



## Flutter Analysis of CNT-Reinforced Functionally Graded Composite Wing with Attached Mass

### ARTICLE INFO

#### Article Type

Original Research

#### Authors

Jamshid A.<sup>1</sup> MSc,  
Vahdat Azad N.<sup>\*2</sup> PhD

#### How to cite this article

Jamshid A, Vahdat Azad N. Flutter Analysis of CNT-Reinforced Functionally Graded Composite Wing with Attached Mass. Modares Mechanical Engineering. 2019;19(8):1855-1864.

### ABSTRACT

In this study, flutter of functionally graded carbon nanotube (FG-CNT)-reinforced composite wing carrying a distributed patch mass is analyzed and presented. Wing is modeled by a rectangular plate with cantilever boundary conditions in supersonic flow. To evaluate the displacement fields of the moderately thick plate, First-order shear deformation theory (FSDT) and chebyshev polynomials series are applied. In supersonic airflow simulation effect, the first-order piston theory was used and differential equation governing the system was adapted, using the Hamilton principle. In this study, 4 different types of CNT are considered through the thickness. CNT distribution patterns are as uniform, decreasing, decreasing-increasing, and increasing-decreasing. Finally, the effects of size, mass, and location of the distributed patch mass as well as various CNT distributions and fiber orientation angle in a two-layer anti-symmetric composite on flutter boundaries were studied. In comparisons with the results of previous studies, a good agreement is observed. The results showed that the flutter boundary reduced with increasing mass ratio and increased in longer length of added mass. By increasing orientation's angle of CNT fiber of anti-symmetric composite, the flutter boundary is raised and has different behavior for different distribution patterns.

**Keywords** Flutter Instability; Functional Graded Composite Plate; Carbon Nanotube; Cantilever Plate; Distributed Attached Mass

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Faculty, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup>Mechanical Engineering Department, Shahid Sattari University of Aeronautical Engineering, Tehran, Iran

#### \*Correspondence

Address: Mechanical Engineering Department, Shahid Sattari University of Aeronautical Engineering, Tehran, Iran

Phone: -

Fax: -

nader.vahdatzad@ssau.ac.ir

#### Article History

Received: June 10, 2018

Accepted: January 19, 2019

ePublished: August 12, 2019

### CITATION LINKS

[1] Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite ... [2] Elastic foundation effect on nonlinear thermo ... [3] Helical microtubules of graphitic ... [4] Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube ... [5] Computation of aerothermoelastic properties and active flutter ... [6] Static and free vibration analyses of carbon nanotube ... [7] Free vibration of thick functionally graded ... [8] Free vibration of FG-CNT reinforced composite ... [9] Aeroelastic analysis of CNT reinforced functionally ... [10] Functionally graded material panel flutter by cell-based ... [11] Aeroelastic characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced ... [12] Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels ... [13] Aeroelastic analysis and active flutter control of nonlinear ... [14] Active flutter and aerothermal postbuckling control for ... [15] Vibration characteristics and flutter analysis of a composite ... [16] Free vibration analysis of antisymmetric laminated ... [17] Effects of rolling maneuver on divergence and flutter ... [18] Investigation of attached mass effect on flutter speed of ... [19] Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube ... [20] Thermo-mechanical properties of randomly oriented ... [21] Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic ... [22] A new method of smart and optimal flutter control for ... [23] Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular ... [24] Free vibration analysis of rotating axially functionally ... [25] Chebyshev polynomials in numerical ... [26] Supersonic flutter of shear deformable laminated ... [27] Aeroelastic characteristics of cylindrical hybrid composite panels ... [28] Postbuckling of nanotube-reinforced composite ... [29] Limit cycle oscillation of a fluttering cantilever ...

## بررسی فلاتر بال کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله کربنی به همراه جرم افزوده

علی جمشید MSc

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

نادر وحدت‌آزاد\* PhD

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

### چکیده

در این پژوهش فلاتر بال کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به همراه یک جرم افزوده گسترده تحلیل و آرایه می‌شود. بال به شکل یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی یکسر گیردار مدل شده است. برای تخمین میدان جابجایی ورق نسبتاً ضخیم تئوری برشی مرتبه اول و چندجمله‌ای‌های چیبیشف اعمال شده است. در شبیه‌سازی اثر جریان هوای فراصوت از تئوری مرتبه اول پیستون استفاده و معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. در این بررسی چهار نوع مختلف توزیع نانولوله کربنی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. این توزیع‌ها به صورت یکنواخت، کاهشی، افزایشی و افزایشی-کاهشی هستند. در نهایت اثرات اندازه، جرم و محل جرم توزیع‌شده و همچنین اثرات الگوهای مختلف توزیع نانولوله کربنی و زاویه جهت‌گیری الیاف برای یک کامپوزیت دو لایه پاد متقارن روی مرزهای فلاتر بال کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربنی مطالعه شده است. در مقایسه‌هایی که با نتایج پژوهش‌های پیشین صورت پذیرفت تطابق خوبی مشاهده شد. نتایج نشان دادند که مرز فلاتر بال با افزایش نسبت جرمی، کاهش و با بیشتر شدن طول جرم افزوده، افزایش می‌یابد. با زیاد شدن زاویه جهت‌گیری الیاف نانولوله کربنی در کامپوزیت پادمتقارن مرز فلاتر افزایش می‌یابد و برای الگوهای توزیع مختلف رفتار متفاوتی خواهد داشت.

**کلیدواژه‌ها:** ناپایداری فلاتر، ورق کامپوزیتی مدرج تابعی، نانولوله کربنی، ورق یکسرگیردار، جرم افزوده گسترده

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۲۰

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۲۹

\* نویسنده مسئول: nader.vahdatazad@ssau.ac.ir

### ۱- مقدمه

در چند دهه اخیر، همگام با افزایش چشمگیر استفاده از مواد کامپوزیت در حوزه‌های مکانیک، عمران، صنایع هوافضا و بسیاری از صنایع مدرن دیگر، تحقیق و پژوهش در این‌باره و بهینه‌سازی خواص مکانیکی آنها نیز گسترش فراوانی داشته است. در همین راستا، استفاده از نانولوله‌های کربنی (CNT) به عنوان یک تقویت‌کننده مطرح می‌شود. نانولوله‌های کربنی، در مقایسه با مواد پرکننده، خواص مکانیکی عالی و قابل توجهی همچون سفتی، استحکام و رسانایی حرارتی بسیار بالا دارند. این ویژگی‌ها که در کنار یک چگالی پایین قرار دارد، می‌تواند استفاده از آنها به عنوان تقویت‌کننده در کامپوزیت‌ها را به یک انتخاب بسیار خوب مبدل سازد [1, 2].

یجیما برای نخستین بار در سال ۱۹۹۱ نانولوله‌های کربنی را کشف نمود [3]. این مواد را می‌توانند به صورت تک‌دیواره (SWCNT) یا چنددیواره (MWCNT) یافت [4]. نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره از یک لایه گرافن پیچیده شده به شکل استوانه تشکیل می‌شوند، در حالی که نانولوله‌های چنددیواره از دو یا چند تک‌دیواره هم‌مرکز و با قطر متفاوت به دست می‌آیند. مواد مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (FG-CNT) با اعمال تابع‌های توزیع مختلف روی نانولوله‌های کربنی حاصل می‌شوند [5].

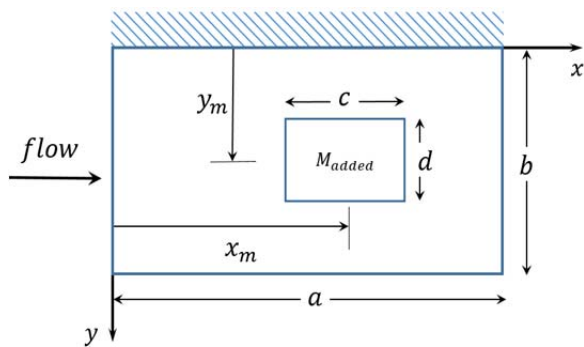
در زمینه بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله کربنی (FG-CNTRC) کارهای زیادی انجام

گرفته است. لی و همکاران [1]، ارتعاشات چندلایه‌های کامپوزیتی با ضخامت‌های نازک تا نسبتاً ضخیم و تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی را بررسی نمودند. آنها در این پژوهش، روابط را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول (FSDT) ورق ارائه نمودند و برای حل معادلات حاکم بر مساله از روش ریتز بهره جستند. ژو و همکاران [6] روش اجزای محدود (FEM) به همراه تئوری برشی مرتبه اول را برای مطالعه رفتار استاتیک و ارتعاشات آزاد کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به کار بردند. آنها تأثیر کسر حجمی نانولوله کربنی و نسبت طول به ضخامت ورق روی فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و خیز خمشی را مطالعه نمودند. روش دیفرانسیل کوادریچر (DQM) بر پایه تئوری الاستیسیته سه‌بعدی توسط نامی و جان‌قریان [7] برای حل معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد ورق مستطیلی ضخیم مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله کربنی به کار گرفته شد. کیانی [8] ارتعاشات ورق‌های کج‌شده (متوازی‌الضلاع‌شکل) و تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی را مطالعه نمود. او در ارائه تحلیل ارتعاش آزاد بر پایه تئوری برشی مرتبه اول، توابع شکل مود را بر اساس فرآیند گاما سمیت توسعه داد. این پژوهش نشان داد تغییر الگوهای مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی روی فرکانس طبیعی ورق‌های کج‌شده مؤثر است.

