ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2019;19(5):1241-1252

Implementation of Rigid Solid Boundaries to the Vorticity-Stream Function Formulation of Incompressible Navier-Stokes Equations by Time Dilation

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Badri M.A.[1] *MSc*,
Sabetghadam F.*[1] *PhD*

How to cite this article
Badri M.A, Sabetghadam F. Implementation of Rigid Solid Boundaries to the Vorticity-Stream Function Formulation of Incompressible Navier-Stokes Equations by Time Dilation. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(5):1241-1252.

[1]Aerospace Engineering Department, Engineering Faculty, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

***Correspondence**
Address: Science & Research Branch, Azad University Daneshgah boulevard, Simon Bulivar boulevard, Tehran, Iran.
Phone: +98 (21) 44658114
Fax: -
fsabet@srbiau.ac.ir

Article History
Received: June 05, 2018
Accepted: August 07, 2018
ePublished: May 01, 2019

ABSTRACT

In the present paper, a new penalization method is proposed for implementation of the rigid surfaces on the Navier-Stokes equations in the vorticity-stream function formulation. In this method, a rigid body is considered as a region in the fluid flow, where the time is stopped. Therefore, by stopping the fluid particles, this region plays the role of a rigid body. In this regard, a new transformation is introduced and applied to the governing equations and a set of modified equations are obtained. Then, in the modified equations, the time dilation of the solid region is approached to infinity, while the time dilation of the fluid region remains unit. In the article, the physical and mathematical properties of modified equations are investigated and satisfaction of the no-slip and no-penetration conditions are justified. Then, a suitable numerical algorithm is presented for solving the modified equations. In the proposed algorithm, the modified vorticity equation is time integrated via the Crank–Nicolson method, and the spatial discretization is performed with the second-order finite differencing on a uniform Cartesian grid. The method is applied to the fluid flow around a square obstacle placed in a channel, the sudden flow perpendicular to a thin flat plate, and the flow around a circular cylinder. The results show that the no-slip and no-penetration conditions are satisfied accurately, while the flow fields are also solenoidal high level of accuracy.

Keywords Incompressible Viscous Vorticity-Stream Function Formulation; Time Dilation; Immersed Interface Method; Penalization Functions; Flow Around Circular Cylinder

CITATION LINKS

[1] A fast immersed boundary fourier pseudo ... [2] On the application of immersed boundary ... [3] Using the method of inverse problems in ... [4] Immersed boundary ... [5] On the hydrodynamical boundary-conditions along ... [6] A penalization method to take into account ... [7] Boundary layer for a penalization method ... [8] Numerical simulation of the transient flow behaviour ... [9] A Fourier spectral method for the Navier-Stokes ... [10] A general fictitious domain method with ... [11] Iterative Brinkman penalization for remeshed ... [12] A volume penalization method for incompressible ... [13] Numerical simulation of fluid-structure interaction ... [14] Two-and three-dimensional numerical simulations ... [15] An analytical framework for imposition of a rigid ... [16] Exact imposition of the regular rigid immersed ... [17] A stream function-vorticity formulation ... [18] Simulation of solid body motion in a Newtonian fluid ... [19] Modeling complex boundaries using an external ... [20] A penalty method for the vorticity ... [21] A Cartesian grid method for solving the two ... [22] A review of vorticity conditions in the ... [23] Computation of two-dimensional time-dependent ... [24] Unsteady vorticity-streamfunction algorithm ... [25] A hybrid particle level set method ... [26] Strouhal numbers of rectangular ... [27] Accurate computations of the laminar ... [28] Effect of the blockage ratio on the ... [29] Flow past a square cylinder ... [30] A simple boundary condition for ... [31] Simulations of the viscous flow normal ... [32] Viscous flow normal to a flat plate ... [33] The embedded finite difference method ... [34] Experimental determination of the main ... [35] Experimental determination of ... [36] The immersed boundary method ... [37] A high-order immersed interface method ... [38] Numerical solutions for steady flow past ... [39] Numerical study and physical analysis of the ... [40] Preconditioned multigrid methods for unsteady ... [41] On the development of turbulent wakesfrom ... [42] Defining a universal and continuousStrouhal ...

اعمال مرزهای جامد صلب به فرمول‌بندی تاوایی- تابع‌جریان معادلات ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر از طریق اعمال اتساع زمانی

محمدعلی بدری MSc
گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
فریدون ثابت‌قدم* PhD
گروه مهندسی هوافضا، دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

چکیده
در این مقاله روش بازنهشتی جدیدی برای اعمال شرط مرزی جسم جامد به معادلات ناویر- استوکس در فرمول‌بندی تاوایی- تابع جریان ارایه شده است. در این روش، جسم جامد مانند ناحیه‌ای درون سیال در نظر گرفته می‌شود که در آن گذر زمان متوقف شده است و بدین ترتیب با توقف ذرات سیال، این ناحیه نقش جسم جامد صلب را بازی می‌کند. بدین منظور با استفاده از یک نگاشت، ضریب اتساع زمانی دلخواه به معادلات حاکم اعمال می‌شود و معادلات اصلاح‌شده‌ای به دست می‌آیند. سپس در معادلات اصلاح‌شده، ضریب اتساع زمانی ناحیه جامد به سمت بی‌نهایت میل داده می‌شود، در حالی که در ناحیه سیال، این ضریب واحد باقی می‌ماند. در مقاله ویژگی‌های فیزیکی و ریاضی، معادلات اصلاح‌شده بررسی شده و نحوه اعمال شرایط عدم لغزش و عدم نفوذ تشریح شده است. سپس الگوریتم عددی مناسبی برای حل معادلات اصلاح‌شده ارایه شده است. در الگوریتم ارایه‌شده، انتگرال‌گیری زمانی معادله اصلاح‌شده تاوایی با روش کرانک- نیکلسون و گسسته‌سازی مکانی، با دقت مرتبه دوم روی یک شبکه دکارتی یکنواخت صورت می‌پذیرد. روش برای حل عددی جریان، حول یک جسم مربعی درون یک کانال و جریان عمود بر یک صفحه تخت نازک و جریان حول استوانه دایروی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند که شرایط عدم لغزش و عدم نفوذ روی مرز مستور با دقت بسیار زیادی ارضا می‌شوند، در حالی که میدان جریان نیز با دقت بسیار زیادی بقایی باقی می‌ماند.
کلیدواژه‌ها: فرمول‌بندی تاوایی- تابع جریان تراکم‌ناپذیر لزج، اتساع زمانی، روش مرز مستور، توابع بازنهشتی، جریان حول استوانه دایروی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۱۶
*نویسنده مسئول: fsabet@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

در روش‌های مرز مستور (IBM)، میدان جریان سیال و ناحیه جامد به‌طور یکپارچه به‌عنوان دامنه حل در نظر گرفته می‌شوند. به‌دلیل سرراست‌بودن و راندمان محاسباتی زیاد، این روش‌ها در اندرکنش سیال و جامد (FSI) بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند[1, 2]. در این بین، دقت اعمال مرزهای جامد یکی از چالش‌های این روش‌ها محسوب می‌شود[3]. روش‌های مرز مستور متنوعی پیشنهاد شده‌اند که در یک تقسیم‌بندی کلی می‌توان آنها را به روش‌های نیروی پیوسته و نیروی گسسته تقسیم کرد[4]. یکی از انواع مرسوم روش‌های نیروی پیوسته (که به روش پیشنهادی مقاله حاضر نزدیک‌تر است)، روش بازنهشتی است که در آن دامنه حل، جسمی متخلخل در نظر گرفته می‌شود که ضریب نفوذ آن در ناحیه سیال به بی‌نهایت و در جسم جامد به سمت صفر میل می‌کند. ایده اولیه این روش توسط *آرکوئیس* و *کالتاگرون*[5] پیشنهاد شد. *آنگوت* و همکاران[6] نرخ‌های همگرایی دو روش مرسوم بازنهشتی یعنی روش‌های *دارسی* و *برینکمن* را تحلیل کردند و تخمین‌های آنها توسط *کاربو* و *فابریه*[7] بازنگری و اندکی اصلاح شد. *اشنایدر*[8] اعمال این روش را برای مسایل کاربردی ساده‌تر کرد. روش بازنهشتی حجمی اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است[9]. این روش برای شرط مرزی *نیومن* و *رابینز* در معادلات بیضوی، جابه‌جایی- پخش و مسایل متغیر با زمان بسط داده شده [9, 10]، همچنین توسط *هجلسن* و همکاران[11] برای روش گردابه نیز به کار برده شده است. اخیراً روش‌های طیفی سریعی براساس روش بازنهشتی حجمی برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر دو و سه‌بُعدی حول اجسام انعطاف‌پذیر یا متحرک با هندسه پیچیده ارایه شده است[12-14]. در مجموع می‌توان گفت امروزه روش‌های بازنهشتی جزء روش‌های تثبیت‌شده در حل عددی مسایل اندرکنش سیال و جامد هستند.

مقاله پیش رو، در ادامه کارهای قبلی نویسندگان[15, 16]، یک روش بازنهشتی جدید را معرفی می‌کند. ایده اصلی روش این است که جسم جامد را ناحیه‌ای در میدان جریان سیال در نظر بگیریم که گذر زمان در آن متوقف شده است. بدین ترتیب، ذرات سیال در این ناحیه جابه‌جا نمی‌شوند و لذا این ناحیه می‌تواند نقش ناحیه جامد را بازی کند. بدین منظور، نگاشتی تعریف می‌شود که توزیع دلخواهی از اتساع زمانی را به معادلات حاکم بر جریان سیال، در فرم تاوایی- تابع جریان اعمال می‌کند. سپس همان گونه که دیده خواهد شد، با اعمال یک توزیع اتساع زمانی مناسب (اتساع زمانی بی‌نهایت در ناحیه جامد و اتساع زمانی واحد در ناحیه سیال) می‌توان حضور جسم جامد را در جریان سیال شبیه‌سازی کرد.

در ادامه، نخست معادلات حاکم بر جریان سیال دوبُعدی در فرم تاوایی- تابع جریان به‌نحوی اصلاح شده‌اند که توانایی اعمال اتساع زمانی در آنها وجود داشته باشد. سپس اتساع زمانی مناسب برای اعمال جسم جامد صلب ساکن در معادلات اصلاح‌شده ارایه شده است و خصوصیات ریاضی و فیزیکی جملات بازنهشتی با لحاظ‌کردن این تابع اتساع زمانی خاص مورد بررسی قرار گرفته‌اند. پس از آن، الگوریتم عددی مناسبی برای حل معادلات اصلاح‌شده ارایه شده و نهایتاً الگوریتم عددی روی چند نمونه مطالعاتی اعمال شده و توانمندی روش نشان داده شده است.

۲- شکل کلاسیک معادلات حاکم

مطابق با شکل ۱، دامنه D با مرز منظم Γ را در نظر بگیرید که شامل ناحیه سیال (Ω) و ناحیه جامد (S) با مرز نامنظم (Γ_s) است. هدف، اعمال ناحیه جامد (S) به معادلات دینامیک سیال است، در حالی که دامنه حل همه D باشد.

