (i > 1) \\ \sigma_{33}^{i1k} = \sigma_{33}^{ijk}, & (j > 1) \end{cases} \quad (14)$$

با فرض اتصال کامل لایه‌های میانی، تغییر مکان المان نماینده در یک جهت برابر مجموع تغییر مکان سلول‌های یک ردیف در همان جهت است. لذا رابطه‌ی بین کرنش کل المان و کرنش سلول‌ها به صورت رابطه (15) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^h d_k \varepsilon_{11}^{11k} = \sum_{k=1}^h d_k \varepsilon_{11}^{ijk} = L_h \bar{\varepsilon}_{11}, & (j \times i \neq 1) \\ \sum_{i=1}^c a_i \varepsilon_{22}^{i11} = \sum_{i=1}^c a_i \varepsilon_{22}^{ijk} = L_c \bar{\varepsilon}_{22}, & (j \times k \neq 1) \\ \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_{33}^{1j1} = \sum_{j=1}^r b_j \varepsilon_{33}^{ijk} = L_r \bar{\varepsilon}_{33}, & (i \times k \neq 1) \end{cases} \quad (15)$$

که در رابطه (15)،  $\bar{\varepsilon}_{11}$ ،  $\bar{\varepsilon}_{22}$  و  $\bar{\varepsilon}_{33}$  کرنش کلی المان حجمی نماینده به ترتیب در جهات 1، 2 و 3 است.

معادلات ساختاری سه بعدی برای اجزاء ویسکوالاستیک خطی همسانگرد، مطابق با رابطه‌ی (6) و با فرض مستقل از زمان بودن ضریب پواسون، در حوزه فرکانس، به صورت رابطه (16) بیان می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{ijk} \\ \varepsilon_{22}^{ijk} \\ \varepsilon_{33}^{ijk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} & -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} \\ -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} & 1 & -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} \\ -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} & -\frac{\nu_{ijk}}{E_{ijk}^*(\omega)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{ijk} \\ \sigma_{22}^{ijk} \\ \sigma_{33}^{ijk} \end{bmatrix} \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (16) در (15) و با استفاده از روابط (14) و (13)، دستگاه معادلات (17) با  $rc + rh + ch$  معادله و همین تعداد مجهول [43] نتیجه می‌شود.

$$[A]_{m \times m} [\sigma]_{m \times 1} = [F]_{m \times 1} \quad (17)$$

که ماتریس  $[A]$  ضرایب،  $[\sigma]$  و  $[F]$  نیز به ترتیب بردار تنش و نیرو می‌باشند. با داشتن کرنش و تنش زیر سلول‌ها می‌توان مدول مختلط نانوکامپوزیت را به دست آورد.

جهت بدست آوردن خواص دینامیکی برشی، نمونه تحت بارگذاری برشی قرار می‌گیرد. در این راستا تنش‌های  $S_{12}$ ،  $S_{13}$  و  $S_{23}$  بر المان حجمی نماینده وارد می‌شوند. با توجه به فرضیات گفته شده در بارگذاری محوری، تعادل تنش‌های برشی سلول‌های المان حجمی نماینده و تنش کلی وارده، منجر به رابطه (18) می‌شود [45,44].

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c a_i \sigma_{13}^{ijk} = L_c S_{13} \\ \sum_{j=1}^r b_j \sigma_{22}^{ijk} = L_r S_{12} \\ \sum_{k=1}^h d_k \sigma_{33}^{ijk} = L_h S_{23} \end{cases} \quad (18)$$

سازگاری کرنش‌ها در سلول‌های مجاور، منجر به رابطه (19) می‌شود [44,38].

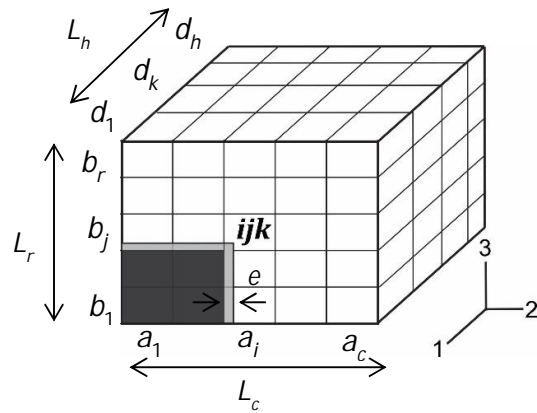


Fig. 3 Representative volume element geometry

شکل 3 هندسه المان حجمی نماینده

باقی، زمینه می‌باشد. لذا مطابق با شکل 4 دایره به سلول‌های کوچک مربعی تقسیم شده و با گروهی از سلول‌ها تقریب زده می‌شود که با نام سلول واحد ساده شده گسترش یافته (ESUC) شناخته می‌شود. متناسب با درصد حجمی الیاف و ضخامت موثر فاز میانی، شعاع دایره‌ی اشغالی به‌وسیله‌ی هر یک از دو فاز الیاف و فاز میانی مشخص می‌گردد.

### 1-3- معادلات حاکم

به منظور تعیین خواص دینامیکی نانوکامپوزیت، نمونه تحت بارگذاری قرار می‌گیرد. حالت تنش داخل نمونه در مختصات اصلی ماده، شامل سه مؤلفه‌ی تنش هارمونیک  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  به ترتیب در جهات 1، 2 و 3 می‌باشد. فرض می‌شود که تنش‌های نرمال وارده بر المان حجمی نماینده ماده مرکب هیچ‌گونه تنش برشی داخل آن ایجاد نمی‌کند و بالعکس [42]. از تعادل تنش‌های میکرو در سلول‌ها و تنش‌های ماکرووی اعمالی در مرز المان نماینده، رابطه‌ی (13) به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r a_i b_j \sigma_{11}^{ij1} = L_c L_r S_1 \\ \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^r d_k b_j \sigma_{22}^{1jk} = L_r L_h S_2 \\ \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^h a_i d_k \sigma_{33}^{i1k} = L_c L_h S_3 \end{cases} \quad (13)$$

با استفاده از تعادل تنش‌های عمودی در سطوح مشترک هر دو سلول مجاور، رابطه (14) بدست می‌آید.

