



# Onset Yield Analysis of Rotating Variable Thickness Disk Made of Functionally Graded Materials in Engine of Aero Gas Turbine

## ARTICLE INFO

### Article Type

Original Research

### Authors

Shahriari B.\*<sup>1</sup> PhD,  
Karimian A.<sup>1</sup> MSc,  
Nazari M.R.<sup>1</sup> MSc

### How to cite this article

Shahriari B, Karimian A, Nazari M.-R. Onset Yield Analysis of Rotating Variable Thickness Disk Made of Functionally Graded Materials in Engine of Aero Gas Turbine. Modares Mechanical Engineering, 2019; 19(9): 2247-2254.

<sup>1</sup>Applied Design and Aerospace Structure Department, Mechanical Engineering Faculty, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

### \*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Faculty, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran  
Phone: +98 (31) 45914176  
Fax: +98 (31) 45227136  
shahriari@mut-es.ac.ir

### Article History

Received: April 08, 2018  
Accepted: February 12, 2019  
ePublished: September 01, 2019

## ABSTRACT

The present study is an attempt to analyze the yield threshold in a rotating variable-thickness disk made of functionally graded material (FGM) based on the Tresca yield criterion. The analysis was performed based on the small deformation theory and for the plane stress state. The modulus of elasticity, density and yield stress were assumed to be a power function of the radial coordinate. The Poisson's ratio due to slight variations in engineering materials is assumed constant, and the equilibrium equation governing the rotating disk was solved analytically. In addition to the type of material, the disk cross section profile can affect the distribution of stress fields. The thickness of the disk cross-section varies in the radial direction by a power function. In the present analysis, various states are considered for onset yield and commencement of plastic flow. For evaluation and validation, the results of the study are compared to similar results related to specific states (homogeneous and functionally graded constant-thickness disk) investigated in previous references. The results show that considering variable thickness for disk section has a significant effect on the stress level and the prediction of onset yield point.

**Keywords** Rotating Variable Thickness Disk; Onset Yield Analysis; Functionally Graded Materials; Tresca Criterion

## CITATION LINKS

[1] Functionally graded material: An overview [2] Theory of elasticity [3] Tresca's yield condition and the rotating disk [4] Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk [5] The elastic-plastic stress-distribution in the rotating annulus and in the annulus under external-pressure [6] Stress-distribution in the rotating elastic-plastic disk [7] Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube [8] Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density [9] On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure [10] Limit angular velocities of variable thickness rotating disks. International Journal of Solids and Structures [11] The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts [12] Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress [13] Stress analysis of Functionally Graded Material (FGM) rotating disk [14] Analytical study of elastic-plastic deformation of a rotating hollow FGM cylinder [15]. Analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness [16] Effects of material gradients on onset of yield in FGM rotating thick cylindrical shells [17] Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials [18] Investigation of mechanical behavior for a rotating FGM circular disk with a variable angular speed [19] Elasto-plastic deformation analysis of rotating disc beyond its limit speed [20] Elasto-plastic stresses in a functionally graded rotating disk [21] Onset yield analysis of rotating disks made of functionally graded materials using Tresca yield criterion [22] Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs

## تحلیل آستانه تسلیم دیسک ضخامت‌متغیر دوار ساخته‌شده از مواد هدفمند در موتور توربین‌گاز هوایی

بهروز شهریاری\* PhD

گروه طراحی کاربردی و سازه هوافضایی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

علی کریمیان MSc

گروه طراحی کاربردی و سازه هوافضایی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

محمدرضا نظری MSc

گروه طراحی کاربردی و سازه هوافضایی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

### چکیده

مقاله حاضر به مطالعه تحلیلی آستانه تسلیم در یک دیسک ضخامت‌متغیر دوار ساخته‌شده از مواد هدفمند (FGM) براساس معیار ترسکا می‌پردازد. تحلیل بر پایه نظریه تغییر شکل‌های کوچک و برای حالت تنش صفحه‌ای انجام شده است. مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم به‌صورت تابع‌های توانی از مختصه شعاعی فرض شده‌اند. ضریب پواسون به علت تغییرات کم در مواد مختلف ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین معادله حاکم بر دیسک دوار به‌صورت تحلیلی حل شده است. علاوه بر نوع ماده، عامل دیگری که در توزیع میدانهای تنش موثر است شکل مقطع عرضی (پروفیل) دیسک است. ضخامت مقطع عرضی دیسک، به‌صورت تابع توانی در جهت شعاعی تغییر می‌کند. در تحلیل حاضر حالت‌های مختلفی برای آغاز تسلیم و روند گسترش جریان پلاستیک در نظر گرفته شده است. برای ارزیابی و اعتبارسنجی، نتایج حاصل از تحقیق با نتایج مشابه مربوط به حالت‌های خاص (دیسک همگن و دیسک هدفمند ضخامت‌ثابت) که در مراجع پیشین موجود هستند، مقایسه و اعتبار نتایج نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد در نظر گرفتن ضخامت‌متغیر برای مقطع دیسک، اثر قابل توجهی روی تنش‌ها و پیش‌بینی مکان شروع تسلیم دارد.

**کلیدواژه‌ها:** دیسک ضخامت‌متغیر دوار، آستانه تسلیم، مواد هدفمند، معیار تسلیم ترسکا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱/۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۲۳

\*نویسنده مسئول: shahriari@mut-es.ac.ir

### مقدمه

پیشرفت سریع صنعتی در سال‌های اخیر، نیاز بشر را به موادی با خواص بهینه و قابلیت‌های ویژه افزایش داده است. دسته‌ای از مواد جدید توسعه‌یافته توسط دانشمندان این حوزه، مواد هدفمند یا تدریجی (FGM) هستند. مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که دارای تغییرات تدریجی و پیوسته در ترکیب، ساختار و خواص در جهات مختلف قطعه هستند. مواد هدفمند برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ به وسیله دانشمندان ژاپنی ساخته و معرفی شد [1]. و از آن زمان به بعد تحقیقات برای توسعه موادی با کارایی و مقاومت حرارتی بالا با استفاده از فناوری تغییرات تدریجی، ادامه پیدا کرد.