در این قسمت برای فرمول‌بندی کلاسیک مساله، ابتدا از حضور جسم جامد صلب چشم‌پوشی می‌شود. در این صورت، تغییرات زمانی جریان دوبُعدی یک سیال تراکم‌ناپذیر لزج در یک ناحیه دلخواه از سیال می‌تواند از طریق دنبال‌کردن دینامیک تاوایی با تعریف $\omega \coloneqq \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ استخراج شود:

$$\begin{cases}\partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \nu \nabla^2 \omega, \\ \omega(\boldsymbol{x}, t=0) = \omega_0(\boldsymbol{x}), \end{cases} \tag{۱}$$

مشروط بر اینکه اولاً شرایط مرزی مناسب به معادله بالا اعمال شده باشند و ثانیاً تابع جریان ψ، معادله پواسون:

$$\begin{cases}\nabla^2 \psi(\boldsymbol{x}) = -\omega(\boldsymbol{x}), \\ \psi(\Gamma) = \psi_\Gamma, \end{cases} \tag{۲}$$

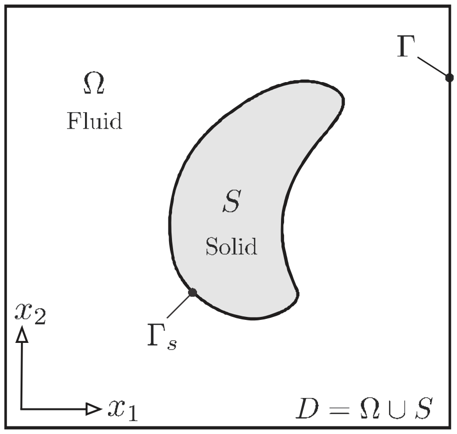
را در هر زمان ارضا کند. در معادلات فوق، $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ بردار موقعیت مکانی، ν لزجت سینماتیک و $\mathbf{u} \coloneqq \nabla^\perp \psi$ بردار سرعت است.

یکی از نقاط قوت چنین فرمولاسیونی، امکان بقایی‌بودن خودبه‌خودی میدان سرعت‌های حاصل از حل عددی آن است[17]، خاصیتی که در بسیاری از فرمولاسیون‌های دیگر، خصوصاً برای روش‌های مرز مستور نیازمند تمهیدات ویژه‌ای است[18, 19].

در نهایت، با نوشتن معادله اندازه حرکت خطی در فرم تاوایی در راستای مرز بسته Γ_s، همواره قید انتگرالی ذیل برقرار است[20, 21]:

$$\oint_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{n}}\right)ds = 0. \qquad (۳)$$

تساوی فوق، شرط انتگرالی شار تاوایی صفر نامیده می‌شود که در بخش‌های بعدی از آن برای محاسبه تابع جریان روی سطح جسم جامد استفاده خواهد شد.



شکل ۱) دامنه حل؛ یک جسم صلب درون جریان دوبُعدی، لزج و تراکم‌ناپذیر یک سیال نیوتونی قرار گرفته است.

۳- اصلاح معادلات و استخراج جمله‌های بازنهشتی

در اینجا برای اعمال مرز نامنظم Γ_s به دستگاه معادلات کوپل ۱ و ۲، نگاشت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$(\boldsymbol{x}, t, \psi, \omega) \;\rightarrow\; \left(\boldsymbol{x}, \tfrac{t}{\lambda}, \lambda(\psi-\psi_c), \lambda\omega\right) \qquad (۴)$$

که در آن توزیع اتساع زمانی $\lambda(\boldsymbol{x})$، یک تابع هموار معلوم است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. همچنین $\psi_c(t)$ مقدار تابع جریان در داخل و روی سطح جسم جامد است که در هر لحظه از زمان، مقدار ثابتی دارد و نحوه محاسبه آن براساس شرط ۳ در بخش‌های بعد توضیح داده خواهد شد.

درباره منشأ این نگاشت و توجیه فیزیکی و ریاضی آن می‌توان به منابع[15, 16] مراجعه کرد. لیکن در اینجا تنها به ذکر این توضیح بسنده می‌شود که با استفاده از نگاشت فوق می‌توان یک توزیع اتساع زمانی دلخواه را به معادلات ۱ و ۲ اعمال کرد، بدون اینکه دستگاه مختصات مکانی تغییر کرده باشد. سپس با میل‌دادن اتساع زمانی درون جسم جامد به سمت بی‌نهایت، گذر زمان در ناحیه جامد متوقف می‌شود. با توقف ذرات سیال، این ناحیه نقش جسم جامد صلب را ایفا می‌کند. در ادامه، تنها کافی است که نگاشت فوق به معادلات ۱ و ۲ اعمال شوند.

۳-۱- اصلاح معادله دینامیک تاوایی

با اعمال نگاشت ۴ به دستگاه ۱ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\left(\frac{t}{\lambda}\right)}(\lambda\omega) + [(\lambda u)\cdot\nabla](\lambda\omega) = \nu\, \nabla\text{^}2\, (\lambda\omega), \\ \lambda\omega(x, t=0) = \lambda\omega\_0\ (x), \end{cases}$$

و با بسط مشتقات فوق، معادله اصلاح‌شده زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \partial_t\omega + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\omega = \nu\nabla^2\omega + F^\lambda\,; & D\times\mathbb{R}^+ \\ \omega(\boldsymbol{x}, t=0) = \omega_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in D \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن F^λ شامل همه جمله‌های بازنهشتی است:

$$F^\lambda = \nu\left(2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\omega + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\omega\right) - \omega\mathbf{u}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\lambda}, \qquad (۶)$$

در ضمن باید توجه شود که اگر ν^* لزجت سینماتیک سیال باشد، آنگاه:

$$\nu = \frac{\nu^*}{\lambda}.$$

معادلات ۵ و ۶، معادله دینامیکی را تشکیل می‌دهند که به‌جای معادله ۱، انتگرال‌گیری زمانی خواهد شد. مشخصات فیزیکی و ریاضی این معادله و جمله‌های اضافه‌شده به آن نسبت به معادله ۱، در بخش‌های بعد بررسی خواهند شد.

۳-۲- اصلاح معادله سینماتیک تابع جریان

شرط سینماتیک ۲ نیز باید توسط نگاشت ۴ اصلاح شود. بدین منظور با اعمال نگاشت ۴ به دستگاه ۲ داریم:

$$\nabla^2\big(\lambda(\psi-\psi_c)\big) = -\lambda\omega.$$

حال با بسط مشتقات و تقسیم طرفین معادله حاصل بر λ خواهیم داشت:

$$\nabla^2\psi + G^\lambda = -\omega; \quad \boldsymbol{x}\in D, \qquad (۷)$$

که در آن:

$$G^\lambda = 2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\psi + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}(\psi-\psi_c). \qquad (۸)$$

بدین ترتیب، در الگوریتم حل جریان سیال، معادله سینماتیک ۷ به‌جای معادله سینماتیک کلاسیک ۲ حل خواهد شد.

۴- محاسبه تابع جریان روی مرز مستور داخلی

در معادله ۸، هنوز ψ_c یعنی مقدار تابع جریان روی مرز جسم جامد، مجهول است. برای یافتن این کمیت، روش‌های متفاوتی پیشنهاد شده است[3, 21-23] که در اینجا از روش پیشنهادی توسط *سورنسن* و *نیگرین*[24] استفاده می‌شود.

در این روش، ابتدا با توجه به خطی‌بودن معادله ۷، تابع جریان در هر لحظه به‌صورت ترکیب خطی دو تابع جدید $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})$ و $\bar{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ نوشته می‌شود:

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \bar{\psi}(\boldsymbol{x}, t) + \psi_c(t)\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}), \qquad (۹)$$

در این رابطه $\psi_c(t)$ همان کمیتی است که در پی محاسبه آن هستیم. با جای‌گذاری این تجزیه در معادله ۷ خواهیم داشت:

$$\nabla^2\bar{\psi} + 2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\bar{\psi} + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\bar{\psi} +$$
$$\psi_c\left(\nabla^2\tilde{\psi} + 2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\tilde{\psi} + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\big(\tilde{\psi}-1\big)\right) = -\omega;\ \text{in } D \qquad (۱۰)$$

معادله فوق را می‌توان ترکیب خطی دو معادله زیر محسوب کرد:

$$\begin{cases} \nabla^2\tilde{\psi} + \overbrace{2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\tilde{\psi} + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\big(\tilde{\psi}-1\big)}^{\tilde{G}^\lambda} = 0 \quad ;\ \text{in } D & (۱۱) \\ \nabla^2\bar{\psi} + \overbrace{2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\bar{\psi} + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\bar{\psi}}^{\bar{G}^\lambda} = -\omega \quad ;\ \text{in } D & (۱۲) \end{cases}$$

تجزیه ۹ در همه میدان از جمله روی Γ و Γ_s صادق است که از آن شرایط مرزی زیر نتیجه می‌شود:

$$\tilde{\psi}(\Gamma) = 0, \tilde{\psi}(\Gamma_s) = 1, \qquad (۱۳)$$
$$\bar{\psi}(\Gamma, t) = \psi(\Gamma, t), \bar{\psi}(\Gamma_s, t) = 0. \qquad (۱۴)$$

قابل توجه است که ضرایب تابع بازنهشتی $\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}$ در روابط ۱۱ و ۱۲، این شرایط مرزی مستور را در Γ_s خودبه‌خود تولید می‌کنند.

معادله ۱۱ و شرط مرزی ۱۳ به زمان وابسته نیستند، پس این معادله تنها یک بار در آغاز الگوریتم حل می‌شود و نتایج آن برای تمام گام‌های زمانی قابل استفاده است. از دیگر سو، معادله ۱۲ از طریق تاوایی (در طرف راست معادله) و همچنین شرط مرزی ۱۴،

به زمان وابسته است. بنابراین هر گام زمانی لازم است که به‌طور جداگانه حل شود.

