مجله مهندسی مکانیک مدرس، اسفند 1395، دوره 16، شماره 12، ص‌ص 335-344

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

آنالیز خطای روش شبکه بولتزمن حرارتی در مسایل جابجایی آزاد با ضریب پخش حرارتی متغیر

مصطفی ورمزیار[1*]، مجید بازارگان[2]، آرش محمدی[1]، علیرضا رهبری[1]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 15811-16788، varmazyar.mostafa@srttu.edu

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 10 مرداد 1395
پذیرش: 17 آبان 1395
ارائه در سایت: 28 آذر 1395

کلید واژگان:
آنالیز خطا
روش شبکه بولتزمن حرارتی
ضریب هدایت حرارتی متغیر
جابجایی آزاد

چکیده

در این پژوهش، روش شبکه بولتزمن حرارتی با هدف محاسبه پارامتر اسکالر از جمله دما با در نظر گرفتن تغییرات ضریب پخش هدایتی توسعه داده شده است. این روش در حالت استاندارد دارای خواص ثابت و بدون ترم منبع می‌باشد. هدف اصلی ارایه مدلی جهت شبیه‌سازی ضریب پخش متغیر با حضور یک منبع خارجی حرارت است. برای این منظور یک ترم به تابع توزیع تعادلی اضافه شد. این مدل در مساله‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که روش پیشنهادی، قابلیت مدل سازی مسایل به شدت غیرخطی را نیز دارد. لازم به ذکر است جهت افزایش شرایط غیرخطی از تشعشع و ترم منبع در کنار جریان جابجایی آزاد استفاده شده است. از مزایای مدل پیشنهادی آن است که امکان استفاده از روش زمان آرامش چندگانه را فراهم می‌سازد. این تغییر باعث افزایش پایداری حل می‌شود. از طرف دیگر با استفاده از آنالیز چاپمن انسکوگ خطای روش پیشنهادی، شناسایی شد. بخشی از خطا که ارتباطی به تغییر خواص نداشت، با پیشنهاد ترم اصلاحی و استفاده از ترم‌های مرتبه بالا در آنالیز چاپمن انسکوگ حذف گردید. هم چنین نشان داده شد ترم اضافه شده، که نماینده قسمت متغیر ضریب پخش حرارتی است، خطایی از مرتبه دوم عدد نادسن ایجاد می‌کند که قابل صرف نظر می‌باشد. به علاوه معین گردید که مدل پیشنهادی، دارای خطایی از مرتبه دوم نسبت به زمان است.

Error Analysis of Thermal Lattice Boltzmann Method in Natural Convection Problems with Varying Fluid Thermal Diffusion Coefficient

Mostafa Varmazyar[1*], Majid Bazargan[2], Arash Mohammadi[1], AliReza Rahbari[1]

1- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 15811-16788, Tehran, Iran, varmazyar.mostafa@srttu.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 July 2016
Accepted 07 November 2016
Available Online 18 December 2016

Keywords:
Error analysis
Lattice Boltzmann method
Variable thermal conductivity
Natural convection

ABSTRACT

In this study, a Lattice Boltzmann Method (LBM) has been developed to calculate the distribution of a scalar quantity, like temperature, in a natural convection flow field under the condition of varying fluid thermal conductivity. The standard form of an LBM usually considers the fluid properties to be constant without any source term in conservation equations. The model developed is to account for variation of thermal conductivity with temperature in the presence of an external heat source. The proposed model has been examined against various case studies. It is shown that it is capable of modeling the extremely nonlinear problems. To magnify the nonlinear term in the natural convection case under study, the radiation and other thermal sources have been used. The multiple relaxation time scheme has been applied to assure the solution stability. Using Chapman-Enskog analysis, the error associated with the proposed model has been estimated. The part of error which was not due to variations in the fluid properties may be eliminated by introducing a correction term in higher order terms in Chapman-Enskog analysis. In addition, it has been shown that the correction term associated with the fluid conductivity variations create an error of second order in terms of Knudsen number and is negligible. The present LBM model has an error of the second order of magnitude with respect to time.

1- مقدمه

روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی معمول بر پایه گسسته سازی مستقیم معادلات ناویر-استوکس و انرژی می‌باشند. این در حالی است که روش‌های جنبشی در دینامیک سیالات محاسباتی مستخرج از معادله بولتزمن هستند. خصوصیات روش‌های جنبشی منجر شده است که اخیرا" این روش‌ها مورد استقبال قرار گیرند [1-5]. از جمله این خصوصیات آن است که با دیدگاه میکروسکوپی می‌توان مسایل دینامیک و انتقال حرارت سیالات را مورد بررسی قرار داد. این موضوع کمک می کند تا از دشواری حل مسایل پیچیده

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Varmazyar, M. Bazargan, A. Mohammadi, A. R. Rahbari, Error Analysis of Thermal Lattice Boltzmann Method in Natural Convection Problems with Varying Fluid Thermal Diffusion Coefficient, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 335-344, 2016 (in Persian)

نسبت به روش‌های ماکروسکوپی از جمله معادلات ناویر-استوکس کاسته شود [6]. در واقع خصوصیت معادله بولتزمن آن است که بین هیدرودینامیک و فیزیک میکروسکوپی آن‌ها ارتباط برقرار می‌کند. به همین دلیل این روش‌ها، شیوه‌های مسوسکوپی نامیده می‌شوند، چرا که میان قوانین بقای ماکروسکوپی و دینامیک میکروسکوپیِ مرتبط با آن، عمل می‌کنند. به علاوه آن که معادله بولتزمن یک معادله انتگرودیفرانسیلی مرتبه اول با ترم جابجایی خطی است، در حالی که معادله ناویر-استوکس یک معادله مرتبه دوم با ترم جابجایی غیرخطی است. قسمت غیرخطی معادله بولتزمن مربوط به ترم برخورد آن است که آن هم به صورت محلی عمل می‌کند. این مساله منجر به مزیت‌های عددی برای حل معادله بولتزمن خواهد شد [7-9].

فرض ضریب پخش متغیر در انتقال حرارت مسایل مهندسی کاربرد زیادی دارد. کوره‌ها، مشعل‌های متخلخل، دریافت کننده‌های حجمی انرژی خورشید و عایق‌های فیبری و فوم چند نمونه از این کاربردها در حضور تشعشع می‌باشند [11,10]. در برخی از مسایل جابجایی مانند مبدل‌های حرارتی و سیستم‌های خنک‌کاری نیز استفاده نکردن از ضریب پخش متغیر خطای غیرقابل قبولی را به دنبال دارد [13,12]. ثابت آرامش یک پارامتر کلیدی در روش شبکه بولتزمن حرارتی می‌باشد که البته متاثر از ضریب پخش است. این پارامتر به نوعی بر روی تکامل توابع توزیع در طول زمان اثر می‌گذارد. جهت تداوم مزیت‌های روش شبکه بولتزمن حرارتی (از جمله استفاده از حرکت مستقیم الخط[1]- برخورد[2] در شبیه‌سازی) نیاز هست تا شبکه یکنواخت باشد.

در سال 2006 میلادی، گوپتا و همکاران [14] روش شبکه بولتزمن حرارتی را برای یک مساله انتقال حرارت یک بعدی با ضریب هدایت متغیر توسعه دادند. قبل از این بررسی، تمامی تحلیل‌هایی که با روش شبکه بولتزمن حرارتی انجام شده بود فرض خواص ثابت داشتند. گوپتا و همکاران فرض کردند که ثابت آرامش با دما تغییر کند. ایده اساسیِ چگونگی محاسبه تغییرات ضریب پخش با دما در مطالعه پیش رو، از مقاله هاژی و مارکوس گرفته شده است [15]. آن‌ها روش شبکه بولتزمن حرارتی را جهت شبیه‌سازی جریان سیال فوق بحرانی به کار گرفته‌اند. ضریب پخش حرارتی نزدیک نقطه بحرانی با دما تغییر می‌کند. در سال 2013 میلادی ورمزیار و بازارگان مدلی را در روش شبکه بولتزمن حرارتی توسعه دادند که توانایی شبیه‌سازی تغییرات خواص را در شرایط غیرخطی شدید دارا می‌باشد [16]. در مدل ایشان، بخش متغیر ضریب پخش حرارتی با اضافه کردن یک ترم به تابع توزیع تعادلی شبیه‌سازی شده است. با کمک این روش، در قیاس با روش‌های ماکروسکوپیک، اثرات غیرخطی معادله انرژی حذف می‌شود. ترم منبع نیز به عنوان یک ترم در سمت راست معادله شبکه بولتزمن حرارتی در نظر گرفته شده است. بر این اساس معادله شبکه بولتزمن حرارتی در راستای i به‌صورت زیر تغییر می‌کند که در آن $-w_i\delta j_{ST}$ جهت شبیه‌سازی ترم منبع می‌باشد:

$$\Omega_i = f_i(\vec{r} + \vec{c}_i, t + 1) - f_i(\vec{r}, t) - w_i\delta j_{ST} \tag{1}$$