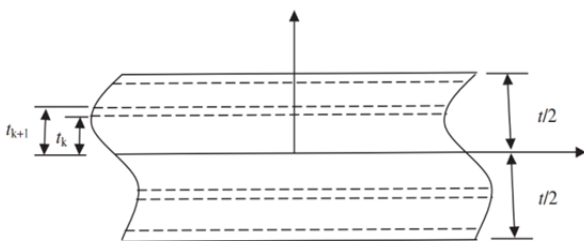
آیروالاستیک، اثر متقابل نیروهای الاستیک، اینرسی و آیرودینامیک را بررسی می‌کند. استفاده از مواد نانولوله‌های کربنی در مسایل پایداری آیروالاستیک که عاملی مهم در طراحی بال‌های انعطاف‌پذیر مدرن است، می‌تواند طراحی بال را بهینه سازد. پدیده فلاتر یکی از مهم‌ترین مسایل در پایداری آیروالاستیک بوده و با پرواز وسیله پرنده درگیر است. این پدیده مخرب، ارتعاش خود تحریک سیستم بوده که در پژوهش‌های زیادی بررسی شده است [9, 5]. سانگ و همکاران [9]، یک بررسی آیروالاستیک روی پنل‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربنی را با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا (HSDT) انجام نمودند. پنل مستطیلی‌شکل و دور مفصل آنها در معرض جریان فراصوت قرار داشت. ژانگ و همکاران [5] کنترل فعال فلاتر مستطیل دور مفصل با دو لایه پیزوالکتریک در جریان فراصوت و تحت تأثیر گرمای محیط را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تئوری برشی مرتبه بالا برای تقریب‌زدن هسته تقویت‌شده با نانولوله کربنی و از تئوری کلاسیک برای مدل‌سازی لایه‌های پیزوالکتریک بهره جستند. نترجان و همکاران [10] از روش اجزای محدود استفاده نمودند تا ویژگی‌های ناپایداری فلاتر را در پنل ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی (FGM) بررسی نمایند. ویژگی‌های آیروالاستیک ورق مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و در معرض جریان فراصوت توسط فاضل‌زاده و همکاران [11] بررسی شد. تئوری ورق کیرشرف و پیستون مرتبه اول به ترتیب برای تقریب‌زدن ورق نازک و فشار آیرودینامیک استفاده شد. سنکر و همکاران [12] خواص فلاتر ساندویچ پنل مستطیلی را با اعمال تئوری برشی مرتبه بالا روی سازه مطالعه کردند. در این مطالعه دو صفحه ساندویچ با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده بود و روش اجزای محدود در حل مساله به کار رفت. سانگ و لی [13] ویژگی‌های آیروالاستیک و کنترل فعال فلاتر برای تیرهای ساندویچ غیرخطی را با استفاده از جفت حسگر/ عملگر پیزوالکتریک بررسی نمودند. سانگ و همکاران [14] در کاری دیگر، کنترل فعال کمانش ورق‌های آیروترمال را بررسی نمود.

هواپیماهای نظامی معمولاً موتورجت، مخزن سوخت و اجزای

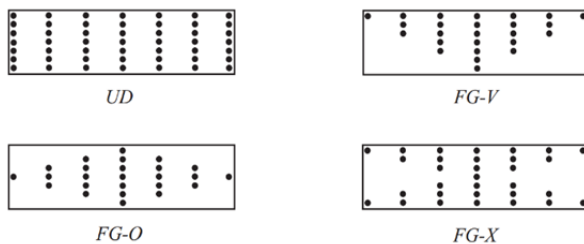
بررسی فلاتر بال کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله کربنی به همراه جرم افزوده ۱۸۵۷ در جدول ۱ [1, 5, 7, 8, 19] ارائه شده است.  $V_{CN}^*$  درصد کلی حجمی نانولوله کربنی را نشان می‌دهد.



شکل ۱) هندسه ورق با جرم افزوده گسترده



شکل ۲) نمای برشی از ورق چندلایه کامپوزیتی [1]



شکل ۳) نمای برشی از الگوهای مختلف تقویت‌کننده

جدول ۱) توابع کسر حجمی نانولوله‌های کربنی [1, 5, 7, 8, 19]

$V_{CN}$	الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی
$V_{CN}^*$	یکنواخت
$V_{CN}^* (1 + 2 \frac{z}{h})$	کاهشی
$2V_{CN}^* (1 - 2 \frac{ z }{h})$	افزایشی-کاهشی
$4V_{CN}^* \frac{ z }{h}$	کاهشی-افزایشی

روش کلی مخلوط‌ها برای تخمین‌زدن خواص مواد تقویت‌کننده با نانولوله‌های کربنی استفاده شده است. برحسب این روش، مدول یانگ و مدول برشی را می‌توان به صورت روابط ۱ نوشت:

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \quad (الف-۱)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (ب-۱)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (ج-۱)$$

در رابطه ۱،  $E_{11}^{CN}$ ،  $E_{22}^{CN}$  و  $G_{12}^{CN}$  به ترتیب مدوله‌ای یانگ و مدول برشی نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره هستند.  $E_m$  و  $G_m$  مدول یانگ و برشی زمینه همسان‌گرد و  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  پارامترهای مؤثر خواص

دیگری را در بال‌های خود حمل می‌کنند. این اجزای نصب‌شده، در تغییر خواص ارتعاشی و همچنین جابه‌جایی مرز ناپایداری فلاتر بال موثرند [15]. بررسی تأثیر جرم افزوده متمرکز روی ورق نخستین بار برای طراحی سیستم‌های الکترونیکی مطرح شد [16]. علی‌بیگو و همکاران [16] تأثیر جرم افزوده گسترده بر ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی را با بهره‌گیری از اصل همیلتون انجام دادند. آنها تئوری برشی مرتبه سوم را روی ورق مستطیلی دور مفصل اعمال نمودند و شکل مودها به صورت توابع فوریه دوگانه در نظر گرفته شد. این پژوهش نشان داد که با افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت یا افزایش نسبت منطری، فرکانس پایه افزایش می‌یابد. فاضل‌زاده و همکاران [17] ناپایداری استاتیکی و دینامیک آیرودینامیک بال یک‌سرگردار به همراه مخزن خارجی را بررسی نمودند. در این پژوهش با استفاده از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حاکم بر مساله و با در نظر گرفتن فشار ناپای آیرودینامیک، تأثیر محل نصب جرم افزوده روی بال روی مرز ناپایداری فلاتر و واگرایی مطالعه شد. وحدت‌آزاد و وحدت‌زاد [18] تأثیر جرم افزوده گسترده یک‌بعدی بر سرعت فلاتر یک ورق کامپوزیتی یک‌سرگردار را بررسی نمودند. آنها با استفاده از تئوری پیستون برای تقریب‌زدن جریان فراصوت و تئوری کلاسیک ورق برای تقریب‌زدن سازه، تأثیر چگالی جرم افزوده و موقعیت آن در وقوع فلاتر را مطالعه نمودند. در پژوهشی [15] فلاتر ورق کامپوزیتی همراه مخزن خارجی را بر پایه تئوری کلاسیک ورق تحلیل نمودند. آنها از پیستون مرتبه اول برای تقریب‌زدن جریان فراصوت، روش همیلتون برای استخراج معادلات و روش ریلی‌ریتز برای حل مساله استفاده نمودند و با روش اجزای محدود مقایسه کردند.