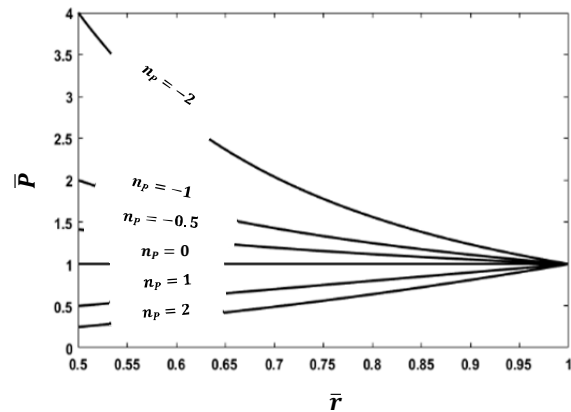
تجهیزات دوار به‌عنوان یکی از اجزای اصلی صنایع مختلف نقش ایفا می‌کنند. صنعت تجهیزات دوار با توجه به نقش راهبردی در صنایع مختلف و همچنین پارامترهای فراوانی که بر عملکرد و بهره‌وری صنعت موجود اثرگذار هستند، نیازمند انجام پژوهش و بررسی در حوزه‌های مختلف صنعت است. از جمله اجزاء دواری که در صنعت کاربرد فراوانی داشته و نقش مهمی ایفا می‌کنند می‌توان به دیسک دوار اشاره نمود. کاربرد روز افزون این جزء دوار در صنایع گوناگون از جمله صنایع هوافضا، صنایع خودروسازی، صنایع دریایی و غیره حاکی از اهمیت و جایگاه مهم این جزء دوار در صنعت

است. با توجه به نقش دیسک دوار در صنایع مختلف، تجزیه و تحلیل دیسک‌ها در شرایط متفاوت بارگذاری از اهمیت و جایگاه خاصی برخوردار است. در این راستا، در این پژوهش تلاش شده تا تحلیل مناسبی برای بررسی رفتار آستانه تسلیم دیسک دوار ضخامت‌متغیر صورت پذیرد.

تیموشنکو و گودیر [2] اولین کسانی بودند که فرم بسته معادلات تنش را برای دیسک دوار ارائه کردند. گامر با انتشار چهار مقاله در سال‌های (۱۹۸۵-۱۹۸۳) به بررسی تغییر شکل و توزیع تنش الاستیک-پلاستیک در دیسک دوار با شرایط مرزی مختلف پرداخت [3-6]. او تحلیل‌های خود را بر اساس معیار تسلیم ترسکا و قانون جریان انجام داد؛ در تحلیل‌های گامر، چگالی و ضخامت دیسک، ثابت در نظر گرفته شده است. گامر و لنس [7] توزیع تنش الاستوپلاستیک در یک استوانه دوار را بررسی کردند؛ در این تحلیل که بر اساس معیار تسلیم ترسکا استوار بود آنها به مقایسه توزیع تنش در دو حالت پلاستیک کامل و سختی خطی پرداختند. گون [8] تاثیر چگالی بر روی تنش الاستیک-پلاستیک دیسک دوار توخالی را همراه با ضخامت‌متغیر بررسی کرد، او در ادامه دیسک مفروض را تحت فشار خارجی تحلیل کرد [9]. *ارسلان* و *آرگسو* [10] به بررسی سرعت زاویه‌ای متناظر با آستانه تسلیم در دیسک‌های همگن ضخامت‌متغیر پرداختند.

با توجه به مزایای مواد هدفمند، پژوهش‌های مختلفی در زمینه دیسک و استوانه هدفمند دوار انجام شده است. *آکیس* و *ارسلان* [11] به بررسی آستانه تسلیم شفت‌های دوار توخالی ساخته‌شده از مواد هدفمند با استفاده از معیار تسلیم ترسکا پرداختند؛ آنها مدول الاستیسیته و تنش تسلیم را به‌صورت تابع‌های توانی از مختصه شعاعی در نظر گرفتند. در ادامه آنها یک حل دقیق برای تحلیل الاستوپلاستیک یک شفت دوار هدفمند که بر اساس معیار تسلیم ترسکا استوار بود ارائه دادند [12]. *ربیع زاده* و همکارانش [13] به بررسی تنش در دیسک دوار ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداختند. در تحلیل آنها مدول یانگ و ضریب پواسون به‌صورت توانی فرض شده است و حل معادلات براساس روش عددی تفاضل محدود است. *سلمانی* و هم‌متی [14] به مطالعه تحلیلی تغییر شکل الاستوپلاستیک استوانه دوار هدفمند پرداختند؛ آنها در تحلیل خود از پلاستیسیته ایده‌آل وابسته به معیار تسلیم ترسکا برای تحلیل تغییر شکل پلاستیک بهره بردند. *بیات* و همکارانش [15] به تحلیل دیسک دوار هدفمند ضخامت‌متغیر پرداختند؛ در پژوهش آنها خواص مواد و پروفیل مقطع دیسک به‌صورت توانی در راستای شعاع دیسک در نظر گرفته شده است. *فاتیحی* و *زمانی‌نژاد* [16] به بررسی تاثیر مواد هدفمند بر روی آستانه تسلیم استوانه دوار جدار ضخیم پرداختند؛ آنها همچنین دو معیار تسلیم فون میز و ترسکا را با هم مقایسه کردند. آنها در ادامه برای تحلیل الاستوپلاستیک استوانه دوار جدار ضخیم هدفمند تحت فشار، حل دقیق ارائه کردند و مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم را به‌صورت تابع توانی از مختصات شعاعی فرض کردند [17]. *تینگ دای* و *هونگ دای* [18] به بررسی رفتار دیسک دوار توخالی هدفمند با سرعت دورانی متغیر پرداختند. آنها مدول الاستیسیته و چگالی دیسک دوار را به‌صورت متغیر در راستای شعاع در نظر گرفتند. *اختراعی* و *رضایی* [19] به تحلیل تغییر شکل الاستوپلاستیک دیسک دوار در سرعت‌های فراتر از حد تسلیم پرداختند. آنها اثر پارامترهای مختلف شامل پروفیل‌های مقطع عرضی و خواص مواد را بر روی سرعت‌های حدی دیسک بررسی کردند. *حقی‌پناه* و همکاران [20] یک حل عددی برای تحلیل

و مقدار آن در شعاع خارجی با  $P_0$  نشان داده شود، آنگاه روند تغییرات خصوصیات مادی و هندسی به صورت بی بعد  $\bar{P} = P/P_0$  به ازای شعاع بی بعد  $\bar{r}$ ، در نمودار ۱ نمایش داده شده است.



