



## طراحی روینگر بهره بالا برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی با تأخیر هم‌زمان و متفاوت در حالت، ورودی و خروجی

مرتضی سجادی<sup>1</sup>، محمد عطایی<sup>2\*</sup>، محسن اکرامیان<sup>3</sup>

1- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، اصفهان

3- استادیار، مهندسی برق، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* ataei@eng.ui.ac.ir, 8174673441، اصفهان

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 05 شهریور 1396

پذیرش: 30 آبان 1396

ارائه در سایت: 01 دی 1396

کلید واژگان:

سیستم‌های غیرخطی تأخیردار

فرم مثلثی

رویتگر بهره بالا

در سیستم‌های کنترل اگر بنا به دلایل مختلف مانند بحث هزینه، شرایط محیطی و سایر موارد نتوان به وسیله‌ی حسگر حالت‌های سیستم را اندازه‌گیری کرد، از روینگر برای تخمین حالت‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله، یک روینگر بهره بالا برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی به فرم مثلثی، با تأخیر هم‌زمان و متفاوت در حالت، ورودی و خروجی پیشنهاد داده می‌شود. با فرض مشخص بودن میزان تأخیرهای زمانی موجود در فرایند، شرایط مناسب برای تضمین همگرا شدن مجانبی خطای بین حالت‌های تخمین زده شده با استفاده از روینگر پیشنهادی و حالت‌های واقعی و نامعلوم سیستم به صفر، با استفاده از قضیه‌ی لیاپانف-کراسفسکی فراهم می‌شود. شروط لازم برای اثبات پایداری مجانبی روینگر به این صورت به دست می‌آید که میزان تأخیر زمانی در خروجی فرایند از یک مقدار مشخص کمتر و همچنین پارامتر بهره بالا موجود در ساختار روینگر از مقادیر مشخصی بزرگ‌تر باشد. برای ارزیابی عملکرد روینگر پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی بر روی سیستم پاندول معکوس که با موتور جریان مستقیم کنترل می‌گردد، نشان داده می‌شود.

## High-gain observers for a class of nonlinear systems with simultaneous and different delay at state, input and output

Morteza Sajadi, Mohammad Ataei\*, Mohsen Ekramian

Department of Electrical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

\* P.O.B. 8174673441 Isfahan, Iran, ataei@eng.ui.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 27 August 2017  
Accepted 21 November 2017  
Available Online 22 December 2017

### Keywords:

Nonlinear delay systems  
Triangular form  
High-gain observer

### ABSTRACT

In control systems, if for any reason, such as cost limitation and environmental conditions, the states of the system could not be measured directly by measurement sensors, suitable observer should be designed for state estimation. In this paper, a high-gain observer for a class of nonlinear systems in triangular form with divers and simultaneous delay at state, input and output equations is proposed. If time delays are known, sufficient conditions are provided by using Lyapunov-Krasovskii theorem that guarantees the state estimation error converges to zero asymptotically. The required conditions are derived in a way that the output time delay become smaller than a defined amount and also the high-gain parameter in the observer structure to be larger than the specified values. Simulation results on inverted pendulum with dc motor control illustrate the effectiveness of the proposed observer.

### 1- مقدمه

بسیاری از طراحان علاقه دارند تا بنا به دلایل مختلف از حسگرهای کمتری در حلقه کنترل استفاده کنند. از این‌رو در علم کنترل مباحث طراحی روینگرها به‌طور جدی مورد بررسی قرار می‌گیرد که قابلیت تخمین حالت‌ها را با استفاده از حسگر کمتر و به‌صورت نرم افزاری دارند. ایده اولیه‌ی روینگر توسط لیونبرگر<sup>1</sup> در سال 1964 مطرح شد که طراحی روینگر برای سیستم‌های خطی بررسی و با استفاده از اطلاعات ورودی و خروجی سیستم، حالت‌های فرایند مورد نظر تخمین زده می‌شود [1]. بعد از مطرح شدن این ایده توسط لیونبرگر تحقیقات پیرامون بررسی روینگرها توسعه یافت و طراحی

رویتگر برای فرم‌های مختلف سیستم‌های غیرخطی بررسی شد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به [2] اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین روینگرهای غیرخطی، روینگر بهره بالا می‌باشد که معمولاً برای فرم مثلثی استفاده می‌شود. اگر فرم سیستم غیرخطی مثلثی نبود، با استفاده از روابطی می‌توان آن را به فرم مثلثی تبدیل کرده و از این روینگر استفاده نمود. در این روینگر به ازای هر مقدار ثابت لپ‌شیتز با انتخاب بزرگ‌تر بهره روینگر، پایداری و همگرا شدن خطا به صفر نتیجه می‌شود [3].

در تخمین زدن صحیح حالت‌ها توسط روینگر در اختیار داشتن اطلاعات صحیح از ورودی و خروجی فرایند تحت مطالعه بسیار حائز اهمیت است. اما

<sup>1</sup> Luenberger

### Please cite this article using:

M. Sajadi, M. Ataei, M. Ekramian, High-gain observers for a class of nonlinear systems with simultaneous and different delay at state, input and output, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 463-468, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

برای سیستم‌های با تأخیر هم‌زمان در حالت و ورودی پرداخته شده است و در نهایت در [18] طراحی رولتگر بهره بالا برای سیستم‌های با تأخیر در خروجی مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله، برای اولین بار طراحی رولتگر بهره بالا برای سیستم‌های غیرخطی به فرم مثلثی با تأخیر هم‌زمان و متفاوت در حالت، ورودی و خروجی بررسی می‌شود. با استفاده از روش پایداری LKF، در صورت لپ-شیتز بودن قسمت غیرخطی مدل سیستم و همچنین با در اختیار داشتن میزان تأخیرهای زمانی موجود در فرایند، شرایط مناسب برای اثبات پایداری مجانبی فراهم می‌گردد. در نهایت برای نشان دادن عملکرد مناسب رولتگر پیشنهادی به طراحی این رولتگر روی یک سیستم عملی که تأخیر هم‌زمان در حالت و خروجی دارد، پرداخته می‌شود.

