



تحلیل پایداری سیستم انتقال قدرت سه محوره

مسعود سلطان‌رضایی^۱، محمدرضا قضاوی^{۲*}، علی‌اصغر جعفری^۳

۱- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۱۱-۴۱۱۵، ghazavim@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۳۱ فروردین ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۹ خرداد ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۴ دی ۱۳۹۲

کلید واژگان:

تحلیل پایداری

سیستم انتقال قدرت

شبیه‌سازی سیستم محور

در این مقاله یک سیستم انتقال قدرت سه محوره مدل‌سازی ریاضی و شبیه‌سازی نرم‌افزاری شده است. در مدل‌سازی ریاضی یک سیستم شامل سه محور (شافت) انعطاف‌پذیر ناهمراستا که با اتصال یونیورسال متصل شده‌اند به صورت سه درجه آزادی بررسی گشته است. پایداری این مجموعه به کمک روش مندرمی ماتریس تحلیل شده است. اعتبارسنجی مدل‌سازی به وسیله مقایسه نتایج حاصل با شبیه‌سازی مجموعه در نرم-افزار تحلیل دینامیکی ادمز/ویو و همچنین با نتایج پژوهش‌های گذشته صورت گرفته است. پس از آن به وسیله مدل ریاضی صحت‌سنجی شده، تأثیر پارامترهای مختلف سیستم از جمله سرعت دورانی، زاویه محورها با یکدیگر (زاویه مفصل‌ها) و جنس (خواص) محورها (میرایی و سختی آن‌ها) بر پایداری مجموعه بررسی شده است. همچنین در مورد میزان، نحوه و شرایط اثر گذاری هر پارامتر بر پایداری بحث شده است. در انتها نمودارهای پایداری بر اساس پارامترهای مختلف سیستم ارائه گشته است. مشاهده می‌شود با کاهش سختی محورها و زاویه مفصل‌ها و نیز با افزایش میرایی محورها پایداری سیستم افزایش می‌یابد.

Stability analysis of a three-axis power transmission system

Masoud Soltan Rezaee¹, Mohammad Reza Ghazavi^{2*}, Ali Asghar Jafari³

1- Master of Science, Mechanical Engineering, Iran Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Associate Professor, Mechanical Engineering, Iran Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

3- Associate Professor, Mechanical Engineering, Toosi University of Technology, Tehran, Iran

*P. O. B. 14115-111, Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received in Revised Form 20 April 2013
Accepted 19 June 2013
Available Online 14 January 2014

Keywords:

Stability Analysis
Power Transmission System
Simulation of Shaft System

ABSTRACT

In this paper, a three-axis power transmission system is modeled mathematically and simulated by software. In mathematical method, a system consisting of three flexible shafts with different rotation axis which connected through two universal joints is investigated via a three degrees-of-freedom model. The stability is analyzed by means of a monodromy matrix technique. The model is verified by comparing the results with dynamic analytical software Adams/View simulation and the results of the previous research. Then via the validated mathematical model of the system, the effects of different system parameters such as rotational velocity, non-aligned angles, shaft's properties (stiffness and damping) on the stability are investigated. Also impact, manner and conditions of each parameter on the stability are discussed. Finally, the stability charts constructed on various parameters is presented. It is observed that decreasing shaft stiffness and universal joint angle due to more stability, while decreasing shaft damping has the opposite effect.

۱- مقدمه

هنگامی که سیستم از چند محور تشکیل شده باشد از کوپلینگ برای اتصال محورها استفاده می‌شود. کوپلینگ‌ها انواع مختلفی دارند از جمله صفحه‌ای، استوانه‌ای، کره‌ای، هوک^۲، دورانی، انتقالی و سرعت ثابت [۱]. در مواقعی که محورها ناهم‌راستا باشند از اتصال هوک که با نام‌های دیگری از جمله اتصال کاردان^۳، اتصال یونیورسال^۴ و اتصال U نیز شناخته می‌شود برای اتصال مجموعه استفاده می‌کنند. مزیت این اتصال نسبت به بقیه اتصالات و کوپلینگ‌های بین محورها تحمل گشتاور و نیروی محوری بالا، کار در

روش‌های زیادی برای انتقال توان مکانیکی وجود دارد که بنا بر شرایط کاری یک یا ترکیبی از آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. رایج‌ترین سیستم‌های انتقال قدرت عبارت‌اند از تسمه و پولی، سیستم محور یا شافت کوپلینگ^۱، چرخ و زنجیر و همچنین چرخ‌دنده. در مجموعه‌هایی که نیاز به انتقال قدرت با سرعت بالا داشته باشند سیستم محور کاربرد پیدا می‌کند. سیستم محور مجموعه‌ای است که از چند محور (شافت) متصل به هم تشکیل شده است و در آن حرکت دورانی از محور راننده به محور(های) پیرو منتقل می‌شود.

2- Hooke's joint
3- Cardan joint
4- Universal joint

1- Shaft couplings

Please cite this article using:

M. Soltan Rezaee, M.R. Ghazavi, A.A. Jafari, Stability analysis of a three-axis power transmission system, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 35-44, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

از آن در خودروهای سنگین می‌باشد؛ علاوه بر این در مکان‌هایی که محدودیت فیزیکی وجود دارد و نمی‌توان با استفاده از تنها دو محور (و با توجه به محدوده زاویه بکارگیری مفصل) از مبدا تولید حرکت دورانی به نقطه‌ای رسید که توان و گشتاور نیاز است بکار می‌رود.

تاکنون تحلیل سیستم‌های سه محوره کمتر انجام شده است. با روشن شدن میزان اهمیت و کاربرد این گونه سیستم‌ها، در ادامه مطالعات و پژوهش‌های انجام شده روی مجموعه‌های چند-محوری^۷ و نتایج این پژوهش‌ها در خصوص معادلات حرکت، پارامترهای حائز اهمیت، پایداری دینامیکی و روش‌های حل این نوع سیستم‌ها بیان شده است.

بروتی و همکاران [۱۵] به بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری محورها بر پایداری یک سیستم دارای دو اتصال هوک پرداختند. آن‌ها در حل معادلات از روش-های عددی بهره بردند و مشاهده کردند تأثیر سرعت دوران سیستم بر پایداری مجموعه در سیستم‌های دارای محور صلب و انعطاف‌پذیر بسیار متفاوت است. دی‌اسمیت و همکاران [۱۶] درباره پایداری یک سیستم سه محوره مطالعه کردند. آن‌ها با توجه به اهمیت استفاده از سیستم انتقال قدرت با وزن کم فقط در انتهای محور سوم دیسک اینرسی در نظر گرفتند. آن‌ها تحلیل پایداری را با استفاده از تئوری فلوکه عددی انجام دادند و در نهایت نتیجه گرفتند هر کدام از دو نوع استهلاک داخلی و خارجی در شرایطی خاص موجب پایداری سیستم می‌شود. شو و چینگ [۱۷] به روش المان محدود^۸ به استخراج معادلات حرکت یک سیستم سه محوره پرداختند. هدف آن‌ها تحلیل رفتار محور میانی و بررسی اثرات سرعت، گشتاور و زاویه محورها بر مجموعه بود. آن‌ها در نهایت توانستند مقدار گشتاوری که موجب آسیب‌دیدگی سیستم می‌شود محاسبه کنند. سلطان‌رضایی و همکاران [۱۸] به بررسی پایداری یک سیستم متشکل از سه محور پرداختند. آن‌ها این سیستم را به صورت ریاضی مدل‌سازی کرده، روابط آن را خطی نمودند. سپس نواحی ناپایداری را به وسیله روش مندرمی ماتریس بر اساس پارامترهای نسبت اینرسی دیسک‌ها و زوایای کاری بررسی کردند. در تحقیق مذکور علاوه بر بررسی سیستم دو محوره، حل روابط و تحلیل پایداری سیستم سه محوره، انجام شده است.