به همین ترتیب، تاوایی نیز به‌صورت ترکیب خطی دو تابع جدید نوشته می‌شود:

$$\omega(\boldsymbol{x},t) = -\nabla^2\psi(\boldsymbol{x},t) = \bar{\omega}(\boldsymbol{x},t) + \psi_c(t)\,\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\bar{\omega} = -\nabla^2\bar{\psi}$ و $\tilde{\omega} = -\nabla^2\tilde{\psi}$ هستند. با جای‌گذاری رابطه فوق در قید انتگرالی شار تاوایی صفر ۳ داریم:

$$I(t) = \oint_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{n}}\right)ds = \underbrace{\oint_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds}_{T_2(t)} + \psi_c(t)\underbrace{\oint_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial \mathrm{n}}\right)ds}_{T_1} = 0 \qquad (۱۶)$$

مقادیر $\bar{\omega}$ و $\tilde{\omega}$ در نقاط داخل ناحیه سیال از تفاضل مرکزی مرتبه دوم و روی سطح مرز داخلی از قاعده تام به‌صورت:

$$\tilde{\omega}_W = \frac{2}{\Delta x^2}\left(\tilde{\psi}_W - \tilde{\psi}_{W+1}\right) \qquad (۱۷)$$

$$\bar{\omega}_W = \frac{2}{\Delta x^2}\left(\bar{\psi}_W - \bar{\psi}_{W+1}\right) \qquad (۱۸)$$

محاسبه می‌شوند[22]. زیرنویس W بیانگر گره واقع بر مرز داخلی و زیرنویس $W+1$ مربوط به گره واقع در فاصله Δx از گره W در راستای بردار نرمال n به سمت ناحیه سیال است. همچنین تابع داخل انتگرال از گسسته‌سازی پیشروی مرتبه اول محاسبه می‌شود:

$$\left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial \mathrm{n}}\right)_W = \frac{\tilde{\omega}_{W+1}-\tilde{\omega}_W}{\Delta x} \qquad (۱۹)$$

$$\left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial \mathrm{n}}\right)_W = \frac{\bar{\omega}_{W+1}-\bar{\omega}_W}{\Delta x} \qquad (۲۰)$$

با تعاریف فوق، تابع جریان روی مرز داخلی در هر گام زمانی قابل محاسبه‌است:

$$\psi_c(t) = -\frac{T_2(t)}{T_1}. \qquad (۲۱)$$

توجه شود که T_1 مستقل از زمان است و فقط یک بار محاسبه می‌شود.

بدین ترتیب، تمام کمیت‌های لازم برای انجام محاسبات در یک گام زمانی به دست آمده‌اند. یعنی می‌توان از معادلات اصلاح‌شده ۵ تا ۸ در زمان انتگرال‌گیری کرد، در حالی که مقدار تابع جریان روی مرز جامد در هر گام زمانی از معادله ۲۱ به دست می‌آید. برای این منظور باید اتساع زمانی و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گیرد.

۵- تعریف تابع توزیع اتساع زمانی و خواص آن

برای شبیه‌سازی حضور یک جسم جامد در معادلات ۵ تا ۸ باید اتساع زمانی واحد در سیال و اتساع زمانی بی‌نهایت در ناحیه جامد اعمال شود. یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\lambda(S) = \Lambda \to +\infty \\ \lambda(\Omega) = 1.\end{cases}$$

طبیعتاً، یک ناحیه فصل مشترک سیال- جامد در همسایگی مرز فیزیکی Γ_s ایجاد می‌شود که در آن $1 \le \lambda \le \Lambda$ است و مشتقات λ در معادلات ۶ و ۸ تنها در این ناحیه، مقدار غیرصفر پیدا می‌کنند. بدین منظور، تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_n(\mathbf{x}) = 1 + (\Lambda-1)\mathrm{H}_n(\boldsymbol{x}) \approx 1 + \Lambda\mathrm{H}_n(\boldsymbol{x}) \qquad (۲۲)$$

که در این رابطه H_n شکل تقریبی تابع پله واحد (تابع هوی‌ساید) است که مقدار آن از صفر در ناحیه سیال به یک در ناحیه جامد تغییر می‌کند. همچنین می‌دانیم که:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{H}_n(\boldsymbol{x}) = \delta_n(\boldsymbol{x})$$

که در آن $\delta_n(\boldsymbol{x})$ تقریبی برای تابع دلتای دیراک است. تقریب‌های مختلفی برای دلتای دیراک پیشنهاد شده که در تحقیق حاضر:

$$\delta_n(\boldsymbol{x}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{n^2}{2}\boldsymbol{x}^2\right) \qquad (۲۳)$$

در نظر گرفته شده است. برای توضیح بیشتر در مورد این تعاریف می‌توان به منابع[15, 16] مراجعه کرد.

جملات بازنهشتی F^λ، G^λ فقط در ناحیه فصل مشترک سیال و جامد غیرصفر هستند و عملکرد معادلات حاکم ۵ و ۷ تحت تاثیر این جملات قرار دارند. به همین دلیل، خواص این توابع در ناحیه Γ_s دارای اهمیت است.

۵-۱- خواص توابع بازنهشتی $\nabla\lambda/\lambda$ و $\nabla^2\lambda/\lambda$

خواص توابع $\nabla\lambda/\lambda$ و $\nabla^2\lambda/\lambda$ به‌طور مشروح در منابع مختلف [15, 16] استخراج شده‌اند. در اینجا تنها به ذکر گذرای این خواص بسنده می‌شود.

۱- از آنجایی که $\mathrm{H}_n(\boldsymbol{x})$ نقش یک تابع سطح تراز را دارد، مطابق با شکل ۲ دیده می‌شود که[25]:

$$\frac{\nabla\lambda}{\lambda} = \frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}\,\hat{\mathrm{n}} \qquad (۲۴)$$

یعنی $\nabla\lambda/\lambda$ برداری در راستای عمود بر سطح جامد و به سمت داخل آن است. این خاصیت باعث می‌شود بتوانیم به‌جای مطالعه توابع دوبعدی $\nabla\lambda_n/\lambda_n$ و $\nabla^2\lambda_n/\lambda_n$، توابع یک‌بعدی λ_n'/λ_n و λ_n''/λ_n را در راستای $\hat{\mathrm{n}}$ بررسی کنیم که $\frac{d}{dx} = (\cdot)'$ است.

۲- محل وقوع بیشینه λ_n'/λ_n را با b_s و محل وقوع بیشینه λ_n''/λ_n را با b_f نام‌گذاری می‌کنیم. مطابق با شکل ۳ دیده می‌شود که همواره b_s به منطقه جامد و b_f به منطقه سیال نزدیک‌تر است:

$$x_{b_f} < x_{b_s} \qquad (۲۵)$$

۳- واضح است که:

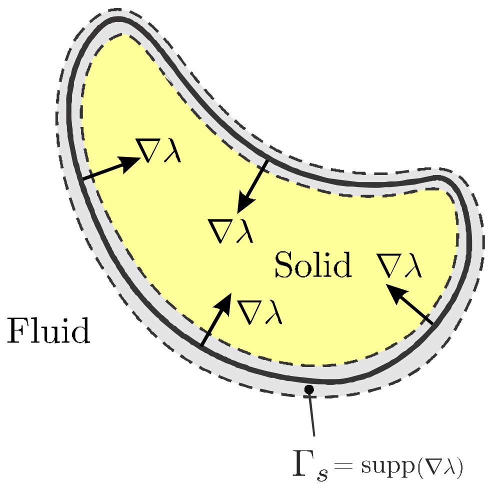
$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0 \qquad (۲۶)$$

و همچنین در مورد مقادیر بیشینه λ_n'/λ_n و λ_n''/λ_n می‌توان نوشت:

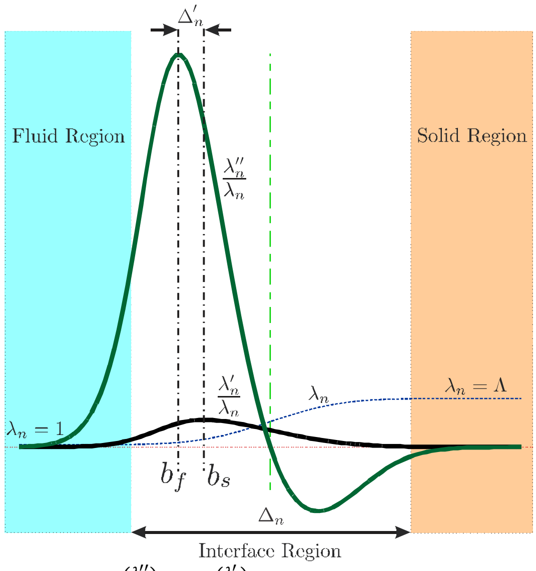
$$\left(\frac{\lambda_n'}{\lambda_n}\right)_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta_n}\right) = \mathcal{O}(n) \qquad (۲۷)$$

$$\left(\frac{\lambda_n''}{\lambda_n}\right)_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta_n^2}\right) = \mathcal{O}(n^2) \qquad (۲۸)$$

از خواص فوق در ادامه استفاده خواهد شد. برخی از ویژگی‌های دیگر توابع بازنهشتی در جدول ۱ خلاصه شده است.



شکل ۲ $\nabla\lambda$ برداری عمود بر مرز به سمت ناحیه جامد



شکل ۳) مقایسه نسبت بزرگی و محل $\left(\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}\right)_{max}$ و $\left(\frac{\lambda''_n}{\lambda_n}\right)_{max}$

جدول ۱) برخی خصوصیات توابع بازنهشتی

خصوصیات
$\lambda_n = 1 + \Lambda\left(\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{n^2}{2}\left(u - u_{\Gamma_s}\right)^2\right] du$
$\lambda'_n = \Lambda\delta_n(x - x_{\Gamma_s})$
$\lambda''_n = -\Lambda\left(\frac{n^3}{\sqrt{2\pi}}\right)(x - x_{\Gamma_s}) \exp\left[-\frac{n^2}{2}(x - x_{\Gamma_s})^2\right]$
$\Delta_n = 6/n\,, \Delta'_n = 0.75/n$

۵-۲- نقش و تفسیر اثر F^λ

جمله بازنهشتی F^λ در معادله ۵ به‌گونه‌ای عمل می‌کند که دینامیک تاوایی نواحی سیال و جسم صلب از همدیگر مجزا باشند. برای توضیح این مطلب، F^λ را به دو بخش نفوذ و جابه‌جایی تجزیه می‌کنیم:

$$F^\lambda = \overbrace{\nu\left(2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\omega + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\omega\right)}^{F^\lambda_{Diff}} \overbrace{-\omega\mathbf{u}^T\cdot\frac{\nabla\lambda}{\lambda}}^{F^\lambda_{Adv}} \qquad (۲۹)$$

۱- جمله F^λ_{Diff} باعث عدم تبادل تاوایی سیال به جامد و بالعکس از طریق لزجت (عدم نفوذ تاوایی) خواهد شد. توجه کنید که این جمله خود می‌تواند به دو بخش تجزیه شود:

$$F^\lambda_{Diff} = \overbrace{2\nu\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\omega}^{D_1} + \overbrace{\nu\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\omega}^{D_2}$$

حال جمله اول به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$D_1 = 2\nu\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\omega = 2\nu\frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}(\nabla\omega\cdot\hat{\mathrm{n}}) = 2\nu\left(\frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{n}} \quad (۳۰)$$

واضح است که:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|\nabla\lambda_n|}{\lambda_n}\right)_{b_s} = \infty$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{n}}\right)_{b_s} = 0 \qquad (۳۱)$$

از طرفی در D_2 داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|\nabla^2\lambda_n|}{\lambda_n}\right)_{b_f} = \infty$$

پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\omega_{b_f} = 0 \qquad (۳۲)$$

بنابراین تبادل تاوایی درون جسم جامد با سیال از طریق لزجت وجود ندارد.