ادامه مطالب در این مقاله به این صورت آماده شده است. در بخش 2 به بیان مسئله و فرضیات لازم پرداخته می‌شود. طراحی رولتگر و بررسی اثبات پایداری آن در بخش 3 آورده شده است. بخش 4 الگوریتم طراحی برای رولتگر پیشنهادی را شامل می‌شود. نتایج شبیه‌سازی در قسمت 5 نشان داده می‌شود. در نهایت نتیجه‌گیری در قسمت آخر قرار گرفته است.

## 2- بیان مسئله

در این مقاله سیستم غیرخطی به فرم مثلثی و تأخیردار به صورت روابط (1) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \\ y(t) &= Cx(t-\tau_y) \end{aligned} \quad (1)$$

در سیستم  $x(t) \in \mathbb{R}^n(1)$  حالت‌های نامعلوم سیستم،  $u(t) \in \mathbb{R}$  قانون کنترل ورودی،  $y(t) \in \mathbb{R}$  خروجی قابل اندازه‌گیری و  $\tau$  و  $\tau_y$  نشان دهنده تأخیر زمانی در حالت، ورودی و خروجی هستند.

همچنین می‌توان روابط (2,3) را نوشت:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$C = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0) \quad (3)$$

$\varphi$  نیز ساختار مثلثی مانند رابطه (4) دارد:

$$\varphi(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1(t), x_1(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \\ \varphi_2(x_1(t), x_1(t-\tau), x_2(t), x_2(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \\ \vdots \\ \varphi_n(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \end{pmatrix} \quad (4)$$

**نظریه 1.** در این قسمت به این نکته اشاره می‌شود که فرم مثلثی سیستم‌های غیرخطی همیشه رویت‌پذیر بوده و بسیاری از سیستم‌های عملی مانند بیوراکتورها و سیستم‌های بیولوژیک ساختاری به این شکل دارند.

در ادامه برای اثبات پایداری باید دو فرض مهم زیر در نظر گرفته شود:

**فرض 1.** مقدار تأخیرها عدد ثابت و مشخص است.

**فرض 2.** تابع  $\varphi(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau))$  لپ‌شیتز می‌باشد مانند [17]:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\hat{x}(t), \hat{x}(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) - \varphi(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau))\| \leq \\ \beta_1 \|\hat{x}(t) - x(t)\| + \beta_2 \|\hat{x}(t-\tau) - x(t-\tau)\| \end{aligned} \quad (5)$$

که مقادیر  $\beta_1$  و  $\beta_2$  ثابت‌های لپ‌شیتز می‌باشند.

## 3- طراحی رولتگر و بررسی پایداری

رولتگر بهره بالا پیشنهادی برای سیستمی به ساختار (1) به صورت (6) زیر است:

بسیاری از سیستم‌های عملی و پرکاربرد با معادلات دینامیکی تأخیردار توصیف می‌شوند که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به سیستم‌های مخابراتی، مکانیکی، الکتریکی و کنترل از راه دور اشاره کرد [5,4].

به‌طور کلی انواع تأخیر زمانی در معادلات را می‌توان به دو نوع تأخیر ذاتی و تأخیر در ورودی و یا خروجی سیستم تقسیم‌بندی کرد. همچنین تأخیر ممکن است ثابت و یا متغیر با زمان باشد. تأخیر در ورودی یا خروجی نوعی از تأخیر است که با توجه به محدودیت‌های سخت افزاری در بسته شدن حلقه کنترل ایجاد می‌شود که از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به تأخیر حسگر در اندازه‌گیری و تأخیر در انتقال اطلاعات خروجی به کنترل کننده اشاره کرد [6]. تأخیر ذاتی نیز به علت به وجود آمدن یک نوع فیدبک داخلی همراه با تأخیر زمانی در سیستم ایجاد می‌شود و معادلات دینامیکی سیستم به‌صورت تأخیر در حالت مدل می‌گردند. بسیاری از فرایندهایی که به‌صورت بازگشتی کار می‌کنند مانند اکثر فرایندهای شیمیایی تأخیری به این شکل دارند [7]. نکته مهم این است که بحث پایداری و پایداری‌سازی سیستم‌های تأخیردار با روش‌های معمول پایداری متفاوت و از روش‌های خاصی مانند روش لیاپانف-کراسفسکی<sup>1</sup> (LKF) برای اثبات پایداری سیستم-های تأخیردار استفاده می‌شود. برای بررسی سایر روش‌ها می‌توان به [9,8] مراجعه کرد.

از مهم‌ترین سیستم‌های عملی تأخیردار که امروزه به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد، سیستم‌های کنترل تحت شبکه<sup>2</sup> را می‌توان نام برد. این دسته از سیستم‌ها در کنار داشتن مزایای خوبی مانند سرعت بالا، دقت بالا، رفع عیب ساده و هزینه پایین‌تر اما دارای معایبی نیز هستند که یکی از مهم‌ترین معایب آن‌ها وجود تأخیر زمانی در این سیستم‌ها است [10].