در این تحقیق شبیه‌سازی سیستم انتقال قدرت سه محوره و تحلیل پایداری آن با تأکید بر ویژگی‌های محورها (بررسی تأثیر مقدار سختی و میرایی محورها بر ناپایداری) مد نظر می‌باشد. هر چند تحلیل پایداری با تمرکز بر محورها در سیستم‌های دو محوره صورت گرفته در سیستم‌های سه محوره انجام نشده است. علاوه بر این پایدار کردن سیستم با تغییر جنس (خواص) محورها و در نهایت بدست آوردن مناطق پایدار و ایمن یک مجموعه دارای سه محور و دو مفصل هوک مورد نظر است. روش تحلیل پایداری این پژوهش تکنیک مندرمی ماتریس است که می‌تواند تمام مناطق ناپایداری را بدست آورد و امروزه بیش از دیگر روش‌ها در سیستم‌های با تحریک پارامتریک کاربرد دارد. در اینجا بعضی از آخرین تحقیقاتی که در مورد سیستم دو محوره صورت گرفته است در مورد سیستم سه محوره هم انجام شده است.

۲- شرح مسئله

اگر ضرایب موجود در معادله دیفرانسیل حرکت سیستم دارای پارامترهای تحریک خارجی باشند در صورتی که فرکانس تحریک خارجی نسبت

زاویه‌های ناهم‌راستایی نسبتاً زیاد، قیمت پایین و تعمیر آسان می‌باشد. البته استفاده از این اتصال مشکلاتی نیز دارد؛ ناهم‌راستایی محوری سبب می‌شود محور(های) پیرو نوسان متناوب داشته باشد (حتی اگر سرعت محور راننده ثابت باشد) که این نوسان ارتعاشات پیچشی را از محور راننده به محور(های) پیرو منتقل می‌کند و این امر می‌تواند موجب ناپایداری سیستم شود [۲].

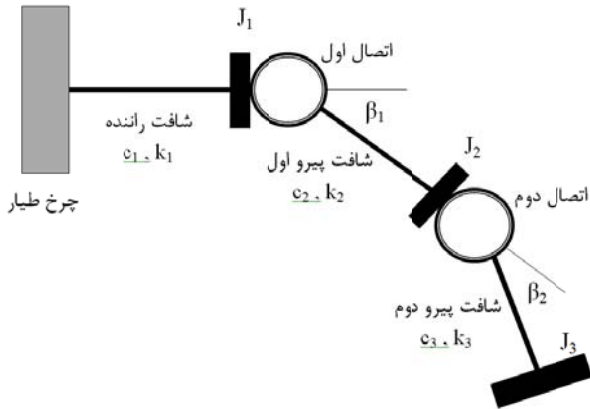
چانگ [۳] دو مدل یک درجه آزادی خطی و غیر خطی را برای دستیابی به تقریب‌های مرتبه بالاتر مطالعه نمود. او تحلیل پایداری سیستم را به روش پرتربیش^۱ انجام داد. آسوکتان و هوانگ [۴] به یک مدل دو درجه آزادی خطی پرداختند و از یک روش میانگین‌گیری برای تعیین نواحی تشدید پارامتری اولیه بهره بردند. همچنین آسوکتان و وانگ [۵] مدلی مشابه [۴] را به روش توان لیاپانوف^۲ بررسی نمودند. بعد از آن آسوکتان و میهن [۶] یک مدل دو درجه آزادی غیر خطی را مورد مطالعه قرار دادند و با روش عددی بعضی از رفتارهای نامنظم سیستم را بدست آوردند. دی‌اسمیت و همکاران [۷] یک مدل دو درجه آزادی با استهلاک ویسکوز در نظر گرفتند و ناپایداری سیستم را با تئوری فلوکه^۳ بررسی کردند. مازای و همکاران [۸] به مطالعه یک سیستم محور با یک اتصال هوک پرداختند و نواحی ناپایداری را به روش ماتریس مندرمی^۴ بدست آوردند. آن‌ها تأثیر وجود مستهلک‌کننده در پایداری سیستم را در مدل انعطاف‌پذیر خطی و نیز مدل صلب خطی و غیر خطی بررسی کردند [۹]. همچنین در مقاله دیگری [۱۰] کمترین مقدار استهلاک مورد نیاز سیستم را برای انتقال از ناحیه ناپایدار پارامتریک به پایدار بدست آوردند. آن‌ها برای این منظور یک مدل صلب بر اساس مدل سایگو [۱۱] در نظر گرفتند و نواحی ناپایداری را به روش نامحدود هیل^۵ تخمین زدند. مازای و اسکات [۱۲] به بررسی یک مدل دو درجه آزادی با سرعت ورودی شتابدار پرداختند. سرعت زاویه‌ای محور راننده کمتر از مقداری که موجب تشدید سیستم شود شروع می‌شد و به صورت خطی افزایش می‌یافت. آن‌ها این مسئله را به روش مندرمی ماتریس و تعیین نامحدود هیل تحلیل کردند. سپس مازای [۱۳] به مطالعه درباره تشدید در سیستم انتقال قدرت و عبور از آن حالت پرداخت. او مدلی مانند [۱۲] در نظر گرفت. مازای معادلات دیفرانسیل ناهمگن سیستم را که معادلاتی با دوره تناوب مشخص بود استخراج و به روش انرژی بررسی کرد که یک سیستم به چه میزان می‌تواند در حالت تشدید بماند بدون آنکه به آن آسیبی وارد شود. بولوت و پارلا [۱۴] یک مدل دو بعدی غیر خطی را خطی سازی کرده، تحلیل پایداری آن را به کمک روش مندرمی ماتریس انجام دادند.

در مقالات ذکر شده پژوهشگران به مطالعه سیستم‌هایی با دو محور پرداخته بودند. این سیستم‌ها دارای دو درجه آزادی می‌باشند. در بسیاری از سیستم‌های انتقال قدرت لازم است انتقال سرعت و گشتاور در خارج از صفحه و در محیط فضایی انجام شود. در چنین شرایطی نیاز به مدل سه درجه آزادی است که در آن از سه محور^۶ برای انتقال حرکت دورانی استفاده می‌شود. در هنگام طراحی و پیش از ساخت سیستم تحلیل نواحی ناپایداری حائز اهمیت است.

سیستم انتقال قدرت در سیستم‌های پیش‌رانش و خطوط انتقال حرکت مورد نیاز است. از جمله کاربردهای سیستم انتقال قدرت سه محوره، استفاده

1- Perturbation method
2- Lyapunov exponent
3- Floquet theory
4- Monodromy matrix method
5- Hill's infinite method
6- Three-axis

7- Multi-shaft system
8- Finite elements



شکل ۱ شماتیک یک سیستم محور در سه بعد (محور راننده و محور پیرو دوم می‌توانند در صفحات مختلف باشند).

در این روابط $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ مختصات پیچشی‌اند و $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ به ترتیب نشان دهنده مشتقات اول و دوم نسبت به زمان است. η_{01} و η_{02} نسبت انتقال سرعت در اولین و دومین اتصال هوک می‌باشد [۲۱]

$$\eta_i = \frac{\Omega_{\theta-i}}{\Omega_{1-i}} = \frac{\cos \beta_i}{1 - \sin^2 \beta_i \sin^2 \varphi_i}; \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

$$\varphi_1 = \Omega_0 t + \theta_1 \quad (5)$$

$$\varphi_2 = \Omega_{\theta 1} t + \theta_2 \quad (6)$$

معادلات حرکت سیستم غیر خطی می‌باشند. با بسط آن‌ها به وسیله سری مکولوران $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ تا جملات مرتبه دوم و سوم و صرف نظر از جملات غیر خطی، با فرض کوچک بودن مقادیر ارتعاشی و عدم وجود فرکانس‌های مرتبه بالا، معادلات (۳) تا (۵) به صورت خطی در می‌آیند [۱۹].

با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۷) معادلات حرکت به صورت بی‌بعد درآمده و در فرم برداری-ماتریسی به صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود.

$$\tau = \Omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt{k_1/J_1}}, \quad \zeta = \frac{c_1}{\sqrt{k_1/J_1}} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1'' \\ \theta_2'' \\ \theta_3'' \end{Bmatrix} + [E] \begin{Bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_3' \end{Bmatrix} + [P] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\eta_{01}'(\tau) \\ -\eta_{01}'(\tau)\eta_{02}'(\tau) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

در این رابطه $\theta_1', \theta_2', \theta_3'$ و $\theta_1'', \theta_2'', \theta_3''$ به ترتیب نشان‌دهنده مشتقات اول و دوم نسبت به τ می‌باشند و E و P ماتریس‌های 3×3 هستند که درایه‌هایشان در پیوست الف آمده است.