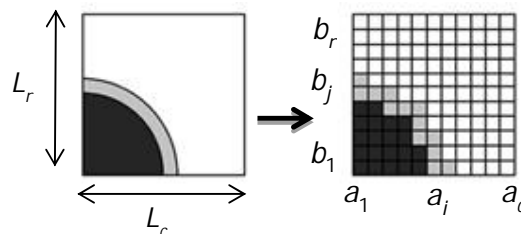


Fig. 4 Approximation of fibers circular cross section in ESUC model

شکل 4 تقریب سطح مقطع دایره‌ای الیاف در مدل ESUC

فاز و مقادیر پایین  $\beta$  پیوند قوی تر بین زمینه و نانو الیاف را نشان می دهد [43]. محدوده ی  $r_f > r > r_i$  می باشد.

#### 5- بررسی میرایی نانوکامپوزیت در حوزه فرکانس

برای بررسی میرایی نانوکامپوزیت در فرکانس های متفاوت ابتدا باید خواص دینامیکی اجزاء نانوکامپوزیت را در حوزه ی فرکانس تعیین نمود. در این پژوهش از روش تبدیل فوریه جهت تعیین خواص دینامیکی اجزاء استفاده می شود. با استفاده از تبدیل فوریه می توان، نرمی یا مدول در حوزه ی زمان را به نرمی مختلط یا مدول مختلط در حوزه ی فرکانس تبدیل نمود. در این روش مدول یا نرمی در حوزه ی زمان حتماً باید به صورت مدول زینر باشد. با اعمال تبدیل فوریه بر روابط (2) و استفاده از سری پرونی، مدول و نرمی مختلط در حوزه ی فرکانس زاویه ای  $\omega$  به صورت رابطه (24) به دست می آید.

$$E'(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2}$$

$$J'(\omega) = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i \frac{\omega^2}{\lambda_i^2 + \omega^2}$$

$$J''(\omega) = \sum_{i=1}^n J_i \frac{\omega \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} \quad (24)$$

که در رابطه فوق،  $E_0$  و  $J_0$  به ترتیب مدول و نرمی در حالت تعادل،  $E_i$  و  $J_i$  مدول و نرمی آنی می باشند.

#### 6- مدل شیبری

با استفاده از شکل انتگرال محوری شیبری برای کرنش لحظه ای [40] و همچنین استفاده از از سری پرونی و با صرف نظر از ترم های غیر خطی می توان تنش و کرنش را در هر لحظه طبق رابطه (25) بدست آورد [48]. در اثر اعمال با هارمونیک حلقه ی هیستریزس قابل حصول است.

$$\sigma^t = \left[ D_0 + \sum_{n=1}^N D_n - \sum_{n=1}^N D_n \frac{1 - \exp[-\lambda_n \Delta t]}{\lambda_n \Delta t} \right] \sigma^t$$

$$- \sum_{n=1}^N D_n \left[ \exp[-\lambda_n \Delta t] q_n^{t-\Delta t} - (1 - \exp[-\lambda_n \Delta t]) \frac{\sigma^{t-\Delta t}}{\lambda_n \Delta t} \right] \equiv \bar{D}^t \sigma^t - f^t \quad (25)$$

که در رابطه ی (25)

$$f^t = \sum_{n=1}^N D_n \left[ q_n^t - \frac{1 - \exp[-\lambda_n \Delta t]}{\lambda_n \Delta t} \right] \quad (26)$$

#### 7- نتایج و بحث

در این بررسی، یک روش تحلیلی سه بعدی برای پیش بینی خواص دینامیکی نانوکامپوزیت های پلیمری ارائه شد. در این روش با اعمال اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک بر تئوری میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده و با استفاده از روش انرژی و تعادل نیرو، مدول ذخیره، مدول اتلاف، فاکتور اتلاف نانوکامپوزیت های پلیمری استخراج گردید. ابتدا جهت بررسی کارایی مدل ارائه شده، یک تحلیل حساسیت به مش برای پارامتر فاکتور طولی اتلاف انجام می گیرد. سپس به منظور اعتبار سنجی مدل، نتایج بدست آمده با نتایج تجربی مقایسه می گردد. در ادامه اثرات کسر حجمی و نسبت منظر الیاف، فاکتور اتلاف و ضخامت فاز میانی بر مدول های ذخیره و اتلاف نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه و بلند مورد بررسی قرار می گیرد. در انتها نیز تأثیر کسر حجمی و نسبت منظر الیاف بر حلقه ی هیستریزس نانوکامپوزیت ارائه می گردد.

$$\begin{cases} \varepsilon_{13}^{1jk} = \varepsilon_{13}^{ijk}, & (i > 1) \\ \varepsilon_{12}^{i1k} = \varepsilon_{12}^{ijk}, & (j > 1) \\ \varepsilon_{23}^{ij1} = \varepsilon_{23}^{ijk}. & (k > 1) \end{cases} \quad (19)$$

تغییر مکان زاویه ای کل المان نماینده برابر مجموع تغییر زاویه سلول های یک ردیف در آن جهت می باشد، که با رابطه (20) بیان می شود.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^r b_j d_k \varepsilon_{13}^{1jk} = L_h L_r \bar{\varepsilon}_{13} \\ \sum_{k=1}^h \sum_{i=1}^c a_i d_k \varepsilon_{12}^{i1k} = L_c L_h \bar{\varepsilon}_{12} \\ \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r a_i b_j \varepsilon_{23}^{ij1} = L_c L_r \bar{\varepsilon}_{23} \end{cases} \quad (20)$$