۲- جمله F^λ_{Adv} باعث عدم تبادل تاوایی سیال به جامد و بالعکس از طریق جابه‌جایی (عدم جابه‌جایی تاوایی) خواهد شد:

$$F^\lambda_{Adv} = \omega\left(\mathbf{u}^T\cdot\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\right) = \frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}(\mathbf{u}^T\cdot\hat{\mathrm{n}})\omega = \left(\frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}\right)\frac{\partial\mathbf{u}^T}{\partial\mathrm{n}}\omega \qquad (۳۳)$$

در اینجا نیز مشابه استدلال بخش قبل:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial\mathbf{u}^T}{\partial\mathrm{n}}\omega\right)_{b_s} = 0$$

ولی چون $\left(\frac{\partial\mathbf{u}^T}{\partial\mathrm{n}}\right)_{b_s}$ لزوماً برابر صفر نیست، باید داشته باشیم:

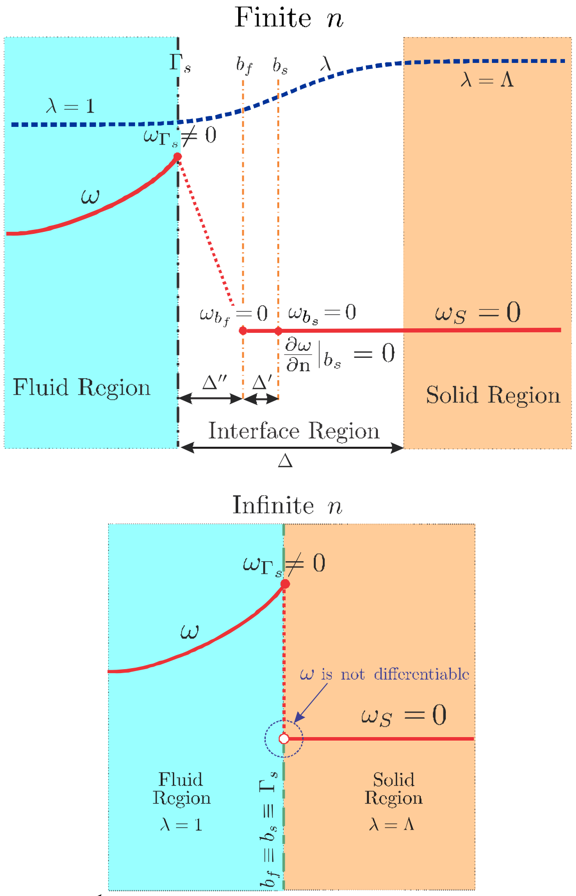
$$\lim_{n\to\infty}\omega_{b_s} = 0 \qquad (۳۴)$$

که باعث عدم انتقال تاوایی از مرز جسم جامد از طریق جابه‌جایی می‌شوند.

۳- مشاهده شد که در حالت حدی، روابط $\omega_{b_s} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathrm{n}}\right)_{b_s} = 0$ و $\omega_{b_f} = 0$ برقرار می‌شوند و مطابق با شکل ۴، شیب و مقدار تاوایی در داخل ناحیه جامد تا نقطه b_f را صفر می‌کنند. باید توجه کرد که گرادیان سرعت سیال در مجاورت مرز جامد باعث می‌شود تا مقدار ω_{Γ_s} برابر صفر نباشد. یعنی تولید تاوایی برای برقراری شرط عدم لغزش انجام می‌شود. در حالت حدی:

$$\lim_{n\to\infty}|b_f - b_s| = 0 \qquad (۳۵)$$

یعنی نقطه b_f و b_s در حد به همدیگر میل می‌کنند و مرز جامد به سطحی تکینه تبدیل می‌شود که تاوایی روی آن ناپیوسته است. به همین دلیل، باید روش‌های عددی مناسبی برای مواجهه با این ناپیوستگی اتخاذ شوند.



شکل ٤) بالا: تاوایی صفر در S و فصل مشترک تا b_f، ناپیوستگی در مرز (n محدود)، **پایین:** تاوایی ناپیوسته و غیرقابل مشتق‌گیری در مرز (n نامحدود)

۵-۳- نقش و تفسیر اثر G^{λ}: شرط عدم نفوذ

در معادلات ۱۱ و ۱۲، جمله بازنهشتی G^{λ}، سینماتیک جریان در نواحی سیال و جامد را از همدیگر جدا می‌کند.

$$G^{\lambda} = 2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\psi + \frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}(\psi-\psi_c) \qquad (۸)$$

۱- برای اولین جمله آن می‌توان نوشت:

$$E_1 = 2\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\cdot\nabla\psi = 2\frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}(\nabla\psi\cdot\hat{\mathrm{n}}) = 2\left(\frac{|\nabla\lambda|}{\lambda}\right)\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{n}} \qquad (۳۶)$$

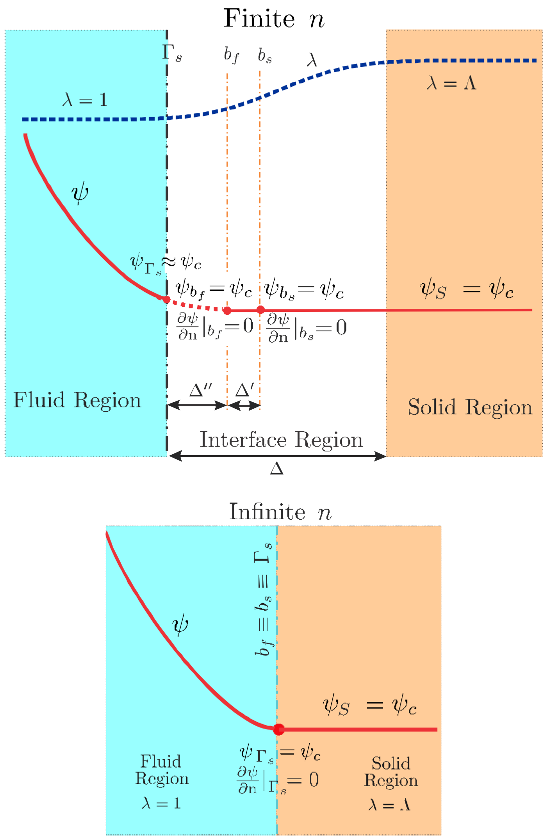
مشابه استدلال‌های بخش قبل می‌توان دید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{n}}\right)_{b_s} = 0 \qquad (۳۷)$$

۲- در جمله دوم $\left(\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\right)_{max}$ در b_f به بی‌نهایت میل می‌کند، لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\psi_{b_f}-\psi_c\right)_{b_s} = 0 \;;\; \psi_{b_f} = \psi_c \qquad (۳۸)$$

با میل‌کردن λ_n به λ_∞ و کوچک‌شدن ناحیه فصل مشترک، نقطه b_f بی‌نهایت به مرز فیزیکی نزدیک می‌شود. مطابق با شکل ۵ به‌علت پیوستگی ψ در مرز، برقراری رابطه ۳۸ باعث می‌شود که مقدار تابع جریان در سطح و داخل ناحیه جامد برابر مقدار ثابت ψ_c شده و شرط عدم نفوذ برقرار شود.



شکل ۵ **بالا:** ψ پیوسته با شیب نزدیک به صفر در Γ_s (n محدود)، **پایین:** ψ پیوسته با شیب صفر در Γ_s و برابر با مقدار مجهول ψ_c در داخل و سطح جامد (n نامحدود)

۶- حل عددی معادلات اصلاح‌شده

برای حل عددی مجموعه معادلات ۵ و ۷ باید روش‌های عددی مناسبی اتخاذ شود. اما پیش از ارایه الگوریتمی کلی برای حل این دستگاه، ابتدا باید در مورد نحوه گسسته‌سازی توابع λ، $\nabla\lambda/\lambda$ و $\nabla^2\lambda/\lambda$ تصمیم‌گیری شود و سپس، روش گسسته‌سازی زمانی و مکانی معادلات ارایه شود.

۶-۱- گسسته‌سازی ضرایب بازنهشتی

در کار حاضر، حل عددی معادلات اصلاح‌شده روی یک شبکه دکارتی یکنواخت انجام شده است که آن را با $\mathcal{G}$ نمایش می‌دهیم. برای گسسته‌سازی معادلات اصلاح‌شده، ابتدا باید در مورد فرم گسسته λ و فرم گسسته $\frac{\nabla\lambda}{\lambda}$ و $\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}$ روی شبکه $\mathcal{G}$ تصمیم‌گیری شود. در این مقاله فرض شده است که:

۱- λ_j مقادیر نمونه‌گیری‌شده $\lambda_n(\boldsymbol{x})$ روی شبکه $\mathcal{G}$ هستند. این مقادیر به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\lambda_j = \begin{cases}\Lambda & \boldsymbol{x}_j\in S\\ 1 & \boldsymbol{x}_j\in(\Gamma_s\cup\Omega)\end{cases} \qquad (۳۹)$$

که در آن Λ عددی بسیار بزرگ بوده، مثلاً در کار حاضر، مقدار آن $\Lambda = 10^{30}$ در نظر گرفته شده است.

۲- براساس مرتبه بزرگی و استدلال‌های تشریح‌شده در بخش ۵، مقادیر بیشینه $\nabla\lambda/\lambda$ و $\nabla^2\lambda/\lambda$ و محل وقوع آن در معادلات حاکم به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

در معادلات ۵، ۱۱ و ۱۲:

$$\left.\frac{\nabla\lambda}{\lambda}\right|_{x_j} = \begin{cases}\frac{\Lambda}{\Delta x} & \boldsymbol{x}_j\in\Gamma_s'\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۴۰)$$

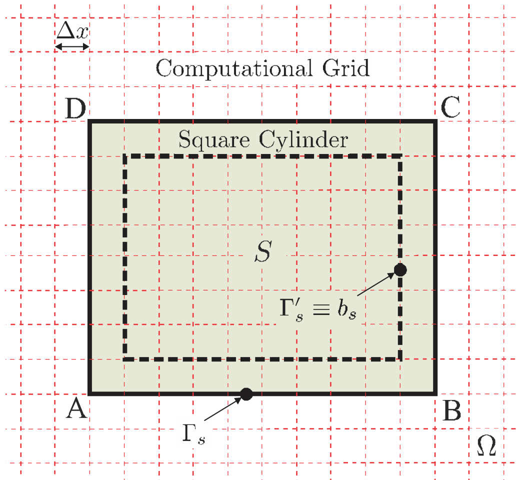
برای معادله ۵:

$$\left.\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\right|_{x_j} = \begin{cases}\frac{\Lambda}{\Delta x^2} & \boldsymbol{x}_j\in\Gamma_s'\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۴۱)$$

و برای معادلات ۱۱ و ۱۲:

$$\left.\frac{\nabla^2\lambda}{\lambda}\right|_{x_j} = \begin{cases}\frac{\Lambda}{\Delta x^2} & \boldsymbol{x}_j\in\Gamma_s\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۴۲)$$

که همانند شکل ۶ در این روابط، Γ_s روی مرز جامد و Γ_s' به اندازه Δx درون جسم جامد در نظر گرفته می‌شود.