معادله (۸)، رابطه خطی‌سازی شده برای ارتعاشات پیچشی سیستم مورد نظر است که دوره تناوب آن π رادیان می‌باشد.

$$\eta_i(\tau) = \eta_i(\tau + \pi) = \frac{\cos \beta_i}{1 - \sin^2 \beta_i \sin^2 \tau}; \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

۴- تحلیل پایداری دینامیکی

معادله (۸) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایبی با دوره تناوب π (یک دستگاه معادلات متیو-هیل) می‌باشد. پایداری این دستگاه به روش مندرمی ماتریس انجام می‌شود. روش مندرمی ماتریس [۲۱]، تکنیکی ساده و قابل اطمینان است و برای تحلیل پایداری در سیستم‌هایی که تحریک پارامتریک دارند و مقدار ضرایب هارمونیک و وابسته به زمان است مورد

صحیحی از فرکانس مودهای ارتعاشی سیستم باشد، این ضرایب به صورت تحریک پارامتریک برای سیستم عمل می‌کنند و در نتیجه ناپایداری پارامتریک در سیستم بوجود می‌آید [۱۹]. این نوع ناپایداری در سیستم محور کمتر بررسی شده و ناشی از کوپلینگ پیچشی اعمالی بر محور توسط اتصال یا کوپلینگ می‌باشد. در این مقاله پایداری دینامیکی یک سیستم محور که با اتصال هوک متصل گشته بررسی شده است. برای این منظور یک مدل سه درجه آزادی شامل سه محور الاستیک پیچشی که بدون جرم و غیر هم‌محور بوده و هر کدام در یک سر به دیسکی صلب متصل گشته در نظر گرفته شده است (شکل ۱). با توجه به این مدل، معادلات حرکت سیستم استخراج شده، با روش مندرمی ماتریس مورد تحلیل قرار گرفته است.

پس از آن سیستم انتقال قدرت در نرم‌افزار ادمز/ویو شبیه‌سازی شده- است. به منظور اعتبارسنجی مدل‌سازی ریاضی نتایج حاصل از آن با نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی نرم‌افزاری مقایسه شده است. برای این امر دو نقطه نزدیک به هم که توسط مدل ریاضی و تحلیل پایداری به روش مندرمی ماتریس، یکی ناپایدار و دیگری پایدار گزارش گردیده، در نظر گرفته شده- است. بررسی پایداری این نقاط در نرم‌افزار ادمز/ویو انجام و با نتایج مدل‌سازی ریاضی مقایسه شده است. همچنین با فرض سیستم دو محوره نتایج کار با پژوهش‌های گذشته مورد مقایسه قرار گرفته است.

پس از آن، یکسری مقادیر خاص به عنوان حالت مبنا برای سیستم در نظر گرفته شده است که بدست آمده از مراجع گذشته [۱۴] می‌باشد. طی چند مرحله هر بار یکی از پارامترهای سیستم (سرعت ورودی، زاویه اتصال، سختی و میرایی محورها) تغییر می‌کند که با توجه به نتایج حالت مبنا تأثیر آن پارامتر بر سیستم، اعم از پایدار یا ناپایدار کردن سیستم و همچنین میزان تأثیر بر پایداری دینامیکی مجموعه مشخص می‌شود. علاوه بر این تأثیر خواص محورها (سختی و میرایی پیچشی آن‌ها) بر پایداری سیستم بررسی شده است. در نهایت نتایج به صورت جداول پایداری بر حسب پارامترهای مختلف سیستم از جمله زاویه محورها، خواص آن‌ها سرعت دورانی و زمان گزارش- شده است.

۳- مدل ریاضی

در این مدل سه محور وجود دارد که محورهای راننده، پیرو اول و پیرو دوم نامیده شده‌اند. زاویه ناهم‌راستایی (اختلاف زاویه محورهای) محور راننده و محور پیرو اول β_1 و زاویه ناهم‌راستایی محور پیرو اول و محور پیرو دوم β_2 نامیده شده است. هر محور دارای یک درجه آزادی است که در مجموع سیستم دارای سه درجه آزادی بوده و حالت فضایی دارد. هر محور دارای سختی پیچشی k_i و استهلاک ویسکوز پیچشی c_i است و به یک دیسک با اینرسی دورانی J_i در انتهای سمت راست متصل گشته است. در انتهای سمت چپ محور راننده یک چرخ طیار وجود دارد تا این محور با سرعت ثابت Ω_0 دوران کند.

ارتعاشات پیچشی سیستم طبق روابط (۱-۳) بدست می‌آید [۱۸].

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - \eta_{01} c_2 \dot{\theta}_2 + k_1 \theta_1 - \eta_{01} k_2 \theta_2 = 0 \quad (1)$$

$$J_2 [\ddot{\theta}_2 + \eta_{01} \ddot{\theta}_1 + \dot{\eta}_{01} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1)] + c_2 \dot{\theta}_2 - \eta_{02} c_3 \dot{\theta}_3 + k_2 \theta_2 - \eta_{02} k_3 \theta_3 = 0 \quad (2)$$

$$J_3 [\ddot{\theta}_3 + \eta_{02} (\ddot{\theta}_2 + (\eta_{01} \ddot{\theta}_1 + \dot{\eta}_{01} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1))) + \dot{\eta}_{02} (\dot{\theta}_2 + \eta_{01} (\Omega_0 + \dot{\theta}_1))] + c_3 \dot{\theta}_3 + k_3 \theta_3 = 0 \quad (3)$$

نرم افزار ادمز یکی از رایج ترین نرم افزارهای مکانیکی است که توانایی تحلیل دینامیکی دارد. در این نرم افزار می توان با شبیه سازی حرکتی سیستم مکانیکی، تست سینماتیکی سیستم، اندازه گیری نیروهای وارد بر اتصالات و بررسی ارتعاشات به تحلیل سیستم پرداخت. مزایای این نرم افزار نمایش حرکت اجسام به صورت سه بعدی و تجزیه و تحلیل آن ها، شبیه سازی حرکت مجموعه با استفاده از اجزای مکانیکی، ایجاد و آزمایش نمونه مجازی از سیستم های مکانیکی، بهینه کردن طرح های سیستم های مکانیکی قبل از رسیدن به پیش ساخت فیزیکی و صرف هزینه و زمان کمتر برای ایجاد و تست مجموعه می باشد [۲۲].

ادمز/ویو^۳ یکی از پرکاربردترین بخش های این نرم افزار است که شامل مدل سازی سه بعدی، تعریف قیدها و مفصل های مختلف، انیمیشن سه بعدی و نیز نمایش نیروها، جابه جایی ها و تنش های مدل است. در این محیط کاربر می تواند با در اختیار داشتن یک سری از دستورات سیستم یا قطعه مورد نظر خود را مدل سازی و تحلیل کرده، به نتایج مورد نظر دست پیدا کند.

مدل سازی در این مقاله به صورت سه بعدی انجام شده است؛ یعنی سیستم انتقال قدرتی شبیه سازی شده که محورهای اول و سوم آن متناظر می باشند و انتقال حرکت در سه راستا انجام می شود. البته در صورتی که هر سه محور هم صفحه باشند مسئله به حالت دو بعدی که شکل ساده تری از کار است درمی آید. به عبارت دیگر این مدل، قادر به شبیه سازی سیستم های انتقال قدرت سه محوره ای است که حرکت صفحه ای (دو بعدی) یا فضایی (سه بعدی) دارند. در ادامه نحوه شبیه سازی بخش های مختلف سیستم انتقال قدرت در نرم افزار ادمز/ویو تشریح می گردد. این قسمت ها عبارتند از محور، دیسک دوار، مفصل، چرخ طیار، فنر و دمپر.

۵-۱- محور

مدل سازی محور به صورت میله دواری است که دارای سختی و میرایی پیچشی است. در ادمز/ویو، هر محور به صورت یک استوانه مدل می شود. چنان که در مقدمه ذکر شد مطابق عمده پژوهش های گذشته، محورها بدون جرم در نظر گرفته شده اند و عامل لختی تنها دیسک است که جرم و اینرسی دارد.

۵-۲- فنر و دمپر

در سیستم محور دو نوع فنر و دمپر می توان تصور کرد؛ خارجی و داخلی. منظور از فنر و دمپر خارجی مدل سازی تکیه گاه های هر محور به شکل فنر و دمپر است که در کارهای گذشته به صورت یک بعدی و دو بعدی (فنر و دمپر در دو راستا) انجام شده بود [۸، ۹]. گاهی این نوع سختی و میرایی می تواند نوسانات سیستم را حذف کند. منظور از فنر و دمپر داخلی مدل سازی هر محور به صورت انعطاف پذیر^۴ است. به عبارت دیگر محور انعطاف پذیر دارای سختی و میرایی است ولی محور صلب، خیر. این نوع سختی و میرایی می تواند سیستم ناپایدار را پایدار و یا سیستم پایدار را ناپایدار کند. در این پژوهش محورها انعطاف پذیر در نظر گرفته شده اند.