در سال‌های اخیر بحث طراحی رولتگر برای سیستم‌های تأخیردار یکی از مباحث مهم در تئوری کنترل می‌باشد و محققان روی فرم‌های مختلف سیستم‌های غیرخطی به طراحی و بررسی رولتگر می‌پردازند. طراحی رولتگر برای سیستم‌های تأخیردار با توجه به ثابت و یا متغیر با زمان بودن تأخیر و نحوه قرار گرفتن تأخیر در معادلات که می‌تواند در حالت، ورودی، خروجی و یا تأخیرهای ترکیبی باشد، به انواع مختلفی تقسیم‌بندی می‌شود.

طراحی رولتگر برای سیستم‌های خطی با تأخیر در حالت در [11] و برای سیستم‌های خطی با تأخیر در خروجی در [12] بررسی شده است. برای سیستم‌های غیرخطی در صورتی که تأخیر در حالت باشد می‌توان به [13] اشاره کرد. همچنین از مهم‌ترین کارهای انجام شده برای سیستم‌های با تأخیر در خروجی می‌توان [14] را نام برد. اولین مقاله‌ای که موضوع طراحی رولتگر برای سیستم‌های غیرخطی که تأخیر هم‌زمان در حالت، ورودی و خروجی دارند را مطرح کرد [15] است که به بررسی یک کلاس خاص از سیستم‌های غیرخطی به فرمی که ترم خطی و غیرخطی آن جدا از هم می‌باشد پرداخته است. در این مقاله از ساختار رولتگر شبه‌لیونبرگر استفاده شده و همچنین با رویکرد نامساوی‌های ماتریسی خطی<sup>3</sup> به بررسی پایداری سیستم پرداخته است.

طراحی رولتگر بهره بالا برای سیستم‌های تأخیردار نیز یکی از مباحث مهم در زمینه رولتگرها می‌باشد. از مهم‌ترین مقالاتی که به طراحی رولتگر بهره بالا برای سیستم‌های غیرخطی به فرم مثلثی با تأخیر در حالت بر پایه کنترل پرداخته، می‌توان [16] را نام برد. در [17] به طراحی رولتگر بهره بالا

<sup>1</sup> Lyapunov-Krasovskii functional

<sup>2</sup> Networked control systems

<sup>3</sup> Linear matrix inequality

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & e(t)^T \theta ((A - KC)^T P + P(A - KC)) e(t) \\ & + 2e(t)^T P \Delta \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + 2e(t)^T P \theta K C \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds + \|e(t)\|^2 \\ & - \|e(t - \tau)\|^2 + \tau_y \|\dot{e}(t)\|^2 - \int_{t-\tau_y}^t \|\dot{e}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (20)$$

با استفاده از نامساوی (19) می‌توان رابطه (21) را نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & -\mu \theta \|e(t)\|^2 \\ & + 2e(t)^T P \Delta \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + 2e(t)^T P \theta K C \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds \\ & + \|e(t)\|^2 - \|e(t - \tau)\|^2 \\ & + \tau_y \|\dot{e}(t)\|^2 - \int_{t-\tau_y}^t \|\dot{e}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (21)$$

اگر از فرض دوم استفاده شود، می‌توان نامساوی به شکل (22) به دست آورد:

$$\|2e(t)^T P \Delta \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| \leq 2\beta_1 \|P\| \|e(t)\|^2 + 2\beta_2 \|P\| \|e(t)\| \|e(t - \tau)\| \quad (22)$$

با جایگذاری نامساوی (22) در (21)، رابطه (23) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & -\mu \theta \|e(t)\|^2 + 2\beta_1 \|P\| \|e(t)\|^2 \\ & + 2\beta_2 \|P\| \|e(t)\| \|e(t - \tau)\| \\ & + 2e(t)^T P \theta K C \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds + \|e(t)\|^2 - \|e(t - \tau)\|^2 \\ & + \tau_y \|\dot{e}(t)\|^2 - \int_{t-\tau_y}^t \|\dot{e}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (23)$$

اگر از نامساوی یانگ<sup>2</sup> که به صورت رابطه (24) است استفاده شود [18]:

$$\|ab\| \leq \|a\|^2/2 + \|b\|^2/2 \quad (24)$$

آن‌گاه می‌توان رابطه (25) را نوشت:

$$\begin{aligned} & \left\| 2e(t)^T P \theta K C \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds \right\| \\ & \leq \frac{\mu \theta}{2} \|e(t)\|^2 + \frac{2}{\mu \theta} \|P\|^2 \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

با استفاده از نامساوی هولدر<sup>3</sup> (رابطه 26)، می‌توان رابطه (27) را نوشت [18]:

$$\|a + b + c\| \leq 3\|a\|^2 + 3\|b\|^2 + 3\|c\|^2 \quad (26)$$

$$\tau_y \|\dot{e}(t)\|^2 \leq 3\tau_y (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 \|e(t)\|^2 + 3\tau_y \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 + 3\tau_y \beta_2^2 \|e(t - \tau)\|^2 \quad (27)$$

که تابع  $\gamma(t)$  به صورت رابطه (28) تعریف می‌شود:

$$\gamma(t) = \theta \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds \quad (28)$$

با جایگذاری نامساوی‌های (25) و (27) در نامساوی (23)، عبارت (29) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & -\mu \theta \|e(t)\|^2 + 2\beta_1 \|P\| \|e(t)\|^2 \\ & + \frac{\mu \theta}{2} \|e(t)\|^2 + \frac{2}{\mu \theta} \|P\|^2 \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 \\ & + \|e(t)\|^2 + 3\tau_y \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 \\ & + 3\tau_y (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 \|e(t)\|^2 \\ & - \int_{t-\tau_y}^t \|\dot{e}(s)\|^2 ds + 2\beta_2 \|P\| \|e(t)\| \|e(t - \tau)\| \\ & + 3\tau_y \beta_2^2 \|e(t - \tau)\|^2 - \|e(t - \tau)\|^2 \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از نامساوی جنسن<sup>4</sup> و تابع (28) می‌توان رابطه (31) را نوشت [19]:

$$-(b - a) \int_a^b e^T e \leq -\left[ \int_a^b e \right]^T \int_a^b e \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \tau), u(t), u(t - \tau)) \\ & - \theta \Delta^{-1} K (\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = & C\hat{x}(t - \tau_y) \end{aligned} \quad (6)$$