شکل ٦ توزیع توابع بازنهشتی $\nabla\lambda/\lambda$، $\nabla^2\lambda/\lambda$ و λ در فضای گسسته

۶-۲- گسسته‌سازی‌های زمانی و مکانی معادلات حاکم

به‌منظور داشتن محدوده پایداری بیشتر، معادله اصلاح‌شده تاوایی از روش *کرانک- نیکلسون* در زمان انتگرال‌گیری شده و مشتقات مکانی معادلات اصلاح‌شده تابع جریان و تاوایی به‌صورت تفاضل مرکزی مرتبه دوم گسسته شده‌اند. معادلات بیضوی حاصل از این گسسته‌سازی از روش SOR با تسریع همگرایی چبیشف حل شده‌اند.

۶-۳- الگوریتم حل عددی معادلات اصلاح‌شده

اکنون با داشتن معادلات گسسته‌شده می‌توان الگوریتم کلی برای حل دستگاه معادلات ۵ و ۷ ارایه کرد. الگوریتم ارایه‌شده به‌گونه‌ای است که بتوان مستقیماً الگوریتم‌های کلاسیک تاوایی- تابع جریان را به آن اعمال کرد:

۱- حل معادله تابع جریان ۱۱ با شرط مرزی ۱۳ و تعیین $\tilde{\psi}$

۲- محاسبه انتگرال T_1 روی خم بسته Γ_s با روش ذوزنقه‌ای

۳- تعیین شرایط اولیه میدان تابع جریان، تاوایی و سرعت

۴- حل معادله اصلاح‌شده تاوایی ۵ براساس توزیع معلوم تاوایی و سرعت گام زمانی قبل و شرایط مرزی معین در Γ

۵- حل معادله اصلاح‌شده تابع جریان ۱۲ توسط تاوایی معلوم مرحله ۴ با شرط مرزی ۱۴ و تعیین $\bar{\psi}$

۶- محاسبه انتگرال $T_2(t)$ روی خم بسته Γ_s با روش ذوزنقه‌ای

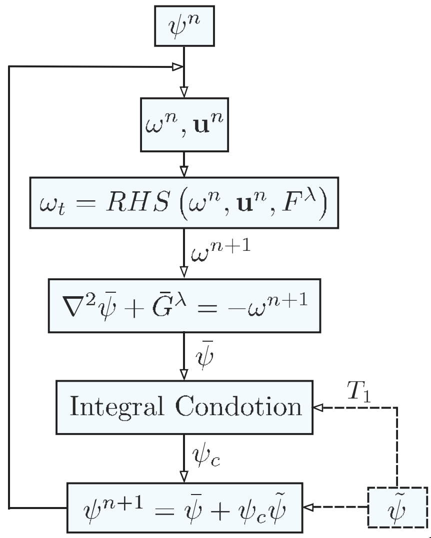
۷- محاسبه ψ_c از رابطه ۲۱

۸- محاسبه میدان تابع جریان در گام زمانی جدید از رابطه ۹

۹- محاسبه میدان سرعت و تاوایی در گام زمانی جدید از مرحله ۸

۱۰- ذخیره نتایج گام زمانی جدید و بازگشت به مرحله ۴

شکل ۷ روند نمای الگوریتم مذکور را نمایش می‌دهد.



شکل ۷) الگوریتم حل عددی

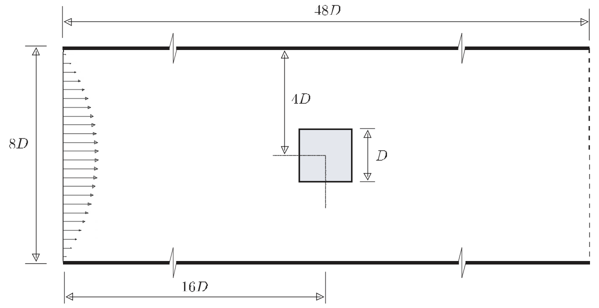
۷- نتایج حل عددی

برای نشان‌دادن قابلیت‌های روش، در این بخش به مطالعه عددی جریان حول استوانه مستطیلی، صفحه تخت نازک و استوانه دایروی پرداخته و نتایج به‌دست‌آمده با کارهای پیشین مقایسه می‌شود.

۷-۱- حل عددی جریان تراکم‌ناپذیر دوبُعدی حول استوانه مربعی

جریان تراکم‌ناپذیر حول استوانه مربعی، یکی از مسایل شناخته‌شده اندرکنش جریان تراکم‌ناپذیر با اجسام جامد بوده که بارها با روش‌های تجربی و عددی مطالعه شده است[26-29]. دلیل انتخاب جسم مربعی‌شکل با مرز منطبق بر شبکه دکارتی، جلوگیری از ورود خطاهای درون‌یابی به مساله و نشان‌دادن قابلیت روش در مواجهه با مرزهای تیز بوده است.

جسم مربعی در فاصله مساوی از دو صفحه بالا و پایین کانال قرار دارد. طول هر ضلع جسم مربعی صلب برابر D و عرض کانال $8D$ بوده، لذا نسبت انسداد در این مساله $\frac{1}{8}$ است. طول کانال، معادل $48D$ است و جسم مربعی در فاصله $16D$ از دهانه ورودی قرار دارد. توزیع سرعت ورودی به‌صورت سهموی با سرعت بیشینه $u_{max} = 1$ است. این چیدمان که در شکل ۸ به‌طور شماتیک نشان داده شده، منطبق با مقاله *بروئر* و همکاران[27] به‌نحوی است که نتایج قابل مقایسه باشند. عدد رینولدز از رابطه $Re = u_{max}D/\nu$ تعریف می‌شود و هر دو جریان پایا و گذرا تنها از انتخاب مقادیر مختلف عدد رینولدز حاصل می‌شوند. برای حل عددی از شبکه محاسباتی یکنواخت دکارتی ۱۶۰×۹۶۰ استفاده می‌شود، به‌نحوی که هر ضلع مربع به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود.



شکل ۸) چیدمان مساله جریان حول استوانه مربعی داخل کانال

سرعت ورودی کانال مطابق با شکل ۸ از پروفیل سرعت توسعه‌یافته جایگزین شده است که از روی آن مقادیر ψ با انتگرال‌گیری در راستای مرز به‌صورت:

$$\psi = \frac{1}{4D}\left(y^2 - \frac{y^3}{12D}\right) - \frac{8D}{3}, \qquad (۴۳)$$

حاصل شده است. بنابراین مقادیر ψ روی سطح پایینی و بالایی کانال از $\psi_U = \frac{8D}{3}$ و $\psi_L = -\frac{8D}{3}$ جایگزین می‌شوند. با انتخاب فوق، شرط مرزی تاوایی در ورودی کانال نیز خواهد شد:

$$\omega = \frac{1}{2D}\left(\frac{y}{4D} - 1\right), \qquad (۴۴)$$

شرط مرزی تاوایی در دیواره بالا و پایین از قاعده تام با استفاده از تابع جریان در گام زمانی قبل محاسبه می‌شود.

روی مرز خروجی مقادیر تاوایی و تابع جریان از شرط مرز باز:

$$\partial_t\phi + \bar{U}\partial_x\phi = 0 \qquad (۴۵)$$

به دست آمده‌اند که ϕ تابع جریان یا تاوایی، x راستای جریان و $\bar{U}$ متوسط سرعت در امتداد جریان است. با توجه به ماهیت هذلولوی معادله ۴۵، در هر گام زمانی، این معادله از روش لیپ‌فراگ در زمان انتگرال‌گیری شده است و مشتق مکانی نیز به‌صورت مرکزی مرتبه دوم گسسته‌سازی شده‌اند[30].

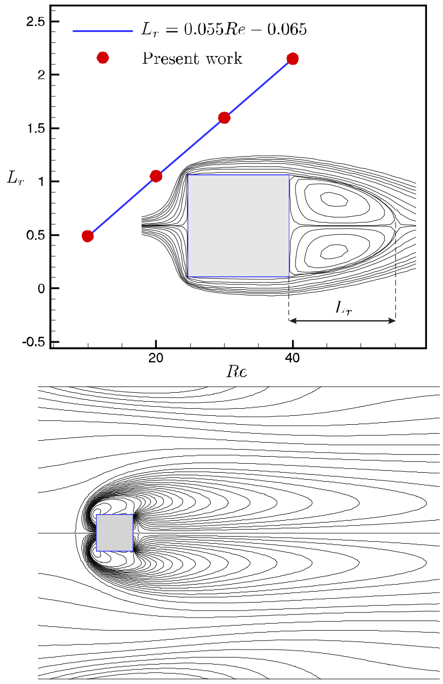
۷-۱-۱- نتایج حل جریان حول استوانه مربعی

برای جریان پایا، اعداد رینولدز ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۴۰ و برای جریان گذرا عدد رینولدز ۱۰۰ انتخاب شده‌اند. در تمام اجراها $u_{max} = 1$ و ν براساس رینولدز تعیین شده و $CFL = 0.1$ است.

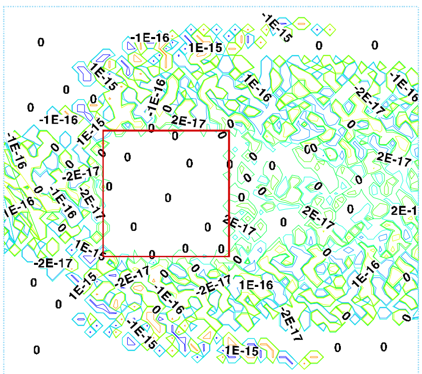
برای جریان‌های پایا، حل از میدان سرعت صفر آغاز شده و تا برقراری شرط $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2 < 10^{-8}$ ادامه یافته است. *بروئر* و همکاران[27] رابطه خطی $L_r = 0.0554Re - 0.065$ را بین عدد رینولدز و طول گردابه تشکیل‌شده L_r در محدوده ۵۰> Re >۵ پیشنهاد کرده‌اند. شکل ۹ علاوه بر کانتورهای تاوایی و خطوط جریان حول جسم مربعی در Re=۲۰، انطباق نتایج حل پایا در چهار رینولدز مختلف با رابطه مذکور را نشان می‌دهد. این انطباق نشان از دقت روش در پیش‌بینی بزرگ مقیاس جریان است.

در شکل ۱۰ خطوط تراز دیورژانس سرعت (پیوستگی میدان سرعت) ترسیم شده‌اند. همان گونه که دیده می‌شود، علاوه بر پیوستگی در میدان سرعت سیال و جامد، در همسایگی مرز جامد نیز پیوستگی سرعت با دقت بسیار زیادی $\mathcal{O}(10^{-17})$ برقرار است. همچنین ارضای شرط عدم لغزش در شکل ۱۱ با ارایه کانتور مولفه افقی سرعت بررسی شده است. مقدار آن در داخل ناحیه جامد بسیار ناچیز و از مرتبه $\mathcal{O}(10^{-27})$ است. همچنین مقدار u در مرز چپ و راست دقیقاً برابر صفر و در مرز بالا و پایین با ریزترشدن شبکه محاسباتی به صفر نزدیک می‌شود.