که در آن $f_i(\vec{r},t)$ تابع توزیع احتمال در مختصات $\vec{r}$ و زمان t، w_i ضریب وزنی، $\vec{c}_i$ بردار سرعت شبکه و Ω_i تابع برخورد در جهت i است. در تحقیق حاضر، تقریب BGK به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\Omega_i = -\frac{1}{\lambda}\left(f_i - f_i^{\mathrm{eq}}\right) + w_i\vec{c}_i.\delta\vec{J}_{CT} \tag{2}$$

[1] Streaming
[2] Collision

که در آن $\delta\vec{J}_{CT}$ تابع اصلاح کننده خطای شبکه بولتزمن حرارتی، f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی در جهت i و λ ثابت زمان آرامش در شبکه بولتزمن حرارتی است. ترم منبع به‌صورت $\delta j_{ST} = \varepsilon\delta j_{ST}^1$ در نظر گرفته شده است، که در آن ε تحت عنوان عدد نادسن شبکه تعریف می‌شود. تابع توزیع تعادلی نیز به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$f_i^{\mathrm{eq}} = w_i(T + \frac{1}{c_s^2}T\vec{c}_i.\vec{u} - \frac{D}{c_s^2}\vec{c}_i.\vec{\nabla}T \tag{3}$$

که در آن $T = \sum f_i(x,t)$ دما، c_s سرعت صوت شبکه و $\vec{u}$ سرعت ماکروسکوپیک است. ضریب پخش حرارتی براساس رابطه (4) تعریف می‌شود:

$$\alpha = \alpha_0 + D \tag{4}$$

که در آن α_0 مقدار ثابت و D بخش متغیر ضریب پخش می‌باشد. با استفاده از آنالیز چاپمن انسکوگ که در مرجع [15] به تفصیل توضیح داده شده است، معادله انرژی به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}\partial_t(T) + \vec{\nabla}.(T\vec{u}) = \vec{\nabla}.\left[\alpha\vec{\nabla}T\right] \\ + \underbrace{\varepsilon\vec{\nabla}.\left[\frac{\alpha_0}{c_s^2}\partial_t\left(T\vec{u} - D\vec{\nabla}T\right)\right]}_{\text{unwanted term}} \\ -\varepsilon\ \underbrace{\vec{\nabla}.[\lambda c_s^2\delta\vec{J}_{CT}^1]}_{\text{correction term}} - \varepsilon\ \underbrace{\delta j_{ST}^1}_{\text{source term}} + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5}$$

رابطه (5) معادله پخش- جابجایی را با ضریب پخش کلی α نشان می‌دهد. علاوه بر آن یک ترم خطا (یا ترم ناخواسته) و یک ترم اصلاح کننده نیز در معادله ظاهر شده‌اند. در قسمت بعد ترم اصلاحی طوری انتخاب خواهد شد که ترم خطا از بین برود. هم چنین ترم (δj_{ST}) نیز طوری در معادله شبکه بولتزمن حرارتی اعمال شده است که به عنوان ترم منبع در معادله جابجایی-پخش ظاهر شود. لازم به ذکر است که در این مطالعه تنها به بررسی شبکه بولتزمن حرارتی پرداخته شده است و برای محاسبات مربوط به هیدرودینامیک جریان در بخش نتایج از روش شبکه بولتزمن مورد استفاده در مرجع [15] بهره گرفته شده است. روش حاضر استفاده از روش زمان آرامش چندگانه را جهت بالا بردن پایداری حل میسر می‌سازد. در قسمت سوم به معرفی روش زمان آرامش چندگانه خواهیم پرداخت. در بخش چهارم نتایج روش معرفی شده در مسایل مختلف انتقال حرارت جابجایی آزاد به تفصیل مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

2- آنالیز خطای مدل حاضر

جهت کاهش خطا در حل گذرا می‌توان ترم اصلاح کننده $\delta\vec{J}_{CT}^1$ را به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\varepsilon\left[\frac{\alpha_0}{c_s^2}\partial_t(T\vec{u} - D\vec{\nabla}T)\right] - \varepsilon[\lambda c_s^2\delta\vec{J}_{CT}^1] = 0 \tag{6}$$

معادله (6) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\delta\vec{J}_{CT} = \varepsilon\delta\vec{J}_{CT}^1 = \varepsilon\left[\frac{\alpha_0}{\lambda c_s^4}\partial_t(\rho\vec{u} - D\vec{\nabla}\rho\right] \\ = 1/c_s^2(1 - \frac{1}{2\lambda})(\underbrace{\varepsilon\partial_t\rho\vec{u}}_{(\vec{J}_{CT})_1} - \underbrace{\varepsilon\partial_t D\vec{\nabla}\rho}_{(\vec{J}_{CT})_2})\end{aligned} \tag{7}$$

که در آن $(\vec{J}_{CT})_1$ به مشتق زمانی بر روی حاصل ضرب سرعت و دما وابسته است و $(\vec{J}_{CT})_2$ که دارای مشتق مکانی و زمانی بر روی دما می‌باشد. می‌توان مشتق بردار سرعت بر روی زمان را با تقریب $O(\varepsilon^2)$ به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\varepsilon\partial_t\vec{u} = \vec{u}(t + 1) - \vec{u}(t) + O(\varepsilon^2) \tag{8}$$

و همین‌طور مقدار مشتق دما بر روی زمان را نیز به فرم زیر تخمین زد.

$$\varepsilon\partial_t T = -\frac{1}{\lambda w_0}\varepsilon f_0^1 \tag{9}$$

در نهایت، رابطه (7) به صورت زیر اصلاح خواهد شد:

$$\delta\vec{J}_{CT} = \frac{1}{c_s^2}\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\left[T\left(\vec{u}(t+1)-\vec{u}(t)\right)-\frac{\vec{u}(t)}{\lambda w_0}\varepsilon f_0^1 + D\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\lambda w_0}\varepsilon f_0^1\right)+O(\varepsilon^2)\right] \tag{10}$$

علاوه بر آن می‌توان ادعا نمود که ترم $D\vec{\nabla}(\varepsilon f_0^1/\lambda w_0)$ نیز از $O(\varepsilon^2)$ می‌باشد چرا که بردار دیورژانس از مرتبه ε می‌باشد.

$$\vec{\nabla} = \varepsilon\vec{\nabla}_1 \tag{11}$$

بنابراین می‌توان معادله (10) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\delta\vec{J}_{CT} = \frac{1}{c_s^2}\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)\left[\rho\left(\vec{u}(t+1)-\vec{u}(t)\right)-\frac{\vec{u}(t)}{\lambda w_0}\varepsilon f_0^1 + O(\varepsilon^2)\right] \tag{12}$$

زمانی که ترم اصلاحی در نظر گرفته شود می‌توان ادعا نمود که روش شبکه بولتزمن حرارتی ارایه شده برای معادله پخش-جابجایی بدون هیچ قید و شرطی بر روی زمان دقتی از مرتبه دو دارد. به علاوه این روش از خانواده روش‌های صریح است چرا که مقادیر در گام زمانی $t+1$ از مقادیر گام زمانی t به صورت صریح به‌دست می‌آیند و هیچ الگوریتم تکراری برای رسیدن به پاسخ در زمان $t+1$ نیاز نیست. قابل ذکر است روش‌های عددی پیشروی زمانی موجود که از دقت مرتبه دوم برخوردار هستند هیچ کدام به صورت صریح اعمال نمی‌شوند و همگی نیاز به تکرار دارند، در حالی که روش شبکه بولتزمن حرارتی با ترم اصلاحی فوق این مزیت را داراست. در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها می‌توان گفت که روش شبکه بولترمن از نظر نیاز به حافظه بسیار پرهزینه می‌باشد، چرا که به عنوان مثال در شبکه D2Q9، 9 مجهول در هر نقطه از شبکه وجود دارد. این در حالی است که این روش به جهت استفاده از مدل صریح بر روی زمان، روشی بسیار سریع در قیاس با روش‌های مرتبه دوم دیگر است. البته علاوه بر آن روش شبکه بولتزمن حرارتی قابلیت بالایی را در استفاده از پردازشگرهای موازی در اختیار کاربر خود قرار می‌دهد، و از آنجایی که امروزه شرکت‌های سازنده پردازش‌گر رو به تولید پردازش‌گرهای چند هسته‌ای به جای بالا بردن سرعت پردازش آن‌ها آورده‌اند، استفاده از این روش می‌تواند سرعت و دقت حل را تا حد بسیار بالایی افزایش دهد.