که  $\theta$  پارامتر بهره بالا است که باید طراحی شود و شروط پایداری وابسته به انتخاب درست این پارامتر می‌باشد و  $\Delta^{-1}$  یک ماتریس متقارن است که ساختاری به صورت رابطه (7) دارد:

$$\Delta^{-1} = \text{diag}(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) \quad (7)$$

همچنین بردار  $K = [K_1 \dots K_n]^T$  نیز باید طوری محاسبه شود که ماتریس  $A_o$  هرویتز شود:

$$A_o = A - KC \quad (8)$$

**قضیه 1.** اگر فرض‌های 1 و 2 برقرار باشند، آن‌گاه با انتخاب صحیح پارامتر  $\theta$  همچنین شرط کوچک‌تر بودن مقدار تأخیر در خروجی سیستم از یک مقدار مشخص، رویگر (6) می‌تواند حالت‌های نامعلوم سیستم (1) را با مقدار خطای صفر به صورت مجانبی تخمین بزند.

**اثبات.** برای اثبات قضیه 1، ابتدا میزان خطای بین حالت‌هایی که با رویگر تخمین زده می‌شوند و حالت‌های واقعی سیستم به صورت رابطه (9) در نظر گرفته می‌شود:

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (9)$$

آن‌گاه دینامیک خطا به صورت (10) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & A\tilde{x}(t) + \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u) \\ & - \theta \Delta^{-1} K C \tilde{x}(t - \tau_y) \end{aligned} \quad (10)$$

که می‌توان رابطه (11) را نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = & \varphi(\hat{x}(t), \hat{x}(t - \tau), u(t), u(t - \tau)) \\ & - \varphi(x(t), x(t - \tau), u(t), u(t - \tau)) \end{aligned} \quad (11)$$

رابطه‌ی نیوتن لیننیز<sup>1</sup> به صورت (12) بیان می‌گردد [19]:

$$\tilde{x}(t - \tau_y) = \tilde{x}(t) - \int_{t-\tau_y}^t \dot{\tilde{x}}(s) ds \quad (12)$$

با استفاده از این قضیه می‌توان رابطه (13) نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) = & (A - \theta \Delta^{-1} K C) \tilde{x}(t) + \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + \theta \Delta^{-1} K C \int_{t-\tau_y}^t \tilde{x}(s) ds \end{aligned} \quad (13)$$

در ادامه اگر از تبدیل متغیر رابطه (14) استفاده شود:

$$e(t) = \Delta \tilde{x}(t) \quad (14)$$

و با توجه به روابط (15, 16):

$$\Delta \theta \Delta^{-1} K C \Delta^{-1} = \theta K C \quad (15)$$

$$\Delta (A - \theta \Delta^{-1} K C) \Delta^{-1} = \theta (A - KC) \quad (16)$$

آن‌گاه معادله (17) را می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \theta (A - KC) e(t) + \Delta \tilde{\varphi}(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ & + \theta K C \int_{t-\tau_y}^t \dot{e}(s) ds \end{aligned} \quad (17)$$

LKF مناسب به صورت (18) انتخاب می‌شود:

$$\begin{aligned} V(e) = & e(t)^T P e(t) + \int_{t-\tau}^t \|e(s)\|^2 ds \\ & + \int_{t-\tau_y}^t \int_s^t \|\dot{e}(\xi)\|^2 d\xi ds \end{aligned} \quad (18)$$

$P > 0$  می‌باشد و از حل معادله ریکاتی (19) به دست می‌آید:

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) \leq -\mu I \quad \mu > 0 \quad (19)$$

با محاسبه مشتق تابع لیاپانف می‌توان رابطه (20) را نوشت:

<sup>2</sup> Young inequality

<sup>3</sup> Holder inequality

<sup>4</sup> Jensen inequality

<sup>1</sup> Newton-leibniz formula

محاسبه شود.

4- در مرحله آخر، ابتدا باید شروط (36) و (37) بررسی شود. اگر این شروط برقرار بود بهره رویکر را محاسبه کرده و در صورت برقرار نبودن به مرحله دوم برگشته و با انتخاب مناسب‌تر پارامترها، این شروط برقرار می‌شود.

### 5- نتایج شبیه‌سازی

برای ارزیابی عملکرد رویکر پیشنهادی، سیستم عملی پاندول معکوس که با موتور جریان مستقیم کنترل می‌شود<sup>1</sup>، مانند شکل 1 به عنوان سیستم مطالعه انتخاب شده است [20]. در مراجع [22,21] تخمین حالت‌های این سیستم در حالت بدون تأخیر انجام شده است که در این مقاله این سیستم با تأخیر در نظر گرفته شده است و روش پیشنهادی روی آن پیاده‌سازی می‌شود.