روابط (21) برای مدول های برشی مختلط ماده مرکب الیاف کوتاه برقرار می باشد [44].

$$G_{13}^*(\omega) = \frac{S_{13}}{2\varepsilon_{13}}, \quad G_{12}^*(\omega) = \frac{S_{12}}{2\varepsilon_{12}}, \quad G_{23}^*(\omega) = \frac{S_{23}}{2\varepsilon_{23}} \quad (21)$$

با جایگذاری (21) در (19)، و سپس جایگذاری نتیجه آن در معادلات تعادل (18)، همچنین با استفاده از معادلات (20)، مدول مختلط برشی المان حجمی نماینده به صورت تحلیلی طبق رابطه (22) بدست می آید.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^h \sum_{j=1}^r \frac{b_j d_k L_c}{\sum_{i=1}^c a_i G_{ijk}^*(\omega)} = \frac{L_h L_r}{G_{13}^*(\omega)} \\ \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^h \frac{a_i d_k L_r}{\sum_{j=1}^r b_j G_{ijk}^*(\omega)} = \frac{L_h L_c}{G_{12}^*(\omega)} \\ \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r \frac{a_i b_j L_h}{\sum_{k=1}^h b_j G_{ijk}^*(\omega)} = \frac{L_h L_r}{G_{23}^*(\omega)} \end{cases} \quad (22)$$

با استفاده از روابط (22) می توان مدول برشی ذخیره، مدول اتلاف و فاکتور اتلاف برشی نانو کامپوزیت را تعیین نمود.  $G_{23}^*$  نشان دهنده ی مدول برشی عرضی،  $G_{12}^*(\omega)$  و  $G_{13}^*(\omega)$  نیز نشان دهنده ی مدول برشی طولی هستند.

#### 4- مدل سازی فاز میانی

فاز میانی از مولکول های اغتشاش یافته و مولکول های خود ماده تشکیل می شود و دارای خواص متمایز با دو جزء دیگر می باشد و همچنین بسته به هندسه ی تقویت کننده ها به صورت استوانه ای برای تقویت کننده های نانو الیاف و یا کره ی برای نانوذرات، اطراف ذرات را احاطه می کند. تغییرات ساختار مولکولی ناحیه ی اغتشاش یافته اطراف نانو الیاف یا نانوذرات یکپوخت نمی باشد و طبق [46] به صورت تابعی بر حسب فاصله از فاز تقویت کننده مدرج می شود که این فرض تداعی گر مدل های قانون توانی بیانگر رفتار مواد تابعی مدرج می باشد. بنابراین فرض می شود که خواص فاز میانی بر حسب فاصله  $r$  از مرکز نانو الیاف یا نانوذرات بین خواص تقویت کننده و زمینه ی پلیمری طبق رابطه (23) تغییر می کند [47].

$$E'(r) = \frac{R}{r} E'_m + \left( \frac{R-r}{e} \right)^\beta \left( E'_f - \frac{R}{r_f} E'_m \right) \quad (23)$$

که در رابطه (23) شعاع نانو الیاف،  $R$  مجموع شعاع نانو الیاف و ضخامت فاز میانی،  $E'_m$  مدول ذخیره ی تقویت کننده،  $E'_f$  مدول ذخیره ی زمینه،  $e$  ضخامت فاز میانی و  $\beta$  پارامتری وابسته به قدرت پیوند بین دو فاز زمینه و نانو الیاف می باشد. مقادیر بالای  $\beta$  نشان دهنده پیوند ضعیف بین دو

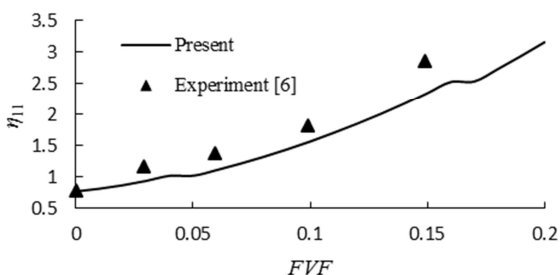


Fig. 6 Variation of longitudinal loss factor with  $FVF$  ( $\beta=100$ ,  $s=19$ ,  $e/d=0.5$ )

شکل 6 مدل ذخیره‌ی طولی نانوکامپوزیت بر حسب کسر حجمی الیاف ( $\beta=100$ ,  $s=19$ ,  $e/d=0.5$ )

می‌شود. شایان ذکر است که زیروند  $m$  برای هر پارامتر نمایانگر خواص زمینه می‌باشد.

در شکل‌های 7 و 8 اثر ضریب قدرت پیوند بر مدول ذخیره طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت به ترتیب با الیاف کوتاه ( $s=19$ ) و بلند ( $s=100000$ )، برای مقادیر متفاوت  $\beta$  نشان داده شده می‌شود. در هر دو نمودار کسر حجمی الیاف 0.03 و ضخامت مؤثر فاز میانی برابر 0.5 در نظر گرفته شده است.

مطابق شکل‌های 7 و 8، هر چه  $\beta$  بیشتر باشد (پیوند ضعیف‌تر بین نانوالیاف و زمینه)، خواص دینامیکی طولی در نانوکامپوزیت الیاف کوتاه و بلند کمتر می‌شوند. هم‌چنین با افزایش کسر حجمی الیاف، مدول ذخیره طولی در

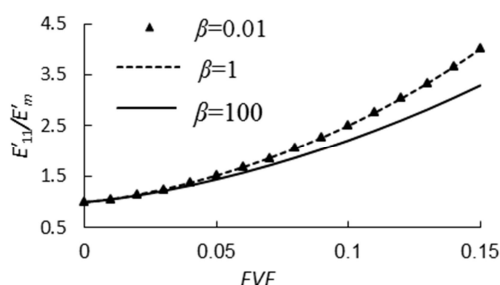


Fig. 7 Variation of short fiber-Nanocomposite normalized longitudinal storage modulus with  $FVF$  in various  $\beta$  ( $e/d=0.5$ ,  $s=19$ )