نمودار ۱) نمودار تغییرات خصوصیات هندسی و مادی بی بعد دلخواه  $\bar{P}$  نسبت به شعاع بی بعد  $\bar{r}$

معادله حرکت دیسک دوار با در نظر گرفتن اثر ضخامت به صورت رابطه (۳) بیان می شود:

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$ ، مولفه های تنش شعاعی و محیطی هستند. باید توجه داشت که از نیروی حجمی در اثر وزن ( $\rho g$ ) صرف نظر شده است. حال تغییر مکان های شعاعی و محیطی به ترتیب  $u$  و  $v$  در نظر گرفته می شوند. با توجه به تقارن محوری، تغییر مکان محیطی وجود ندارد و به عبارت دیگر  $v = 0$  است. بنابراین روابط کرنش در مختصات استوانه ای برابر است با:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dr} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

با استفاده از قانون هوک برای حالت تنش صفحه ای و جایگذاری روابط کرنش (۴)، رابطه تنش برحسب جابجایی شعاعی به صورت روابط (۵) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(r)}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(r)}{1-\nu^2} \left( \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

با قراردادن مولفه های تنش در رابطه (۳)، معادله حرکت دیسک به فرم معادله (۶) تبدیل می شود:

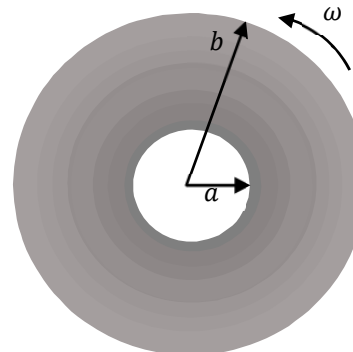
$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + (n_E + n_t + 1)r \frac{du}{dr} \\ + ((n_E + n_t)\nu - 1)u \\ = -\frac{1-\nu^2}{E_0} \rho_0 b^{n_E - n_\rho} \omega^2 r^{(n_\rho - n_E + 3)} \end{aligned} \quad (6)$$

حل تحلیلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۶) بر حسب جابجایی دارای پاسخ کلی به شکل رابطه (۷) است:

$$u = -Ar^{m_3} + C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \quad (7)$$

الاستیک- پلاستیک دیسک دوار هدفمند با سختی خطی ارائه دادند. زمانی نژاد و همکاران [21] به بررسی آستانه تسلیم دیسک های دوار ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از معیار تسلیم ترسکا پرداختند؛ در تحلیل آنها ضخامت دیسک، ثابت در نظر گرفته شده است. لوماکین و همکاران [22] با استفاده از معیار تسلیم فون میزز به همراه قانون جریان، میدان های تنش و کرنش الاستوپلاستیک دیسک دوار توخالی را تحلیل کردند.

هدف اصلی این پژوهش، تحلیل آستانه تسلیم دیسک توخالی ضخامت متغیر هدفمند دوار، با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم است. برای بررسی شرایط تسلیم، از معیار ترسکا استفاده شده است. شکل ۱ به صورت طرحواره، هندسه مسأله مورد بررسی و پارامترهای اصلی هندسی و بارگذاری را نشان می دهد.



شکل ۱) نمایش طرحواره هندسه و پارامترهای اصلی دیسک هدفمند

### معادلات حاکم

همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، یک دیسک ساخته شده از مواد هدفمند توخالی که به اندازه کافی نازک و بزرگ است با شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  و با سرعت زاویه ای  $\omega$  در حال دوران است. با توجه به هندسه مسأله، فرمول بندی و بررسی نتایج در دستگاه استوانه ای ( $r, \theta, z$ ) انجام و ارائه می شود. ضخامت مقطع دیسک، مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم، به صورت تابع های توانی (۱) از مختصه شعاعی فرض می شوند.

$$\begin{aligned} h(r) &= h_0 \left( \frac{r}{b} \right)^{n_h} \\ E(r) &= E_0 \left( \frac{r}{b} \right)^{n_E} \\ \rho(r) &= \rho_0 \left( \frac{r}{b} \right)^{n_\rho} \\ \sigma_Y(r) &= \sigma_{Y0} \left( \frac{r}{b} \right)^{n_\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط (۱)  $h_0, E_0, \rho_0, \sigma_{Y0}$  به ترتیب مقادیر ضخامت، مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم در شعاع خارجی،  $r=b$ ، هستند.  $n_t, n_E, n_\rho, n_\sigma$  پارامترهای هندسی و ماده هستند و به صورت روابط (۲) تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} n_t &= \delta_t n \\ n_E &= \delta_E n \\ n_\rho &= \delta_\rho n \\ n_\sigma &= \delta_\sigma n \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط (۲)  $\delta_t, \delta_E, \delta_\rho, \delta_\sigma$  به ترتیب مقادیری ثابت هستند. اگر در روابط (۲) خصوصیات مادی و هندسی را به صورت کلی با  $P$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. همچنین پارامترهای ثابت رابطه (۷) به صورت روابط (۸) تعریف می‌شوند.

$$A = \frac{\left(\frac{1-v^2}{E_0}\right)\rho_0 b^{n_E-n_\rho}\omega^2}{n_\rho(n_\rho+6) + (v-n_\rho-3)n_E + (n_\rho-n_E+3+v)n_t + 8}$$

$$m_1 = \frac{-(n_E+n_t) + \sqrt{(n_E+n_t)^2 - 4((n_E+n_t)v-1)}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-(n_E+n_t) - \sqrt{(n_E+n_t)^2 - 4((n_E+n_t)v-1)}}{2}$$

$$m_3 = n_\rho - n_E + 3 \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه جابجایی (۷) در روابط تنش (۵)، تنش‌های شعاعی و محیطی بر حسب ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  به صورت روابط (۹) به دست می‌آیند.