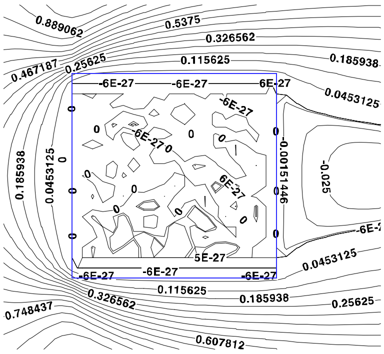
نمودار ۱، تاریخچه تغییرات ψ_c را برای Re=۱۰۰ نشان می‌دهد. برای جریان‌های گذرا، حل از میدان سرعت صفر آغاز شده و تا ثابت‌شدن دامنه نوسانات ψ_c ادامه یافته است. متذکر می‌شویم که مقادیر ψ_c از قید شار تاوایی صفر در بخش ۴ به دست آمده است. از لحظه آغاز تا حدود ثانیه ۵۰، مقادیر ψ_c بسیار کوچک است. بیشینه و کمینه نوسانات بعد از حدود ثانیه ۶۰ بین محدوده ۵/۲۶۷×۱۰^{-۳}± ثابت باقی می‌ماند. شکل ۱۲ کانتورهای تاوایی و تابع جریان را حول جسم صلب مربعی در یک لحظه از حل با دامنه ثابت در Re=۱۰۰ نمایش می‌دهد.



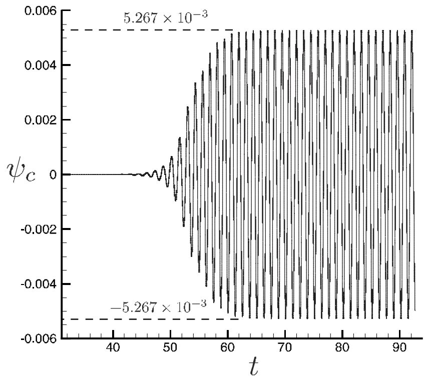
شکل ۹) شبیه‌سازی جریان پایا در Re=۲۰؛ **بالا:** مقایسه نتایج با L_r. **مرکز:** خطوط جریان حول جسم. **پایین:** میدان تاوایی حول جسم



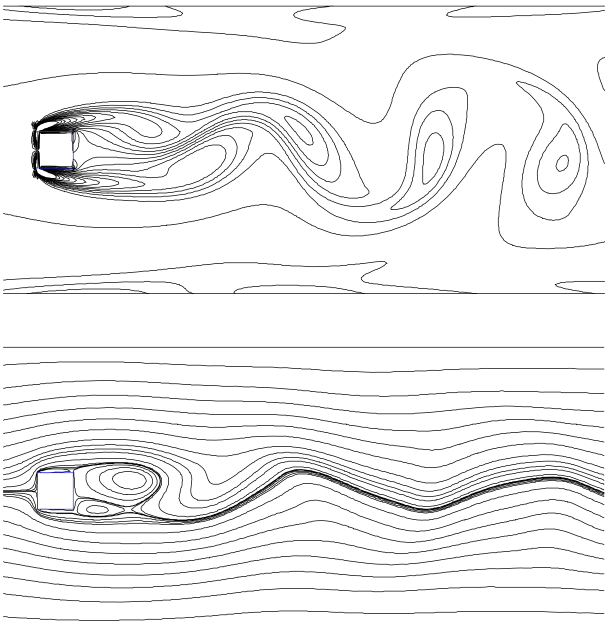
شکل ۱۰) منحنی‌های تراز دیورژانس سرعت در Re=۲۰



شکل ۱۱) منحنی‌های تراز مولفه سرعت u در Re=۲۰



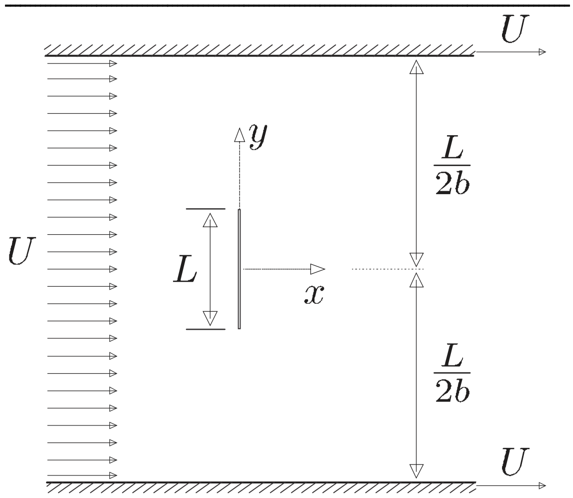
نمودار ۱) تغییرات تابع‌جریان روی استوانه مربعی برحسب زمان برای Re=۱۰۰



شکل ۱۲) منحنی‌های تراز تاوایی و تابع جریان حول استوانه مربعی قرارگرفته در کانال برای رژیم جریان Re=۱۰۰

۷-۲- جریان ناگهانی عمود بر صفحه تخت نازک

جریان تراکم‌ناپذیر لزج و دوبُعدی عمود بر صفحه تخت نازک که در اثر حرکت ناگهانی صفحه در یک کانال بی‌نهایت بلند ایجاد می‌شود، به‌دلیل ضخامت کم صفحه از مسایل دشوار برای مطالعه توسط روش بازنهشتی است[11]. در این بخش برای نشان‌دادن قابلیت روش حاضر، این مساله، حل و نتایج آن با نتایج دیگران مقایسه می‌شود. مطابق با شکل ۱۳، یک صفحه تخت نازک به طول L در میانه یک کانال به پهنای L/b قرار داده شده است.



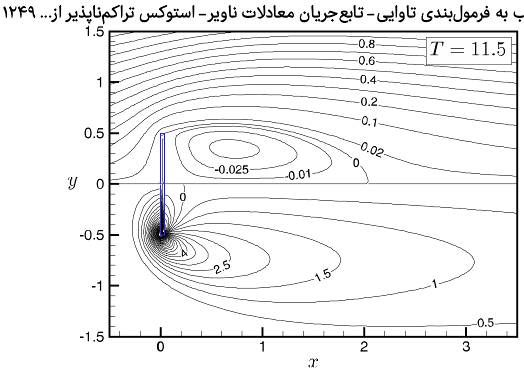
شکل ۱۳) چیدمان مساله جریان عمود بر صفحه تخت با جریان ناگهانی

سیال و جداره‌های کانال به‌طور ناگهانی از حالت سکون با سرعت ثابت U شروع به حرکت می‌کنند. عدد رینولدز با تعریف $Re = UL/\nu = 20$ و نسبت انسداد برابر با $b = 0.15$ در نظر گرفته شده است. در روش حاضر، کمترین ضخامت ممکن برای مدل‌کردن صفحه تخت نازک سه گره یعنی معادل $e = 2\Delta x$ است. گره‌های طرفین برای شبیه‌سازی سطوح صفحه و گره میانی برای مدل‌کردن داخل ناحیه جامد به کار می‌روند. طول صفحه تخت توسط شبکه محاسباتی یکنواخت به پنجاه قسمت مساوی تقسیم شده است و گام‌های زمانی با $CFL = 1$ تعیین می‌شود.

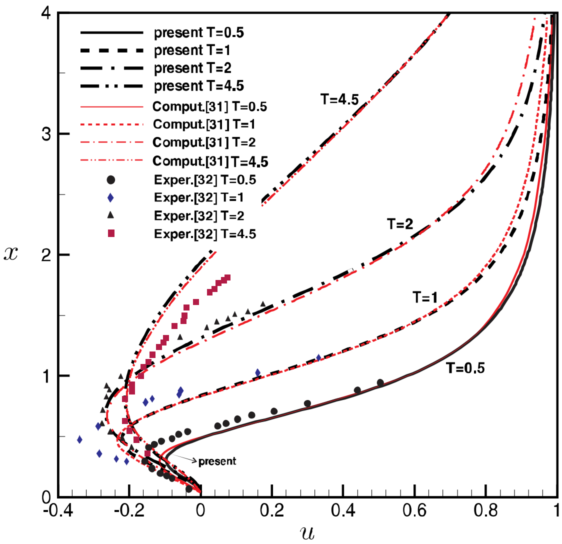
برای مقایسه با شکل ۸ در مرجع[31]، میدان تاوایی و تابع جریان حالت پایا در نمودار ۲ نشان داده شده است. زمان بی‌بعد به‌صورت $T = \frac{Ut}{L}$ تعریف می‌شود. در لحظات اولیه $T \leq 2$ گردابه‌های اولیه در نوک صفحه تشکیل می‌شوند که توسعه آنها منجر به ایجاد گردابه‌های ثانویه در پشت صفحه خواهد شد. بعد از $T \approx 6$ ساختار جریان، پایدار و طول حباب پشت صفحه تقریباً ثابت می‌شود. خطوط جریان، انطباق بسیار خوبی دارند و کانتورهای تاوایی به‌علت ضخامت صفحه، اختلاف اندکی را نشان می‌دهد.

در نمودار ۳، تغییرات زمانی توزیع سرعت در محور پشتی صفحه تخت با نتایج عددی و تجربی دیگران مقایسه شده است. نتایج مرجع[31] برای صفحه تخت بی‌نهایت نازک و نسبت انسداد $b = 0$ ارایه شده، در حالی که در حل حاضر، صفحه دارای ضخامت $e = \frac{L}{25}$ و نسبت انسداد $b = 0.15$ است، با این حال توزیع سرعت بسیار نزدیک یا کاملاً منطبق هستند. نتایج تجربی مرجع[32] در نسبت انسداد $b = 0.15$ حاصل شده‌اند. در لحظات اولیه $(T = 0.5)$، اثرات جریان سه‌بُعدی کمتر است و نتایج حل عددی به‌خصوص بیرون از منطقه حباب، انطباق خوبی با نتایج تجربی دارد. اما همان‌طور که انتظار می‌رود، در لحظات پایانی، اثرات سه‌بُعدی باعث دورشدن نتایج از هم می‌شود.

