



Vibration Analysis of Cantilever Beam With Piezoelectric Layer under Aero-Elastic Force and Moving and Rotating Base Excitation

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Abbasgholipour M.*¹ PhD

How to cite this article

Abbasgholipour M. Vibration Analysis of Cantilever Beam With Piezoelectric Layer under Aero-Elastic Force and Moving and Rotating Base Excitation. Modares Mechanical Engineering, 2020;20(4):889-900.

ABSTRACT

The theory of mechanical-vibration energy harvesting from the environment has been studied by researchers in the recent decade. In the present research, the vibration of the viscoelastic cantilever beam was analyzed with two piezoelectric layers including series and parallel connections. The beam was exposed under moving and rotating base excitation and aero-elastic force. The beam viscoelastic material was described using the generalized Kelvin-Voigt mechanical model. The aero-elastic force based on piston theory is considered while the base excitation is selected harmonic and randomly. The stress field coupling among the beam and piezoelectric as well as Gauss equation were utilized to extract the vibration and electrical equations respectively. The vibratory equation was converted into a set of ordinary differential equations using the Galerkin approach. The obtained equations with electrical equation were solved by the Runge-Kutta method numerically. Then, by studying the response of the governing equations, the effect of system parameters on the vibrational behavior of the beam and the output voltage was investigated. The results showed that the system and response frequencies are not affected via circuit connection types (series or parallel). The natural vibratory frequency is increased with enhancing the beam stiffness. The structural damping has a significant effect on the output voltage value. Also, the output voltage is increased by enhancing the environmental pressure.

Keywords Cantilever Beam; Series and Parallel Piezoelectric; Energy Harvesting; Aero-Elastic Force; Randomly and Harmonic Base Excitation

CITATION LINKS

[1] Electromechanical modeling of piezoelectric energy ... [2] A review of power harvesting from vibration using piezoelectric ... [3] Investigation of the exponentially tapering effect on the behavior of piezoelectric energy harvester including geometric, inertial, material and ... [4] The effect of strain nodes on the energy harvesting of the cantilever piezoelectric beam with the ... [5] Experimental study of galloping-based energy harvesting system using ... [6] Piezoelectric energy harvesting from bridge vibrations under moving ... [7] Analysis of a micro-electric generator for ... [8] On the efficiency of electric power generation with piezoelectric ... [9] Design and fabrication of a new vibration-based electromechanical power ... [10] Energy reclamation from a vibrating piezoceramic composite ... [11] Study on the tip-deflection of a piezoelectric bimorph cantilever in the ... [12] On the effectiveness of vibration-based energy ... [13] Improving power output for vibration-based energy ... [14] A piezoelectric vibration based generator for wireless ... [15] On energy harvesting from ambient ... [16] Energy harvesting vibration sources for microsystems ... [17] Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for ... [18] An experimentally validated bimorph cantilever model for ... [19] Analysis of piezoelectric effects on various loading conditions for energy ... [20] Analysis of energy harvesters for highway ... [21] Investigation of folded spring structures for vibration-based ... [22] Energy Harvesting Investigation from Unimorph Trapezoidal ... [23] Efficiency of piezoelectric mechanical vibration energy ... [24] Piezoelectric energy ... [25] Recent advances in energy harvesting technologies for structural ... [26] A 15-mV inductor-less start-up converter using a piezoelectric ... [27] High-performance piezoelectric energy harvesting of vertically aligned ... [28] Ultra-low resonant piezoelectric MEMS energy harvester with high power ... [29] A self-powered piezoelectric energy harvesting interface circuit with ... [30] Analytical methods in ... [31] Vibration analysis of a cantilever beam with piezoelectric layers under aeroelastic force ... [32] Vibration of continuous ...