3- روش زمان آرامش چندگانه

یکی از مزیت‌هایی که مدل شبکه بولتزمن حرارتی حاضر به ارمغان می‌آورد قابلیت استفاده از روش زمان آرامش چندگانه است. معادله شبکه بولتزمن حرارتی در روش مذکور به صورت زیر تغییر می‌کند [17]:

$$f_i(\vec{r}+\vec{c}_i,t+1)-f_i(\vec{r},t) = -\sum_j \Omega_{ij}\left(f_j(\vec{r},t)-f_j^{\mathrm{eq}}(\vec{r},t)\right) \tag{13}$$

ادعا شده است روش زمان آرامش چندگانه باعث افزایش دقت و پایداری روش شبکه بولتزمن حرارتی می‌شود [18-21]. معادله (13) به فرمت زیر تبدیل می‌شود [17]:

$$f_i(\vec{r}+\vec{c}_i,t+1)-f_i(\vec{r},t) = -M^{-1}\Lambda\left(\tilde{f}(\vec{r},t)-\tilde{f}^{\mathrm{eq}}(\vec{r},t)\right) \tag{14}$$

که در آن $\tilde{f}(\vec{r},t)$ بردار ممان می‌باشند. انتقال میان تابع توزیع و بردارهای ممان با استفاده از رابطه خطی زیر قابل انجام می‌باشد [17]:

$$f(\vec{r},t) = M\tilde{f}(\vec{r},t) \tag{15}$$

با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام-اشمیت، ماتریس M قابل محاسبه می‌باشد. فرمت کلی ماتریس M توسط گینزبرگ پیشنهاد شده است [22]. بر این اساس در شبکه D2Q9 ماتریس M به صورت زیر قابل بیان است:

$$M = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & +2 & +2 & +2 & +2 \\ +4 & -2 & -2 & -2 & -2 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ 0 & -2 & +1 & +2 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & +2 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

ماتریس آرامش Λ یک ماتریس قطری است که در زیر تعریف شده است [17]:

$$\Lambda = \mathrm{diagonal}\left(0.0, 1.63, 1.14, \Lambda_4, 1.92, \Lambda_6, 1.92, \frac{2}{1+6\alpha_0}, \frac{2}{1+6\alpha_0}\right) \tag{17}$$

که Λ_4 و Λ_6 می‌توانند مقادیر دلخواه داشته باشند. ممان‌های تعادلی به صورت زیر تعریف می‌شوند [17]:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1^{\mathrm{eq}} = T,\ \tilde{f}_2^{\mathrm{eq}} = -2T + 3(\vec{u}.\vec{u}), \\ &\tilde{f}_3^{\mathrm{eq}} = T + 3(\vec{u}.\vec{u}),\ \tilde{f}_4^{\mathrm{eq}} = Tu_x, \\ &\tilde{f}_5^{\mathrm{eq}} = -Tu_x,\ \tilde{f}_6^{\mathrm{eq}} = Tu_y,\ \tilde{f}_7^{\mathrm{eq}} = -Tu_y \\ &\tilde{f}_8^{\mathrm{eq}} = (Tu_x)^2 - \left(Tu_y\right)^2,\ \tilde{f}_9^{\mathrm{eq}} = T^2u_xu_y \end{aligned} \tag{18}$$

4- نتایج

در این قسمت پنج نمونه مثال عددی جهت بررسی قابلیت‌های مدل حاضر ارایه می‌شود. در ابتدا، مدل هدایت حاضر در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی، پایا و گذرا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مثال دوم مرتبه خطای مدل عددی ارزیابی شده است. در این مثال نشان داده می‌شود که خطای مدل عددی حاضر بر روی زمان از مرتبه دوم می‌باشد. در مثال بعدی، مدل هدایت حاضر در یک مساله دو بعدی و در حضور تشعشع بررسی می‌شود. مثال چهارم مدل حاضر را در مساله جابجایی آزاد ارزیابی می‌کند، در این مثال منبع حرارتی منجربه شدت گرفتن اثرات غیرخطی بیش از پیش می‌گردد، نتایج حاکی از آن است که مدل حاضر در مدل‌سازی مسایل به شدت غیرخطی توانمند می‌باشد. در تمامی شبیه‌سازی‌ها تغییرات ضریب پخش حرارتی با استفاده از رابطه (19) محاسبه می‌گردد:

$$\alpha_0 + D(T) = \frac{k_0 + k(T)}{\rho c_p} = \alpha_0\left[1+\gamma(T-T_c)\right] \tag{19}$$

که در آن γ شیب تغییرات ضریب پخش حرارتی نسبت به دما، T_c دمای دیوار سرد، k ضریب هدایت حرارتی، ρ چگالی و c_p ضریب ظرفیت حرارتی می‌باشد. هم‌چنین از شبکه D2Q9 برای محاسبه معادله شبکه بولتزمن و شبکه بولتزمن حرارتی استفاده شده است. شرط مرزی حرارتی منطبق بر بخش 3-5-3 و شرط مرزی هیدرودینامیکی منطبق بر بخش 5-3-1 مرجع [17] می‌باشد.

4-1- هدایت یک بعدی و دو بعدی پایا و گذرا

در این بخش، اعتبارسنجی مدل حاضر برای مسایل یک بعدی و دو بعدی به صورت مجزا انجام می‌شود. در حالت یک بعدی پایا، سیال ساکنی میان دو صفحه فرض شده و انتقال حرارت آن بررسی می‌گردد. فاصله بین دو صفحه واحد در نظر گرفته شده است. صفحه پایینی و بالایی دارای دمای به ترتیب T_l و T_u می‌باشند. این مساله دارای پاسخی دقیق است که با حل معادله

لاپلاس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{\sqrt{(1+\gamma T_l)^2 + [(1+\gamma T_u)^2 - (1+\gamma T_l)^2]y} - 1}{\gamma} \qquad (20)$$

راستای محاسباتی به 150 نقطه با توزیع یکنواخت گسسته شده است. "شکل 1" نتایج دمای محاسبه شده تحت تغییرات مختلفِ ضریب پخش حرارتی (γ =0.0, 1.5, 8.6) را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج محاسبه شده در توافق خوبی با نتایج رابطه (20) می‌باشند. به علاوه مشاهدات حکایت از آن دارد که مدل حاضر تاγ =8.6 پایدار است. این بدان معناست که مدل حاضر در مقادیر بالاتر توان غلبه بر نوسانات شدید دما را نداشته و واگرا می شود.

در مساله بعدی، هدایت گذرا در یک میدان یک بعدی مورد بحث است، از نتایج حل تشابهی به‌عنوان نتایج دقیق استفاده می‌گردد. در "شکل 2" نتایج عددی مدل حاضر در قیاس با نتایج دقیق قابل مشاهده است. در این شکل پارامترهای بدون بعد θ و η به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\theta = \frac{T-T_0}{T_w-T_0} \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}} \qquad (21)$$

نتایج "شکل 2" حاکی از آن است که با افزایش γ از دقت حل کاسته می‌شود.

جهت قیاس خطای روش زمان آرامش متغیر $err(t)_{vrtm}$ با خطای مدل حاضر $err(t)_{cm}$، خطای نسبی به‌صورت $(err(t)_{vrtm}-err(t)_{cm})/err(t)_{cm}$ تعریف شده است.

"شکل 3" نشان دهنده خطای نسبی برای مساله یک بعدی گذرا در بازه زمانی t=0-10 s با ضریب پخش α_0=0.002 و مقادیر γ = 80, 100, 120 می‌باشد، نتایج بیانگر آن است که مدل حاضر دقیق‌تر از مدل زمان آرامش متغیر می‌باشد.