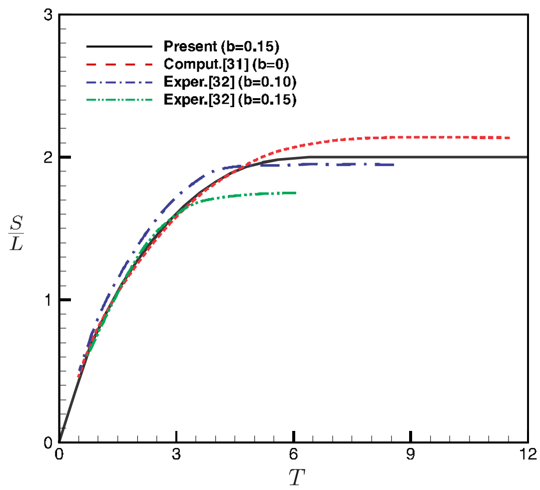
نمودار ۴، تغییرات طول حباب تشکیل‌شده در پشت صفحه تخت را برحسب زمان نشان می‌دهد. مقایسه با نتیجه حل عددی مرجع[31] نشان می‌دهد که افزایش طول حباب در لحظات اولیه با نتایج حل حاضر کاملاً منطبق است، زیرا تا $T \approx 5$ اثرات دیواره‌های کانال در طول حباب تاثیر مهمی ندارد. با نزدیک‌شدن به حالت پایا، طول گردابه متاثر از جداره‌ها حدود ۷٪ کوتاه‌تر می‌شود. نتایج تجربی نیز در لحظات اولیه و پیش از نمایان‌شدن اثرات سه‌بُعدی جریان به حل حاضر بسیار نزدیک هستند.



نمودار ۲) منحنی‌های تراز تابع جریان (نیمه بالا) و تاوایی (نیمه پایین) در Re=۲۰



نمودار ۳) تغییرات زمانی سرعت در پشت صفحه تخت در Re=۲۰



نمودار ٤) تغییرات زمانی طول حباب در پشت صفحه تخت در Re=۲۰

۷-۳- جریان حول استوانه دایروی ساکن

در مسایل با سطوح غیرمنطبق بر شبکه، برای اعمال صحیح مرز مستور به گره‌های شبکه دکارتی، باید گسسته‌سازی‌ها به‌همراه درون‌یابی‌های مناسبی انجام شوند.

برای این منظور، در کار حاضر از روش ارایه‌شده توسط *جوما* و *ماکاسکیل* استفاده شده است. آنها یک روش مرتبه دو براساس شبکه دکارتی، برای حل معادله پوآسون در دامنه‌ای با مرز دیریشله نامنظم ارایه کرده‌اند[33]. برای استفاده از این روش، باید توجه کرد

که در روابط ۱۷ و ۱۸، مقدار تابع جریان و تاوایی در نقاطی از میدان که روی شبکه محاسباتی قرار ندارند، با استفاده از یک درون‌یابی با نوعی تابع پایه شعاعی (RBF) که به روش شپارد اصلاح‌شده معروف است، محاسبه و سپس جای‌گذاری شده‌اند[18].

۷-۳-۱- نتایج حل جریان حول استوانه دایروی

از بررسی مطالعات تجربی و عددی پیشین می‌دانیم که دنباله پشت جسم تا عدد رینولدز ۴۰ کاملاً پایدار است و ناپایداری‌ها جایی بین رینولدز ۴۰ تا ۵۰ آغاز و سپس ریزش گردابه ایجاد می‌شود[21, 34, 35]. در این مقاله، جریان پایا در رینولدز ۴۰ و جریان ناپایا در رینولدز ۱۰۰ بررسی می‌شوند.

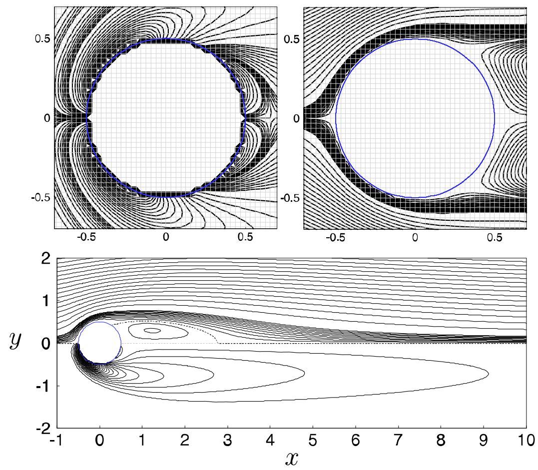
در این مساله، یک استوانه دایروی به قطر D در یک دامنه نامحدود در مسیر جریان آزاد یکنواخت با سرعت U قرار دارد. برای حل عددی، استوانه در خط تقارن مرز بالا و پایین یک دامنه محاسباتی به طول $20D$ و عرض $16D$ قرار می‌گیرد. مرکز استوانه از مرز ورودی به اندازه $6D$ فاصله دارد. در میدان محاسباتی از شبکه محاسباتی دکارتی یکنواخت ۶۴۰×۵۱۲ استفاده شده است که قطر استوانه را به ۳۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کند. برای تغییر عدد رینولدز $Re = UD/\nu$، سرعت در $U = 1$ و قطر در $D = 1$ ثابت نگه داشته می‌شود و ν تغییر می‌کند. تابع جریان و تاوایی به‌ترتیب با تقسیم بر UD و U/D بی‌بعد می‌شوند.

مقادیر تابع جریان در مرز ورودی به‌صورت خطی تغییر می‌کند $(\psi = Uy)$ و در مرز بالا و پایین ثابت $(\psi = \pm 8UD)$ است. شرط مرزی تاوایی در مرزهای ورودی، بالا و پایین به‌صورت همگن برابر صفر $(\omega = 0)$ است. در مرز خروجی مانند مثال ۷-۱ از شرط مرزی باز استفاده می‌شود.

طول حباب پشت استوانه (L)، فاصله بین مرکز گردابه‌ها (b)، فاصله مرکز گردابه‌ها از استوانه (a) و زاویه جدایش جریان (θ) از مشخصه‌های جریان پایا هستند. مشخصه‌های جریان گذرا شامل عدد اشتروهال و تغییرات زمانی تابع جریان سطح استوانه ψ_c هستند. عدد اشتروهال با تعریف $St = fD/U$، همان فرکانس بی‌بعدشده ریزش گردابه‌ها است.

شکل ۱۴، کانتور تابع جریان و تاوایی را برای جریان پایا با Re=۴۰ نشان می‌دهد. مقایسه با مرجع[21]، بیانگر صحت نتایج است. نمای نزدیک کانتورهای تاوایی و تابع جریان در مجاورت استوانه، به‌خوبی ساختار جریان بازگشتی پشت استوانه در مرز مستور نامنطبق بر شبکه دکارتی را نشان می‌دهد. جدول ۲ و شکل ۱۵ [21, 34, 36-38]، مشخصات حباب پشت استوانه در جریان پایا با عدد رینولدز ۴۰ شامل طول حباب، فاصله مرکز گردابه‌ها از هم و استوانه و زاویه جدایی جریان از سطح استوانه را با نتایج عددی و تجربی پنج مرجع دیگر مقایسه می‌کند و توافق عالی را نشان می‌دهد.

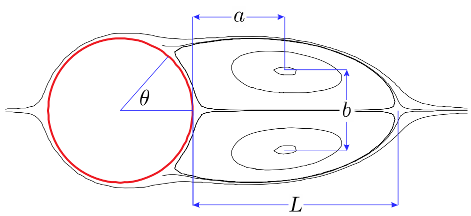
شکل ۱۶، دنباله نوسانی پشت استوانه دایروی در جریان ناپایا با Re=۱۰۰ را توسط کانتورهای تابع جریان و تاوایی نمایش می‌دهد. در آغاز، حل یک حباب شامل دو گردابه معکوس ایجاد و به‌تدریج بزرگ‌تر می‌شود. پس از حدود ۳۰ثانیه، طول حباب به حد نهایی $5.5D$ می‌رسد. در حدود $t = 90s$ نوسانات بسیار کوچکی در پایین‌دست جریان و انتهای حباب مشاهده می‌شود. ناپایداری‌ها باعث رشد سریع نوسانات و دامنه نوسانات در حدود $t = 180s$ در محدوده ۴/۳۹۷×۱۰^-۲± ثابت می‌شود. در این روش، نیازی به ایجاد اغتشاشات مصنوعی برای ناپایاکردن جریان وجود ندارد. نمودار ۵، تغییرات زمانی تابع جریان بی‌بعد در سطح استوانه ψ_c را از ابتدا تا $t = 300s$ نشان می‌دهد. افزایش تدریجی نوسانات تا تثبیت آن کاملاً مشهود است. فرکانس بی‌بعد نوسانات دنباله در Re=۱۰۰ در مطالعات عددی انجام‌شده توسط *کلهون*[21]، *براز* و همکاران[39]، *لیو*[40] و *لینیک* و *فاصل*[37] به‌ترتیب ۰/۱۷۵، ۰/۱۶۵ و ۰/۱۶۶ است. همچنین نتایج تجربی *روشکو* و *ویلیامسون* نیز به‌ترتیب ۰/۱۶۴ و ۰/۱۶۶ است[41, 42]. عدد اشتروهال در تحقیق حاضر معادل St=0.169 تخمین زده می‌شود که در مقایسه با نتایج فوق قابل قبول است.



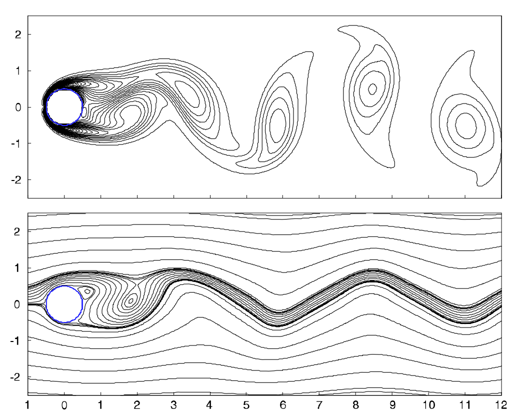
شکل ۱۴ نمای نزدیک منحنی‌های تراز ψ و ω، بالا- راست: نمای نزدیک منحنی‌های تراز ψ (۰/۰۲: ۳± و ۰/۰۰۱: ۰/۰۲±)، *بالا-چپ*: نمای نزدیک، منحنی‌های تراز ω (۰/۵: ۱۱± و ۰/۱: ۱± و ۰/۰۲: ۰/۱±)، *پایین*: منحنی‌های تراز ψ (نیمه بالا) و منحنی‌های تراز ω (نیمه پایین). هر سه شکل در Re=۴۰

جدول ۲) مقایسه نتایج مشخصات دنباله جریان پایدار در Re=۴۰

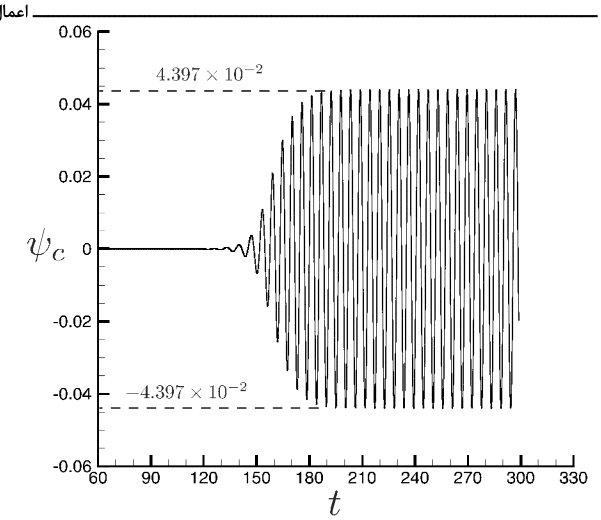
مطالعه	b/D	a/D	L/D	θ°
تایرا **و** ***کولونیوس***[36]	۰/۶	۰/۷۵	۲/۳	۵۳/۷
لینیک **و** ***فاسل***[37]	۰/۶	۰/۷۲	۲/۲۸	۵۳/۶
دنیس **و** ***چانگ***[38]	–	–	۲/۳۵	۵۳/۸
کوتانسو **و** ***بوآرد***[34]	۰/۵۹	۰/۷۶	۲/۱۳	۵۳/۸
کلهون[21]	–	–	۲/۱۸	۵۴/۲
کار حاضر	۰/۶۲	۰/۷۲	۲/۳	۵۳/۶