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1-v^2} [-A(m_3+v)r^{(m_3-1)} + (m_1+v)C_1r^{m_1-1} + (m_2+v)C_2r^{m_2-1}]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(r)}{1-v^2} [-A(m_3v+1)r^{m_3-1} + (m_1v+1)C_1r^{m_1-1} + (m_2v+1)C_2r^{m_2-1}] \quad (9)$$

ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  از شرایط مرزی به دست می‌آیند. برای دیسک توخالی، تنش شعاعی در مرزهای داخل  $(\sigma_r)_{r=a}$  و خارج  $(\sigma_r)_{r=b}$ ، صفر است. در نتیجه با اعمال شرایط مرزی برای دیسک توخالی ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  به صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{(a^{m_2}b^{(3)} - a^{m_3}b^{m_2+n_E-n_\rho})R}{(m_1+v)(a^{m_2}b^{m_1} - a^{m_1}b^{m_2})}$$

$$C_2 = \frac{(a^{m_3-1}b^{n_E-n_\rho+m_1-1} - a^{m_1-1}b^{(2)})R}{(m_2+v)(a^{m_2-1}b^{m_1-1} - a^{m_1-1}b^{m_2-1})} \quad (10)$$

که در آن  $R$ ، پارامتر ثابت رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$R = \frac{(m_3+v)\left(\frac{1-v^2}{E_0}\right)\rho_0\omega^2}{n_\rho(n_\rho+6) + (v-n_\rho-3)n_E + (n_\rho-n_E+3+v)n_t + 8} \quad (11)$$

به منظور رسیدن به جواب‌های کلی با استفاده از روابط (۱۲)، روابط به دست آمده بی‌بعد می‌شوند.

$$\bar{u} = \frac{uE_0}{\sigma_{Y_0}b}, \quad \Omega = \left(\frac{\rho}{\sigma_{Y_0}}\right)^{1/2} b\omega, \quad \bar{r} = \frac{r}{b}$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{Y_0}}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{Y_0}}, \quad \bar{a} = \frac{a}{b}$$

$$\bar{C}_1 = \frac{C_1E_0b^{m_1-1}}{\sigma_{Y_0}}, \quad \bar{C}_2 = \frac{C_2E_0b^{m_2-1}}{\sigma_{Y_0}} \quad (12)$$

### ۱-۲- بررسی تسلیم

برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای متناظر با آستانه تسلیم و بررسی شرایط تسلیم، از معیار تسلیم ترسکا استفاده شده است. استفاده از معیار تسلیم ترسکا مستلزم مشخص شدن ترتیب

تنش‌های اصلی است. از طرفی ترتیب تنش‌های اصلی  $\sigma_\theta$  و  $\sigma_r$  در این مسأله، به مقدار عددی پارامترهای توان  $n_\rho, n_E, n_t$  و  $n_\sigma$ ، نسبت شعاع‌ها  $(r/b)$ ، وابسته است. به همین دلیل با توجه به مرجع [21]، برای نظارت بر شروع تسلیم، از یک متغیر بی‌بعد  $\Psi$  که بر اساس معیار ترسکا استوار است، استفاده می‌شود. این متغیر به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود:

$$\Psi(\bar{r}) = \bar{r}^{(-n_\sigma)} \text{Max}\{(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r), (\bar{\sigma}_\theta), (\bar{\sigma}_r)\} \quad (13)$$

معیار بالا بیان می‌کند که تسلیم از نقطه‌ای شروع می‌شود که  $\Psi=1$  باشد و در نقطه شروع تسلیم، تابع بی‌بعد  $\Psi$  داری بیشترین مقدار باشد.

برای تحلیل رفتار دیسک هدفمند دوار، بسته به مقدار پارامترهای توان، تسلیم ممکن است از شعاع داخل، شعاع خارج، همزمان از شعاع داخل و خارج یا حد فاصل شعاع داخل و خارج شروع شود.

### ۱-۲-۱- حالت اول: شروع تسلیم از شعاع داخل

تسلیم هنگامی از شعاع داخل شروع می‌شود که  $\Psi(\bar{a})=1$  باشد و تابع  $\Psi$  در شعاع داخلی دارای بیشترین مقدار مطلق باشد. با استفاده از روابط تنش (۹) و استفاده از شرط مرزی  $(\bar{\sigma}_r)_{\bar{r}=\bar{a}}=0$ ، سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_{e1}$ ، به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود:

$$\Omega_{e1} = \{S[-(m_1+v)(m_2+v)(m_3v+1)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1})\bar{a}^{(m_3)} + (m_1v+1)(m_2+v)(m_3+v)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_3})\bar{a}^{m_1} + (m_2v+1)(m_1+v)(m_3+v)(\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_1})\bar{a}^{m_2}]^{-1}\}^{0.5} \quad (14)$$

که ثابت  $S$ ، به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود:

$$S = \frac{(1-v^2)(m_1+v)(m_2+v)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1})}{H(\bar{a})^{n_E-n_\sigma-1}} \quad (15)$$

که در آن  $H$ ، طبق رابطه (۱۶) بیان می‌شود:

$$H = \frac{(1-v^2)}{n_\rho(n_\rho+6) + (v-n_\rho-3)n_E + (n_\rho-n_E+3+v)n_t + 8} \quad (16)$$

### ۱-۲-۲- حالت دوم: شروع تسلیم از شعاع خارج

در این حالت تسلیم هنگامی از شعاع خارج شروع می‌شود که  $\Psi(1)=1$  باشد و تابع  $\Psi$  در شعاع خارجی دارای بیشترین مقدار مطلق باشد. با استفاده از روابط تنش (۹) و استفاده از شرط مرزی  $(\bar{\sigma}_r)_{\bar{r}=\bar{b}}=0$ ، سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_{e2}$ ، به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود:

$$\Omega_{e2} = \{S_b[-(m_1+v)(m_2+v)(m_3v+1)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1}) + (m_1v+1)(m_2+v)(m_3+v)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_3}) + (m_2v+1)(m_1+v)(m_3+v)(\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_1})]^{-1}\}^{0.5} \quad (17)$$

که ثابت  $S_b$ ، به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

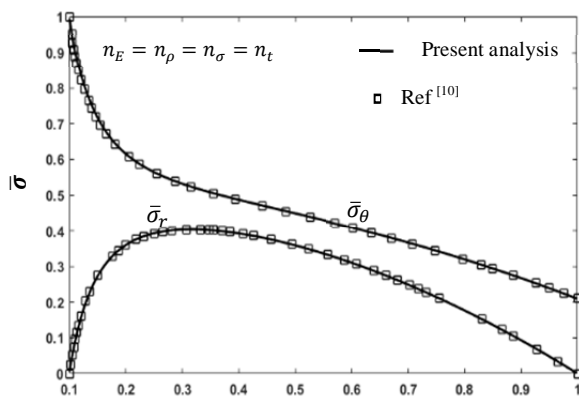
$$S_b = \frac{(1-v^2)(m_1+v)(m_2+v)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1})}{H} \quad (18)$$