جهت ارزیابی بیشتر مدل حاضر در پیش‌بینی رفتار مسایل دو بعدی، هدایت خالص در یک هندسه مربعی شکل مورد بررسی قرار می‌گیرد، طول مربع برابر واحد در نظر گرفته شده است. دمای بی بعدِ کل میدان در ابتدای حل برابر صفر می‌باشد، دما در مرزهای چپ، پایین و راست، در زمان t= 0 s ناگهان به مقدار یک ارتقا می‌یابد. نتایج حاصل از مدل حاضر در زمان‌های مختلف t=1, 2, 3 s در "شکل 4" نشان داده شده است. همچنین مقایسه بین نتایج مدل حاضر با نتایج حل ضمنی حجم محدود در "شکل 5" آورده

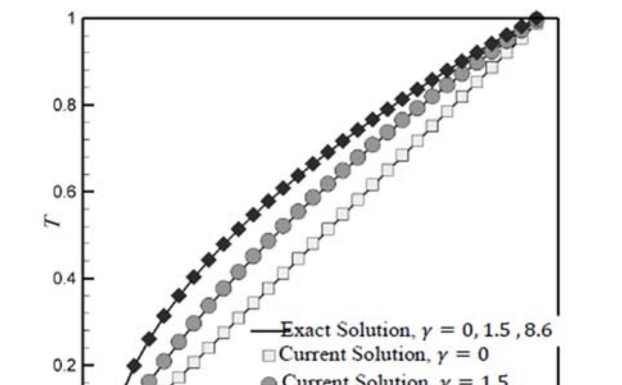


Fig. 1 Temperature profile as function of non-dimensional position for α_0=0.002

شکل 1 پروفیل دما به عنوان تابعی از مکان بی‌بعد برایα_0=0.002

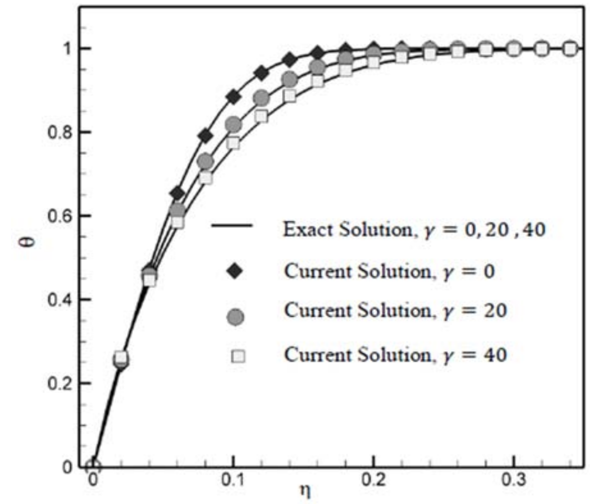


Fig. 2 Comparison between current numerical result and exact solution for θ as non-dimensional parameter versus η as independent parameter for γ=0, 20, 40 and α_0=0.002

شکل 2 مقایسه بین نتایج عددی حاضر و حل دقیق برای پارامتر بدون بعد θ براساس η تحت شرایط γ=0, 20, 40 و α_0=0.002

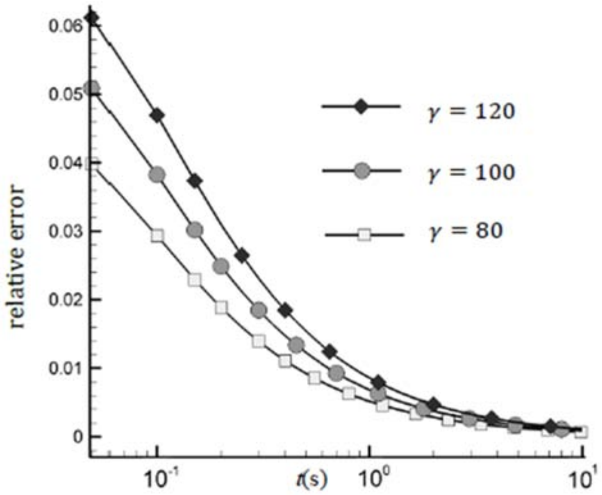


Fig. 3 Relative error versus time for one-dimensional heat conduction for various γ and α_0=0.002

شکل 3 خطای نسبی براساس زمان برای مساله هدایت یک بعدی با α_0=0.002 و مقادیر مختلف γ

شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج در توافق کامل با یکدیگرند. فاصله بین گره‌ها در روش ضمنی حجم محدود تا اندازه‌ای ریز گردیده که در مقدار پاسخ تغییر موثری حاصل نشود. سپس این مقدار به عنوان حل دقیق در نظر گرفته شده و مقدار خطای مدل حاضر براساس رابطه زیر حساب شده است:

$$err(t) = \frac{1}{N_n}\sqrt{\sum_{\vec{r}} |T(\vec{r},t) - T'(\vec{r},t)|^2} \qquad (22)$$

که در آن $T(\vec{r},t)$ و $T'(\vec{r},t)$ به ترتیب به عنوان مقادیر دمای منتج شده از مدل حاضر و مدل ضمنی حجم محدود می‌باشند و N_n تعداد گره‌های شبکه است. مقادیر خطا برای حالات مختلفی از وابستگی به دما (γ) و طی زمان‌های مختلف حساب گردید و نتایج مربوط به آن در جدول 1 آورده شده است. لازم به یادآوری است که در حالت ضریب پخش ثابت، γ = 0، مدل حاضر به شبکه بولتزمن حرارتی استاندارد تبدیل می‌شود. نتایج جدول نشان

می‌دهد که مقادیر خطا تحت حالات ضریب پخش ثابت و ضریب پخش متغیر نزدیک به هم و تقریبا از یک مرتبه می‌باشند.

این موضوع موید بحث آنالیز خطای مدل حاضر می‌باشد. در آن قسمت نیز نشان داده شده بود که خطای ناشی از ترم اضافه شده در مدل حاضر از مرتبه ε^2 است که نسبت به مدل استاندارد شبکه بولتزمن حرارتی که از مرتبه ε است، قابل صرف‌نظر می‌باشد.

در ادامه و جهت بررسی مرتبه خطای مدل حاضر، از یک مساله انتقال حرارت یک بعدیِ سیال با توزیع سرعت مشخص استفاده می‌شود. توزیع اولیه دما براساس مکان به صورت زیر فرض می‌گردد:

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\exp\left(-\frac{(x^* - 0.5)^2}{2\sigma'^2}\right) \qquad (23)$$

که در آن x^* مقدار بی بعد مکان و σ' ثابت موثر در موج اولیه دما تعریف می‌شود. هم‌چنین تابع سرعت به صورت زیر است:

$$u(t,x) = u_{\max}\cos(\omega t)\sin(\pi x^*) \qquad (24)$$

که در آن $u_{\max}$ مقدار بیشینه سرعت و ω فرکانس زاویه‌ای است. جهت حذف خطای ناشی از شرط مرزی، از شرط مرزی پریودیک برای مرزها استفاده گردید. جهت حصول حل مستقل از شبکه و گام زمانی، گام زمانی و مکانی به اندازه‌ای ریز شده است که فاصله میان نتایج، تاثیری در جمع بندی زیر نداشته باشد. نتایج خطای نسبیِ روش شبکه بولتزمن حرارتی استاندارد و مدل حاضر به همراه استفاده از ترم اصلاح در "شکل " آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که خطای روش شبکه بولتزمن حرارتی استاندارد بر روی زمان از مرتبه دوم می‌باشد. استفاده از ترم اصلاح کننده خطا نیز مرتبه خطای روش را حفظ نموده و تنها مقدار خطا را کاهش می‌دهد. لازم به ذکر است که الگوریتم‌های عددی مبتنیِ بر روش شبکه بولتزمن حرارتی دارای خطای مرتبه دوم بر روی زمان می‌باشند که در قیاس با روش‌های صریح دیگر مزیت بزرگی محسوب می‌شود.

4-2- مساله هدایت در حضور تشعشع حجمی

در این مثال، جهت بالا بردن اثرات غیرخطی از تشعشع حجمی در کنار هدایت استفاده شده است. برای مدل‌سازی تشعشع از مدل جهات گسسته استفاده گردیده که از جمله دقیق‌ترین روش‌های مدل‌سازی تشعشع حجمی می‌باشد [23-25].