در ادمز/ویو نمی توان برای استوانه (محور)، سختی و میرایی در نظر گرفت بنابراین هر محور به دو قسمت تقسیم می شود و بین آن ها یک فنر پیچشی^۵ به صورت اتصال^۶ تعریف شده است که می توان به وسیله آن سختی و میرایی برای محور معین کرد.

استفاده قرار می گیرد. در این روش پایداری تمام نقاط در یک محدوده تعیین شده، بر اساس پارامترهای سیستم بررسی می شود و از این رو دقت بالایی دارد و می تواند تمام نقاط ناپایدار موجود در محدوده را معین نماید؛ البته این کار را با انجام حجم زیادی از محاسبات ریاضی انجام می دهد و به همین دلیل زمان نسبتاً زیادی برای پاسخ دادن نیاز دارد و هرچه دقت بالاتری مورد نظر باشد تعداد نقاط بیشتری را بررسی کرده، در نتیجه زمان بیشتری صرف می کند. در این روش نتایج به صورت جداول پایداری برحسب یک جفت از پارامترهای سیستم بیان می شود. چگونگی حل با این روش در ادامه به طور مختصر آورده شده است.

یک فضای حالت از سیستم به صورت رابطه (۱۰) می باشد:

$$u' = H(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \tau) \times u \quad (10)$$

به صورت رابطه (۱۱) است $(\alpha_i, \mu_i, \gamma_i, i=1,2)$ به ترتیب نسبت اینرسی، سختی و میرایی هستند که در لیست علائم و نشانه ها آورده شده اند

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P & -E \end{bmatrix} \quad (11)$$

I ماتریس واحد 3×3 و 0 ماتریس صفر 3×3 می باشد.

ماتریس پایه به فرم معادله (۱۲) نشان داده می شود:

$$[A(\tau)] = [\{Y_1(\tau)\}, \{Y_2(\tau)\}, \dots, \{Y_n(\tau)\}] \quad (12)$$

که $\{Y_1(\tau)\}, \{Y_2(\tau)\}, \dots, \{Y_n(\tau)\}$ ، n حل مستقل خطی از سیستم می باشند. با n بار انتگرال گیری از معادله (۱۲) از 0 تا τ با n شرط اولیه

$$[A(0)] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

با توجه به تئوری فلوکه، حل دستگاه به صورت معادله (۱۴) است:

$$\Phi(\tau) = K(\tau)e^{M\tau} \quad (14)$$

K یک ماتریس با دوره تناوب π است و M یک ماتریس ثابت که به ماتریس ثابت دیگر یعنی Z (ماتریس مندرمی) به صورت $M = \frac{1}{\pi} \log Z$ وابسته است. اگر معادلات خطی شده باشند $\Phi(0) = I$ و $Z = \Phi(\pi)$ می باشد.

مقادیر ویژه ماتریس مندرمی $\sigma_k; k=1,2,3,4,5,6$ برای تحلیل پایداری سیستم بکار می روند. سیستم پایدار است اگر و تنها اگر برای تمام kها $\text{mod}(\sigma_k) \leq 1$ باشد و یا $\text{Re}(\sigma_k) \leq 0$.

در این مقاله ماتریس مندرمی به وسیله انتگرال گیری عددی از معادله (۱۰) بدست آمده است و مقادیر ویژه آن محاسبه شده اند تا پایداری دینامیکی سیستم ارزیابی شود. روش رانج کونا^۱ (RK45) برای انتگرال گیری عددی استفاده شده و مقدار تolerانس کنترل خطا^۲ مشابه مراجع گذشته [۱۴]، (۹-۱۰) در نظر گرفته شده است.

۵- شبیه سازی سیستم انتقال قدرت با نرم افزار ادمز/ویو

شبیه سازی یکی از راه هایی است که صحت مدل سازی ریاضی و تحلیل پایداری را روشن می کند؛ علاوه بر این باعث می شود حس فیزیکی بهتری از مسئله ایجاد شود که این امر در طراحی سیستم های مکانیکی حائز اهمیت است. در این مقاله شبیه سازی سیستم به وسیله نرم افزار ادمز انجام می شود.

3- Adams/View
4- flexible
5- Torsion spring
6- connector

1- Runge Kutta method
2- The value of error control tolerance

۳-۵- دیسک دوار

در سیستم‌های انتقال قدرت معمولاً در انتهای هر محور یک پولی یا چرخ‌دنده متصل می‌گردد که جرم و قطر آن چندین برابر محور بوده، به آن فیکس شده است و هیچ گونه حرکتی نسبت به آن ندارد (در این مواقع از ترکیبی از انواع سیستم‌های انتقال قدرت، به منظور انتقال حرکت استفاده شده است). این قسمت به صورت یک دیسک اینرسی مدل‌سازی شده است (در انتهای هر محور، یک دیسک دوار صلب در نظر گرفته شده است).
در ادمز/ویو این دیسک با یک استوانه که نسبت به محور، قطورتر و دارای ممان اینرسی قطبی بالاتری می‌باشد و به وسیله اتصال فیکس^۱ به محور متصل گشته، مدل شده است.

۴-۵- مفصل

بر اساس کاربرد سیستم انتقال قدرت، محورها می‌توانند ناهمراستا باشند. برای اتصال محورهای غیر هم‌محور روش‌های زیادی وجود دارد [۱]. یک راه متداول استفاده از اتصال هوک است. این مفصل جزء مفاصل با انتقال سرعت غیر ثابت^۲ به حساب می‌آید. این مفصل دو قسمت دارد که هر قسمت به یک محور متصل می‌شود. این دو قسمت به وسیله یک قطعه صلیب مانند به نام کراس^۳ به هم متصل می‌گردند. رابطه سرعت ورودی و خروجی در این مفاصل (سرعت محور راننده و پیرو) به \square ، نسبت انتقال سرعت [۲۰] بستگی دارد. همچنین مقدار نسبت انتقال سرعت، به زاویه ناهم‌راستایی محورها و سرعت ورودی به قسمت اول مفصل مربوط است.

$$\Omega_{\Theta} = \eta_i \Omega_1, \eta_i = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varphi} \quad (15)$$

چنان که در معادله (۱۵) مشاهده می‌شود، در صورتی که دو محور هم‌راستا باشند این مفصل به صورت یک اتصال سرعت ثابت عمل می‌کند (سرعت محور راننده و پیرو یکسان می‌باشد). هرچه زاویه اتصال هوک بیشتر باشد سرعت انتقالی به محور پیرو کمتر می‌شود؛ تا جایی که در زاویه ۹۰ درجه قفل شده، توانایی حرکتش را از دست می‌دهد (در عمل معمولاً زاویه ناهم‌راستایی به خاطر محدودیت‌های طراحی کوچکتر از ۴۵ درجه در نظر گرفته می‌شود).

در ادمز/ویو مفصل هوک تعریف شده است و مطابق واقعیت دارای دو قسمت است که هر کدام از قسمت‌ها باید در راستای یکی از محورها تعریف شوند.

۵-۵- چرخ طیار

سرعت ورودی به سیستم محور ثابت در نظر گرفته می‌شود. در سیستم‌های الکتریکی از موتور برق و در سیستم‌های مکانیکی از چرخ طیار برای دوران محور راننده با سرعت ثابت استفاده می‌شود. بدین منظور در این مدل‌سازی در انتهای سمت چپ محور راننده یک چرخ طیار به شکل استوانه‌ای فیکس شده به محور اول تعریف شده است. سیستم انتقال قدرت شبیه‌سازی شده در شکل ۲ نشان داده شده است.

۶- بررسی صحت مدل‌سازی ریاضی و تحلیل

به منظور سنجش اعتبار کار دو روش مورد استفاده قرار گرفته است. ابتدا نتایج مدل‌سازی ریاضی با نتایج شبیه‌سازی در یک نقطه مقایسه شده است. سپس به مقایسه نتایج مدل‌سازی با کارهای گذشته پرداخته شده است. البته

به دلیل اینکه در مراجع مختلف حل مسئله‌ای مشابه موجود نیست مسئله بدون در نظر گرفتن محور پیرو دوم و اتصال هوک دوم حل و با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است.