### ۱-۲-۳- حالت سوم: شروع تسلیم همزمان از شعاع داخل و خارج

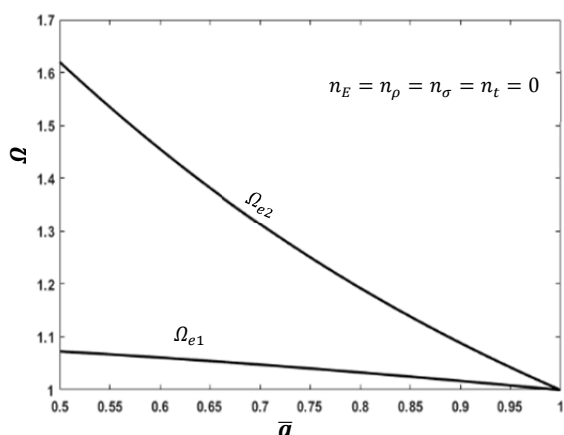
در این حالت تسلیم هنگامی همزمان از شعاع داخل و خارج شروع

نمودار ۴ سرعت لازم برای شروع تسلیم از شعاع داخلی و خارج نسبت به شعاع بی بعد داخلی  $\bar{a}$  را برای دیسک همگن ضخامت متغیر نشان می دهد. پارامتر توان  $n_t = 1$  در نظر گرفته شده است.

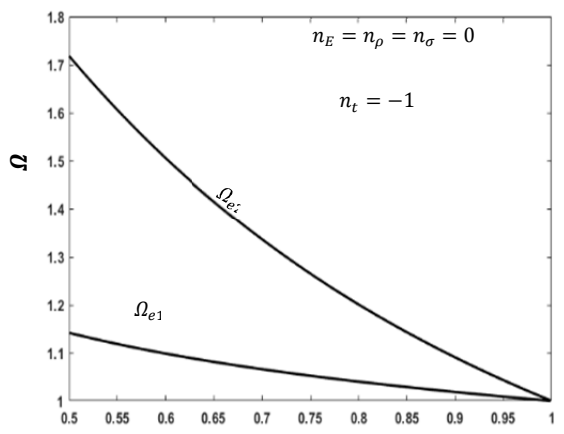
همان طور که در نمودار ۴ مشاهده می شود، برای تمام مقادیر شعاع بی بعد داخلی  $\bar{a}$ ،  $\Omega_{e2} > \Omega_{e1}$  است. جدول ۱ مقادیر سرعت لازم برای شروع تسلیم از شعاع داخلی و خارج نسبت به دو حالت ضخامت ثابت و متغیر را در شعاع داخلی  $\bar{a} = 0.5$  مقایسه می کند.



نمودار ۲ تغییرات تنش های بی بعد شعاعی و محیطی نسبت به شعاع بی بعد  $\bar{r}$  در سرعت حدی  $\Omega = 1/0.94351$



نمودار ۳ تغییرات سرعت دورانی لازم برای شروع تسلیم از شعاع داخلی و خارج نسبت به شعاع داخلی بی بعد  $\bar{a}$ ، برای دیسک همگن ضخامت ثابت



نمودار ۴ تغییرات سرعت دورانی لازم برای شروع تسلیم از شعاع داخلی و خارج نسبت به شعاع داخلی بی بعد  $\bar{a}$ ، برای دیسک همگن ضخامت متغیر

می شود که به صورت همزمان  $\Psi(\bar{a}) = 1$  و  $\Psi(1) = 1$  بوده و تابع  $\Psi$  باید در شعاع داخلی و خارج دارای بیشترین مقدار باشد. با توجه به شرایط مرزی دیسک و استفاده از روابط (۱۴ و ۱۷)، سرعت دورانی بحرانی بی بعد  $\Omega_{cr}$  و پارامتر بحرانی توان  $n_{cr}$ ، از حل دستگاه معادله (۱۹) به دست می آیند:

$$\Omega_{cr} - \{S_a[-(m_1 + \nu)(m_2 + \nu)(m_3\nu + 1)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1})\bar{a}^{(m_3)}] + (m_1\nu + 1)(m_2 + \nu)(m_3 + \nu)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_3})\bar{a}^{m_1} + (m_2\nu + 1)(m_1 + \nu)(m_3 + \nu)(\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_1})\bar{a}^{m_2}\}^{-1\}^{0.5} = 0$$

$$\Omega_{cr} - \{S_b[-(m_1 + \nu)(m_2 + \nu)(m_3\nu + 1)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1}) + (m_1\nu + 1)(m_2 + \nu)(m_3 + \nu)(\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_3}) + (m_2\nu + 1)(m_1 + \nu)(m_3 + \nu)(\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_1})\bar{a}^{m_2}\}^{-1\}^{0.5} = 0 \quad (19)$$

#### ۲-۱-۴- حالت چهارم: شروع تسلیم از شعاعی بین شعاع داخلی و خارج

برای شروع تسلیم از شعاعی بین شعاع داخلی و خارج، تابع بی بعد  $\Psi$ ، در نقطه شروع تسلیم  $r_{ep}$  باید برابر یک بوده و در این نقطه دارای بیشترین مقدار مطلق باشد. به همین دلیل باید رابطه (۲۰) برقرار شود تا از حد فاصل شعاع داخلی و خارج شروع شود.

$$\begin{cases} \Psi(\bar{r}_{ep}) = 1 \\ \left. \frac{d\Psi}{dr} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_{ep}} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

از رابطه (۲۰) برای یک پارامتر توان  $n$ ، سرعت دورانی لازم برای شروع جریان پلاستیک و محل شروع تسلیم  $\bar{r}_{ep}$ ، محاسبه می شود.