دیواره‌ها تحت شرایط خاکستری و دارای انعکاس می‌باشند. این بدین معناست که دیواره به‌عنوان یک سطحِ با دمای مشخص دارای تشعشع سطحی است و هم‌چنین بخشی از تشعشع دریافتی از محیط داخلی را باز می‌گرداند. تمام گره‌های میدان حل در زمان t=0 s دارای دمای مشخص T_0 می‌باشد. هندسه مدنظر مستطیلی و دارای ابعاد $Lx \times Ly$ است. هم‌چنین محیط به صورت همگن و دارای جذب، انتشار و پراکندگی فرض می‌شود. عدد پلانک (N) و γ' به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N = \frac{k_0 K}{4\sigma T_l^3}\,,\; \gamma' = \gamma T_l N \qquad (25)$$

که در آن σ ثابت استفان بولتزمن و K ضریب خاموشی است. در زمان اولیه t=0 s دمای دیواره پایین ناگهان به T_l=2T_0 افزایش می‌یابد. اثر پارامتر

جدول 1 خطای نسبی محاسبه شده در زمان‌ها و مقادیر مختلف γ

Table 1 Relative error calculated in times with various γ

γ=0	γ=25	γ=50	زمان
1.0619e-004	9.4592e-005	9.2540e-005	t= 1 (s)
8.8276e-005	7.9311e-005	7.7833e-005	t= 2 (s)
7.9294e-005	7.1236e-005	6.9395e-005	t= 3 (s)

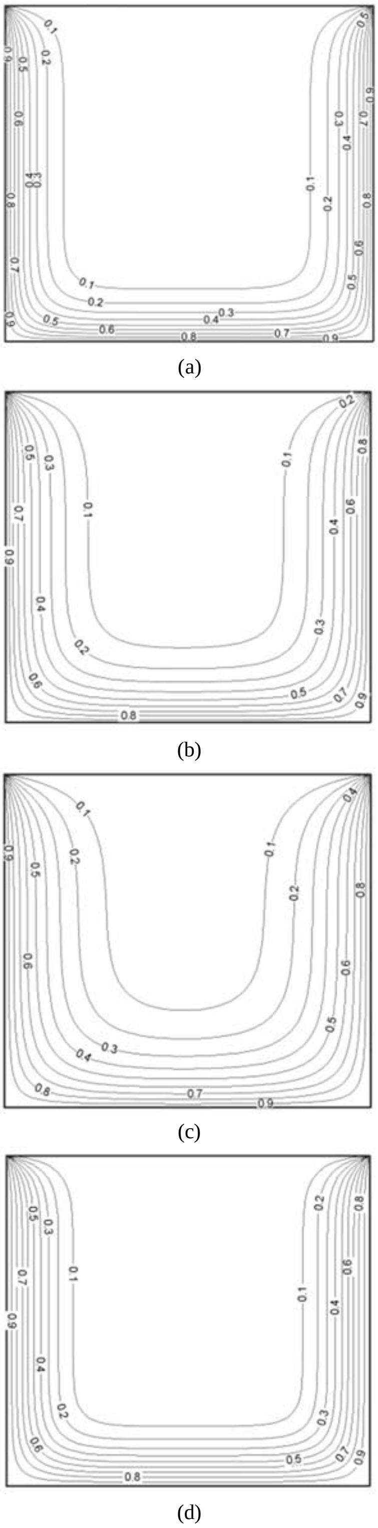
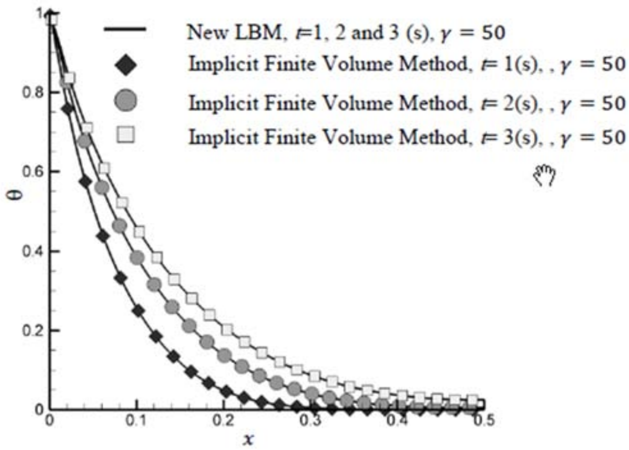


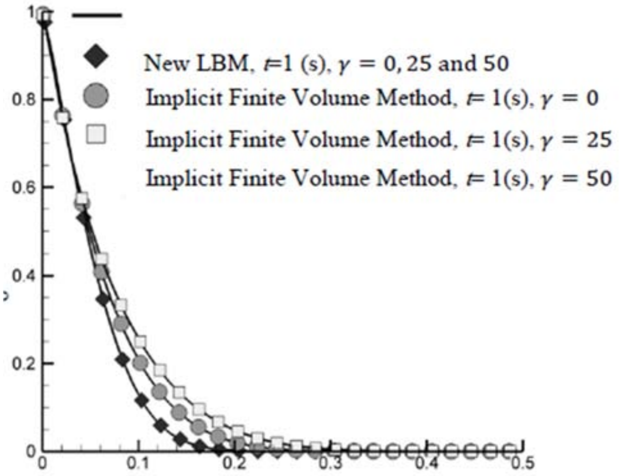
Fig. 4 Temperature contour in a square with α_0=0.002 calculated by lattice Boltzmann method for below conditions:
(a) t=1 s, γ =50, (b) t=2 s, γ =50, (c) t=3 s, γ =50, (d) t=3 s, γ =0

شکل 4 کانتور دما در یک مربع با α_0=0.002، محاسبه شده با روش شبکه بولتزمن حرارتی برای حالات زیر:
(a) t=1 s, γ =50, (b) t=2 s, γ =50, (c) t=3 s, γ =50, (d) t=3 s, γ =0

γ' و نسبت ابعاد (r=Lx/Ly) برحسب پروفیل دمای خط مرکزی مستطیل (x/Lx=0.5) در "شکل 7" نشان داده شده است. نتایج برای N=0.01 و ω = 0.5 ترسیم گردیده‌اند. لازم به ذکر است که $\omega = \sigma_s/K$ و σ_s ضریب



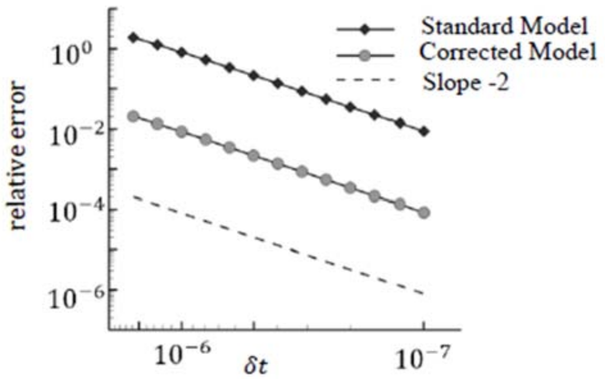
(a)



(b)

Fig. 5 Temperature contour in the first half of the horizontal line through the middle of the square, calculated by current model and implicit finite volume method, for below conditions:
(a) t=1, 2, 3 s, γ=50, (b) t=1 s, γ=0, 25, 50

شکل 5 توزیع دما در نیمه اول خط افقی گذرنده از وسط مربع (x=0-0.5)، محاسبه شده با مدل حاضر و حل ضمنی حجم محدود، برای حالات:



(a) t=1, 2, 3 s, γ=50, (b) t=1 s, γ=0, 25, 50

Fig. 6 Relative error for standard and corrected lattice Boltzmann method for one dimensional problem with u_{max}=1.0, γ=0.08 and ω=π/5

شکل 6 خطای نسبی مدل استاندارد و مدل اصلاح شده روش شبکه بولتزمن حرارتی برای مساله یک بعدی تحت شرایط u_{max}=1.0 و γ=0.08, ω=π/5

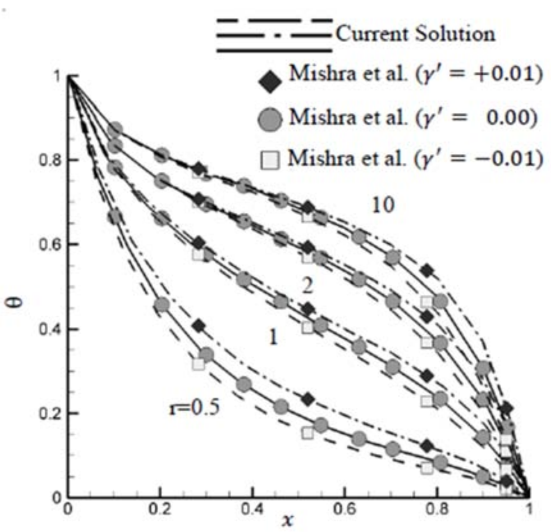


Fig. 7 Comparison of temperature profile (T/T_l) between current model and Mishra et al. [26] on the central line of domain for various aspect ratio and N=0.01 and ω=0.5

شکل 7 مقایسه نتایج پروفیل دمای (T/T_l) مدل حاضر و نتایج میشرا و همکاران [26] بر روی خط مرکزی میدان برای نسبت ضرایب منظر مختلف و N=0.01 و ω=0.5

3-4- جابجایی رایلی بنارد

جهت ارزیابی مدل حاضر به همراه ترم اصلاح، جریان جابجایی آزاد رایلی-بنارد مورد مطالعه قرار می‌گیرد، برای رسیدن به حل مستقل از شبکه، نتایج برای تعداد شبکه 61×31 تا 301×151 مورد آزمون قرار گرفت. مشاهدات حاکی از آن است که تفاوتِ تاثیرگذاری میان نتایجِ شبکه‌های ریزتر از 221×111 وجود ندارد، شبیه‌سازی‌ها برای دو عدد رایلی (Ra) متفاوت و برای شبکه 221×111 و عدد پرانتل 0.71 انجام شده است. شروع شبیه‌سازی با حالت Ra=2000 بوده است، عدد رایلی کم کم بزرگ شده تا حل طی گام‌های معلوم به حالت پایا برسد.