شکل 7 تغییرات مدول ذخیره طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب کسر حجمی الیاف در ضرایب قدرت پیوند متفاوت ( $e/d=0.5$ ,  $s=19$ )

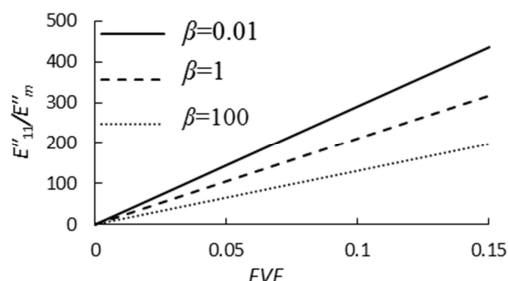


Fig. 8 Variation of long fiber-nanocomposite normalized longitudinal storage modulus with  $FVF$  in various  $\beta$  ( $e/d=0.5$ ,  $s=100000$ )

شکل 8 تغییرات مدول ذخیره طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت با الیاف بلند بر حسب کسر حجمی الیاف در ضرایب قدرت پیوند متفاوت ( $e/d=0.5$ ,  $s=100000$ )

نانوکامپوزیت مورد مطالعه دارای زمینه‌ی پلیمری پلی‌پروپیلن با الیاف کربن رشد یافته در فاز بخار، به عنوان تقویت کننده، می‌باشد. نحوه‌ی ساخت نانو الیاف VGCF در [6] شرح داده شده است. خواص دینامیکی اجزاء نانوکامپوزیت در فرکانس 1 Hz و دمای  $21^\circ\text{C}$  در جدول 1 آمده است. هم‌چنین قطر نانو الیاف 200 nm و ضخامت فاز میانی 50 nm در نظر گرفته می‌شود [6].

در ابتدا جهت بررسی کارایی مدل ارائه شده، یک تحلیل حساسیت به مش روی المان حجمی نماینده انجام می‌شود. شکل 5 فاکتور اتلاف طولی نانوکامپوزیت را برای تعداد زیرسلول‌های مختلف المان حجمی نماینده مدل میکرومکانیک سلول واحد ساده شده نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد زیرسلول‌ها به بیش از 10، تغییری در فاکتور اتلاف طولی ایجاد نمی‌شود و در 0.0741 ثابت می‌ماند.

### 1-7- اعتبار سنجی مدل

در راستای اعتبارسنجی مدل حاضر، نتایج بدست آمده با مقادیر تجربی و سایر مدل‌های میکرومکانیکی مقایسه می‌شوند. از پارامتر بی بعد ضخامت مؤثر فاز میانی ( $e/d$ ) جهت بررسی فاز میانی استفاده می‌شود.

در شکل 6 مدول ذخیره‌ی طولی (در جهت الیاف) نانوکامپوزیت بر حسب کسر حجمی الیاف ( $FVF$ ) بدست آمده در این پژوهش، با روش‌های آزمایش شده در [6] مقایسه شده است. پارامتر نمای قدرت پیوند زمینه و نانوالیاف در مدل‌سازی برابر  $\beta=100$  در نظر گرفته شده است. هم‌چنین نسبت منظر الیاف برای این نانوکامپوزیت برابر 19 و ضخامت مؤثر فاز میانی برابر 0.5 می‌باشد. ملاحظه می‌شود که تطابق خوبی نتایج تئوری و تجربی برقرار است، هم‌چنین نتایج تئوری مقادیر کمتری را پیش‌بینی می‌کند.

### 2-7- بررسی پارامتری

در این بخش اثرات پارامترهای تأثیرگذار بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت زمینه‌ی پلیمری (پلی‌پروپیلن) با الیاف کربن رشد یافته در فاز بخار بررسی

جدول 1 خواص دینامیکی تجربی اجزاء نانوکامپوزیت در دمای  $21^\circ\text{C}$  [6]

ماده	ضریب پواسون	مدول مختلط (GPa)	فاکتور اتلاف
پلی‌پروپیلن	0.45	$0.77+0.0577i$	0.0749
VGCF	0.3	$1000+1.5i$	0.0015
فاز میانی	0.45	$10.83+0.433i$	0.04

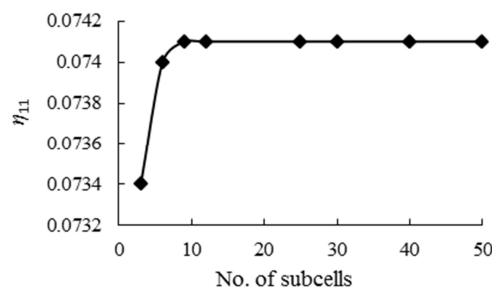


Fig. 5 Variation of short fiber nanocomposite longitudinal loss factor with the number of subcells

شکل 5 تغییرات فاکتور اتلاف طولی نانوکامپوزیت بر حسب تعداد زیرسلول‌ها

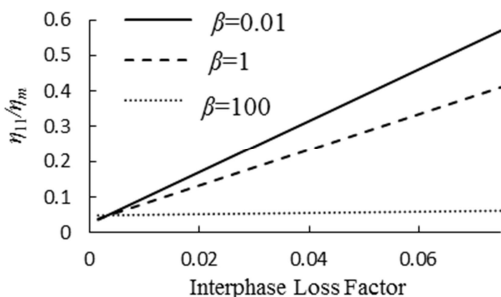
در نظر گرفته شده است. مطابق شکل‌های 11 و 12 با افزایش فاکتور اتلاف فاز میانی فاکتور اتلاف نانوکامپوزیت افزایش می‌یابد. همانند شکل‌های 7 و 8 در نانوکامپوزیت الیاف کوتاه برای  $1 > \beta > 0.01$  با افزایش فاکتور اتلاف فاز میانی تغییرات فاکتور اتلاف طولی اندک می‌باشد و تقریباً در مقدار یک ثابت است، همچنین در این حالت تفاوت چندانی بین فاکتور اتلاف طولی نانوکامپوزیت و زمینه وجود ندارند.