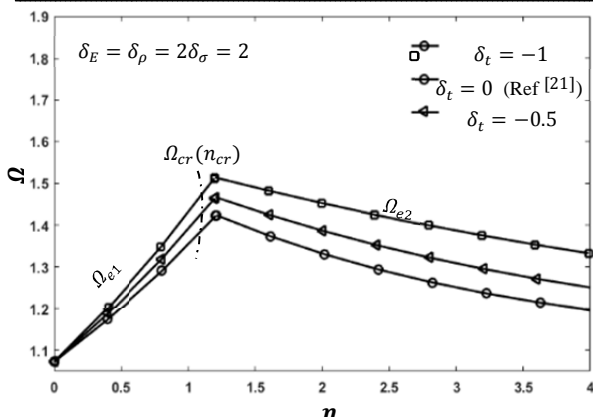
#### نتایج و بحث

در این بخش، نتایج به دست آمده از تحلیل آستانه تسلیم دیسک دوار ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند ارائه می شوند. در این پژوهش از تغییرات ضریب پواسون صرف نظر شده و نسبت پواسون برابر با  $1/3$  در نظر گرفته شده است. نسبت شعاعی در نظر گرفته شده برابر  $\bar{a} = 0.5$  است. پیش از بررسی اثر پارامترهای مختلف بر شروع تسلیم دیسک دوار، نخست نتایج تحلیل این مقاله ارزیابی و اعتبار سنجی می شوند. برای این منظور ابتدا به بررسی تنش های شعاعی  $\bar{\sigma}_r$  و محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$  متناظر با سرعت حدی  $\Omega$ ، در دیسک توخالی همگن در حالت ضخامت ثابت پرداخته می شود. همان طور که در نمودار ۲ نشان داده شده است، نتایج با مرجع [10] در حالت ضخامت ثابت مقایسه شده است.

همان طور که در نمودار ۲ مشاهده می شود، تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد که نشان دهنده صحت نتایج تحلیل است. با توجه به مرجع [21]، نکته دیگری که در مورد دیسک های دوار ضخامت ثابت همگن لازم به توضیح است، تسلیم در دیسک های همگن همواره از شعاع داخلی شروع می شود. در نمودار ۳ سرعت لازم برای شروع تسلیم از شعاع داخلی و خارج نسبت به شعاع بی بعد داخلی  $\bar{a}$  رسم شده است. این شکل نشان می دهد برای تمام مقادیر  $\bar{a}$  همواره  $\Omega_{e2} > \Omega_{e1}$  است. در نتیجه دیسک ضخامت ثابت همگن همواره از شعاع داخلی شروع به تسلیم می کند.

جدول ۱ مقادیر سرعت حدی دورانی بی‌بعد  $\Omega$  در شعاع داخلی  $\bar{a} = 0.5$

پارامتر توان $n_t$	سرعت حدی دورانی $\Omega_{e1}$	سرعت حدی دورانی $\Omega_{e2}$
$n_t = 0$	۱/۰۷۲۹	۱/۶۱۹۶
$n_t = -0.5$	۱/۱۰۳۷	۱/۶۶۷۸
$n_t = -1$	۱/۱۴۱۸	۱/۷۱۸۰



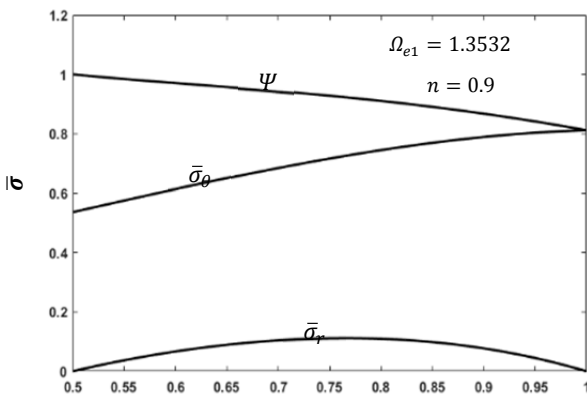
نمودار ۱) تغییرات سرعت حدی دورانی بی‌بعد  $\Omega$  نسبت به پارامتر توان  $n$

جدول ۲) تغییرات سرعت حدی دورانی بی‌بعد  $\Omega$  نسبت به پارامتر توان  $n$

ثابت توان $\delta_t$	پارامتر توان بحرانی $n_{cr}$	سرعت حدی دورانی $\Omega_{cr}$
$\delta_t = 0$	۱/۲۱۰۹	۱/۴۲۳۶
$\delta_t = -0.5$	۱/۲۰۵۵	۱/۴۶۶۹
$\delta_t = -1$	۱/۱۹۹۵	۱/۵۱۴۱

جدول ۳) شروط لازم برای شروع تسلیم

مکان شروع تسلیم	پارامتر توان $n$	سرعت دورانی $\Omega$
شعاع داخل	$n < n_{cr}$	$\Omega_{e1} < \Omega_{e2}$
شعاع خارج	$n > n_{cr}$	$\Omega_{e1} > \Omega_{e2}$
همزمان از شعاع داخل و خارج	$n = n_{cr}$	$\Omega_{e1} = \Omega_{e2}$



نمودار ۴) تغییرات تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$ ، تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$  و تابع بی‌بعد  $\psi$  نسبت به شعاع بی‌بعد  $\bar{r}$  در سرعت حدی  $\Omega_{e1} = 1/3532$  و پارامتر توان  $n = 0.9$

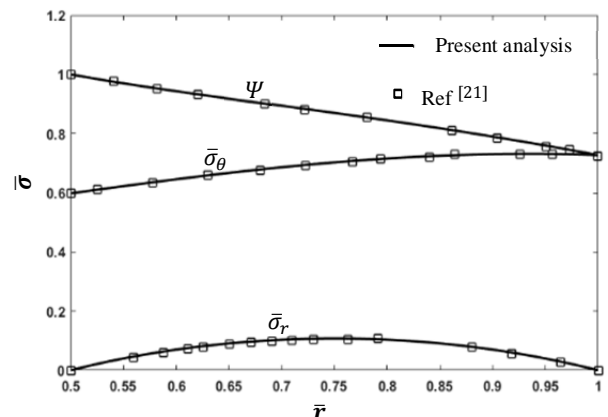
همان طور که در نمودار ۷ مشاهده می‌شود، در شعاع داخل ( $\bar{a} = 0.5$ )، مقدار  $\psi = 1$  بوده و در این نقطه دارای بیشترین مقدار است، به همین دلیل تسلیم از شعاع داخل شروع می‌شود. همچنین برای شروع تسلیم از شعاع خارج، مقادیر پارامتر توان  $1/8$  و  $n = 1/4055$  در نظر گرفته می‌شود. همان طور که در نمودار ۸ نشان داده شده است، در شعاع خارج ( $\bar{r} = 1$ )، مقدار  $\psi = 1$  بوده و در این نقطه دارای بیشترین مقدار است، به همین دلیل تسلیم از شعاع خارج شروع می‌شود.