¹Biosystem Mechanical Engineering Department, Bonab Branch, Islamic Azad University, Bonab, Iran

*Correspondence

Address: Biosystem Mechanical Engineering Department, Bonab Branch, Islamic Azad University, Bonab, Iran

Phone: -

Fax: -

abbasgholipour@bonabiau.ac.ir

Article History

Received: November 16, 2018

Accepted: September 03, 2019

ePublished: April 17, 2020

تحلیل ارتعاشاتی تیر یک سرگیردار با لایه پیزوالکتریک تحت نیروهای آیروالاستیک و تحریک پایه جابجایی و دورانی

مهدی عباسقلی‌پور* PhD

گروه مهندسی مکانیک بیوسیستم، واحد بناب، دانشگاه آزاد اسلامی، بناب، ایران

چکیده

نظریه برداشت انرژی مکانیکی- ارتعاشی محیط در دهه اخیر مورد بررسی پژوهشگران قرار گرفته است. در تحقیق حاضر به تحلیل ارتعاشات یک تیر یک‌سر گیردار ویسکوالاستیک با دولایه پیزوالکتریک با اتصال سری و موازی تحت نیروی آیروالاستیک و تحریک پایه به صورت جابجایی و دورانی پرداخته شد. ماده ویسکوالاستیک تیر با استفاده از مدل مکانیکی جامع کلون-وویت توصیف شد. نیروی آیروالاستیک براساس تئوری پیستون و تحریک پایه به صورت تصادفی و هارمونیک در نظر گرفته شدند. برای استخراج معادله‌های ارتعاشاتی و الکتریکی تیر به ترتیب از کوپل بین میدان تنش تیر و پیزوالکتریک و معادلات گاوس استفاده شد. معادله ارتعاشی به روش گالرکین، به صورت گسسته نوشته شد و همراه با معادله الکتریکی به کمک روش عددی رانگ-کوتا حل شدند. سپس با بررسی پاسخ معادلات حاکم به مطالعه تاثیر پارامترهای سیستم بر رفتار ارتعاشی تیر و ولتاژ خروجی پرداخته شد. نتایج نشان داد که نوع اتصال مدار (سری یا موازی) تاثیری بر فرکانس‌های سیستم و پاسخ فرکانسی ندارد. با افزایش سفتی، فرکانس طبیعی ارتعاشی تیر افزایش می‌یابد. میرایی ساختاری بر مقدار ولتاژ خروجی تاثیر بسزایی دارد. همچنین با افزایش فشار در محیط مقدار ولتاژ خروجی کاهش می‌یابد.

کلیدواژه‌ها: تیر یک‌سر گیردار، پیزوالکتریک سری و موازی، برداشت انرژی، نیروی آیروالاستیک، تحریک پایه تصادفی و هارمونیک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۱۲

*نویسنده مسئول: abbasgholipour@bonabiau.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تامین انرژی مدارهای الکترونیکی نظیر حسگرها و سیستم‌های بی‌سیم، مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. در حالت کلی، مشکلات مربوط به انرژی را می‌توان به دو دسته تولید و ذخیره انرژی خلاصه کرد [1, 2]. در مورد مشکل دوم، استفاده از باتری نیز راهگشا نیست؛ زیرا باتری‌ها معمولاً حجیم و سنگین هستند، انرژی محدودی دارند و مواد شیمیایی دارند که می‌توانند به محیط زیست آسیب برسانند که تولید انرژی تجدیدپذیر از محیط می‌تواند راهکار مناسبی باشد. در این میان استفاده از انرژی ارتعاشات مکانیکی به دلیل در دسترس بودن بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. از میان روش‌های مختلف برداشت انرژی ارتعاشی از محیط، استفاده از سیستم‌هایی که در آنها لایه‌های پیزو تعبیه شده و در محیط مرتعش قرار دارند می‌تواند چاره کار باشد [3-6]. پژوهش‌های متفاوتی در زمینه

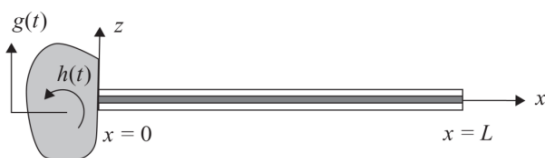
برداشت انرژی انجام یافته است که در ادامه به تعدادی از آنها اشاره می‌شود.