۶-۱- مقایسه نتایج مدل‌سازی و شبیه‌سازی

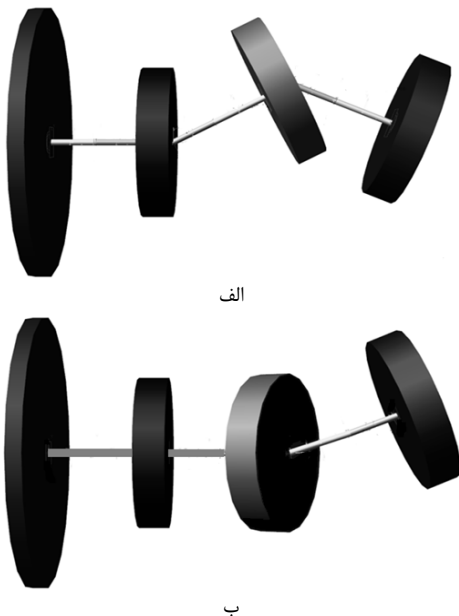
جهت صحت‌سنجی مدل‌سازی ریاضی نتایج آن با نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری در ادمز مقایسه شده اند. برای این امر پارامترهای مسئله بدین صورت فرض شده‌اند: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 10, \mu_1 = \mu_2 = 1, \beta_1 = 0.4, \zeta = 0.001$.

شکل ۳ نشان دهنده نتایج تحلیل مندرمی و مدل ریاضی مسئله می‌باشد. نواحی تیره، نشان‌دهنده نواحی ناپایداری سیستم محور می‌باشد.

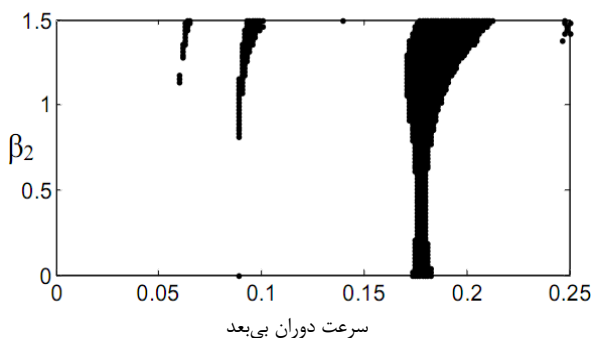
در این گراف به ازای $\beta_2 = 0.5$ در سرعت دورانی بی‌بعد $\Omega = 0.18$ ، سیستم ناپایدار است (چنان که در شکل ۳ قابل مشاهده است، این نقطه در ناحیه تیره رنگ قرار دارد؛ مناطق تیره رنگ نشان دهنده نقاط ناپایدار سیستم می‌باشند) و در $\Omega = 0.2$ ، پایدار گزارش شده است (این نقطه جزء نواحی تیره رنگ نیست).

سپس در مدل ادمز/ویو، پایداری سیستم با شرایط و فرضیات مذکور و با این دو سرعت دورانی بررسی شده است.

با توجه به فرض $\mu_1 = \mu_2 = 1$ در [۱۴، ۱۸] و پارامترهای تعریف شده برای بی بعد سازی در این مراجع رابطه (۱۶) بدست می‌آید:



شکل ۲ سیستم انتقال قدرت سه محوره، شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار ادمز/ویو؛ الف: دید از روبرو، ب: دید از بالا.



شکل ۳ تحلیل پایداری حاصل از مدل‌سازی ریاضی (نواحی تیره، ناپایدارند)

1- fixed
2- Non-Constant velocity joint
3- cross

$$\Omega_0 = 0.18 \text{ rad s}^{-1} \quad (24)$$

طبق (23)، در نقطه پایدار $\Omega = 0.2$ می‌توان رابطه (25) را نوشت.

$$\Omega_0 = 0.2 \text{ rad s}^{-1} \quad (25)$$

با توجه به مقادیر این پارامترها با نرم‌افزار ادمز/ویو به حل مسئله پرداخته شده است. محور عمودی این نمودار زاویه پیچشی انتهای محور سوم نسبت به ابتدای آن و محور افقی زمان می‌باشد. این نمودارها به ترتیب بازای سرعت‌های ورودی $\Omega_0 = 0.18 \text{ rad s}^{-1}$ و $\Omega_0 = 0.18 \text{ rad s}^{-1}$ ارائه شده‌است (شکل 4- الف و 4- ب). این شکل مربوط به یک سیستم واقعی که غیرخطی بوده و در آن تقریبی وجود ندارد می‌باشد.

این دو شکل از لحاظ دامنه فاز (نقطه شروع) و دوره تناوب مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. چنان که ملاحظه می‌شود هر دو نمودار از لحاظ فاز و نیز دوره تناوب شباهت دارند (دوره تناوب هر دو گراف مطابق رابطه (9)، π رادیان می‌باشد).

در شکل 4- الف دامنه نوسانی با گذشت زمان افزایش می‌یابد. این امر در نهایت باعث می‌شود حرکت سیستم محور مختل گردد، یعنی سیستم انتقال قدرت در این شرایط (سرعت دورانی ورودی، زاویه محورها، جنس محورها و نسبت اینرسی دیسک‌ها) ناپایدار است.

در شکل 4- ب مشاهده می‌شود که با گذشت زمان دامنه نوسانات کاهش می‌یابد؛ با توجه به این نمودار گفته می‌شود در این وضعیت سیستم انتقال قدرت پایدار است. این بدان معناست که با وجود نوساناتی که در سیستم وجود دارد سیستم به حرکت دورانی ادامه می‌دهد و مجموعه از حالت پایدار خارج نمی‌شود؛ بلکه با گذشت زمان بعضی نوسانات سیستم حذف می‌شود و یا کاهش می‌یابد (حالت گذرای سیستم از بین می‌رود و تنها حالت دائم باقی می‌ماند).

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{k_3}{k_1} = 1 \Rightarrow k_3 = k_2 = k_1 \quad (16)$$

پس سختی پیچشی سه محور برابر است. با توجه به مقادیر تجربی و عملی مقادیر k به صورت رابطه (17) فرض می‌شود.

$$k_3 = k_2 = k_1 = 100 \text{ kgm}^2\text{s}^{-2} \quad (17)$$

به همین ترتیب با توجه به فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ و $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 10$ به رابطه (18) می‌رسیم.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_1} = 1 \Rightarrow c_3 = c_2 = c_1 \quad (18)$$

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 10 \Rightarrow \frac{J_2}{J_1} = 1, \frac{J_3}{J_1} = 10 \Rightarrow J_3 = 10J_2 = 10J_1 \quad (19)$$

پس استهلاک پیچشی سه محور برابر فرض شده است. همچنین اینرسی دوران دیسک اول و دوم برابر ولی اینرسی دوران دیسک سوم ده برابر دیسک اول در نظر گرفته شده است. با توجه به مقادیر تجربی و کاری فرض می‌شود:

$$J_3 = 1000 \text{ kgm}^2 \quad (20)$$

بر اساس فرض $\zeta = 0.001$ و معادلات (16 و 18) می‌توان نوشت

$$\zeta = \frac{c_1}{\sqrt{k_1 J_1}} \Rightarrow c_1 = 0.1 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} \quad (21)$$