برای تاکید بر اهمیت شرط کافی، تغییرات متغیر  $\psi$  برحسب شعاع بی‌بعد  $\bar{r}$ ، برای  $n = n_{cr}$  و  $\Omega = \Omega_{cr}$  در نمودار ۹ نشان داده شده است. همان طور که در نمودار ۹ مشاهده می‌شود در شعاع داخل و خارج مقدار  $\psi = 1$  بوده اما در این نقاط بیشترین مقدار را ندارد، بنابراین تسلیم از حد فاصل شعاع داخل و خارج شروع می‌شود.

در ادامه، تغییرات تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$ ، تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$  و تابع بی‌بعد  $\psi$ ، نسبت به  $\bar{r}$  در دیسک توخالی دوار ساخته شده از مواد هدفمند در حالت ضخامت ثابت بررسی می‌شود. همان طور که در نمودار ۵ نشان داده شده است، نتایج با مرجع [21] مقایسه شده است. به ازای پارامتر توان  $n = 0.7424$  و سرعت حدی  $1/27165$   $\Omega = 0.5$ ، در شعاع داخل ( $\bar{a} = 0.5$ )، مقدار  $\psi = 1$  بوده و در این نقطه دارای بیشترین مقدار است، به همین دلیل تسلیم از شعاع داخل شروع می‌شود. لازم به توضیح است که مقادیر ثابت توان  $\bar{\sigma}_t$ ، به صورت  $(\delta_E = \delta_\rho = 2\delta_\sigma = 2)$  و  $\delta_t = 0$  تعریف می‌شود. همان طور که در نمودار ۵ نشان داده شده است، در این حالت نیز نتایج به دست آمده منطبق با نتایج مرجع [21] است.

برای بررسی اثر تغییرات ضخامت، تغییرات سرعت حدی بی‌بعد  $\Omega_{cr}$  بر حسب پارامتر توان  $n$ ، در نمودار ۶ نشان داده شده است. همان طور که از نمودار ۶ مشهود است، با افزایش مقدار ثابت توان  $\bar{\sigma}_t$ ، سرعت حدی بی‌بعد  $\Omega_{cr}$  افزایش می‌یابد. جدول ۲ بیانگر مقادیر به دست آمده از نمودار ۶ است. نکته دیگری که در مورد نمودار ۶ لازم است توضیح داده شود در ارتباط با شروع تسلیم است. تعیین مکان شروع تسلیم مستلزم برقراربودن شرایطی است که به دو دسته شرایط لازم و کافی تقسیم می‌شوند. با توجه به شروط لازم در جدول ۳، تسلیم ممکن است در یکی از حالت‌های ذکر شده شروع شود.

شروط کافی برای شروع تسلیم این است که در نقطه شروع تسلیم تابع بی‌بعد  $\psi$  دارای بیشترین مقدار باشد. در غیر این صورت جریان پلاستیک از حد فاصل شعاع داخل و خارج شروع می‌شود. در ادامه، حالت‌های مختلف برای شروع تسلیم در دیسک دوار ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند بررسی می‌شود. برای ارائه نتایج عددی مقادیر ثابت توان  $\bar{\sigma}_t$ ، به صورت  $(\delta_\rho = 2\delta_\sigma = 2)$  و  $\delta_E = 0.5$  تعریف می‌شود. برای شروع تسلیم از شعاع داخل مطابق شروط ذکر شده در جدول ۳ عمل می‌شود. به طور مثال مطابق نمودار ۷، به ازای پارامتر توان  $n = 0.9$  و سرعت حدی  $\Omega = 1/3532$ ، تغییرات تنش‌ها و تابع  $\psi$  رسم شده است.



نمودار ۵) تغییرات تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$ ، تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$  و تابع بی‌بعد  $\psi$  نسبت به شعاع بی‌بعد  $\bar{r}$  در سرعت حدی  $\Omega_{e1} = 1/27165$  و پارامتر توان  $n = 0.7424$



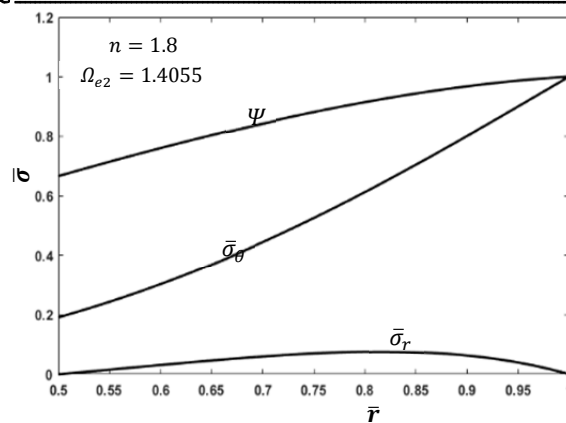
**پی نوشت**

**فهرست نمادها و نشانه‌ها**

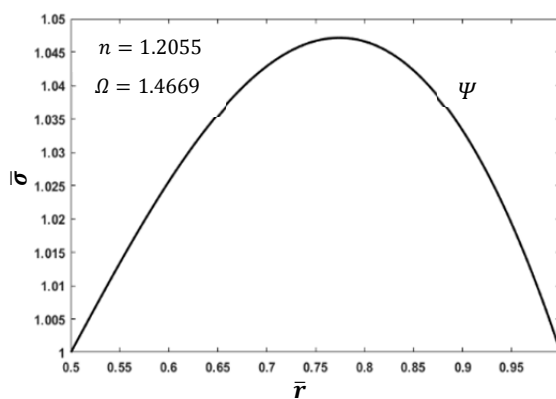
مختصه شعاعی بی بعد	$\bar{r}$
شعاع داخلی خارجی دیسک (m)	$a, b$
ثابت‌های بی بعد مادی و هندسی	$\delta_E, \delta_\rho, \delta_\sigma, \delta_t$
پارامترهای بی بعد مادی و هندسی	$n_E, n_\rho, n_\sigma, n_t$
مدول یانگ (مدول یانگ در شعاع خارجی) (Pa)	$E(E_0)$
ثابت‌های انتگرال گیری	$C_i$
جابجایی شعاعی (جابجایی شعاعی بی بعد) (m)	$u(\bar{u})$
ضخامت مقطع (ضخامت مقطع در شعاع خارج) (m)	$h(h_0)$
مختصات در دستگاه استوانه‌ای	$r, \theta, z$
<b>علائم یونانی</b>	
چگالی (چگالی در شعاع خارجی) ( $\text{kgm}^{-3}$ )	$\rho(\rho_0)$
مولفه تنش (مولفه تنش بی بعد) (Pa)	$\sigma(\bar{\sigma}_i)$
مولفه تنش تسلیم در شعاع خارجی (Pa)	$\sigma_{Y_0}$
ضریب پواسون	$\nu$
سرعت زاویه‌ای (سرعت زاویه‌ای بی بعد) ( $r/s$ )	$\omega(\Omega)$
متغیر بی بعد وابسته به معیار ترسکا	$\Psi$
مولفه‌های کرنش	$\varepsilon_i$