در کار حاضر، با توجه به فعالیت پیشین انجام‌گرفته در زمینه ارتعاشات و فلاتر ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و همچنین تحقیقات انجام‌گرفته روی جرم افزوده شده به ورق، به بررسی فلاتر ورق‌های کامپوزیتی نسبتاً ضخیم مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به همراه جرم افزوده پرداخته می‌شود. در این پژوهش از تئوری برشی مرتبه اول برای مدل‌کردن ورق و تئوری پیستون مرتبه اول برای تقریب‌زدن جریان فراصوت استفاده می‌شود. میدان جابه‌جایی و توابع چرخش ورق براساس چندجمله‌ای‌های چبیشف بیان می‌شود. تأثیر توزیع‌های مختلف نانولوله‌های کربنی و محل و اندازه جرم افزوده روی مرز فلاتر بررسی شده است.

## ۲- تئوری و معادلات حاکم:

شکل ۱ نمای بالا از یک ورق مستطیلی با ابعاد  $a$  و  $b$  و ضخامت یکنواخت  $h$  را نشان می‌دهد. سیستم مختصات از صفحه میانی ورق می‌گذرد. جریان هوای فراصوت در راستای محور  $x$  قرار دارد. ابعاد جرم گسترده افزوده با  $c$  و  $d$  و موقعیت مرکز آن با  $x_m$  و  $y_m$  مشخص شده‌اند. شکل ۲، یک نمای برشی از ورق چندلایه کامپوزیتی با ضخامت  $t$ ،  $N$  تعداد کل لایه‌ها و  $t_i$  ضخامت لایه  $i$ ام است.

### ۲-۱- خواص مکانیکی مواد تقویت‌شده با نانولوله کربنی

الگوهای توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت می‌تواند یکنواخت یا مدرج تابعی باشد. چهار نوع توزیع ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی در شکل ۳ نشان داده شده است. توزیع‌های یکنواخت (UD)، کاهشی-افزایشی (FGX)، افزایشی-کاهشی (FGO) و کاهشی (FGV) هستند که در ادامه بررسی می‌شوند. درصد حجمی نانولوله‌های کربنی به صورت تابع ضخامت

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \varepsilon^T S \varepsilon \, dydx \quad (10)$$

و در آن:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \gamma_0 \end{matrix} \right\}, \quad (11)$$

$$S = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^s & A_{45}^s \\ 0 & 0 & 0 & A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k z^2 \, dz, \quad (13)$$

$$A_{ij}^s = K \sum_{k=1}^k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k \, dz \quad (14)$$

سفتی خمشی  $D_{ij}$  برای  $i, j = 1, 2, 6$  و سفتی برشی عرضی  $A_{ij}^s$  برای  $i, j = 4, 5$  تعریف می‌شود. ضریب تصحیح برشی عرضی  $K$  معادل  $0.833$  در نظر گرفته می‌شود [20, 21]. سفتی‌های کاهیده انتقالی برای کامین لایه یا  $\bar{Q}_{ij}^k$  در رابطه ۱۵ بیان می‌شود:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^{-T}, \quad (15)$$

که در آن ماتریس انتقال  $[T]$  به صورت رابطه ۱۶ است:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

و  $\theta$  زاویه چرخش لایه  $k$  ام است.

رابطه ۱۷، انرژی جنبشی برای ورق مدرج تابعی است:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^a \int_0^b \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dydx \, dz \quad (17)$$

و با استفاده از رابطه ۵ می‌توان انرژی جنبشی ورق را به صورت رابطه ۱۸ بازنویسی نمود:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (I_0 \dot{w}^2 + I_2 (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2)) \, dydx \quad (18)$$

و در آن

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \cdot (1, z^2) \, dz \quad (19)$$

انرژی جنبشی جرم گسترده افزوده در سطح بالایی ورق برابر با:

$$(20)$$

$$\theta_m = \frac{1}{2} \int_{x_m-c/2}^{x_m+c/2} \int_{y_m-d/2}^{y_m+d/2} \gamma_m \left( \frac{h^2}{3} \dot{\phi}_x^2 + \frac{h^2}{3} \dot{\phi}_y^2 \right) \, dydx$$

بوده که در آن  $\gamma_m$  برابر با چگالی جرم گسترده افزوده بر واحد سطح است. با توجه به اینکه تنها تأثیر جرمی برای جرم افزوده در نظر گرفته شده، انرژی کلی جنبشی برابر با رابطه ۲۱ است:

$$\theta = \theta_p + \theta_m \quad (21)$$

روابط انرژی با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ۲۲ دوباره بازنویسی

تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هستند. بین درصد حجمی تقویت‌کننده نانولوله‌های کربنی ( $V_{CN}$ ) و درصد حجمی زمینه ( $V_m$ ) رابطه ۲ برقرار است.

$$V_{CN} + V_m = 1 \quad (2)$$

چگالی جرمی و نسبت پواسون مؤثر مواد مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به ترتیب، به صورت روابط ۳ و ۴ هستند [5].

$$\rho = V_{CN} \rho^{CN} + V_m \rho^m \quad (3)$$

$$\nu_{12} = V_{CN}^* \nu^{CN} + V_m \nu^m \quad (4)$$

و در آن،  $\rho^m, \nu^m, \rho^{CN}, \nu^{CN}$  به ترتیب چگالی و نسبت پواسون برای نانولوله کربنی تقویت‌کننده و زمینه هستند.

### ۲-۲- مدل‌سازی سازه

در این مطالعه، تئوری برشی مرتبه اول روی ورق مدرج تابعی اعمال شده است. میدان جابه‌جایی ورق برحسب جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها صفحه میانی ورق به صورت روابط ۵ خواهد بود [1, 6, 8]:

$$u(x, y, z, t) = z \phi_x(x, y, t) \quad (5-الف)$$

$$v(x, y, z, t) = z \phi_y(x, y, t) \quad (5-ب)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5-ج)$$

که در آن  $u, v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی‌ها در راستاهای  $x, y$  و  $z$  است. براساس تئوری برشی مرتبه اول خطی، مؤلفه‌های کرنش‌های درون صفحه‌ای و کرنش‌های برشی خارج از صفحه‌ای به صورت روابط ۶ بیان می‌شوند:

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} = z \kappa, \quad \left\{ \begin{matrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} = \gamma_0 \quad (6)$$

و در آن:

$$\kappa = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{matrix} \right\} \quad (7-الف)$$

$$\gamma_0 = \left\{ \begin{matrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{matrix} \right\} \quad (7-ب)$$

روابط عمومی خطی تنش-کرنش به صورت رابطه ۸ بیان می‌شود:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{matrix} \right\} \quad (8)$$

که در آن:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}},$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12},$$

$$Q_{44} = G_{13}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (9)$$

$E_{11}$  و  $E_{22}$  مدوله‌ای *بانگ* مؤثر ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی در مختصات محلی مواد است.  $G_{12}, G_{13}$  و  $G_{23}$  مدوله‌ای برشی و  $\nu_{21}$  و  $\nu_{12}$  نسبت‌های پواسون هستند.

رابطه ۱۰ انرژی کرنشی ورق به صورت را نشان می‌دهد:

$$q_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty}^2}{2}, \beta_{\infty} = \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} \quad (۳۲)$$

در رابطه  $\rho_{\infty} = 32$  و  $U_{\infty}$  و  $M_{\infty}$  به ترتیب برابر چگالی، سرعت و عدد ماخ در جریان آزاد هستند. در این پژوهش فشار بی بعد آیرودینامیک به صورت  $\lambda = 2q_{\infty} a^3 / \beta_{\infty} D_{11}$  معرفی می شود. در این مورد که  $M_{\infty} \gg 1$  داریم،  $\rightarrow [M_{\infty}^2 - 2/M_{\infty}^2 - 1]^2 \mu / \beta_{\infty} \rightarrow \mu / M_{\infty}$  بوده که در آن  $\mu = \rho_{\infty} a / \rho h$  است.

### ۲-۳- توابع شکل مود

برای تحلیل مساله فلاتر، روش شکل مودهای فرضی استفاده شده است. میدان جابه جایی و توابع چرخش سیستم سازه را می توان مطابق رابطه ۳۳ به صورت سری های دوگانه از چند جمله ای های چبیشف ضرب شده در تابع مرزی نوشت که شرایط مرزی اساسی هندسی را ارضا می کند [23, 24].