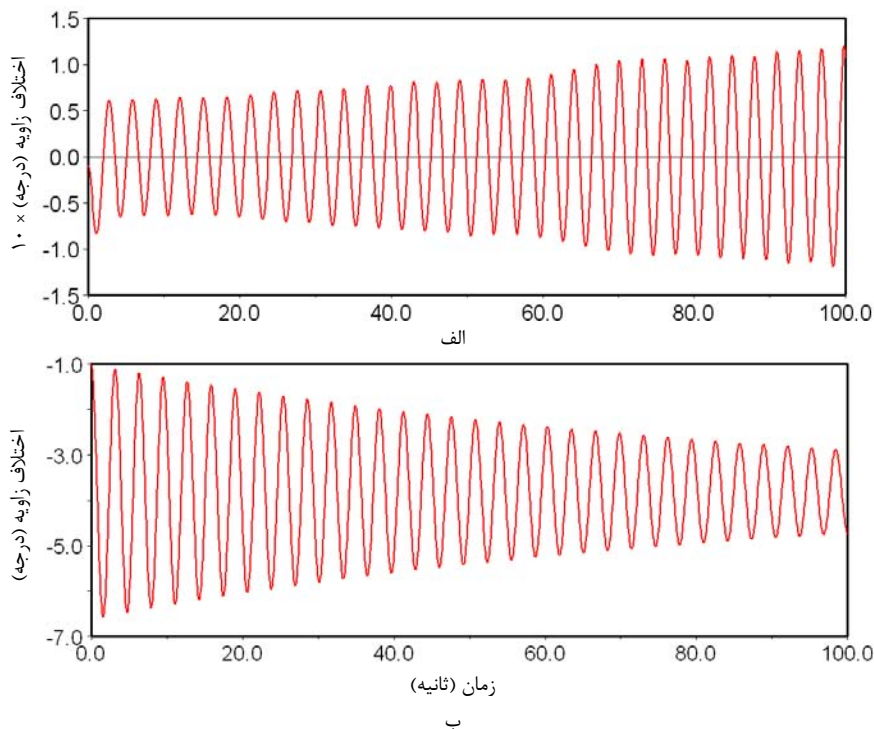
و با توجه به رابطه (18) می‌توان رابطه (22) را نتیجه گرفت

$$c_3 = c_2 = c_1 = 0.1 \quad (22)$$

و طبق (14، 17 و 19) رابطه (23) بدست می‌آید:

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt{k_1/J_1}} \Rightarrow \Omega_0 = \Omega \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} \quad (23)$$

در نقطه ناپایدار اول و با در نظر گرفتن سرعت دورانی بی‌بعد $\Omega = 0.18$ رابطه (24) نتیجه‌گیری می‌شود.



شکل 4 تحلیل پایداری، زاویه پیچشی انتهای محور سوم نسبت به ابتدای این محور بر حسب زمان؛ 4-الف: بازای سرعت ورودی

$$\Omega_0 = 0.2 \text{ rad s}^{-1} \quad \text{4-ب: بازای سرعت ورودی } \Omega_0 = 0.18 \text{ rad s}^{-1}$$

۶-۲- مقایسه نتایج مدل‌سازی با مراجع گذشته

به دلیل اینکه در مراجع مختلف حل مسئله مورد نظر (سیستم سه محوره انعطاف‌پذیر) موجود نبوده، جهت بررسی دقت روش حل بکار گرفته شده، مسئله بدون محور پیرو دوم و در نتیجه اتصال هوک دوم حل و با نتایج ثبت شده در مراجع مقایسه شده است. چنین فرضی به معنای آن است که مدل حالت صفحه‌ای داشته و در دو بعد توانایی حرکت دارد. تحلیل پایداری با در نظر گرفتن این مقادیر (مطابق مرجع [۱۴]) برای پارامترهای بی‌بعد انجام شده است $\zeta = 0.001, \alpha_1 = 1, \gamma_1 = 100, \beta_1 = 0.3$.

با در نظر گرفتن مقادیر فوق، به تحلیل پایداری مدل ارائه شده در این مقاله پرداخته شده است. نتایج به صورتی است که اثر نسبت سختی محورها را در نسبت سرعت‌های مختلف بر پایداری مجموعه نشان می‌دهد و در شکل ۵-الف گزارش شده است. نتایج کارهای بولوت و پارلاز در سال ۲۰۱۱ میلادی [۱۴] در شکل ۵-ب ارائه شده است.

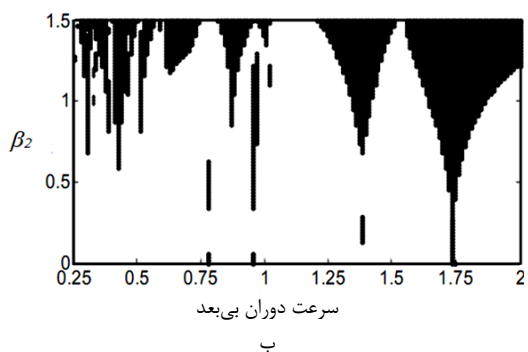
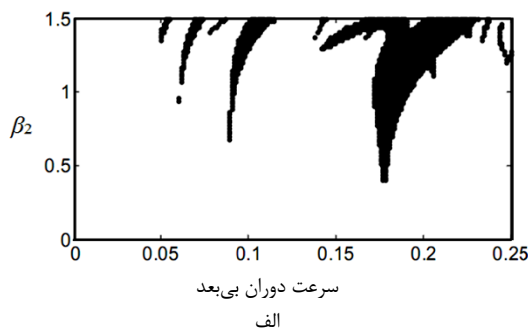
چنان‌که مشاهده می‌شود نتایج تحلیل پایداری از نظر شکل ظاهری و همچنین مکان، شیب و عرض نواحی ناپایداری انطباق خوبی داشته و تفاوت قابل توجهی وجود ندارد.

۷- نتایج

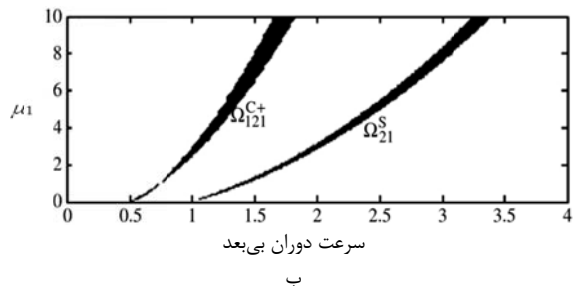
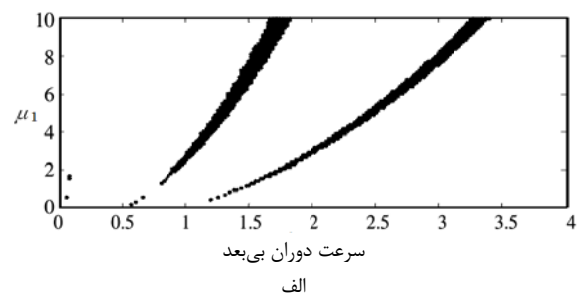
در این بخش تحلیل پایداری دینامیکی سیستم در قالب موارد عددی انجام و نتایج به فرم جداول پایداری بر حسب جفت پارامترهای $\Omega - \beta_2$ ، $\mu_2 - \Omega$ و $\Omega - \alpha_2$ در μ_2 و α_2 های مختلف نشان داده شده است تا تأثیر تغییر این ۴ پارامتر روی پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

در این موارد مشابه مراجع گذشته [۱۴ و ۱۸]، $\zeta = 0.001$ ، $\alpha_1 = 1$ ، $\mu_1 = 1$ ، $\gamma_1 = 10$ ، $\gamma_2 = 10$ rad و $\beta_1 = 0.2$ فرض شده و پایداری سیستم به صورت نقطه به نقطه بررسی شده است (فاصله نقاط ۰/۰۱ و یا کمتر از آن در نظر گرفته شده است تا نتایج با دقت لازم بدست آیند).

در ادامه نمودار اثر میزان ناهمراستایی اتصال هوک دوم (β_2) و نسبت سرعت دوران محور راننده بررسی شده است (شکل ۶). در این نمودارها محور افقی نشان دهنده نسبت سرعت محور راننده است؛ همچنین نواحی تیره نشان‌دهنده نواحی ناپایداری سیستم محور می‌باشد.