**منابع**

- 1- Mahamood RM, Akinlabi ET, Shukla M, Pityana S. Functionally graded material: An overview. Proceedings of the World Congress on Engineering (WCE 2012), Vol III, July 4-6, 2012, London, UK. London: WCE; 2012.
- 2- Timoshenko S, Goodier JN. Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill; 1969.
- 3- Gamer U. Tresca's yield condition and the rotating disk. Journal of Applied Mechanics. 1983;50(3):676-678.
- 4- Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk. Ingenieur Archiv. 1984;54(5):345-354.
- 5- Gamer U. The elastic-plastic stress-distribution in the rotating annulus and in the annulus under external-pressure. Applied Mathematics and Mechanics. 1984;64(4):126-128. [German]
- 6- Gamer U. Stress-distribution in the rotating elastic-plastic disk. Applied Mathematics and Mechanics. 1985;65(4):136-137. [German]
- 7- Gamer U, Lance RH. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube. Acta Mechanica. 1983;50(1-2):1-8.
- 8- Güven U. Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density. International Journal of Mechanical Sciences. 1992;34(2):133-138.
- 9- Güven U. On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure. International Journal of Solids and Structures. 1993;30(5):651-658.
- 10- Eraslan AN, Argeso H. Limit angular velocities of variable thickness rotating disks. International Journal of Solids and Structures. 2002;39(12):3109-3130.
- 11- Akis T, Eraslan AN. The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts. Acta Mechanica. 2006;187(1-4):169-187.
- 12- Akis T, Eraslan AN. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress. Archive of Applied Mechanics. 2007;77(10):745-765.
- 13- Rabizadeh E, Hassanbeigi A, Mofidfar M, Rabizadeh T. Stress analysis of Functionally Graded Material (FGM) rotating disk. 14<sup>th</sup> Annual Conference of Mechanical



**نمودار ۸)** تغییرات تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$ ، تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$  و تابع بی بعد  $\Psi$ ، نسبت به شعاع بی بعد  $\bar{r}$  در سرعت حدی  $\Omega_{e2} = 1/4 \cdot 55$  و پارامتر توان  $n = 1/8$



**نمودار ۹)** تغییرات تابع بی بعد  $\Psi$ ، نسبت به شعاع بی بعد  $\bar{r}$  در سرعت بحرانی  $\Omega_{cr} = 1/4 \cdot 55$  و پارامتر توان  $n_{cr} = 1/2 \cdot 55$

**نتیجه گیری**

در این مقاله، مطالعه تحلیلی آستانه تسلیم در یک دیسک ضخامت متغیر دوار ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) بر اساس معیار ترسکا ارائه شد. ضخامت مقطع دیسک، مدول الاستیسیته، چگالی و تنش تسلیم، به صورت تابع‌های توانی از مختصه شعاعی فرض شدند. در این مقاله اثر پارامترهای مختلف بر شروع تسلیم دیسک دوار بررسی شد. همچنین با تاکید بر اینکه تسلیم در دیسک‌های همگن همواره از شعاع داخلی شروع می‌شود، حالت‌های مختلفی برای آغاز تسلیم و روند گسترش جریان پلاستیک در دیسک دوار هدفمند در نظر گرفته شد. نتایج به دست آمده به روشنی اهمیت در نظر گرفتن تغییرات ضخامت را در تحلیل آستانه تسلیم دیسک دوار هدفمند نشان می‌دهد.

**تشکر و قدردانی:** نویسندگان این مقاله از مجتمع دانشگاهی مکانیک که امکان انجام این تحقیق را فراهم نمودند کمال تشکر را دارند.

**تابیدیه اخلاقی:** این مقاله در مجله دیگری منتشر نشده و همچنین تحت داوری مجله دیگری نیست.

**تعارض منافع:** پژوهش صورت گرفته تعارض منافعی با هیچ شخص یا سازمانی ندارد.

**سهم نویسندگان:** بهروز شهریاری (نویسنده اول)، روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۴۵٪)؛ علی کریمیان (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۴۵٪)؛ محمدرضا نظری (نویسنده سوم)، پژوهشگر کمکی (۱۰٪)

- 18- Dai T, Dai HL. Investigation of mechanical behavior for a rotating FGM circular disk with a variable angular speed. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2015;29(9):3779-3787.
- 19- Ekhteraei Toussi H, Rezaei Farimani M. Elasto-plastic deformation analysis of rotating disc beyond its limit speed. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2012;89:170-177.
- 20- Haghpanah Jahromi B, Nayeb Hashemi H, Vaziri A. Elasto-plastic stresses in a functionally graded rotating disk. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2012;134(2):021004.
- 21- Zamani Nejad SM, Rastgoo A, Hadi A. Onset yield analysis of rotating disks made of functionally graded materials using Tresca yield criterion. *Modares Mechanical Engineering*. 2014;14(8):68-74. [Persian]
- 22- Lomakin E, Alexandrov S, Jeng YR. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs. *Archive of Applied Mechanics*. 2016;86(1-2):235-244.
- Engineering, Isfahan, 2006. Isfahan: Isfahan University of Technology; 2006. [Persian]
- 14- Salmani Tehrani M, Hemati MR. Analytical study of elastic-plastic deformation of a rotating hollow FGM cylinder. *Modares Mechanical Engineering*. 2014;14(5):73-82. [Persian]
- 15- Bayat M, Saleem M, Sahari BB, Hamouda AMS, Mahdi E. Analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness. *Mechanics Research Communications*. 2008;35(5):283-309.
- 16- Fatehi P, Zamani Nejad M. Effects of material gradients on onset of yield in FGM rotating thick cylindrical shells. *International Journal of Applied Mechanics*. 2014;6(4):1450038.
- 17- Zamani Nejad M, Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials. *International Journal of Engineering Science*. 2015;86:26-43.