در شکل‌های 13 و 14 اثر ضخامت فاز میانی بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه ( $s=19$ ) نشان داده می‌شود. برای درک بهتر، خواص دینامیکی بر حسب پارامتر بی بعد  $e/d$  رسم شده‌اند. کسر حجمی الیاف 0.03 و  $\beta$  برابر 100 لحاظ گردیده است.

مطابق شکل‌های 13 و 14 با افزایش ضخامت فاز میانی و با ثابت در نظر گرفتن ضریب قدرت پیوند و فاکتور اتلاف فاز میانی، مدول ذخیره و اتلاف بی بعد شده‌ی نانوکامپوزیت با شیب تقریباً ثابت افزایش می‌یابند و هر دو مقادیر نزدیک به هم را نمایش می‌دهند به طوری که در ضخامت‌های کم فاز واسط این دو نسبت تقریباً یکسان هستند. اما فاکتور اتلاف بی بعد شده‌ی نانوکامپوزیت با شیب ثابت کاهش می‌یابد.

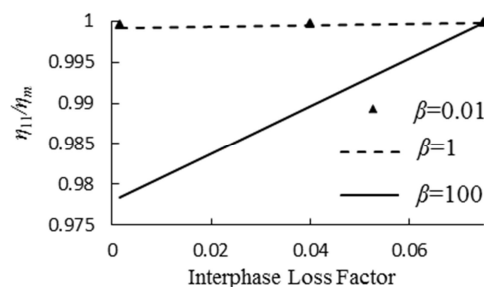
### 3-7- حلقه‌ی هیستریزس

شکل‌های 15 تا 17 حلقه هیستریزس را در دو حالت الیاف کوتاه ( $s=19$ ) و بلند ( $s=100000$ ) برای کسرهای حجمی الیاف ( $FVF=0, 0.05, 0.15$ ) و نسبت‌های منظر متفاوت ( $s=19, 1000, 100000$ ) نشان می‌دهد. با توجه به شکل 15، در نانوکامپوزیت با نسبت منظر بیشتر، سطح حلقه



**Fig. 11** Variation of long fiber-nanocomposite longitudinal loss factor with interphase loss factor ( $e/d=0.5, s=100000, FVF=0.03$ )

شکل 11 تغییرات فاکتور اتلاف طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت با الیاف بلند بر حسب فاکتور اتلاف فاز میانی ( $e/d=0.5, s=100000, FVF=0.03$ )



**Fig. 12** Variation of short fiber nanocomposite longitudinal loss factor with interphase loss factor ( $e/d=0.5, s=19, FVF=0.03$ )

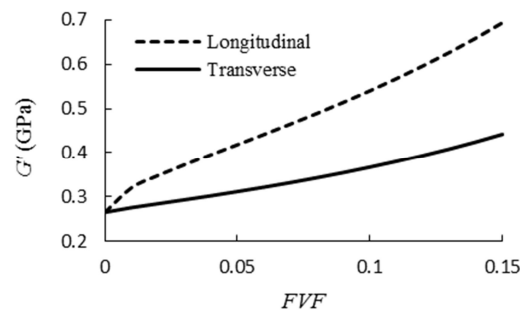
شکل 12 تغییرات فاکتور اتلاف طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب فاکتور اتلاف فاز میانی ( $e/d=0.5, s=19, FVF=0.03$ )

هر دو حالت افزایش می‌یابد، با این تفاوت که در الیاف کوتاه نرخ شیب نمودار افزایشی است اما در الیاف بلند این شیب ثابت می‌باشد. با توجه به شکل 5 می‌توان ملاحظه کرد که تغییرات خواص دینامیکی طولی در نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه با افزایش کسر حجمی در محدوده‌ی  $1 > \beta > 0.01$  تقریباً یکسان است.

شکل 9 تغییرات مدول ذخیره برشی طولی و عرضی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه ( $s=19$ ) را بر حسب کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد. با توجه به شکل 9 هر دو مدول برشی با افزایش کسر حجمی الیاف، افزایش می‌یابند با این تفاوت که شیب افزایش مدول ذخیره برشی طولی از عرضی بیشتر است. بدیهی است که هر دو مدول در کسر حجمی الیاف صفر، مقدار برابر دارند. شکل 10 فاکتور اتلاف برشی طولی و عرضی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه ( $s=19$ ) را بر حسب کسر حجمی الیاف نشان می‌دهد.

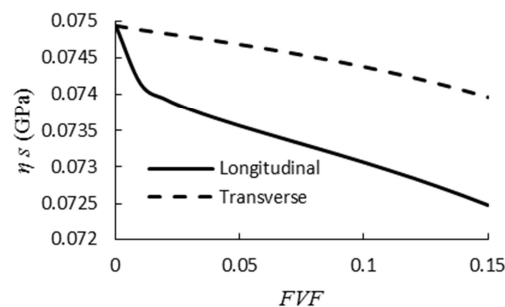
مشاهده می‌شود که با افزایش کسر حجمی الیاف، هر دو فاکتور اتلاف کاهش می‌یابد. هر دو فاکتور اتلاف در حالت بدون الیاف ( $FVF=0$ ) برابرند، اما از آنجایی که فاکتور اتلاف طولی با شیب بیشتری کاهش می‌یابد، با افزایش کسر حجمی الیاف اختلاف آن‌ها بیشتر می‌شود.