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{X}, \bar{Y}, t) \\ = F_w(\bar{X}, \bar{Y}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{w}_{ij}(\bar{X}, \bar{Y}) a_{ij}(t) \quad (۳۳-الف) \\ = \varpi^T(\bar{X}, \bar{Y}) a(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_x(\bar{X}, \bar{Y}, t) \\ = F_{\phi_x}(\bar{X}, \bar{Y}) \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^m \phi_{lm}(\bar{X}, \bar{Y}) b_{lm}(t) \quad (۳۳-ب) \\ = \varphi^T(\bar{X}, \bar{Y}) b(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_y(\bar{X}, \bar{Y}, t) \\ = F_{\phi_y}(\bar{X}, \bar{Y}) \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m \psi_{pq}(\bar{X}, \bar{Y}) c_{pq}(t) \quad (۳۳-ج) \\ = \psi^T(\bar{X}, \bar{Y}) c(t), \end{aligned}$$

که در آن  $m$  و  $n$  شماره مودها در راستاهای  $x$  و  $y$  و بردارهای ستونی  $\varpi$ ،  $\varphi$  و  $\psi$  شکل مودهای فرضی،  $a$ ،  $b$  و  $c$  بردار مختصات تعمیم یافته و  $F_w(\bar{X}, \bar{Y})$ ،  $F_{\phi_x}(\bar{X}, \bar{Y})$  و  $F_{\phi_y}(\bar{X}, \bar{Y})$  توابع مرزی هستند.

توابع مرزی باید شرایط مرزی هندسی ورق را ارضا نمایند. شرایط مرزی هندسی برای یک ورق یک سرگیردار (مدل بال) را می توان به صورت آزاد-آزاد در راستای  $x$  و گیردار-آزاد در راستای  $y$  در نظر گرفت (شکل ۱). بر این اساس داریم:

$y = 0 \rightarrow$  clamped boundary condition  
 $(x = 0, x = a, y = b) \rightarrow$  free boundary condition  
در نتیجه توابع مرزی ورق یک سرگیردار را می توان به صورت رابطه ۳۴ نوشت:

$$F_x(\bar{X}, \bar{Y}) = F_{\phi_x}(\bar{X}, \bar{Y}) = F_{\phi_y}(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{Y}, \quad (۳۴)$$

و توابع مود  $\bar{w}_{ij}$ ،  $\varphi_{lm}$  و  $\psi_{pq}$  به شرح رابطه ۳۵ فرض می شوند.

$$\begin{aligned} \bar{w}_{ij}(\bar{X}, \bar{Y}) &= P_i(\bar{X}) P_j(\bar{Y}) \\ \varphi_{lm}(\bar{X}, \bar{Y}) &= P_l(\bar{X}) P_m(\bar{Y}) \\ \psi_{pq}(\bar{X}, \bar{Y}) &= P_p(\bar{X}) P_q(\bar{Y}) \end{aligned} \quad (۳۵)$$

که در آن  $P_s(\chi)$  با  $(\chi = \bar{X}, \bar{Y})$  برابر با  $s$  امین چند جمله ای تک بعدی چبیشف است و در شکل توابع کسینوس و به صورت رابطه ۳۶ بیان می شود:

$$P_s(\chi) = \cos[(s-1) \arccos(2\chi-1)]; \quad (۳۶)$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots)$$

می شوند. نسبت های بی بعد  $AR$ ،  $H$ ،  $LR$ ،  $WR$  و  $MR$  به ترتیب نسبت منظری، نسبت ضخامت، نسبت طول، نسبت عرض و نسبت جرمی هستند:

$$\begin{aligned} \bar{X} = \frac{x}{a}, \bar{Y} = \frac{y}{b}, \bar{w} = \frac{w}{a}, AR = \frac{a}{b}, \\ H = \frac{h}{a}, LR = \frac{c}{a}, WR = \frac{d}{b}, MR = \frac{\gamma_m}{\rho h} \end{aligned} \quad (۲۲)$$

و انرژی جنبشی ورق (رابطه ۱۸) و جرم گسترده افزوده (رابطه ۲۰) استفاده از روابط بی بعد به صورت روابط ۲۳ و ۲۴ بازنویسی می شوند:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_p = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left( I_0 (\dot{\bar{w}}^2) \right. \\ \left. + \frac{I_2}{a^2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right) d\bar{X} d\bar{Y} \end{aligned} \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_m \\ = \frac{1}{2} \int_{y_m/b-WR/2}^{y_m/b+WR/2} \int_{x_m/b-LR/2}^{x_m/b+LR/2} \gamma_m \left( \frac{H^2}{3} \phi_x^2 + \frac{H^2}{3} \phi_y^2 \right) d\bar{X} d\bar{Y} \end{aligned} \quad (۲۴)$$

و انرژی جنبشی کل برابر است با:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_p + \bar{\theta}_m \quad (۲۵)$$

انرژی کرنشی ورق (رابطه ۱۰) نیز در حالت بدون بعد به صورت رابطه ۲۶ بازنویسی می شود:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon} d\bar{X} d\bar{Y} \quad (۲۶)$$

و در آن:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \begin{matrix} \bar{\kappa} \\ \bar{y}_0/a \end{matrix} \right\}, \quad (۲۷)$$

$$\bar{\kappa} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial \bar{X}} \\ AR \frac{\partial \phi_y}{\partial \bar{Y}} \\ AR \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial \phi_y}{\partial \bar{X}} \right) \end{matrix} \right\} \quad (۲۸-الف)$$

$$\bar{y}_0 = \left\{ \begin{matrix} \phi_x + H \cdot \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{X}} \\ \phi_y + H \cdot AR \cdot \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{Y}} \end{matrix} \right\} \quad (۲۸-ب)$$

معادله حرکت سیستم سازه تقویت شده با نانولوله ها کربنی با استفاده از اصل همپلتون (رابطه ۲۹) به دست می آید:

$$\int_0^t [\delta(\bar{\theta} - \bar{U}) + \delta \bar{W}] dt = 0, \quad (۲۹)$$

که در آن  $\bar{W}$  کار انجام شده توسط بارهای خارجی بوده و مطابق رابطه ۳۰ است:

$$\bar{W} = \int_0^1 \int_0^1 \Delta p \bar{w} d\bar{X} d\bar{Y} \quad (۳۰)$$

و فشار آیرودینامیک است که با تئوری پیستون مرتبه اول در جریان پتانسیل خطی به دست آمده است. جهت جریان در راستای محور  $x$  بوده که در شکل ۱ نشان داده شده است. رابطه ۳۱ باینگر فشار آیرودینامیک  $\Delta p$  است [9, 12, 22]:

$$\Delta p = \frac{2q_{\infty}}{\beta_{\infty}} \left( \frac{M_{\infty}^2 - 2}{M_{\infty}^2 - 1} u_{\infty} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{X}} \right), \quad (۳۱)$$

و کاهش-افزایشی با نتایج به دست آمده توسط لی و همکاران [1] که براساس تئوری برشی مرتبه اول محاسبه شده‌اند، مقایسه می‌شود. ورق مفروض دارای لایه چینی  $[-۴۵/۴۵/۴۵/-۴۵]$  است. جدول ۲، ۴ فرکانس طبیعی اول این مقایسه را نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول مشخص است تطابق خوبی میان نتایج وجود دارد.

به منظور اعتبارسنجی آیرودینامیک مساله، مرز بحرانی فلاتر برای یک ورق همسان‌گرد یک‌سرگردار مربعی شکل بررسی شد. این بررسی با نتایج حاصل از پژوهش داول [29] مقایسه شد. نتایج در جدول ۳ بیان شده است و تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

جدول ۲) چهار فرکانس طبیعی اول پارامتری  $\hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$  برای ورق دور مفصل چندلایه مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی  $[-۴۵/-۴۵/۴۵/۴۵]$  با مقادیر  $V_{CNT}^* = 0.17$ ،  $AR = 1$  و  $H = 0.1$

نوع الگو	$\hat{\omega}$	کار حاضر	لی و همکاران [1]
یکنواخت	۱	۱۷/۶۸۸	۱۷/۷۰۸
	۲	۲۴/۲۶۷	۲۴/۲۹۰
	۳	۲۴/۲۵۳	۲۴/۲۹۶
	۴	۲۳/۶۴۴	۳۳/۶۷۳
کاهشی-افزایشی	۱	۱۷/۸۶۴	۱۷/۸۸۱
	۲	۲۴/۴۴۷	۲۴/۴۶۴
	۳	۲۴/۴۳۴	۲۴/۴۷۰
	۴	۳۴/۰۳۱	۳۴/۰۴۶

جدول ۳) مرز فلاتر برای یک ورق مربعی همسان‌گرد با  $AR = 1$

مقدار فشار	کار حاضر	داول و همکاران [29]
فشار بی‌بعد آیرودینامیک فلاتر ( $\lambda_{cr}$ )	۴۹/۲۸	۴۹/۰۰

### ۳-۲- تأثیر پارامترهای مختلف

در این بخش به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف جرم افزوده گسترده و ورق کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی یک‌سرگردار روی مرز فلاتر پرداخته شده است. در گام نخست به بررسی اثر الگوهای توزیع‌های مختلف نانولوله‌های کربنی روی مرز فلاتر می‌پردازیم. بدین منظور در هر مورد الگوی توزیع تغییر می‌کند و سایر پارامترها ثابت نگه داشته می‌شوند.