با در نظر گرفتن زاویه پاندول، سرعت زاویه‌ای پاندول و جریان موتور به عنوان متغیرهای حالت، معادلات سیستم در نظر گرفته شده با توجه به [20] ساختاری به صورت (40) دارد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= -0.5x_2(t) - 0.08x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (40)$$

با اضافه کردن تأخیر در حالت، ورودی و خروجی، روابط (41) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= -0.5x_2(t - \tau) - 0.08x_3(t - \tau) + u(t - \tau) \\ y(t) &= x_1(t - \tau_y) \end{aligned} \quad (41)$$

فرض می‌شود ورودی سیستم مانند (42) است:

$$u(t) = \sin(10t) \quad (42)$$

همچنین تأخیرهای موجود در سیستم نیز به صورت  $\tau = 1$  و  $\tau_y = 0.1$  می‌باشند که همگی بر حسب ثانیه است. مقادیر اولیه برای رویکر و سیستم به صورت (43) و (44) انتخاب می‌شود:

$$x(0) = [1 \ 0 \ 2]^T \quad (43)$$

$$\hat{x}(0) = [0 \ 1 \ -1]^T \quad (44)$$

با توجه به فرض‌ها و شروط بررسی شده،  $\mu = 1$  و حداکثر مقدار برای پارامتر بهره بالا به صورت  $\theta = 3$  در نظر گرفته می‌شود.

در شکل 2 نتایج شبیه‌سازی تخمین حالت اول توسط رویکر و مقدار واقعی آن برای  $\theta = 3$  نشان داده شده است. در شکل‌های 3 و 4 نیز مقدار واقعی حالت دوم و سوم و تخمین زده شده‌ی آن‌ها توسط رویکر پیشنهادی

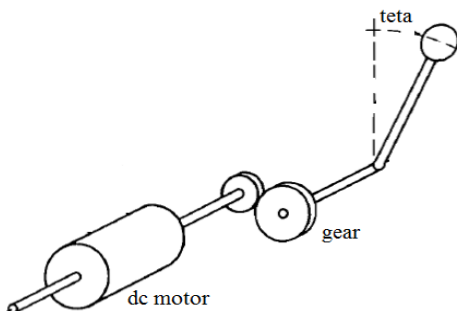


Fig. 1 Inverted pendulum controlled by a dc motor [22]

شکل 1 پاندول معکوس با کنترل کننده موتور جریان مستقیم

<sup>1</sup> Inverted pendulum controlled by a dc motor

$$-\int_{t-\tau_y}^t \|\dot{e}(s)\|^2 ds \leq -\frac{1}{\theta^2 \tau_y} \|\gamma(t)\|^2 \quad (31)$$

با جایگذاری رابطه (31) در (29)، رابطه (32) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq -\mu\theta \|e(t)\|^2 + 2\beta_1 \|P\| \|e(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\mu\theta}{2} \|e(t)\|^2 + \frac{2}{\mu\theta} \|P\|^2 \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 \\ &\quad + \|e(t)\|^2 + 3\tau_y \|K\|^2 \|\gamma(t)\|^2 \\ &\quad + 3\tau_y (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 \|e(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\theta^2 \tau_y} \|\gamma(t)\|^2 + 2\beta_2 \|P\| \|e(t)\| \|e(t - \tau)\| \\ &\quad + 3\tau_y \beta_2^2 \|e(t - \tau)\|^2 - \|e(t - \tau)\|^2 \end{aligned} \quad (32)$$

با مرتب کردن نامساوی (32)، می‌توان رابطه (33) را نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq \left( -\frac{\mu\theta}{2} + 2\beta_1 \|P\| + 1 + 3\tau_y (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 \right) \|e(t)\|^2 \\ &\quad + \left( \frac{2}{\mu\theta} \|P\|^2 K^2 - \frac{1}{\theta^2 \tau_y} + 3\tau_y \|K\|^2 \right) \|\gamma(t)\|^2 \\ &\quad + 2\beta_2 \|P\| \|e(t)\| \|e(t - \tau)\| \\ &\quad - (1 - 3\tau_y \beta_2^2) \|e(t - \tau)\|^2 \end{aligned} \quad (33)$$

اگر عبارت (34) از نامساوی (33) کم و زیاد شود:

$$\frac{\beta_2^2 \|P\|^2}{1 - 3\tau_y \beta_2^2} \|e(t)\|^2 \quad (34)$$

آن‌گاه نامساوی با ساختار رابطه (35) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &\leq \left( -\frac{\mu\theta}{2} + 2\beta_1 \|P\| + 1 + 3\tau_y (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_2^2 \|P\|^2}{1 - 3\tau_y \beta_2^2} \right) \|e(t)\|^2 \\ &\quad + \left( \frac{2}{\mu\theta} \|P\|^2 K^2 - \frac{1}{\theta^2 \tau_y} + 3\tau_y \|K\|^2 \right) \|\gamma(t)\|^2 \\ &\quad - \left( \frac{\beta_2 \|P\|}{\sqrt{1 - 3\tau_y \beta_2^2}} \|e(t)\| - \sqrt{1 - 3\tau_y \beta_2^2} \|e(t - \tau)\| \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

اگر فرض شود که دو نامساوی (36) و (37) برقرار باشد:

$$\tau_y \leq \frac{\mu}{\theta^2} \quad (36)$$

$$1 - 3\tau_y \beta_2^2 > 0 \quad (37)$$

آن‌گاه همگرایی مجانبی خطا به صفر در صورتی تضمین می‌شود که دو رابطه (38) و (39) روی پارامتر بهره بالا برقرار باشد:

$$\frac{\mu\theta}{2} \geq 2\beta_1 \|P\| + \frac{3\mu}{\theta^2} (\theta \|A - KC\| + \beta_1)^2 + \frac{\|P\|^2 \beta_2^2}{1 - \frac{3\beta_2^2 \mu}{\theta^2}} + 1 \quad (38)$$

$$\theta^2 \geq 2\|P\|^2 \|K\|^2 \theta + 3\mu^2 \|K\|^2 \quad (39)$$

از نامساوی‌های به‌دست آمده مشخص است که به ازای تعیین کردن یک مقدار بزرگ برای پارامتر  $\theta$  می‌توان نامساوی‌ها را برقرار کرده و شروط لازم برای اثبات پایداری مجانبی رویکر را برآورده ساخت.