شکل ۱۵) مشخصات دنباله جریان پایدار در Re=۴۰ در مطالعه حاضر



شکل ۱۶) کانتورهای تاوایی و تابع‌جریان حول استوانه دایروی در Re=۱۰۰



نمودار ۵) تغییرات تابع‌جریان روی استوانه دایروی برحسب زمان برای *Re*=۱۰۰

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای اعمال مرزهای جامد صلب به معادلات جریان سیال از طریق اعمال اتساع زمانی بی‌نهایت در ناحیه جامد ارایه شد. هر چند روش پیشنهادی می‌تواند قابل اعمال به سایر شکل‌های معادلات نیز باشد، لیکن در مقاله حاضر به معادلات ناویر- استوکس در فرمول‌بندی تاوایی- تابع جریان اعمال شده است. روش بر پایه یک نگاشت بنا شده است که به معادلات حاکم اعمال می‌شود و بر اثر آن، معادلات اصلاح‌شده‌ای به دست می‌آیند. معادلات اصلاح‌شده تابع جریان و انتقال تاوایی دارای جملات بازنهشتی براساس ضریب اتساع زمانی هستند که تنها در مجاورت مرز مستور داخلی، مقادیر غیرصفر دارند. برای اعمال مرز مستور، ضریب اتساع زمانی در ناحیه سیال برابر یک، در ناحیه جامد مقداری بی‌نهایت بزرگ است و در فصل مشترک سیال و جامد از یک تا بی‌نهایت تغییر می‌کند.

در مقاله، خصوصیات فیزیکی و ریاضی جملات بازنهشتی در معادلات اصلاح‌شده در فضای پیوسته تشریح شده است. همچنین الگوریتمی برای حل عددی معادلات اصلاح‌شده در شبکه یکنواخت دکارتی ارایه شده که از آن برای مطالعه جریان‌های پایا و گذرا حول جسم مربعی واقع در یک کانال و جریان با شروع ناگهانی عمود بر یک صفحه تخت نازک استفاده شده است. در این دو مساله، مرزهای مستور بر شبکه محاسباتی دکارتی منطبق هستند تا دقت روش عددی بدون دخالت درون‌یابی‌ها سنجیده شود. در الگوریتم عددی پیشنهادی با بهره‌گیری از خاصیت خطی‌بودن، معادله تابع جریان به دو معادله مستقل از زمان و وابسته به زمان تجزیه و تابع جریان روی مرز داخلی با کمک معادله انتگرالی شار تاوایی صفر محاسبه شده است. گسسته‌سازی مکانی معادلات از مرتبه دوم مرکزی بوده و برای انتگرال‌گیری زمانی از روش *کرانک- نیکلسون* استفاده شده است.

برای نشان‌دادن توانایی روش در مواجهه با مرزهای مستور غیرمنطبق بر شبکه دکارتی، جریان‌های پایا و گذرا حول یک استوانه دایروی مطالعه شد. گسسته‌سازی مکانی و حل معادلات پوآسون حاکم بر مرزهای مستور، از روش مرکزی مرتبه دوم صورت پذیرفت و برای درون‌یابی‌های مورد نیاز از روش شپارد اصلاح‌شده استفاده شد. مقایسه نتایج با کارهای پیشین، درستی روش حل عددی را تایید می‌کند. همچنین توزیع میدان تابع جریان، تاوایی و سرعت بیانگر یک میدان کاملاً بقایی همراه با ارضای مطلوب شرط عدم لغزش و عدم نفوذ در مرز مستور داخلی است.

تشکر و قدردانی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تاییدیه اخلاقی: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

تعارض منافع: موردی از سوی نویسندگان بیان نشده است.

سهم نویسندگان: محمدعلی بدری (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی (۵۰%)؛ فریدون ثابت‌قدم (نویسنده دوم)، پژوهشگر اصلی (۵۰%)

منابع مالی: این پژوهش تحت حمایت مالی سازمانی نبوده است.

منابع

1- Sabetghadam F, Soltani E, Ghasemi H. A fast immersed boundary fourier pseudo-spectral method for simulation of the incompressible flows. International Journal of Engineering. 2014;27(9):1457-1466.

2- Haeri S, Shrimpton JS. On the application of immersed boundary, fictitious domain and body-conformal mesh methods to many particle multiphase flows. International Journal of Multiphase Flow. 2012;40:38-55.

3- Sabetghadam F, Shajari-Ghasemkheily A. Using the method of inverse problems in implementing the solid immersed boundaries on vorticity-streamfunction formulation of the incompressible viscous fluid flow. Modares Mechanical Engineering. 2017;17(10):397-404. [Persian]

4- Mittal R, Iaccarino G. Immersed boundary methods. Annual Review of Fluid Mechanics. 2005;37:239-261.

5- Arquis E, Caltagirone JP. On the hydrodynamical boundary-conditions along a fluid layer porous-medium interface, Application to the case of free-convection. Comptes Rendus De l Academie Des Sciences Serie II. 1984;299(1):1-4. [French]

6- Angot P, Bruneau CH, Fabrie P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numerische Mathematik. 1999;81(4):497-520.

7- Carbou G, Fabrie P. Boundary layer for a penalization method for viscous incompressible flow. Advances in Differential Equations. 2003;8(12):1453-1480.

8- Schneider K. Numerical simulation of the transient flow behaviour in chemical reactors using a penalisation method. Computers and Fluids. 2005;34(10):1223-1238.

9- Kolomenskiy D, Schneider K. A Fourier spectral method for the Navier-Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. Journal of Computational Physics. 2009;228(16):5687-5709.

10- Ramière I, Angot P, Belliard M. A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. Journal of Computational Physics. 2007;225(2):1347-1387.

11- Hejlesen MM, Koumoutsakos P, Leonard A, Walther JH. Iterative Brinkman penalization for remeshed vortex methods. Journal of Computational Physics. 2015;280:547-562.

12- Kadoch B, Kolomenskiy D, Angot P, Schneider K. A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection-diffusion with moving obstacles. Journal of Computational Physics. 2012;231(12):4365-4383.

13- Engels T, Kolomenskiy D, Schneider K, Sesterhenn J. Numerical simulation of fluid-structure interaction with the volume penalization method. Journal of Computational Physics. 2015;281:96-115.

14- Kolomenskiy D, Moffatt HK, Farge M, Schneider K. Two-and three-dimensional numerical simulations of the clap-fling-sweep of hovering insects. Journal of Fluids and Structures. 2011;27(5-6):784-791.

15- Sabetghadam F. An analytical framework for imposition of a rigid immersed surface on the

incompressible Navier-Stokes equations. Fluid Dynamics. 2018;1-37.
16- Sabetghadam F. Exact imposition of the regular rigid immersed surfaces on the solution of the incompressible Navier-Stokes equations [Internet]. Berlin: researchgate; 2015 [cited 2018 Jun 01]. Available from: http://yon.ir/dLBpy
17- Ren WW, Wu J, Shu C, Yang WM. A stream function-vorticity formulation-based immersed boundary method and its applications. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2012;70(5):627-645.
18- Sabetghadam F, Soltani E. Simulation of solid body motion in a Newtonian fluid using a vorticity-based pseudo-spectral immersed boundary method augmented by the radial basis functions. International Journal of Modern Physics C. 2015;26(5):1550053.
19- Balaras E. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations. Computers and Fluids. 2004;33(3):375-404.
20- Trujillo J, Karniadakis GE. A penalty method for the vorticity-velocity formulation. Journal of Computational Physics. 1999;149(1):32-58.
21- Calhoun D. A Cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. Journal of Computational Physics. 2002;176(2):231-275.
22- Napolitano M, Pascazio G, Quartapelle L. A review of vorticity conditions in the numerical solution of the ζ-ψ equations. Computers and Fluids. 1999;28(2):139-185.
23- Adlam JH. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. Computers and Fluids. 1986;14(2):141-157.
24- Sørensen JN, Nygreen PJ. Unsteady vorticity-streamfunction algorithm for external flows. Computers and Fluids. 2000;30(1):69-87.
25- Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, Mitchell I. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. Journal of Computational Physics. 2002;183(1):83-116.
26- Okajima A. Strouhal numbers of rectangular cylinders. Journal of Fluid Mechanics. 1982;123:379-398.
27- Breuer M, Bernsdorf J, Zeiser T, Durst F. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: Lattice-Boltzmann and finite-volume. International Journal of Heat and Fluid Flow. 2000;21(2):186-196.
28- Turki S, Abbassi H, Nasrallah SB. Effect of the blockage ratio on the flow in a channel with a built-in square cylinder. Computational Mechanics. 2003;33(1):22-29.
29- Yoon DH, Yang KS, Choi CB. Flow past a square cylinder with an angle of incidence. Physics of Fluids. 2010;22(4):043603.
30- Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. Journal of Computational Physics. 1976;21(3):251-269.
31- Koumoutsakos P, Shiels D. Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate. Journal of Fluid Mechanics. 1996;328:177-227.
32- Dennis SCR, Qiang W, Coutanceau M, Launay JL. Viscous flow normal to a flat plate at moderate Reynolds numbers. Journal of Fluid Mechanics. 1993;248:605-635.
33- Jomaa Z, Macaskill C. The embedded finite difference method for the Poisson equation in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions. Journal of Computational Physics. 2005;202(2):488-506.
34- Coutanceau M, Bouard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow. Journal of Fluid Mechanics. 1977;79(2):231-256.
35- Coutanceau M, Bouard R. Experimental determination of the main feature of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 2. Unsteady flow. Journal of Fluid Mechanics. 1977;79(2):257-272.
36- Taira K, Colonius T. The immersed boundary method: A projection approach. Journal of Computational Physics. 2007;225(2):2118-2137.
37- Linnick MN, Fasel HF. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. Journal of Computational Physics. 2005;204(1):157-192.
38- Dennis SCR, Chang GZ. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100. Journal of Fluid Mechanics. 1970;42(3):471-489.
39- Braza M, Chassaing P, Minh HH. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 1986;165:79-130.
40- Liu C, Zheng X, Sung CH. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. Journal of Computational Physics. 1998;139(1):35-57.
41- Roshko A. On the development of turbulent wakesfrom vortex streets. NACA Report. 1954:1-28.
42- Williamson CHK. Defining a universal and continuousStrouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder. The Physics of Fluids. 1988;31(10):2742-2744.