شکل‌های 11 و 12 تغییرات فاکتور اتلاف طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت به ترتیب با الیاف بلند ( $s=100000$ ) و کوتاه ( $s=19$ ) را بر حسب فاکتور اتلاف فاز میانی در مقادیر متفاوت  $\beta$  نشان می‌دهد. در شکل‌های 11 و 12 کسر حجمی الیاف 0.03 و ضخامت مؤثر فاز میانی برابر 0.5 لحاظ گردیده است. محدوده فاکتور اتلاف فاز میانی از 0.0015 تا 0.075



**Fig. 9** Variation of short fiber-Nanocomposite longitudinal and transverse storage shear modulus with  $FVF$  ( $\beta=100, e/d=0.5, s=19$ )

شکل 9 تغییرات مدول ذخیره برشی طولی و عرضی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب کسر حجمی الیاف ( $\beta=100, e/d=0.5, s=19, FVF=0.03$ )



**Fig. 10** Variation of short fiber-Nanocomposite longitudinal and transverse loss shear modulus with  $FVF$  ( $\beta=100, e/d=0.5, s=19$ )

شکل 10 تغییرات مدول اتلاف برشی طولی و عرضی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب کسر حجمی الیاف ( $\beta=100, e/d=0.5, s=19$ )



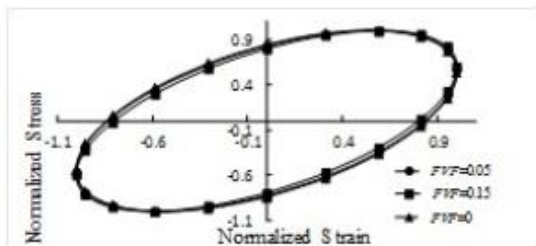


Fig. 16 Short fiber-nanocomposite hysteresis loop for various FVFs ( $e/d=0.5, \beta=100, s=19$ )

شکل 16 حلقه هیستریز نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه در کسرهای حجمی متفاوت ( $e/d=0.5, \beta=100, s=19$ )

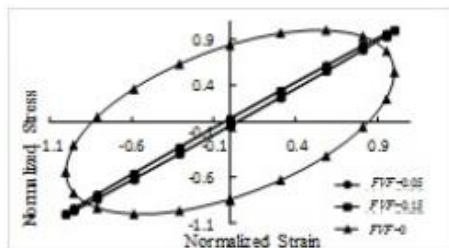


Fig. 17 Long fiber-nanocomposite hysteresis loop for various FVFs ( $e/d=0.5, \beta=100, s=100000$ )

شکل 17 حلقه هیستریز نانوکامپوزیت با الیاف بلند در کسرهای حجمی متفاوت ( $e/d=0.5, \beta=100, s=100000$ )

### 8- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر یک روش تحلیلی سه بعدی برای پیش‌بینی خواص دینامیکی نانوکامپوزیت‌های پلیمری ارائه شد. در این روش با استفاده از تئوری میکرومکانیکی سلول واحد ساده شده و اعمال اصل همخوانی الاستیک-ویسکوالاستیک بر آن، مدول ذخیره، مدول اتلاف، فاکتور اتلاف و حلقه‌ی هیستریز نانوکامپوزیت‌های پلیمری استخراج گردید. پس از تایید اعتبار مدل ارائه شده با نتایج تجربی، اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی و نسبت منظر الیاف، فاکتور قدرت پیوند بین الیاف و زمینه، تعداد زیرسلول‌ها و فاکتور اتلاف فاز میانی بر خواص دینامیکی نانوکامپوزیت‌ها بررسی شد. همچنین با ارائه‌ی روش فوریه و مدل شیبری خواص دینامیکی اجزاء نانوکامپوزیت در حوزه‌ی فرکانس استخراج شد. با توجه به نتایج بدست آمده، نتایج زیر قابل استنتاج است:

- با افزایش کسر حجمی الیاف، مدول ذخیره و مدول اتلاف نرمال و برشی نانوکامپوزیت افزایش و فاکتور اتلاف نرمال و برشی آن کاهش می‌یابند.
- در نانوکامپوزیت‌های الیاف کوتاه، در محدوده‌ی  $0.01 < \beta < 1$  تغییرات خواص دینامیکی طولی بر حسب  $\beta$  اندک و در محدوده‌ی  $1 < \beta < 100$  با افزایش  $\beta$  خواص دینامیکی کاهش می‌یابند.
- در نظر گرفتن شکل دایروی برای الیاف و فاز میانی (به جای مربعی) تغییر چندانی در فاکتورهای اتلاف ایجاد نمی‌کند، لذا فرض مربعی بون الیاف فرض قابل قبولی است.
- با افزایش ضخامت فاز میانی مدول ذخیره و اتلاف نانوکامپوزیت افزایش و فاکتور اتلاف نانوکامپوزیت کاهش می‌یابد.
- افزایش نسبت منظر و کسر حجمی الیاف باعث کوچک‌تر شدن حلقه‌ی هیستریز نانوکامپوزیت و در نتیجه کم شده ظرفیت میرایی آن می‌شود.

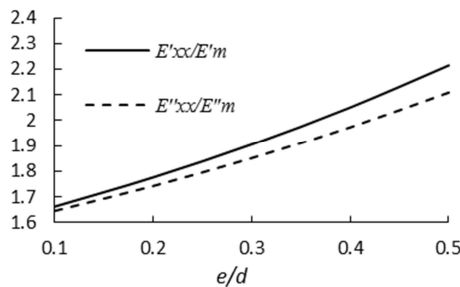


Fig. 13 Variation of short fiber-nanocomposite dynamic coefficients with interphase effective thickness ( $s=19, \beta=100, FVF=0.03$ )

شکل 13 تغییرات خواص دینامیکی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب ضخامت مؤثر فاز میانی ( $s=19, \beta=100, FVF=0.03$ )