ویلیم و یاتیس [7]، تولید انرژی در سیستم‌های میکرو که دور از دسترس بودند را با استفاده از مبدل‌های الکترومغناطیسی بررسی کردند. در این مطالعه جرمی که با ارتعاش خود انرژی الکتریکی را به یک سیم‌پیچ القا می‌کند، در نظر گرفته شد. در واقع مکانیزم بر اساس مدل یک درجه آزادی تحت تحریک ارتعاشی پایه به صورت هارمونیک بود. گولدفارب و جونز [8]، تاثیر نحوه قرارگیری پیزوالکتریک در بازده انرژی الکتریکی خروجی را مورد بحث قرار دادند. نتایج نشان داد که در تولید انرژی الکتریکی، بخش عظیمی از انرژی در خود پیزوالکتریک جذب می‌شود و به خود منبع تحریک بازگردانده می‌شود. این مشکل باعث کاهش بازده سیستم است و زمانی رخ می‌دهد که ماده پیزوالکتریک به موازات ذخیره‌کننده قرار گیرد، لذا نحوه قرارگیری ذخیره‌کننده حائز اهمیت است. //همی و همکاران [9]، مبدل الکترومغناطیسی را برای تولید انرژی الکتریکی طراحی و ارائه کردند. کاسیپ و همکاران [10]، ارتعاشات تیر کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق روابط تحلیلی بر اساس مدل یک درجه آزادی مدل شد و رفتار دینامیکی و ارتعاشی سیستم در میدان‌های متفاوت انرژی بررسی شد. هوانگ و همکاران [11]، رفتار جابجایی دینامیکی تیر یک‌سر گیردار با لایه‌های پیزوالکتریک را به صورت عددی مطالعه نمودند. روندی و همکاران [12-14]، در مطالعات خود در مورد مبدل‌های تولیدکننده انرژی برای لوازم الکتریکی بی‌سیم، بازده مبدل‌ها و بهبود کیفیت اینگونه سیستم‌ها تحقیقاتی انجام دادند. آنها از مدلی مبتنی بر مدار الکتریکی معادل استفاده کردند که نتایج بهتری نسبت به مدل‌های دیگر داشت. استفان [15] در مطالعه خود به بررسی ماکزیمم توان تولیدی و تاثیر میرایی مکانیکی در همان مدل یک درجه آزادی پرداخت. بیبی و همکاران [16] در مطالعه خود به طراحی و ساخت یک مبدل الکترومکانیکی بر پایه انرژی اولیه ارتعاشی پرداختند. آنها برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی از یک کوپل مغناطیسی استفاده نمودند و تاثیر ابعاد سیستم را بر تولید انرژی و ارتعاشات سیستم بررسی کردند. آجیتساری و همکاران [17]، تیر یک‌سر گیردار با دو لایه پیزوالکتریک را با فرض تیر اویلر-برنولی و همچنین تیر تیموشنکو بررسی کرده و حل تحلیلی ارائه نمودند. /رتورک و /ینمن [18]، برای تیر یک‌سر گیردار مستطیلی دو لایه حل تحلیلی ارائه کردند. آنها در مقالات خود به بررسی روش گسسته نیز پرداخته و ثابت کردند که این روش برای ارتعاشات طولی و عرضی تیر نتایج غیردقیقی ارائه می‌کند، در نتیجه ضرایب تصحیحی برای این مدل ارائه نمودند. کیم و همکاران [19]، به بررسی تجربی امکان برداشت انرژی از ارتعاش و تبدیل آن به انرژی الکتریکی با استفاده از مواد پیزوالکتریک پرداختند. آنها با اعمال بار با دامنه و فرکانس‌های مختلف روی تیر، مدل عبوری

معادلات الکترومکانیکی تیر یک سرگیردار با لایه پیزوالکتریک سری و موازی با در نظر گرفتن ارتعاش عرضی، تحریک پایه جابجایی و دورانی و اثر محیط به صورت نیروهای آیروالاستیک بر اساس تئوری پیستون استخراج می شوند و سپس به تحلیل و گسسته سازی آنها پرداخته خواهد شد و با حل عددی آنها به مطالعه تاثیر پارامترهای سیستم و محیط بر رفتار ارتعاشی تیر و ولتاژ خروجی پرداخته می شود.