### 4- الگوریتم طراحی

با توجه به بررسی‌های انجام شده برای اثبات پایداری رویکر پیشنهادی می‌توان برای این رویکر، الگوریتم طراحی به صورت زیر نوشت.

1- در مرحله اول، ثابت‌های لیپ‌شیتز  $\beta_1$  و  $\beta_2$  طبق فرض 2 محاسبه شوند.

2- سپس بردار  $K$  و ماتریس  $P$  طوری به‌دست آورده شوند که ماتریس  $A_0$  هرویتز شود و نامساوی (19) نیز برقرار گردد.

3- در مرحله سوم، پارامتر بهره بالا  $\theta$  طبق نامساوی‌های (38) و (39)

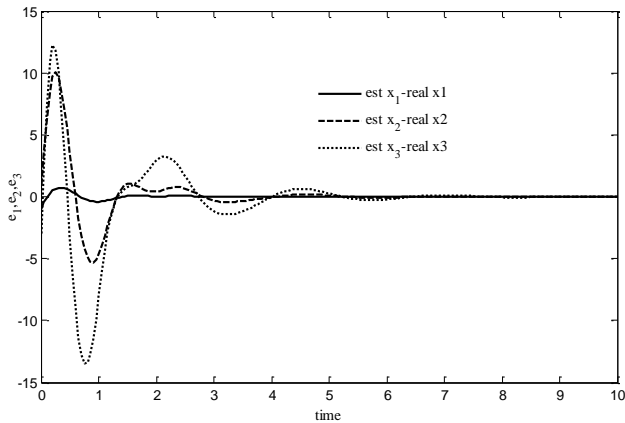


Fig. 5 Error between real states and their estimation for  $\theta = 3$

شکل 5 خطای بین مقدار واقعی حالت‌ها و تخمین زده شده‌ی آنها برای  $\theta = 3$

در مرحله‌ی بعد فرض می‌شود که  $\theta = 1$  می‌باشد. در شکل‌های 6 تا 8 تخمین حالت‌ها و در شکل 9 میزان خطاهای بین تخمین حالت‌ها توسط روینگر پیشنهادی و مقدار واقعی آن‌ها برای  $\theta = 1$  نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است با کم شدن پارامتر بهره بالا زمان همگرایی بیشتر می‌شود و روینگر بعد از گذشتن زمان بیشتری حالت‌های سیستم را دنبال می‌کند.