نمودار ۱، تغییرات فرکانس ویژه برحسب فشار بی‌بعد آیرودینامیک برای دو مود اول ارتعاشی ورق مربعی را نشان می‌دهد. در این مورد، توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت برحسب الگوی یکنواخت انتخاب شده است. جرم افزوده مربعی شکل و با  $MR = 1$  و  $LR = WR = 0.4$  در مرکز ورق با  $x_m/a = y_m/b = 0.5$  نصب شده است. برای ورق  $H = 0.1$ ،  $AR = 1$  و  $V_{CNT}^* = 0.17$  فرض شده است. در نمودار مشخص است که دو مود اول ارتعاشی در فشار بی‌بعد آیرودینامیک  $\lambda_{cr} = 23/28$  به هم می‌رسند و در این نقطه فلاتر برای سیستم رخ داده است.

در نمودار ۲، مرز فلاتر برای دو مود اول ارتعاشی و برای ورق با جرم افزوده و الگوی توزیع کاهش-کاهشی-افزایشی ترسیم شده است. در این مورد فلاتر در فشار بی‌بعد آیرودینامیک  $\lambda_{cr} = 14/33$  برای سیستم رخ داده است. در مقایسه نمودارهای ۱ و ۲ دیده می‌شود که فلاتر برای ورق با توزیع کاهش-افزایشی زودتر از توزیع یکنواخت رخ داده است.

در نمودارهای ۳ و ۴ که به ترتیب مرز فلاتر برای الگوهای توزیعی کاهش-افزایشی-کاهشی را نشان می‌دهند، برای الگوی کاهش-افزایشی  $\lambda_{cr} = 24/3$  و برای الگوی افزایشی-کاهشی در  $\lambda_{cr} = 44/16$  فلاتر رخ می‌دهد.

سری‌های چندجمله‌ای چبیشف به‌عنوان تابعی قابل قبول برای شکل مودها دو مزیت دارند. اول اینکه مجموعه‌ای کامل و متعامد را در فاصله  $[-1, 1]$  هستند. ثانیاً چندجمله‌ای چبیشف و مشتقاتش را می‌توان به صورت ساده و تک‌فرم بیان نمود که فرآیند کدنویسی را کاهش می‌دهد [23-25].

### ۲-۴- مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل

با اعمال اصل همیلتون، معادله حرکت خطی سیستم به صورت رابطه ۳۷ استخراج می‌شود:

$$M\ddot{X}(t) + C_{\Delta p}\dot{X}(t) + (K + K_{\Delta p})X(t) = 0, \quad (37)$$

که در رابطه ۳۷ بردار  $X(t) = [a(t)^T, b(t)^T, c(t)^T]^T$  برابر بردار مختصات تعمیم‌یافته،  $M$  ماتریس جرم مودال،  $C_{\Delta p}$  ماتریس میرایی آیرودینامیک،  $K$  ماتریس سختی مودال و  $K_{\Delta p}$  ماتریس سختی آیرودینامیک است. به منظور ساده‌سازی در تحلیل پایداری، معادله دیفرانسیل ۳۸ را می‌توان به شکل فضای حالت نوشت:

$$\dot{\bar{Z}} = [A]\bar{Z} \quad (38)$$

که در آن:

$$\bar{Z} = \{X^T \dot{X}^T\}^T \quad (39)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (40)$$

مقادیر ویژه ماتریس  $[A]$  به صورت رابطه ۴۱ به شکل عدد مختلط به دست می‌آیند.

$$\Omega_r + i\omega \quad (41)$$

که در آن  $i = \sqrt{-1}$ ،  $\Omega_r$  نسبت میرایی سیستم را نشان می‌دهد و  $\omega$  فرکانس ویژه سیستم است.

فلاتر برای سیستم زمانی اتفاق می‌افتد که دو فرکانس ویژه به هم برسند و یکی شوند [26] یا اینکه مقدار نسبت میرایی مثبت شود [27]. در مرز فلاتر، فشار بی‌بعد آیرودینامیک را فشار بی‌بعد بحرانی فلاتر ( $\lambda_{cr}$ ) می‌نامند.

### ۳- نتایج و بحث

#### ۳-۱- صحنه‌گذاری

در این بخش فلاتر ورق کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی همراه با جرم افزوده بررسی و تحلیل می‌شود. در ابتدا به منظور صحت‌سنجی درستی روش حل، نتایج با مطالعات پیشین مقایسه می‌شود. خواص ماده پرکننده کامپوزیت به صورت  $E_m = 215 Gpa$ ،  $\rho_m = 1150 kg/m^3$  و  $v_m = 0.34$  فرض می‌شوند. خواص نانولوله کربنی که به شکل تک‌دیواره در نظر گرفته شده‌اند، به صورت  $E_{11}^{CNT} = 51646 Tpa$ ،  $E_{22}^{CNT} = 71080 Tpa$ ،  $G_{12}^{CNT} = 1944 Tpa$  و  $\rho_{CNT} = 1400 kg/m^3$  و  $v_{12}^{CNT} = 0.175$  است. پارامترهای مؤثر نانولوله کربنی برای درصد حجمی  $V_{CNT}^* = 0.17$  برابر با  $\eta_1 = 0.137$ ،  $\eta_2 = 1.022$  و  $\eta_3 = 0.1715$  و برای درصد حجمی  $V_{CNT}^* = 0.17$  برابر با  $\eta_1 = 0.142$ ،  $\eta_2 = 1.626$  و  $\eta_3 = 0.17$  است. مودول‌های برشی برابر با  $G_{12} = G_{13}$  و  $G_{23} = 1/2 G_{12}$  فرض می‌شوند. پارامتر آیرودینامیک  $\mu$  برابر با  $0.1$  در نظر گرفته شده است [28].

فرکانس‌های طبیعی برای یک ورق تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی دور مفصل برای اعتبارسنجی مقایسه شد. به این منظور فرکانس‌های طبیعی ورق، با نسبت منظری  $AR = 1$ ، نسبت ضخامت  $H = 0.1$  و درصد حجمی  $V_{CNT}^* = 0.17$  با دو الگوی یکنواخت



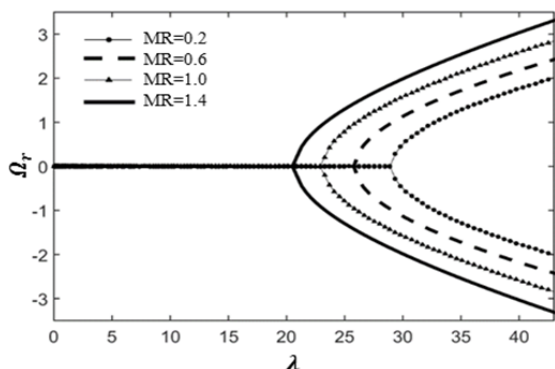
بررسی فلاتر بال کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله کربنی به همراه جرم افزوده ۱۸۶۱ با مقایسه نمودارهای ۴-۱ دیده می شود که مرز فلاتر برای الگوی کاهشی- افزایشی از بقیه کمتر و برای الگوی توزیعی افزایشی- کاهشی بیشترین بوده و پایداری برای الگوهای کاهشی و یکنواخت بسیار به هم نزدیک است. همچنین در این نمودارها مشاهده می شود که فرکانس ویژه در مرز فلاتر برای مورد توزیع یکنواخت در  $\bar{\omega}=3/92$ ، برای مورد کاهشی- افزایشی در  $\bar{\omega}=9/98$ ، برای مورد افزایشی- کاهشی در  $\bar{\omega}=7/32$  و برای مورد کاهشی- افزایشی از همه بیشتر و به ترتیب در الگوهای کاهشی، افزایشی- کاهشی و یکنواخت کمتر شده است.