عدد نوسلت (Nu) که بیانگر میزان انتقال حرارت می‌باشد برای حالات مختلف وابستگیِ ضریب پخش به دما (γ= 0.1, 0.3, 0.5) و با و بدون ترم اصلاح در جدول 2 گزارش شده است. خطوط دما ثابت مرتبط با مقادیر (Ra=1000,000) در "شکل 8" نشان داده شده‌اند.

افزایش وابستگی ضریب پخش به دما باعث می‌شود لایه مرزی حرارتی نازک‌تر گردد، افزایش اثرات غیرخطی نیز باعث شده است که ناحیه گرم نزدیک دیواره سرد توسعه بیشتری پیدا کند، خط پیوسته و خط چین به ترتیب نتایج محاسبه شده با و بدون در نظر گرفتن تابع اصلاح را نشان می‌دهند، همان‌طور که در "شکل 8" مشهود است اختلاف قابل توجهی میان

جدول 2 مقایسه عدد نوسلت محاسبه شده بدون و با ترم اصلاحی

Table 2 Comparison of Nusselt Number between with and without correction term model

	عدد نوسلت (Nu)	
	با ترم اصلاح	بدون ترم اصلاح
Ra=500,000, γ=0.1	7.743	7.688
Ra=500,000, γ=0.3	8.181	8.161
Ra=500,000, γ=0.5	8.632	8.601
Ra=1000,000, γ=0.1	9.065	9.041
Ra=1000,000, γ=0.3	9.713	9.687
Ra=1000,000, γ=0.5	10.194	10.165

پراکندگی می‌باشد، مشاهدات حکایت از آن دارد که نتایج محاسبه شده در توافق کامل با نتایج میشرا و همکاران [26] است.

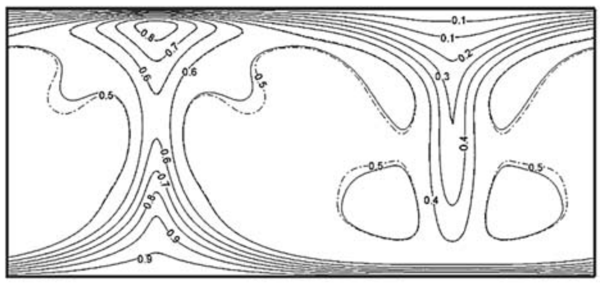
مقادیر محاسبه شده با تابع اصلاح و بدون تابع اصلاح در نقاطی که گرادیان شدید است وجود دارد.

4-4- جابجایی آزاد درون حفره با منبع حرارتی

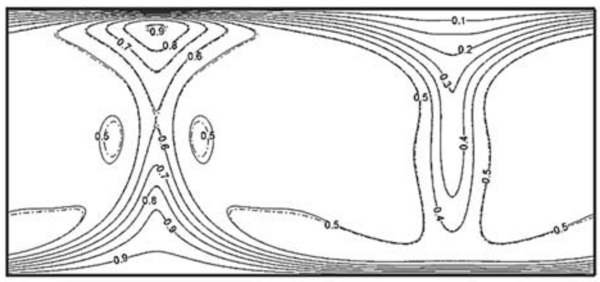
جهت افزایش اثرات غیرخطی، جابجایی آزاد درون حفره مربعی ($L=Lx=Ly$) همراه با منبع حرارتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. به منظور اعتبارسنجی در ابتدا ضریب پخش ثابت فرض شده و توزیع دما و سرعت بدون حضور ترم منبع حرارتی شبیه‌سازی می‌گردد. مدل زمان آرامش چندگانه جهت بالا بردن پایداری حل مورد استفاده قرار گرفته است. دیواره $x=0$ تا دمای $T=T_h$ گرم شده و به موازات آن دیواره $x=L$ تا دمای $T=T_c$ سرد می‌شود. مابقی دیواره‌ها عایق می‌باشند. تخمین بوزینسک برای محاسبه گرادیان دانسیته به فرمت زیر استفاده می‌شود:

$$F_\alpha = \rho g_\alpha \beta (T - T_c) \tag{26}$$

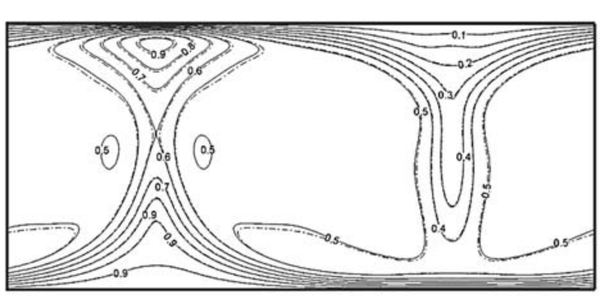
که در آن β ضریب انبساط حجمی، g_α شتاب گرانش در راستای α و T_c دمای دیواره سرد می‌باشد. دمای محاسبه شده به همراه مقایسه با نتایج باراکوس و همکاران [27] در "شکل 9" نشان داده شده است. جهت داشتن حلی مستقل از شبکه، تعداد گره‌ها از 41×41 تا 121×121 تغییر داده



Ra=1000 000, γ=0.1



Ra=1000 000, γ=0.3



Ra=1000 000, γ=0.5

Fig. 8 Isothermal lines for steady condition with Ra=1000,000 by variable thermal diffusion assumption (solid line: with correction term, dash line: without correction term)

شکل 8 خطوط دما ثابت تحت شرایط پایا برای Ra=1000,000 با فرض تغییر ضریب پخش با دما (خطوط پیوسته: با ترم اصلاحی، خط چین: بدون ترم اصلاحی)

می‌شود. مشاهدات حاکی از آن است که با افزایش تعداد شبکه به بیشتر از 61×61، تفاوت محسوسی در نتایج حاصل نمی‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد نتایج شبکه مذکور در توافق نسبتاً خوبی با نتایج مرجع [27] می‌باشد.

در گام بعدی، تغییرات ضریب پخش در حضور منبع حرارتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مقادیر مختلفی از γ (- ,1.0- ,0.25- ,0.1- ,0.0 1.5) فرض گردیده و پارامتر منبع به صورت $S=0$ و $S=25$ انتخاب شده است. عدد گراشف و پرانتل نیز به‌صورت 2×10^4 و 0.7320 انتخاب گردیده‌اند. تعریف پارامتر S و گراشف Gr به صورت زیر می‌باشد:

$$S = \frac{\delta j_{ST} L^2}{\mu c_p (T_h - T_c)}\ ,\ Gr = \frac{\rho^2 g \beta (T_h - T_c) L^3}{\mu^2} \tag{27}$$

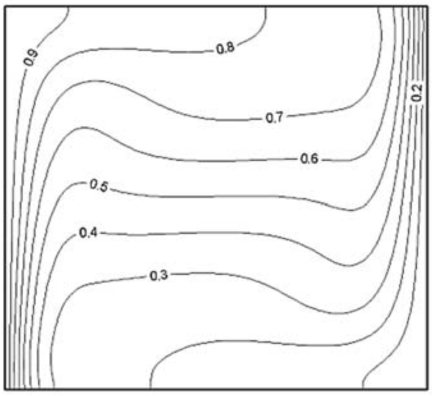
خطوط جریان برای حالات مختلف S و γ در "شکل 10" نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در شکل‌های a تا c مشهود است با افزایش S به مقدار 25 گردابه دوم نیز در داخل حفره پدیدار می‌گردد. گردابه اول در نزدیکی دیواره سرد و گردابه دوم نزدیک گوشه بالای دیواره گرم شکل می‌گیرند. شکل‌های d تا f نشان‌دهنده خطوط جریان برای $S=0$ و مقادیر مختلف γ می‌باشند. مشاهدات حاکی از آن است که با کاهش مقدار S، گردابه کوچک به مرور از بین می‌رود. افزایش γ نیز منجر به تشکیل لایه مرزی نازک‌تر در کنار دیواره می‌گردد.