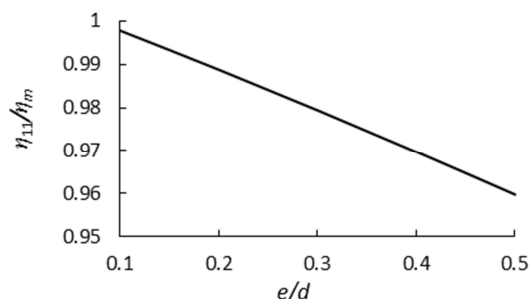


Fig. 14 Variation of short fiber-nanocomposite longitudinal loss factor with interphase effective thickness ( $s=19, \beta=100, FVF=0.03$ )

شکل 14 تغییرات فاکتور اتلاف طولی نرمال شده‌ی نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه بر حسب ضخامت مؤثر فاز میانی ( $s=19, \beta=100, FVF=0.03$ )

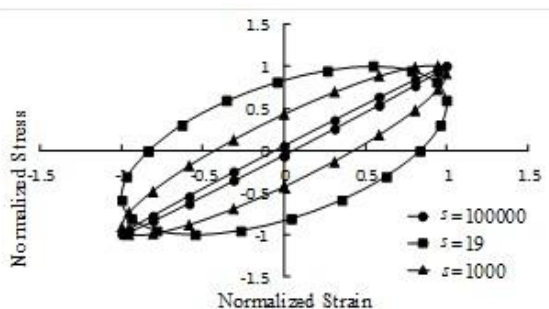


Fig. 15 Nanocomposite hysteresis loop for various aspect ratios ( $e/d=0.5, \beta=100, FVF=0.03$ )

شکل 15 حلقه هیستریز نانوکامپوزیت در نسبت‌های منظر متفاوت ( $e/d=0.5, \beta=100, FVF=0.03$ )

هیستریز که نشان دهنده‌ی ظرفیت میرایی می‌باشد، بیشتر است. به طوری که در نسبت منظر  $s=100000$  سطح حلقه هیستریز کاهش چشمگیری پیدا می‌کند.

شکل 16 نشان می‌دهد که نانوکامپوزیت با الیاف کوتاه نسبت به کسر حجمی الیاف حساسیت بسیار کمی بروز می‌دهد در نتیجه هر سه حلقه بسیار مشابه یکدیگرند. اما با توجه به شکل 17 این مطلب در مورد نانوکامپوزیت با الیاف بلند صادق نیست، به طوری که با افزایش کسر حجمی سطح حلقه‌ی هیستریز کاهش قابل توجهی پیدا می‌کند. هر چند که اختلاف اندکی بین حلقه‌ها در حالت کسر حجمی الیاف 0.15 و 0.05 وجود دارد.