نمودار ۵، تغییر نسبت میرایی برحسب افزایش فشار بی بعد آیرودینامیک را نشان می دهد. زمانی که نسبت میرایی دو مود اول ارتعاشی از حالت صفر دور شوند، فلاتر رخ می دهد. در این نمودار که برای توزیع یکنواخت و در نسبت جرمی های مختلف ترسیم شده است، مشاهده می شود با افزایش نسبت جرمی MR و سنگین تر شدن جرم افزوده گسترده نسبت به ورق پایه از ۰/۲ به ۱/۴، مرز فلاتر کاهش می یابد و فلاتر زودتر برای سیستم رخ می دهد.

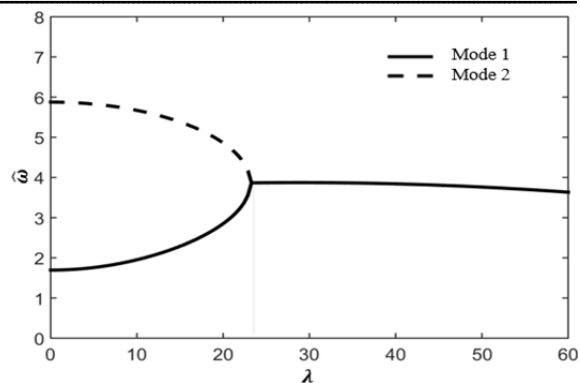
نمودار ۶، تأثیر LR یا طول بی بعد جرم افزوده روی فلاتر را برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک نشان می دهد. در این نمودار که برای چهار الگوی مختلف توزیع نانولوله های کربنی ترسیم شده است، طول بی بعد جرم افزوده از ۰/۱ تا ۰/۹ تغییر می کند. همان طور که در نمودار مشخص است، برای هر چهار الگوی توزیع با افزایش طول جرم افزوده، مرز فلاتر بیشتر می شود. همچنین مشاهده می شود مرز فلاتر در تمام مقادیر LR برای الگوی کاهشی بالاتر از الگوی افزایشی- کاهشی و برای الگوی افزایشی- کاهشی بالاتر از دو الگوی کاهشی و یکنواخت است.

تأثیر  $x_m/a$  یا فاصله جرم افزوده از لبه حمله (لبه  $x=0$ ) روی مرز فلاتر برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک در نمودار ۷ برای چهار الگوی توزیع ترسیم شده است. برای هر الگوی توزیع، روند تغییرات متفاوت است، اما در تمام مقادیر  $x_m/a$  همواره توزیع کاهشی بیشترین و توزیع کاهشی- افزایشی کمترین مقدار مرز را برای رسیدن به ناپایداری فلاتر دارند.

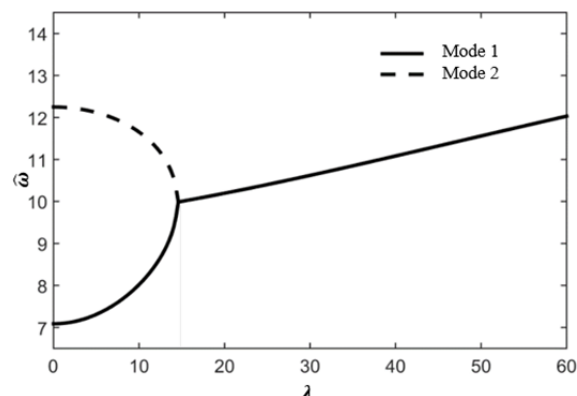
نمودار ۸ بیانگر تأثیر  $y_m/b$  یا فاصله جرم افزوده از ریشه (لبه  $y=0$ ) برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک است. برای الگوی یکنواخت با فاصله گرفتن جرم افزوده از ریشه ورق، مرز فلاتر کمتر شده است. در حالی که برای سه الگوی کاهشی- افزایشی، کاهشی و افزایشی- کاهشی با افزایش فاصله جرم افزوده از لبه ریشه در ابتدا مرز فلاتر کمی زیادترو سپس کمتر شده است.



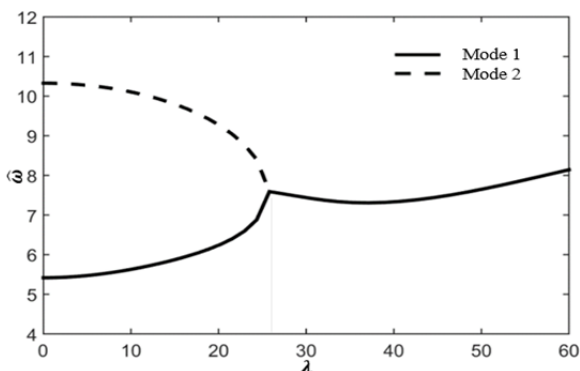
نمودار ۵) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع یکنواخت نانولوله های کربنی برحسب نسبت های جرمی مختلف



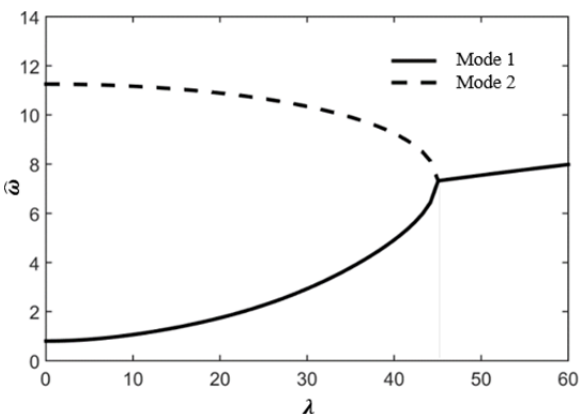
نمودار ۱) تغییرات فرکانس ویژه ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع یکنواخت نانولوله های کربنی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک



نمودار ۲) تغییرات فرکانس ویژه ورق کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی توزیع کاهشی- افزایشی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک

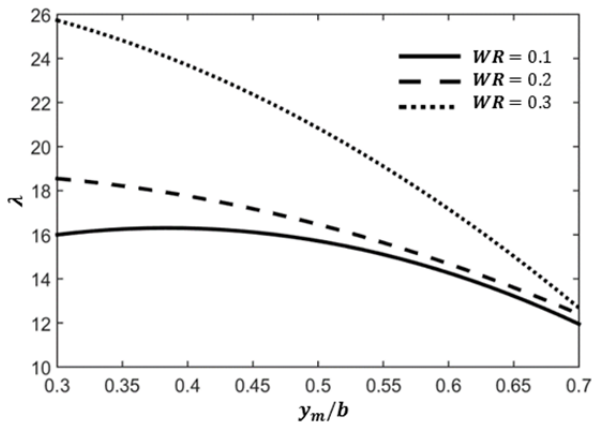


نمودار ۳) تغییرات فرکانس ویژه ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع نانولوله های کربنی توزیع کاهشی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک

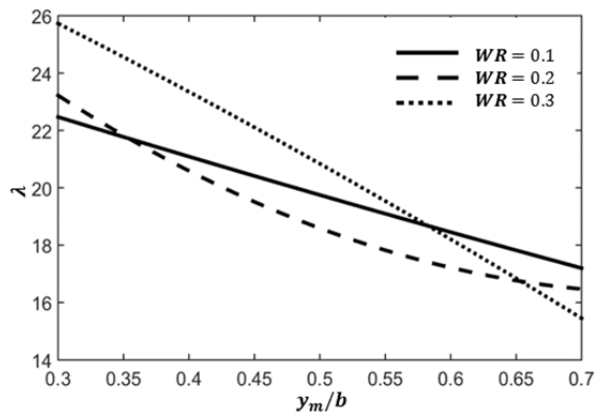


نمودار ۴) تغییرات فرکانس ویژه ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع نانولوله های کربنی توزیع افزایشی- کاهشی برحسب فشار بی بعد آیرودینامیک

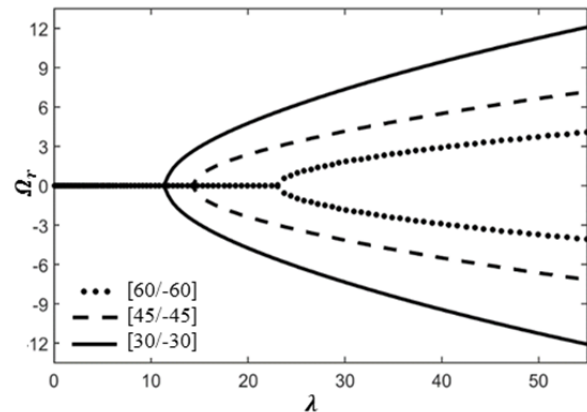
در نمودارهای ۱۱ و ۱۲، مقدار نسبت میرایی برحسب فشار بی‌بعد آیرودینامیک ترسیم شده و تأثیر لایه چینی با زوایای مختلف برای یک کامپوزیت دو لایه‌ای پاد متقارن روی مرز فلاتر بررسی شده است. نمودار ۱۱ برای سه زاویه لایه چینی مختلف از الگوی کاهشی ترسیم شده و همان‌طور که مشخص است، در لایه چینی [۶۰/۶۰] مرز فلاتر بیشترین و در لایه چینی [۳۰/۳۰] مرز فلاتر کمترین مقدار است. برای نمودار ۱۲ که براساس الگوی توزیعی یکنواخت بوده، همین نتیجه تصدیق شده است و لایه چینی [۶۰/۶۰] بیشترین مرز فلاتر و [۳۰/۳۰] کمترین مرز فلاتر را دارد.