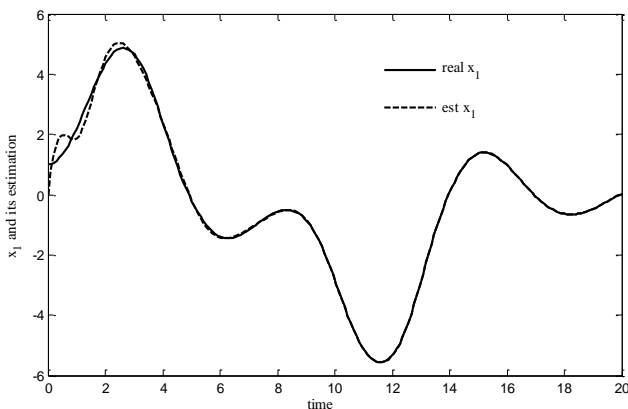


Fig. 6 Comparison between first state and its estimation for  $\theta = 1$

شکل 6 مقایسه بین مقدار واقعی حالت اول و تخمین زده شده‌ی آن برای  $\theta = 1$

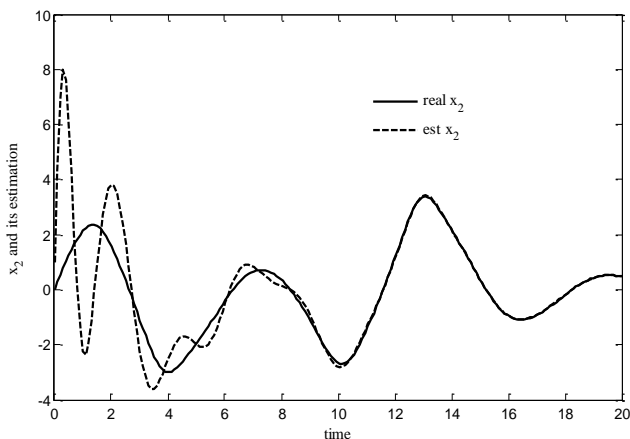


Fig. 7 Comparison between second state and its estimation for  $\theta = 1$

شکل 7 مقایسه بین مقدار واقعی حالت دوم و تخمین زده شده‌ی آن برای  $\theta = 1$

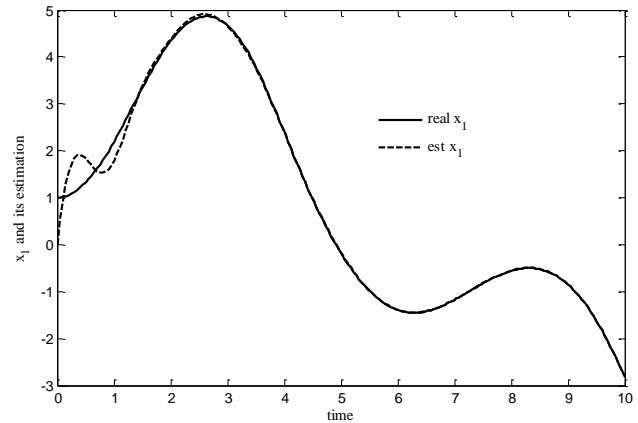


Fig. 2 Comparison between first state and its estimation for  $\theta = 3$

شکل 2 مقایسه بین مقدار واقعی حالت اول و تخمین زده شده‌ی آن برای  $\theta = 3$

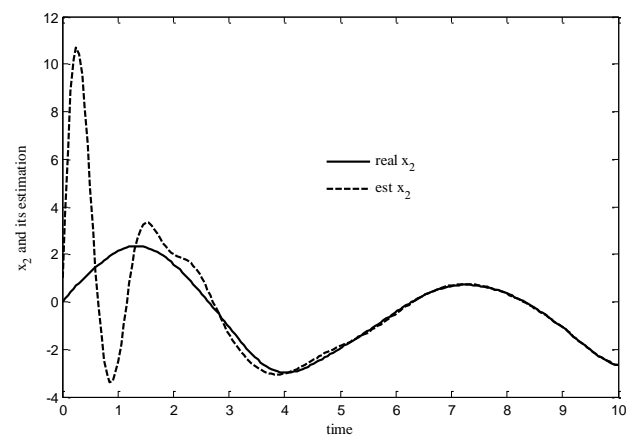


Fig. 3 Comparison between second state and its estimation for  $\theta = 3$

شکل 3 مقایسه بین مقدار واقعی حالت دوم و تخمین زده شده‌ی آن برای  $\theta = 3$

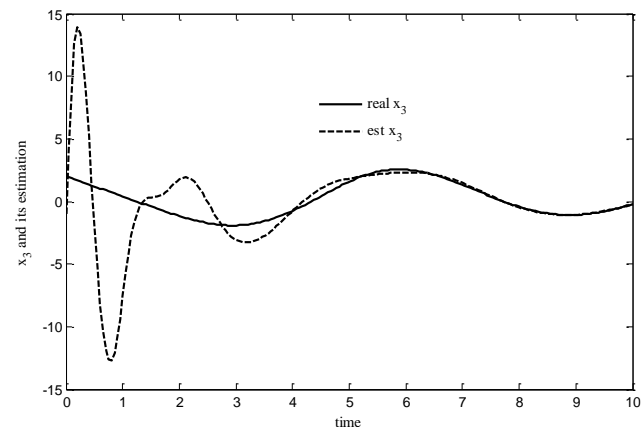


Fig. 4 Comparison between third state and its estimation for  $\theta = 3$

شکل 4 مقایسه بین مقدار واقعی حالت سوم و تخمین زده شده‌ی آن برای  $\theta = 3$

را برای  $\theta = 3$  نشان داده شده است که همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است روینگر بعد از گذشت چند ثانیه حالت‌های واقعی سیستم را به صورت مجانبی دنبال می‌کند.

شکل 5 میزان خطاهای بین تخمین حالت‌ها توسط روینگر پیشنهادی و مقدار واقعی آن‌ها را برای  $\theta = 3$  نشان می‌دهد که مشخص است میزان خطاها بعد از گذشت زمان مشخصی به صورت مجانبی به سمت صفر همگرا می‌شود.

را دنبال کند و عملکرد روباتیک خراب می‌شود.

#### 7- فهرست علائم

$\mathbb{R}^n$	فضای اقلیدسی با ابعاد $n \times 1$
diag()	ماتریس قطری
$I_n$	ماتریس همانی با بعد $n$
$\ A\ $	نرم ماتریس A
$P > 0$	ماتریس مثبت معین و متقارن
<b>بالانویس‌ها</b>	
T	ترانواده ماتریس
-1	معکوس ماتریس

#### 8- مراجع

- [1] D. G. Luenberger, Observing the state of a linear system, *IEEE Transactions on Military Electronics*, Vol. 8, No. 2, pp. 74-80, 1964.
- [2] G. Ciccarella, M. Dalla Mora, A. Germani, A. Luenberger-like observer for nonlinear systems, *International Journal of Control*, Vol. 57, No. 3, pp. 537-556, 1993.
- [3] H. Hammouri, Uniform observability and observer synthesis, *Nonlinear Observers and Applications*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 35-70, 2007.
- [4] H.C Cho, J. H Park, Stable bilateral teleoperation under a time delay using a robust impedance control, *Mechatronics*, Vol. 15, No. 5, pp. 611-25, 2005.
- [5] K. Natori, K. Ohnishi, A design method of communication disturbance observer for time-delay compensation, taking the dynamic property of network disturbance into account, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 55, No. 5, pp. 2152-2168, 2008.
- [6] S. Talebi, M. Ataei, M. Ekramian, Guaranteed interval of delay for a class of non-linear control systems, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol. 38, No. 3, pp. 364-369, 2016.
- [7] D. W. Ross, Controller design for time lag systems via a quadratic criterion, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 664-672, 1971.
- [8] W. M. He, J. H. She, *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*, First Edition, pp. 100-250, Berlin: Springer, 2010.
- [9] G. K. Chen, V. L. Kharitonov, *Stability of Time-Delay Systems*, Second Edition, pp. 10-150, Berlin: Springer Science & Business Media, 2003.
- [10] F. Kheirandish, M. Ekramian, M. Ataei, Stability analysis and state feedback controller design for networked control systems with time varying delays, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 5, pp. 77-85, 2017. (in Persian)
- [11] H. M. Zitek, P. Patton, An observer design for linear time-delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 1, pp. 121-125, 2002.
- [12] K. Subbarao, P. C. Murialidhar, A state observer for lti systems with delayed outputs: Time-varying delay, *2008 American Control Conference*, pp. 3029-3033, Washington, 2008.
- [13] A. Germani, P. Pepe, A state observer for a class of nonlinear systems with multiple discrete and distributed time delays, *European Journal of Control*, Vol. 11, No. 3, pp. 196-205, 2005.
- [14] A. Germani, C. Manes, P. Pepe, A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 1, pp. 96-101, 2002.
- [15] A. Vafaei, M. J. Yazdanpanah, A chain observer for nonlinear long constant delay systems: A matrix inequality approach, *Automatica*, Vol. 31, No. 65, pp. 164-9, 2016.
- [16] S. Ibrir, Observer-based control of a class of time-delay nonlinear systems having triangular structure, *Automatica*, Vol. 47, No. 2, pp. 388-394, 2011.
- [17] M. Farza, A. Sboui, E. Cherrier, M. M'Saad, High-gain observer for a class of time-delay nonlinear systems, *International Journal of Control*, Vol. 83, No. 2, pp. 273-280, 2010.
- [18] T. Ahmed-Ali, E. Cherrier, F. L. Lagarrigue, Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, No. 1, pp. 221-226, 2012.
- [19] Xu. Shengyuan, J. Lam, A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 39, No. 12, pp. 1095-1113, 2008.
- [20] S. H. Zak, B. L. Walcott, S. Hui, Variable structure control and observation of nonlinear/uncertain systems, *Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications*, Vol. 4, No. 5, pp. 59-88, 1993.
- [21] S. H. Zak, C. A. Maccarley, State-feedback control of non-linear systems, *International Journal of Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 1497-1514, 1986.
- [22] B. L. Walcott, M. J. Corless, S. H. Zak, Comparative study of non-linear state-observation techniques, *International Journal of Control*, Vol. 45, No. 6, pp. 2109-2132, 1987.