شکل ۶ اثر زاویه ناهمراستایی دوم بر ناپایداری در $\mu_2 = 1$ و $\alpha_2 = 1$



شکل ۵ اثر زاویه ناهمراستایی، (الف) تحلیل ارائه شده توسط مدل مقاله، (ب) تحلیل گزارش داده شده در دیگر مراجع [۱۴]

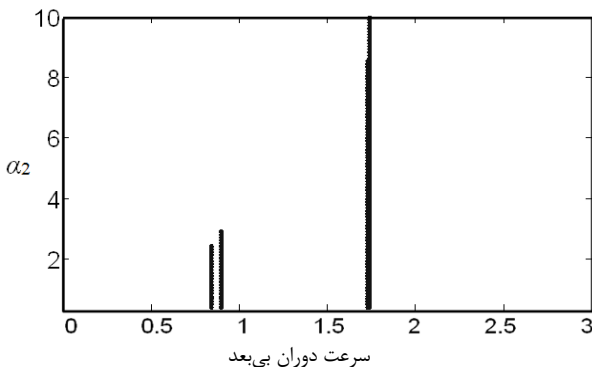
در شکل ۱۰ تحلیل ناپایداری بر اساس نسبت میرایی محورها انجام شده است. این نمودار نشان می‌دهد در سرعت‌های نسبی پایین، با افزایش میرایی محور، نواحی تیره رنگ محو می‌شوند و به عبارتی دامنه نواحی ناپایدار کاهش می‌یابد و بعضی نقاط که قبلاً تیره بوده‌اند (در ناحیه ناپایدار قرار داشتند)، دیگر تیره نیستند (در وضعیت پایدار واقع شده‌اند). همچنین مشاهده می‌شود نواحی ناپایدار این شکل عمودی می‌باشند در صورتی که در شکل ۸ به صورت مایل بودند. بنابراین تغییر نسبت میرایی تأثیری بر فرکانس مودهای ارتعاشی ندارد ولی تغییر نسبت سختی محورها (شکل ۸)، باعث تغییر فرکانس مودهای ارتعاشی سیستم می‌شود. مایل بودن مناطق تیره شکل ۸ بیانگر آن است که با تغییر سختی سرعت‌های دورانی که بازای آن تشدید پارامتریک رخ می‌دهد، تغییر می‌کند.

کاربرد این نمودارها هنگامی است که نیاز به طراحی یک سیستم انتقال قدرت سه محوره باشد. با در نظر گرفتن پارامترهای سیستم و با مراجعه به این گرافها مشخص می‌شود که سیستم مورد طراحی از لحاظ ناپایداری چه وضعیتی دارد و اگر در وضعیت ناپایدار قرار دارد از ساخت آن اجتناب شود. علاوه بر این اگر ضروری باشد سیستمی طراحی گردد و در شرایطی خاص (از نظر سرعت چرخش و زاویه اتصال محورها) در منطقه ناپایداری قرار گرفته باشد، می‌توان با توجه به گرافها به نحوی نسبت میرایی سیستم را افزایش داد که از وضعیت ناپایدار به پایدار منتقل شود. چنان‌که با مشاهده شکل‌های ۶ و ۹ مشخص می‌شود، نواحی تیره رنگ (ناپایدار) در شکل ۹ در اثر افزایش ضریب میرایی محورها، کاهش یافته‌اند. بنابراین می‌توان نقطه‌ای خاص که در شکل ۶ در منطقه ناپایداری قرار دارد را با کاهش دامنه ناپایداری (مساحت نواحی تیره) از حالت ناپایدار خارج کرد.

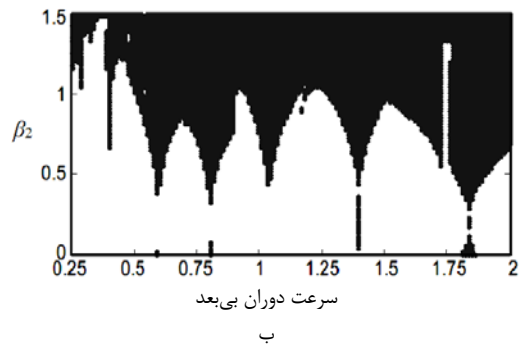
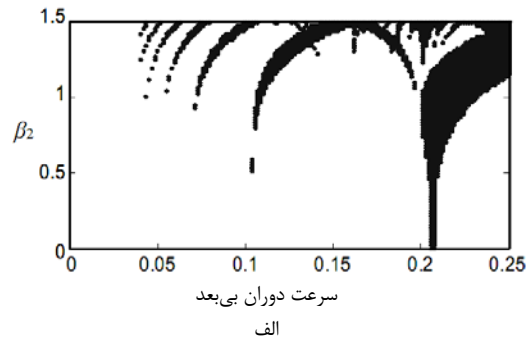
۸- نتیجه گیری

حرکت یک سیستم انتقال قدرت سه محوره به صورت سه بعدی (فضایی) مدل‌سازی ریاضی شده است. پایداری دینامیکی این مجموعه به روش مندرمی ماتریس بررسی و نواحی ناپایداری بر اساس پارامترهای مختلف سیستم نشان داده شده است. همچنین این سیستم به وسیله نرم‌افزار تحلیل دینامیکی ادمز شبیه‌سازی شده است. مسئله مورد مطالعه در این پژوهش بررسی اثرات ناهم‌راستایی محورها بر پایداری سیستم در زوایای مختلف بین محوره‌های پیرو اول و پیرو دوم، همچنین تجزیه و تحلیل تأثیر خواص محورها بر پایداری مجموعه بوده‌است.

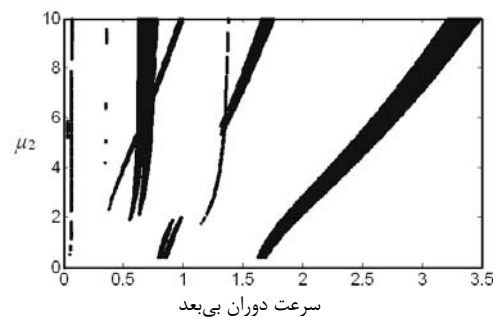
پارامترهای β (زاویه اتصال هوک)، μ (نسبت ضریب سختی محورها)، α (نسبت ضریب میرایی محورها) و Ω (نسبت سرعت محور) اثرات قابل توجهی روی پایداری دینامیکی سیستم دارند.



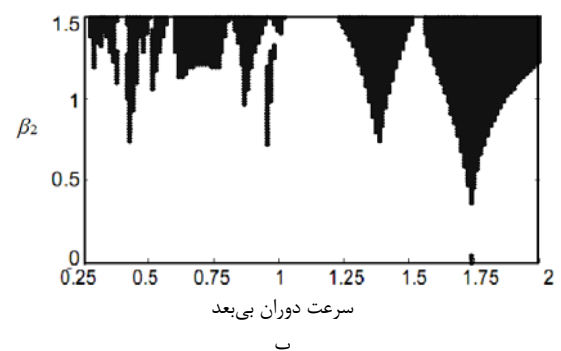
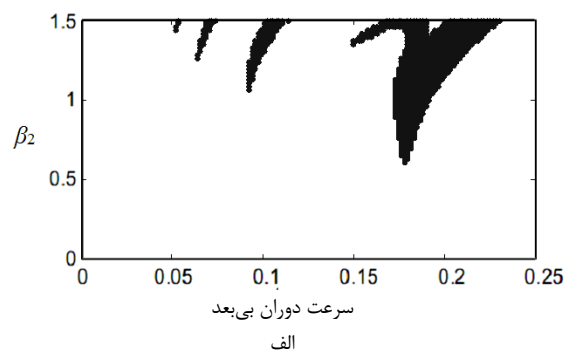
شکل ۱۰ اثر نسبت ضریب میرایی محورها بر ناپایداری



شکل ۷ اثر نسبت ضریب سختی محورها بر ناپایداری در $\mu_2 = 10$ و $\alpha_2 = 1$



شکل ۸ اثر نسبت ضریب سختی محورها بر ناپایداری



شکل ۹ اثر نسبت ضریب میرایی محورها بر ناپایداری در $\mu_2 = 1$ و $\alpha_2 = 10$

۱۰- پیوست: درایه‌های ماتریس میرایی و سختی

در معادلات حرکت، E و P ماتریس‌های ۳×۳ هستند که به ترتیب نشان‌دهنده میرایی و سختی سیستم هستند. با توجه به نسبت‌های ذکر شده در مقاله (پارامترهای بی‌بعد)، درایه‌هایشان این چنین بدست می‌آیند.