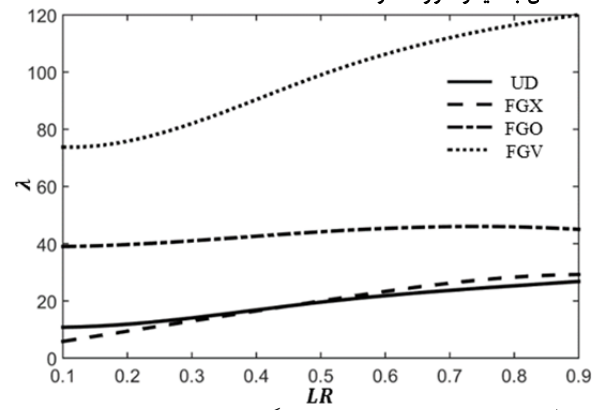
نمودار ۹) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی توزیع کاهشی- افزایشی با WRهای مختلف برحسب  $y_m/b$



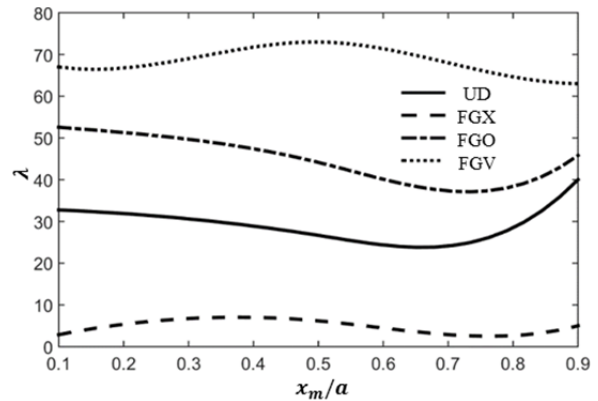
نمودار ۱۰) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی توزیع یکنواخت با WRهای مختلف برحسب  $y_m/b$



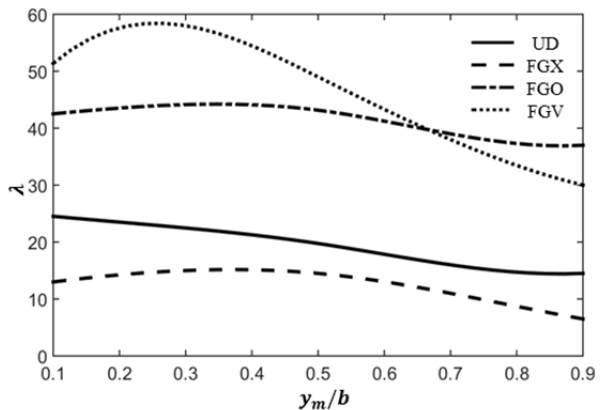
نمودار ۱۱) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی توزیع کاهشی با لایه‌چینی‌های مختلف برحسب فشار بی‌بعد آیرودینامیک



نمودار ۶) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی با الگوهای توزیعی مختلف نانولوله‌های کربنی برحسب LR



نمودار ۷) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی با الگوهای توزیعی مختلف نانولوله‌های کربنی برحسب  $x_m/a$

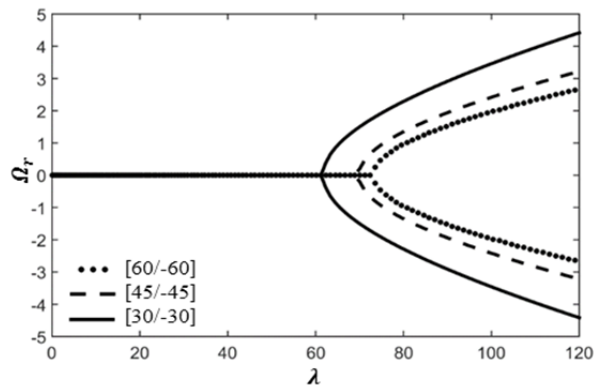


نمودار ۸) مرز فلاتر ورق کامپوزیتی با الگوهای توزیعی مختلف نانولوله‌های کربنی برحسب  $y_m/b$

نمودارهای ۹ و ۱۰ تغییرات فاصله از لبه ریشه برای سه ورق با جرم افزوده را نشان می‌دهند که تنها در اندازه WR با هم متفاوت‌اند. نمودار ۹ براساس الگوی کاهشی- افزایشی و نمودار ۱۰ براساس الگوی یکنواخت ترسیم شده‌اند. همان‌طور که در هر نمودار مشخص است، با افزایش فاصله  $y_m/b$  از  $0/3$  به  $0/7$  مرز فلاتر کاهش می‌یابد. برای الگوی کاهشی- افزایشی با زیاد شدن WR از  $0/1$  به  $0/3$  برای همه مقادیر  $y_m/b$  مرز فلاتر افزایش داشته است. برای الگوی یکنواخت در مقادیر  $y_m/b$  کمتر از  $0/55$ ، ورق با  $WR=0/3$  بالاترین مرز پایداری فلاتر را تأمین می‌سازد و برای فواصل  $y_m/b$  بیشتر از  $0/65$  ورق با  $WR=0/1$  بیشترین مرز فلاتر دارد.



$c$	طول جرم افزوده
$C$	ماتریس میرایی
$d$	عرض جرم افزوده
$D$	ماتریس سختی خمشی
$E_{11}$	مدول کششی کل در راستای اصلی
$E_{11}^{CN}$	مدول کششی نانولوله کربنی در راستای اصلی
$E_{11}^m$	مدول کششی پرکننده در راستای عمود
$E_{22}$	مدول کششی کل در راستای عمود
$E_{22}^{CN}$	مدول کششی نانولوله کربنی در راستای عمود
$E_{22}^m$	مدول کششی ماتریس در راستای اصلی
$F$	تابع شرط مرزی
$G$	مدول برشی کل
$H$	نسبت ضخامت
$I$	ممان اینرسی
$K$	ضریب تصحیح برشی، ماتریس سختی
$LR$	نسبت طولی جرم افزوده
$M$	ماتریس جرمی
$M_\infty$	عدد ماخ جریان
$MR$	نسبت جرمی برای جرم افزوده
$p_i$	جمله $i$ ام چیبیشف
$Q_{ij}$	سختی کاهیده $z$ ام
$u$	جابه‌جایی در راستای $x$
$U$	انرژی کرنشی، سرعت جریان
$v$	جابه‌جایی در راستای $y$
$V_{CN}$	درصد حجمی نانولوله‌های کربنی
$V_{CN}^*$	درصد حجمی کل نانولوله‌های کربنی
$V_m$	درصد حجمی پرکننده
$w$	جابه‌جایی در راستای $z$
$W$	کار بارهای خارجی
$w_0$	جابه‌جایی صفحه میانی ورق در راستای $z$
$WR$	نسبت عرض جرم افزوده
$x_m$	مکان جرم افزوده در راستای محور طولی
$y_m$	مکان جرم افزوده در راستای محور عرضی
$Z$	متغیر فضای حالت
<b>علایم یونانی</b>	
$\gamma$	کرنش برشی
$\gamma_0$	کرنش برشی صفحه میانی
$\varepsilon$	کرنش قائم
$\eta$	ضریب تاثیر نانولوله‌های کربنی
$\nu_{12}$	نسبت پواسون کل
$\nu^{CN}$	نسبت پواسون نانولوله کربنی
$\nu^m$	نسبت پواسون پرکننده
$\kappa$	مشتقات چرخش
$\lambda$	فشار بی‌بعد آیرودینامیک
$\mu$	نسبت جرمی هوا به ورق
$\rho$	چگالی کل
$\rho_m$	چگالی پرکننده
$\rho_{CN}$	چگالی نانولوله‌های کربنی
$\sigma$	تنش قائم
$\tau$	تنش برشی
$\phi_x$	چرخش حول محور $x$
$\phi_y$	چرخش حول محور $y$
$\omega$	فرکانس ویژه سیستم
$\theta_p$	انرژی جنبشی ورق پایه
$\theta_m$	انرژی جنبشی جرم افزوده
$\theta$	انرژی جنبشی کل
$\Delta p$	فشار آیرودینامیک
$\Omega_r$	نسبت میرایی سیستم
<b>بالانویس‌ها</b>	
$m$	مواد پرکننده
$CN$	نانولوله‌های کربنی
<b>زیرنویس‌ها</b>	
$m$	مواد پرکننده، جرم افزوده‌شده
$CN$	نانولوله‌های کربنی
$\Delta p$	فشار آیرودینامیک