۲- مواد و روش ها

تیر یک سرگیردار با لایه پیزوالکتریک مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در این شکل $g(t)$ و $h(t)$ ، تحریک جابجایی عرضی و جابجایی دورانی در بخش پایه تیر است که می تواند ناشی از حرکت میزبانی باشد که تیر به آن متصل است.



شکل ۱ شماتیک تیر با دو لایه پیزوالکتریک در روی و زیر آن تحت تحریک پایه دورانی و عرضی [24]

معادله حاکم بر ارتعاش عرضی تیر اویلر- برنولی که ابعاد مقطع تیر در برابر طول آن قابل صرف نظر کردن است، در عدم حضور تحریک پایه به صورت رابطه (۱) است [24].

$$YI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, t) \quad (1)$$

در این رابطه، Y مدول یانگ تیر، I ممان اینرسی سطح، ρA جرم واحد طول است. اثر لایه های پیزوالکتریک در گشتاور خمشی تیر ظاهر می شود و $P(x, t)$ نیروی خارجی بر واحد طول تیر است. اگر نیروهای خارجی برابر با نیروی آیروالاستیک در نظر گرفته شود، اختلاف فشار روی تیر و زیر تیر باعث ایجاد این نیرو خواهد شد. لذا معادله (۱) همراه با حضور میرایی به صورت معادله (۲) نوشته می شود.

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + b \Delta P_a(x, t) = 0 \quad (2)$$

که در آن، $\Delta P_a(x, t)$ اختلاف فشار آیرودینامیکی اعمالی به تیر، b عرض تیر و c_s ضریب میرایی سازه ای است. در واقع عبارت $b \Delta P_a(x, t)$ نیروی واحد طول است که به علت در نظر گرفتن اثر محیط به صورت نیروی آیرودینامیکی بر سیستم وارد می شود.

به منظور استخراج گشتاور خمشی در تیر، ابتدا لازم است تا حرکت هر نقطه از تیر به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته شود.

$$w(x, t) = w_{rel}(x, t) + w_b(x, t) \quad (3)$$

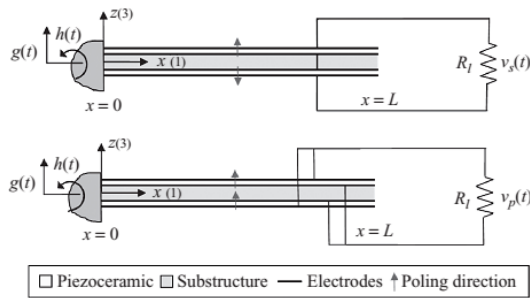
که در آن $w_{rel}(x, t)$ حرکت تیر نسبت به پایه است و $w_b(x, t)$ حرکت پایه است که به صورت رابطه (۴) در نظر گرفته می شود.