"شکل 11" توزیع دمای متناظر در خط مرکز حفره (y=0.5) را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این نمودارها مشهود است، افزایش ضریب پخش حرارتی، باعث کوچک‌تر شدن لایه مرزی حرارتی می‌گردد. همچنین اثرات غیرخطی گردابه‌ها در مقادیر سرعت خط مرکزی حفره (y=0.5) کاملا مشهود است. نتایج حاکی از آن است که مدل حرارتیِ حاضر می‌تواند اثرات غیرخطی شدید را به خوبی شبیه‌سازی نماید.

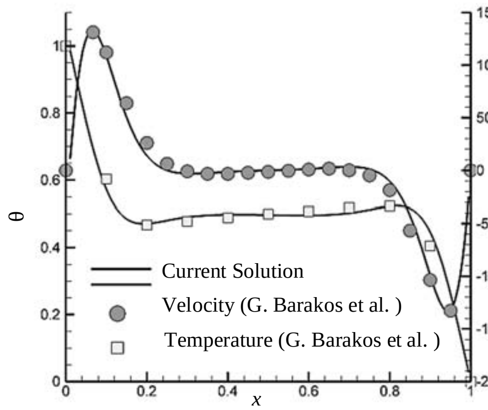
5- جمع‌بندی

مهم‌ترین نتایج این مطالعه را می‌توان به صورت زیر فهرست نمود:

- خطای موجود در روش شبکه بولتزمن حرارتی استاندارد با استفاده از آنالیز چاپمن انسکوگ محاسبه گردید. جهت رفع این خطا از ترم‌های مرتبه بالای مورد استفاده در آنالیز چاپمن انسکوگ بهره گرفته شد. نحوه اعمال ترم اصلاح نیز در معادله شبکه بولتزمن حرارتی بررسی و تعیین گردید.
- جهت شبیه‌سازی تغییر ضریب پخش حرارتی در روش شبکه بولتزمن حرارتی پیشنهاد شد که ترم متغیر ضریب پخش در تابع توزیع تعادلی اضافه گردد.
- خطای موجود در مدل پیشنهادی روش شبکه بولتزمن حرارتی براساس آنالیز چاپمن انسکوگ محاسبه شد. نشان داده شد که خطای ناشی از ترم اضافه به تابع توزیع تعادلی در روش جدید از مرتبه دوم عدد نادسن و قابل صرف‌نظر کردن است.
- از جمله مزیت‌های مدل پیشنهادی این است که قابلیت استفاده از مدل زمان آرامش چندگانه را فراهم می‌سازد.
- جهت شبیه‌سازی کار تراکم در روش شبکه بولتزمن حرارتی، ترم پیشنهادی بررسی و نحوه اعمال آن در معادله شبکه بولتزمن حرارتی تعیین گردید.
- مدل شبکه بولتزمن حرارتی پیشنهادی برای حل هدایت خالص پایا و گذرای یک بعدی به‌کار بسته شد. نتایج با حل دقیق مقایسه و نشان داده شد که تطابق کامل برقرار است.



(a)

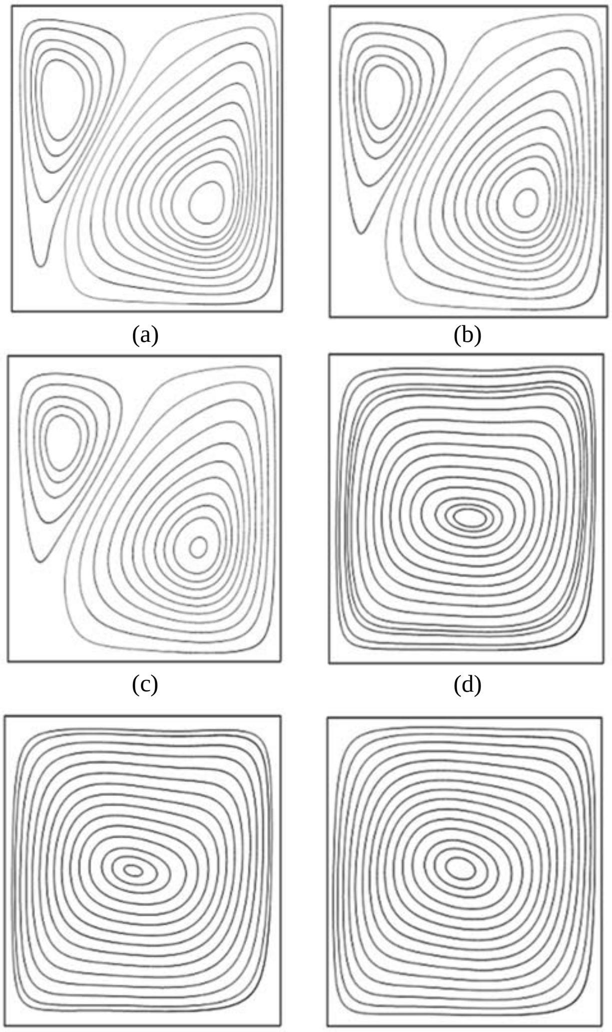


(b)

Fig. 9 Results for 61x61 grids, Ra=1.8x10^5 and Pr=0.71 (a) temperature profile (b) comparison of temperature and velocity profile between current simulation and Barakos et al. results [27]

شکل 9 نتایج برای شبکه 61×61 و عدد رایلی 1.8×10^5 و عدد پرانتل 0.71 (a) میدان دما، (b) مقایسه نتایج دما و سرعت با نتایج باراکوس و همکاران [27]

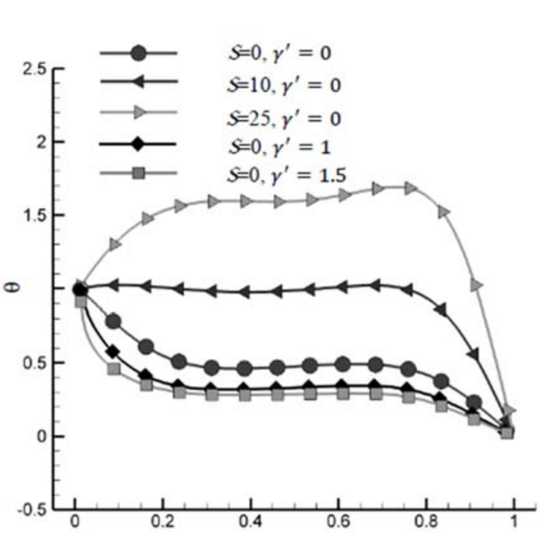
- خطای مساله گذرای هدایت دوبعدی با ضریب پخش متغیر در قیاس با حل ضمنی حجم محدود مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که خطای معادله شبکه بولتزمن حرارتی پیشنهادی با خطای شبکه بولتزمن حرارتی استاندارد هم مرتبه می‌باشند، این موضوع موید خروجی آنالیز چاپمن انسکوگ نیز هست.
- مرتبه خطای مدل پیشنهادی در شبیه‌سازی‌های گذرا مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که دقت مدل حاضر از مرتبه دو بر روی زمان می‌باشد، این نتیجه روش شبکه بولتزمن حرارتی پیشنهادی را در میان روش‌های دینامیک محاسباتی صریح بی‌رقیب می‌سازد.
- جهت به چالش کشیدن مدل حاضر تحت شرایط غیرخطی نسبتاً شدید، مدل پیشنهادی در حضور تشعشع مورد بررسی قرار گرفت، نتایج در قیاس با منابع منتشر شده، حاکی از آن است که مدل حاضر توانایی شبیه‌سازی اثرات غیرخطی موثر از تشعشع را دارا می‌باشد.
- در ادامه روند بررسیِ مدل حاضر تحت شرایط غیرخطی شدید، مساله جابجایی آزاد در حضور ترم منبع مورد بررسی قرار گرفت، نتایج نشان می‌دهند که مدل حاضر تحت تاثیر تغییرات شدید دما، پایدار می‌باشد.