نمودار (۱۲) مرز فلتر ورق کامپوزیتی تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی توزیع یکنواخت با لایه‌چینی‌های مختلف برحسب فشار بی‌بعد آیرودینامیک

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، اثر جرم افزوده گسترده بر مرز فلتر ورق کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی بررسی شد. اصل همیلتون، با استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه اول برای ورق و پیستون مرتبه اول برای جریان فراصوت، روی ورق مستطیلی به همراه جرم افزوده در جریان فراصوت اعمال شد. اثر نسبت جرمی، محل جرم افزوده، ابعاد جرم افزوده و الگوهای مختلف توزیع در نانولوله‌های کربنی تقویت‌کننده ورق روی رفتار آیرولاستیک ورق بررسی شد. نتایج به صورت زیر است:

- ۱- با افزایش نسبت جرمی و سنگین‌تر شدن جرم افزوده نسبت به ورق پایه، مرز فلتر کاهش می‌یابد و فلتر زودتر اتفاق می‌افتد.
- ۲- با افزایش طول جرم افزوده در راستای جریان، مرز فلتر و دامنه پایداری افزایش می‌یابد.
- ۳- الگوی توزیع کاهشی در نانولوله‌های کربنی، در مقایسه با الگوهای دیگر، بیشترین میزان تغییرات را نسبت به مکان و ابعاد جرم افزوده دارد و حساس‌تر است.
- ۴- با تغییر مکان جرم افزوده در راستای عمود بر جریان و با افزایش فاصله از انتهای گیردار (ریشه) ورق، ابتدا مرز فلتر افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
- ۵- با تغییر مکان جرم افزوده در راستای جریان، برای الگوهای مختلف توزیع نانولوله‌های کربنی، رفتار ورق در رسیدن به ناپایداری فلتر متفاوت خواهد بود.
- ۶- با افزایش زاویه لایه‌چینی الیاف در کامپوزیت‌های پاد متقارن مرز، پایداری فلتر افزایش می‌یابد.

**تشکر و قدردانی:** موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

**تأییدیه اخلاقی:** موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

**تعارض منافع:** موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

**سهم نویسندگان:** علی جمشید (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۵۰٪)؛ نادر وحدت‌آزاد (نویسنده دوم)، روش‌شناس/پژوهشگر کمکی/تحلیلگر آماری/نگارنده بحث (۵۰٪)

**منابع مالی:** موردی توسط نویسندگان بیان نشده است.

#### ۵- پی‌نوشت

علایم

$a$	طول ورق پایه
$A^s$	ماتریس سختی کششی-برشی
$AR$	نسبت منظری
$b$	عرض ورق پایه

aerothermal postbuckling control for nonlinear composite laminated panels in supersonic airflow. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2015;26(7):840-857.

15- Lin H, Cao D, Xu Y. Vibration characteristics and flutter analysis of a composite laminated plate with a store. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018;39(2):241-260.

16- Alibeigloo A, Shakeri M, Kari MR. Free vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory. *Ocean Engineering*. 2008;35(2):183-190.

17- Fazlzadeh SA, Marzocca P, Rashidi E, Mazidi A. Effects of rolling maneuver on divergence and flutter of aircraft wing store. *Journal of Aircraft*. 2010;47(1):64-70.

18- Vahdat Azad N, Vahdat Azad A. Investigation of attached mass effect on flutter speed of cantilever composite plate in supersonic flow. *Journal of Science and Technology of Composites*. 2017;4(2):179-188. [Persian]

19- Zhang LW, Lei ZX, Liew KM. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite triangular plates using the FSDT and element-free IMLS-Ritz method. *Composite Structures*. 2015;120:189-199.

20- Fidelus JD, Wiesel E, Gojny FH, Schulte K, Wagner HD. Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites. *Composites Part A Applied Science and Manufacturing*. 2005;36(11):1555-1561.

21- Efraim E, Eisenberger M. Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. *Journal Sound and Vibration*. 2007;299(4-5):720-738.

22- Song ZG, Li FM, Carrera E, Hagedorn P. A new method of smart and optimal flutter control for composite laminated panels in supersonic airflow under thermal effects. *Journal of Sound and Vibration*. 2018;414:218-232.

23- Zhou D, Cheung YK, Au FTK, Lo SH. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(26):6339-6353.

24- Fang JS, Zhou D. Free vibration analysis of rotating axially functionally graded tapered Timoshenko beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016;16:1550007.

25- Fox L, Parker IB. Chebyshev polynomials in numerical analysis. *Oxford Mathematical Handbooks*. Oxford: Oxford U.P.; 1968.

26- Birman V, Librescu L. Supersonic flutter of shear deformable laminated composite flat panels. *Journal of Sound and Vibration*. 1990;139(2):265-275.

27- Shin WH, Oh IK, Han JH, Lee I. Aeroelastic characteristics of cylindrical hybrid composite panels with viscoelastic damping treatments. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;296(1-2):99-116.

28- Shen HS. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, part I: Axially-loaded shells. *Composite Structures*. 2011;93(8):2096-2108.

29- Dowell E, Ye W. Limit cycle oscillation of a fluttering cantilever plate. *AIAA Journal*. 1991;29(11):1929-1936.

## منابع

1- Lei ZX, Zhang LW, Liew KM. Free vibration analysis of laminated FG-CNT reinforced composite rectangular plates using the kp-Ritz method. *Composite Structures*. 2015;127:245-259.

2- Ghorbanpour Arani A, Kolahchi R, Mosallaie Barzoki AA, Mozdianfard MR, Noudeh Farahani SM. Elastic foundation effect on nonlinear thermo-vibration of embedded double-layered orthotropic grapheme sheets using differential quadrature method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science*. 2013;227(4):862-879.

3- Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*. 1991;354:56-58.

4- Liew KM, Lei ZX, Zhang LW. Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: A review. *Composite Structures*. 2015;120:90-97.

5- Zhang LW, Song ZG, Liew KM. Computation of aerothermoelastic properties and active flutter control of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016;300:427-441.

6- Zhu P, Lei ZX, Liew KM. Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Composite Structures*. 2012;94(4):1450-1460.

7- Nami MR, Janghorban M. Free vibration of thick functionally graded carbon nanotube-reinforced rectangular composite plates based on three-dimensional elasticity theory via differential quadrature method. *Advanced Composite Materials*. 2015;24(5):439-450.

8- Kiani Y. Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew plates. *Aerospace Science and Technology*. 2016;58:178-188.

9- Song ZG, Zhang LW, Liew KM. Aeroelastic analysis of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow using a higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2016;141:79-90.

10- Natarajan S, Kaleeswaran K, Manickam G. Functionally graded material panel flutter by cell-based smoothed finite elements. *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*. 2013;1(2):205-215.

11- Fazlzadeh SA, Pouresmaeeli S, Ghavanloo E. Aeroelastic characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates under a supersonic flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015;285:714-729.

12- Sankar A, Natarajan S, Ben Zineb T, Ganapathi M. Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels with CNT reinforced facesheets using higher-order structural theory. *Composite Structures*. 2015;127:340-355.

13- Song ZG, Li FM. Aeroelastic analysis and active flutter control of nonlinear lattice sandwich beams. *Nonlinear Dynamics*. 2014;76(1):57-68.

14- Song ZG, Li FM, Zhang W. Active flutter and