## 9- مراجع

- Vol. 47, No. 4, pp. 926-933, 2010.
- [26] G. D Seidel, D. C. Lagoudas, Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, *Mechanics of Materials*, Vol. 38, No. 8-10, pp. 884-907, 2006.
- [27] J. Aboudi, S. Arnold, B. Bednarczyk, *Micromechanics of composite materials, A generalized multiscale approach*, pp. 87-145, Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2013.
- [28] Hashin, Z, and Shtrikman, S, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.11 No.2, pp.127-140, 1963.
- [29] R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 13, No. 4, pp. 213-222, 1965.
- [30] T. Mori and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, Vol. 21, No. 5, pp. 571-574, 1973.
- [31] R L. Foye, An evaluation of various engineering estimates of the transverse properties of unidirectional composites, *Proceedings of the Tenth National SAMP E Symposium-Advanced Fibrous Reinforced composites*, San Diego, USA, November 9-11, 1966.
- [32] J. Aboudi, Closed form constitutive equations for metal matrix composites, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 25, No. 9, pp. 1229-1240, 1987.
- [33] J. Aboudi, Micromechanical analysis of composites by the method of cells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 42, No. 7, pp. 193-221, 1989.
- [34] R. Haj-Ali, J. Aboudi, Nonlinear micromechanical formulation of the high fidelity generalized method of cells, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 13, pp. 2577-2592, 2009.
- [35] B. A. Bednarczyk, S. M. Arnold, Transverse tensile and creep modeling of continuously reinforced titanium composites with local debonding, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 7, pp. 1987-2017, 2002.
- [36] M. M. Aghdam, A. Dezhsetan, Micromechanics based analysis of randomly distributed fiber reinforced composites using simplified unit cell model, *Composite Structures*, Vol. 71, No. 3-4, pp. 327-332, 2005.
- [37] M. M. Aghdam, D. J. Smith, M. J. Pavier, Finite Element Micromechanical Modelling of Yield and Collapse Behaviour of Metal Matrix Composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, No. 3, pp. 499-528, 2000.
- [38] M. J. Mahmoodi, M. M. Aghdam, Shakeri, Micromechanical modeling of interface damage of metal matrix composites subjected to off-axis loading, *Materials & Design*, Vol. 31, No. 2, pp. 829-836, 2010.
- [39] J. Aboudi, The effective moduli of short-fiber composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 19, No. 8, pp. 693-707, 1983.
- [40] D. Gutierrez-Lemini, *Engineering Viscoelasticity*, pp. 53-92, New York: Springer Science+Business Media, 2014.
- [41] S. Falahatgar, M. Salehi, M. Aghdam, Nonlinear viscoelastic response of unidirectional fiber-reinforced composites in off-axis loading, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 28, No. 15, pp. 1793-1811, 2008.
- [42] M. J. Mahmoodi, M. K. Hassanzadeh-Aghdam, R. Ansari, Effects of interphase damage on the elastoviscoplastic behavior of general unidirectional metal matrix composites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 95-105, 2015. (in Persian فارسی)
- [43] R. Ansari, M. K. Hassanzadeh Aghdam, Micromechanics-based viscoelastic analysis of carbon nanotube-reinforced composites subjected to uniaxial and biaxial loading, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 90, pp. 512-522, 2016.
- [44] M. K. Hassanzadeh-Aghdam, M. J. Mahmoodi, R. Ansari, Interphase effects on the thermo-mechanical properties of three-phase composites, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 1-11, 2015.
- [45] A. Darvizeh, R. Ansari Khalkhali, M. J. Mahmoodi, M. K. Hasanzadeh Aghdam, Investigation of interphase effect on the non-linear viscoelastic behavior of multiphase polymer composites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 181-191, 2016. (in Persian فارسی)
- [46] G. Odegard, T. Clancy, T. Gates, Modeling of the mechanical properties of nanoparticle/polymer composites, *Polymer*, Vol. 46, No. 2, pp. 553-562, 2005.
- [47] S. Boutaleb, F. Zaïri, A. Mesbah, M. Naït-Abdelaziz, J. Gloaguen, T. Boukharouba, J. Lefebvre, Micromechanics-based modelling of stiffness and yield stress for silica/polymer nanocomposites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 7-8, pp. 1716-1726, 2009.
- [48] R. Haj-Ali and A. Muliana, Numerical finite element formulation of the Schapery non-linear viscoelastic material model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, No. 1, pp. 25-45, 2003.
- [1] M. Yadollahpour, S. Ziaei-Rad, F. Karimzadeh, J. Eskandari-Jam, A numerical study on the damping capacity of metal matrix nanocomposites, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 19, No. 1, pp. 337-349, 2011.
- [2] R. Lin, C. Lu, Modeling of interfacial friction damping of carbon nanotube-based nanocomposites, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 24, No. 8, pp. 2996-3012, 2010.
- [3] M. Yadollahpour, J. Kadkhodapour, S. Ziaei-Rad, F. Karimzadeh, An experimental and numerical investigation on damping capacity of nanocomposite, *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 507, No. 1-2, pp. 149-154, 2009.
- [4] R. Schaller, Metal matrix composites, a smart choice for high damping materials, *Journal of Alloys and Compounds*, Vol. 355, No. 1-2, pp. 131-135, 2003.
- [5] A. Treviso, B. Van Genechten, D. Mundo, M. Tournour, Damping in composite materials: Properties and models, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 78, No. 1, pp. 144-152, 2015.
- [6] I. Finegan, G. G. Tibbetts, R. F. Gibson, Modeling and characterization of damping in carbon nanofiber/polypropylene composites, *Composites Science and Technology*, Vol. 63, No. 11, pp. 1629-1635, 2003.
- [7] R. F. Gibson, *Principles of composite material mechanics*, pp. 399-491, New York: McGraw-Hill, 1994.
- [8] Nelson D, Hancock J. Interfacial slip and damping in fibre reinforced composites, *Journal of Materials Science*, Vol.13, No.11, pp. 2429-2440, 1978.
- [9] S. Doebling, C. Farrar, M. Prime, D. Shevitz, *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review*, Los Alamos, New Mexico, pp. 5-55, 1996.
- [10] M. Kaliske, H. Rotherth, Damping characterization of unidirectional fibre reinforced polymer composites, *Composites Engineering*, Vol. 5, No. 5, pp. 551-567, 1995.
- [11] R. Patel, B. Bhattacharya, S. Basu, Effect of interphase properties on the damping response of polymer nano-composites, *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, No. 1-2, pp. 115-125, 2008.
- [12] C. T. Sun, J. K. Wu, R. F. Gibson, Prediction of material damping in randomly oriented short fiber polymer matrix composites, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 4, No. 3, pp. 262-272, 1985.
- [13] C. T. Sun, S. K. Chaturvedi, R. F. Gibson, Internal damping of short-fiber reinforced polymer matrix composites, *Computers and Structures*, Vol. 20, No. 1-3, pp. 391-400, 1985.
- [14] S. A. Suarez, R. F. Gibson, C. T. Sun, S. K. Chaturvedi, The influence of fiber length and fiber orientation on damping and stiffness of polymer composite materials, *Experimental Mechanics*, Vol. 26, No. 2, pp. 175-184, 1986.
- [15] R. Lakes, *Viscoelastic Materials*, pp. 111-144, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [16] S. Neumark, *Concept of complex stiffness applied to problems of oscillations with viscous and hysteretic damping*, Aeronautical Research Council, London, pp. 1-36, 1962.
- [17] Z. Hashin, Complex Moduli of Viscoelastic Composites-II. Fiber Reinforced Materials, *International Journal Solids and Structures*, Vol. 6, pp. 797-807, 1970.
- [18] Z. Hashin, Complex moduli of viscoelastic composites-i. general theory and application to particulate composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, pp. 539-552, 1970.
- [19] R. A. Schapery, *Viscoelastic behavior and analysis of composite materials*, in G. P. Sendeckyj (Ed.), *Composite Materials Vol. 2: Mechanics of Composite Materials*, pp. 85-168, New York: Academic Press, 1974.
- [20] R. A. Schapery, Stress Analysis of Viscoelastic composite Materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, pp. 228-267, 1967.
- [21] J. C. Halpin, S. W. Tsai, *Effect of environmental factors on composite materials*, AFML, Ohio, pp. 8-20, 1969.
- [22] S. W. Tsai, *Structural behavior of composites materials*, NSA-CR-71, 1964.
- [23] F. Deng, K. J. Van Vliet, Prediction of elastic properties for polymer-particle nanocomposites exhibiting an interphase, *Nanotechnology*, Vol. 22, No. 16, pp. 165703, 2011.
- [24] H. Wan, F. Delale, L. Shen, Effect of CNT length and CNT-matrix interphase in carbon nanotube (CNT) reinforced composites, *Mechanics Research Communication*, Vol. 32, No. 5, pp. 481- 489, 2005.
- [25] P. Hernandez, F. Aviles, Modeling the influence of interphase on the elastic properties of carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*,