$$E_{11} = \frac{2\zeta}{\Omega}$$

$$E_{12} = \frac{-2\eta_{01}(\tau)\alpha_1\zeta}{\Omega}$$

$$E_{13} = 0$$

$$E_{21} = \eta'_{01}(\tau) - \frac{2\eta_{01}(\tau)\zeta}{\Omega}$$

$$E_{22} = 2\left(\frac{\alpha_1\zeta}{\Omega}\right)\left(\eta_{01}^2(\tau) + \gamma_1^{-1}\right)$$

$$E_{23} = -\left(\frac{2\alpha_2\zeta}{\Omega\gamma_1}\right)\eta_{02}(\tau)$$

$$E_{31} = \eta'_{01}(\tau)\eta'_{02}(\tau)$$

$$E_{32} = \eta'_{02}(\tau) - \left(\frac{2\alpha_1\zeta}{\Omega\gamma_1}\right)\eta_{02}(\tau)$$

$$E_{33} = 2\left(\frac{\alpha_2\zeta}{\Omega}\right)\left(\frac{\eta_{02}^2(\tau)}{\gamma_1} + 1\right)$$

$$P_{11} = \Omega^{-2}$$

$$P_{12} = -\eta_{01}(\tau) - \mu_1\Omega^{-2}$$

$$P_{13} = 0$$

$$P_{21} = -\eta_{01}(\tau)\Omega^{-2}$$

$$P_{22} = \mu_1\Omega^{-2}\left(\eta_{01}^2(\tau) + \gamma_1^{-1}\right)$$

$$P_{23} = -\frac{\mu_2}{\Omega^2\gamma_1}\eta_{02}(\tau)$$

$$P_{31} = \eta''_{01}(\tau)\eta'_{02}(\tau)$$

$$P_{32} = \frac{\mu_1}{\Omega^2\gamma_1}\eta''_{02}(\tau)$$

$$P_{33} = \frac{\mu_2}{\Omega^2}\left(\frac{\eta_{02}^2(\tau)}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)$$

۱۱- مراجع

- [1] W.E. Forsthofer, *Forsthofer's Best Practice Handbook for Rotating Machinery*, pp. 247-258, New York: Butterworth-Heinemann, 2011.
- [2] G. Lechner, H. Naunheimer, J. Ryborz, *Automotive Transmissions: Fundamentals, Selection, Design and Application*, Second ed, pp. 10-24, New York: Springer, 2010.
- [3] S.I. Chang, Torsional Instabilities And Non-linear Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 229, No. 4, pp. 993 - 1002, 2000.
- [4] S.F. Asokanathan, M.C. Hwang, Torsional Instabilities in a System Incorporating a Hooke's Joint, *Trans. ASME*, Vol. 118, pp. 368-374, 1996.
- [5] S.F. Asokanathan, X.H. Wang, Characterization of Torsional Instabilities in a Hooke's Joint Driven System via Maximal Lyapunov Exponents, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 194, No. 1, pp. 83-91, 1996.
- [6] S.F. Asokanathan, P.A. Meehan, Non-linear Vibration of Torsional System Driven by a Hooke's Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 233, No. 2, pp. 297 - 310, 2000.
- [7] H.A. DeSmidt, K.W. Wang, E.C. Smith, Coupled Torsion-Lateral Stability of a Shaft-Disk System Drive Through a Universal Joint, *J. Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 3, pp. 261-273, 2002.
- [8] A.J. Mazzei, A. Argento, R. A. Scott, Dynamic Stability of a rotating Shaft Driven Through a Universal Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 222, No. 19, pp. 19-47, 1999.

با افزایش زاویه ناهم‌راستایی محور دوم و سوم (زاویه اتصال هوک دوم) نواحی ناپایداری سیستم محور در محدوده عملی که کاربرد بیشتری در طراحی‌ها دارد افزایش می‌یابد.

با افزایش نسبت ضریب سختی محورها، نواحی ناپایداری افزایش می‌یابد؛ یعنی هرچه ضریب سختی محور سوم بیشتر از محور اول باشد، محدوده‌های ناپایداری سیستم بیشتر می‌شود. این امر با افزایش نسبت سرعت بیشتر قابل توجه می‌شود. همچنین تغییر نسبت ضریب سختی محورها باعث تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم و در نتیجه جابجایی مکان‌های وقوع تشدید پارامتریک می‌شود.

با افزایش نسبت ضریب میرایی محورها نواحی ناپایداری کاهش می‌یابد؛ یعنی هرچه ضریب میرایی محور سوم بیشتر از محور اول باشد محدوده‌های ناپایداری سیستم کمتر می‌شود. این امر در سرعت‌های نسبی پایین مشهودتر است. بنابراین با تغییر نسبت ضریب میرایی محورها می‌توان دامنه ناپایداری سیستم را کاهش داد و باعث خروج بعضی نواحی از وضعیت ناپایدار شد.

افزایش سرعت محور عموماً موجب افزایش ناپایداری می‌شود ولی بسته به مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم، می‌تواند موجب ناپایداری در بعضی سرعت‌های پایین شود؛ سرعت‌هایی که بازای آن‌ها حرکت سیستم نزدیک به ضرایب یا ترکیبات فرکانس‌های طبیعی آن انجام می‌شود.

۹- فهرست علائم

J	اینرسی دورانی دیسک (kgm ²)
k	سختی پیچشی محور (kgm ² s ⁻²)
M	گشتاور ورودی به هر اتصال هوک (Nm)
M*	گشتاور خروجی از هر اتصال هوک (Nm)
E	ماتریس میرایی
P	ماتریس سختی

علائم یونانی

α_1	نسبت استهلاک ویسکوز پیچشی محور دوم به اول
α_2	نسبت استهلاک ویسکوز پیچشی محور سوم به اول
β	زاویه اتصال هوک (rad)
γ_1	نسبت اینرسی دورانی دیسک محور دوم به اول
γ_2	نسبت اینرسی دورانی دیسک محور سوم به اول
Ω_1	سرعت ورودی به اتصال هوک (rads ⁻¹)
Ω_θ	سرعت خروجی از اتصال هوک (rads ⁻¹)
Ω_0	سرعت ورودی به محور اول (rads ⁻¹)
Ω	سرعت دورانی بی‌بعد
τ	زاویه چرخ طیار (rad)
ζ	پارامتر بی‌بعد
φ	مقدار دوران انتهای محور (rad)
θ	زاویه پیچشی محور (rad)
μ_1	نسبت سختی پیچشی محور دوم به محور اول
μ_2	نسبت سختی پیچشی محور سوم به محور اول
η	نسبت انتقال سرعت در اتصال هوک
c	استهلاک ویسکوز پیچشی هر محور (kgm ² s ⁻¹)

زیر نویس‌ها

I	ورودی
⊙	خروجی

- [16] H. A. DeSmidt, K. W. Wang, E. C. Smith, Stability of a Segmented Supercritical Driveline with Non-Constant Velocity Couplings Subjected to Misalignment and Torque, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 277, pp. 895-918, 2004.
- [17] P.P. Sheu, W.H. Chieng, A.C. Lee, "Modeling and Analysis of the Intermediate Shaft Between Two Universal Joints", *J. Vibrat. Acoustics*, Vol. 118, pp. 88-99, 2008.
- [18] M. Soltan Rezaee, M.R. ghazavi, A.A. Jafaari, A. Najafi, Stability of a System Consisting of Three-Axis Connected through Hooke's Joints, *Moades Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 69-79, 2013. (In Persian)
- [19] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear & Nonlinear Structural Mechanics*, pp. 267-283, New York: Wiley, 2004.
- [20] H.C. Seher-Thoss, F. Schmelz, E. Aucktor, *Universal Joints and Driveshafts: Analysis, Design, Applications*, Second ed., pp. 5-9, New York: Springer-Verlag, 2006.
- [21] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, pp. 263-292, New York: McGraw-Hill, 1970.
- [22] M. Rostami, N. Jamshidi, *Dynamic and Vibration Training Solving with ADAMS*, pp. 5-11, Tehran: Aabed, 2009. (In Persian)
- [9] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Principal Parametric Resonance Zones of a Rotating Rigid Shaft Driven Through a Universal Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 244, No. 3, pp. 555-562, 2001.
- [10] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Effects of internal viscous damping on the stability of a rotating shaft driven through a universal joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 265, No. 1, pp. 863-885, 2003.
- [11] M. Saigo, Transverse Vibration Of A Rotor System Driven by a Cardan Joint, *J. Sound Vibrat.*, Vol. 95, No. 1, pp. 9-18, 1984.
- [12] A.J. Mazzei, R.A. Scott, Accelerating through Resonance of a Universal Joint Driveline, *Proceedings of the XXV International Modal Analysis Conference, Orlando*, paper 29, 2007.
- [13] A. Mazzei, Passage through Resonance in a Universal Joint Driveline System, *J. Vibrat. Control*, Vol. 17, No. 5, pp. 667-677, 2011.
- [14] G. Bulut, Z. Parlar, Dynamic Stability of a Shaft System Connected Through a Hooke's Joint, *J. Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, pp. 1689-1695, 2011.
- [15] C. Brutti, E. Pennestr, M.E. Biancolini, On the Dynamics of the Transmission with a Double Cardan Joint, *Tenth world congress on the theory of machine and mechanisms, Oulu, Finland*, June 20-24, 1999.