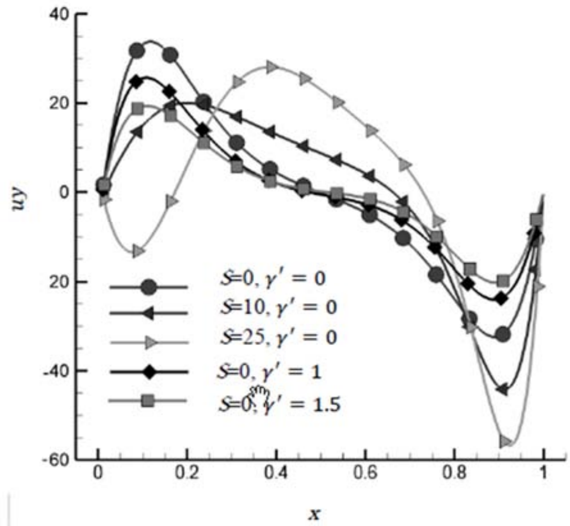
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Fig. 10 Streamlines for *Gr*=20000 and *Pr*=0.732 for (a) *S*=25, *γ*=-0.25, (b) *S*=25, *γ*=-0.1, (c) *S*=25, *γ*=0.0, (d) *S*=0, *γ*=-1.5, (e) *S*=0, *γ*=-1.0, (f) *S*=0, *γ*=0.0

شکل 10 خطوط جریان برای عدد گراشف 20000 و پرانتل 0.732 برای حالات زیر:
(a) *S*=25, *γ*=-0.25, (b) *S*=25, *γ*=-0.1, (c) *S*=25, *γ*=0.0, (d) *S*=0, *γ*=-1.5, (e) *S*=0, *γ*=-1.0, (f) *S*=0, *γ*=0.0



(a)



(b)

Fig. 11 Comparison of temperature profile (a) and velocity profile (b) with *Gr*=20000 and Pr=0.732 in centerline (*y*=0.5) for various condition

شکل 11 مقایسه توزیع دما (a) و توزیع سرعت (b) برای *Gr*=20000 و Pr=0.732 در خط مرکزی حفره (*y*=0.5) برای حالات مختلف

6- فهرست علائم

$\vec{c}_i$	بردار سرعت شبکه در جهت i (m/s)
c_p	ظرفیت حرارتی مخصوص (kJ/kg K)
c_s	سرعت صوت شبکه (m/s)
D	بخش متغیر ضریب پخش حرارتی (m^2/s)
$f_i(\vec{r},t)$	تابع توزیع ذرات در جهت i (K)
$f_i^{\mathrm{eq}}(\vec{r},t)$	تابع توزیع تعادلی ذرات در جهت i (K)
$\tilde{f}(\vec{r},t)$	بردار ممان
$f^1(\vec{r},t)$	بخش غیرتعادلی تابع توزیع احتمال (K)
F_α	نیروی خارجی (N)
g	شتاب جاذبه (m/s^2)
Gr	عدد گراشف
$k(T)$	بخش متغیر ضریب هدایت حرارتی (W/m K)
k_0	بخش ثابت ضریب هدایت حرارتی (W/m K)
K	ضریب خاموشی (m^{-1})
Lx, Ly	ابعاد هندسه مستطیلی (m)
M	ماتریس انتقال
N	عدد پلانک
N_n	تعداد گره‌های شبکه
Nu	عدد نوسلت
Pr	عدد پرانتل
r	ضریب منظر (Lx/Ly)
$\vec{r}$	بردار مکان (x,y) (m)
Ra	عدد رایلی
S	ترم منبع
t	زمان (s)
$T(\vec{r},t)$	دما (K)
$T'(\vec{r},t)$	دما (پاسخ دقیق مستخرج از معادله انتقال حرارت) (K)
T_0	دمای اولیه (K)
T_w	دمای دیوار (K)
$\vec{u}$	بردار سرعت (m/s)
$u_{\max}$	بیشینه سرعت (m/s)
w_i	ثابت وزنی شبکه در جهت i
x^*	مقدار بی بعد مکان
x, y	مختصات مکان (m)

علائم یونانی

α_0	بخش ثابت ضریب پخش حرارتی (m^2/s)
β	ضریب انبساط حجمی (1/K)
γ	پارامتر متناسب با تغییرات ضریب هدایت حرارتی (1/K)
Υ	پارامتر اصلاح شده متناسب با ضریب هدایت حرارتی (1/K)
δj_{ST}	ترم منبع حرارتی (W/m^3)
ε	عدد نادسن شبکه
Η	متغیر تشابهی (m/√s)
Θ	دمای بی بعد
k_a	ضریب جذب (m^{-1})
λ	زمان آرامش شبکه بولتزمن حرارتی (s)
μ	ویسکوزیته دینامیکی (m^2/s)
ρ	چگالی (kg/m^3)
σ	ثابت استفان-بولتزمن = 5.67×10^{-8} ($W K^4/m^2$)
σ'	ثابت موثر در موج اولیه دما
σ_s	ضریب پراکندگی (m^{-1})
Λ	ماتریس آرامش
Ω	عملگر برخورد
ω	فرکانس زاویه‌ای

7- مراجع

[1] D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, No. 5, pp. 329-367, 2003.

[2] S. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annual Review of Fluid mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 329-364, 1998.

[3] M. Varmazyar, M. Bazargan, Modeling of free convection heat transfer to a supercritical fluid in a square enclosure by the Lattice Boltzmann method, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 133, No. 2, pp. 022501, 2011.

[4] M. Nazari, Natural convection in a square cavity with a heated obstacle using Lattice Boltzmann Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 119-133, 2011. (in Persian فارسی)

[5] M. Nazari, Comparison of heat transfer in a cavity between vertical and horizontal porous layers using LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 93-107, 2013. (in Persian فارسی)

[6] X. He, L.-S. Luo, A priori derivation of the lattice Boltzmann equation, *Physical Review E*, Vol. 55, No. 6, pp. R6333, 1997.

[7] S. Succi, *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*, pp: 30-45, Oxford university press, 2001.

[8] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, Vol. 65, No. 4, pp. 046308, 2002.

[9] D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: An Introduction*, pp. 40-52 Springer Science & Business Media, 2000.

[10] H.-S. Chu, C.-J. Tseng, Conduction-radiation interaction in absorbing, emitting, and anisotropically scattering media with variable thermal conductivity, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 6, No. 3, pp. 537-540, 1992.

[11] P. Talukdar, S. C. Mishra, Transient conduction and radiation heat transfer with variable thermal conductivity, *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, Vol. 41, No. 8, pp. 851-867, 2002.

[12] M. Leal, H. Machado, R. Cotta, Integral transform solutions of transient natural convection in enclosures with variable fluid properties, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 21, pp. 3977-3990, 2000.

[13] S. Saravanan, P. Kandaswamy, Low Prandtl number magnetoconvection in cavities: effect of variable thermal conductivity, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,* Vol. 80, No. 8, pp. 570-576, 2000.
[14] N. Gupta, R. C. Gorthi, S. C. Mishra, Lattice Boltzmann method applied to variable thermal conductivity conduction and radiation problems, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer,* Vol. 20, No. 4, pp. 895-902, 2006.
[15] G. Házi, A. Márkus, Modeling heat transfer in supercritical fluid using the lattice Boltzmann method, *Physical Review E*, Vol. 77, No. 2, pp. 026305, 2008.
[16] M. Varmazyar, M. Bazargan, Development of a thermal lattice Boltzmann method to simulate heat transfer problems with variable thermal conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 59, pp. 363-371, 2013.
[17] A. A. Mohamad, *Lattice Boltzmann method: Fundamentals and engineering applications with computer codes,* pp. 80-86, Springer Science & Business Media, 2011.
[18] C. K. Aidun, J. R. Clausen, Lattice-Boltzmann method for complex flows, *Annual Review of Fluid Mechanics,* Vol. 42, pp. 439-472, 2010.
[19] Z. Zhao, P. Huang, Y. Li, J. Li, A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 71, No. 2, pp. 223-248, 2013.
[20] C. Zhuo, C. Zhong, J. Cao, Filter-matrix lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows, *Physical Review E,* Vol. 85, No. 4, pp. 046703, 2012.
[21] P. Lallemand, L.-S. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability, *Physical Review E*, Vol. 61, No. 6, pp. 6546, 2000.
[22] I. Ginzburg, Equilibrium-type and link-type lattice Boltzmann models for generic advection and anisotropic-dispersion equation, *Advances in Water Resources,* Vol. 28, No. 11, pp. 1171-1195, 2005.
[23] S. Buehler, P. Eriksson, T. Kuhn, A. Von Engeln, C. Verdes, ARTS, the atmospheric radiative transfer simulator, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer,* Vol. 91, No. 1, pp. 65-93, 2005.
[24] K. Stamnes, S.-C. Tsay, W. Wiscombe, K. Jayaweera, Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media, *Applied Optics,* Vol. 27, No. 12, pp. 2502-2509, 1988.
[25] K. F. Evans, The spherical harmonics discrete ordinate method for three-dimensional atmospheric radiative transfer, *Journal of the Atmospheric Sciences,* Vol. 55, No. 3, pp. 429-446, 1998.
[26] S. Mishra, P. Talukdar, D. Trimis, F. Durst, Two-dimensional transient conduction and radiation heat transfer with temperature dependent thermal conductivity, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 3, pp. 305-314, 2005.
[27] G. Barakos, E. Mitsoulis, D. Assimacopoulos, Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* Vol. 18, No. 7, pp. 695-719, 1994.