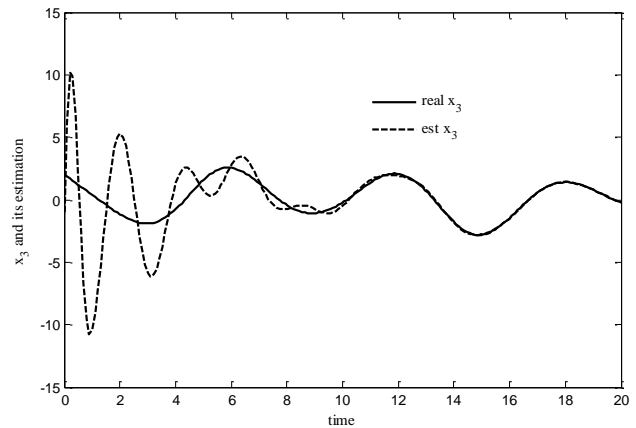


Fig. 8 Comparison between third state and its estimation for  $\theta = 1$

شکل 8 مقایسه بین مقدار واقعی حالت سوم و تخمین زده شده آن برای  $\theta = 1$

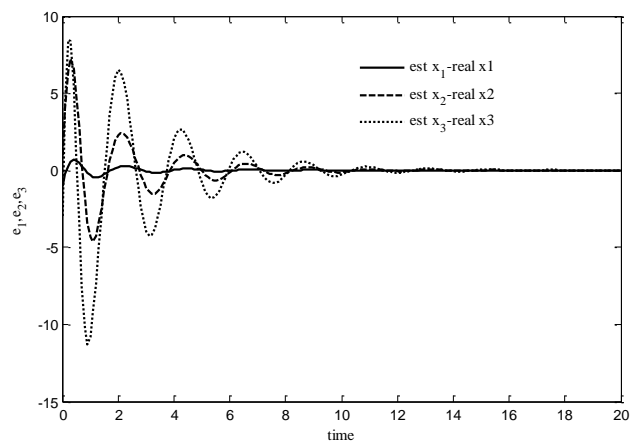


Fig. 9 Error between real states and their estimation for  $\theta = 1$

شکل 9 خطای بین مقدار واقعی حالت‌ها و تخمین زده شده‌ی آنها برای  $\theta = 1$

#### 6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی و طراحی یک روباتیک بهره بالا برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی به فرم مثلثی با تأخیر هم‌زمان و متفاوت در حالت، ورودی و خروجی پرداخته شد. ابتدا چند فرض روی ساختار سیستم در نظر گرفته شد و سپس با استفاده از قضیه‌ی LKF به بررسی پایداری روباتیک پیشنهادی پرداخته شد و نشان داده شد که اگر میزان تأخیر موجود در خروجی سیستم از مقدار مشخصی کمتر و پارامتر بهره بالا از مقادیر ثابت و معلومی بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه مقدار خطای بین حالت‌های واقعی سیستم و حالت‌هایی که با روباتیک تخمین زده شده‌اند، به صورت مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. برای نشان دادن عملکرد مناسب روباتیک پیشنهادی، از یک سیستم عملی مانند پاندول معکوس که به وسیله‌ی یک موتور جریان مستقیم کنترل می‌شود، استفاده گردید و با استفاده از الگوریتم طراحی، روباتیک پیشنهادی روی این سیستم پیاده‌سازی شد. با توجه به روابط به دست آمده حداکثر مقداری برای پارامتر بهره بالا به دست آمد و سپس نشان داده شد که اگر پارامتر بهره بالا از مقدار به دست آمده کمتر انتخاب شود، سرعت همگرایی روباتیک افزایش یافته و روباتیک بعد از گذشت زمان بیشتری حالت‌های سیستم را تخمین می‌زند. هم‌چنین اگر پارامتر بهره بالا بیشتر از مقدار محاسبه شده انتخاب شود، آن‌گاه روباتیک نمی‌تواند حالت‌های واقعی سیستم