$$w_b(x, t) = \delta_1(x)g(t) + \delta_2(x)h(t) \quad (4)$$

خودرو با وزن و سرعت های مختلف را شبیه سازی کرده و مقدار ولتاژ خروجی را اندازه گیری کردند. علی و همکاران [20]، با در نظر گرفتن یک تیر و با اعمال نیروی متمرکز روی آن، به امکان برداشت انرژی از ارتعاشات پرداختند. آنها همچنین به تعیین مکان بهینه برای برداشت حداکثری انرژی از ارتعاشات پرداختند. لوئک و همکاران [21]، ارتعاشات تیر دارای لایه پیزوالکتریک را بررسی کردند. آنها از یک المان فنی برای مدل نمودن سیستم استفاده نمودند. اصغر زاده و همکاران [22]، به مطالعه برداشت انرژی از ارتعاشات تیر دوزنقه ای با یک لایه پیزوالکتریک با استفاده از روش پارامترهای توزیع شده پرداختند. در مطالعه آنها، معادلات حرکت سیستم به صورت تحلیلی به دست آمده و سپس با استفاده از روش مودهای فرضی، فرکانس های طبیعی سیستم محاسبه شده و نمودارهای مربوط به ولتاژ، جریان و توان ارایه شده اند. کیم و همکاران [23]، بازده مکانیزم های برداشت انرژی بر پایه ارتعاشات را بررسی کردند. اورتورک و اینمن [24]، در بخشی از کتاب خود به بررسی برداشت انرژی از باد توسط تیر پرداختند و با اعمال نیروی آیروالاستیک، سیستم پایداری دینامیکی آن را بررسی نمودند و اهمیت در نظر گرفتن رفتار غیرخطی سیستم را نشان دادند. آنها از روش المان محدود گردابه- شبکه و دوگانه- شبکه استفاده نمودند. دیویدسون و مو [25]، گزارش کاملی از پیشرفت های اخیر در سال های ۲۰۰۸ تا ۲۰۱۴ را در زمینه برداشت انرژی برای تامین انرژی سیستم های پایش سلامت ارایه نمودند.

در سال های اخیر، تحقیقات زیادی در زمینه بررسی کاربردهای برداشت انرژی از ارتعاشات و تبدیل آن به انرژی الکتریکی با استفاده از مبدل پیزوالکتریک انجام گرفته است که می توان به تحقیقات مارتین و همکاران [26]، جین و همکاران [27]، سانگ و همکاران [28] و لیو و همکاران [29] اشاره کرد.

نیروی آیروالاستیک، ناشی از اثر متقابل تداخل سازه با سیال است و یکی از پدیده های مهم در طراحی و تحلیل سازه ها به شمار می رود. با مروری بر تحقیقات گذشته، مشخص می شود که مطالعات اندکی روی ارتعاشات تیر با لایه پیزوالکتریک تحت تحریک پایه و نیروی آیروالاستیک صورت گرفته است. در اکثر تحقیقات گذشته، بیشتر مدل ها بر اساس مدل اجزای محدود هستند؛ در صورتی که در این مطالعه، مدل ریاضی ارتعاشی سیستم بررسی می شود و بنابراین لازم است که از یک مدل ریاضی سازگار با روابط ارتعاشی برای مدل سازی سیستم استفاده شود. همچنین مطالعات اندکی روی ارتعاشات تیر با لایه پیزوالکتریک تحت تحریک پایه و نیروی آیروالاستیک صورت گرفته است؛ در حالی که در تحقیق حاضر، برای اولین بار اثرات لایه های پیزوالکتریک و انواع تحریک ها (جابجایی و دورانی) و حالت تحریک ها (تصادفی و هارمونیک) بررسی شده است. به طوری که از تیر یک سرگیردار با لایه پیزوالکتریک سری و موازی و با تحریک پایه جابجایی و دورانی به صورت هارمونیک و تصادفی برای برداشت انرژی ارتعاشی استفاده شده است. بدین منظور ابتدا



شکل ۳) نحوه قرارگیری لایه‌ها در مدار به صورت سری (شکل بالا) و موازی (شکل پایین) [24]

با استفاده از روابط (۶) تا (۱۰) رابطه گشتاور تیر به صورت کوپل با لایه پیزوالکتریک به صورت رابطه (۱۱) به دست می‌آید [24].

$$M^s(x, t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^2} - \vartheta_s v_s(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (11)$$

که در آن، H تابع پله واحد بوده و ضریب کوپلینگ الکتریکی برای حالت اندازه‌گیری با مدار سری به صورت رابطه (۱۲) است [24].

$$\vartheta_s = \frac{\bar{e}_{31}b}{2h_p} \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] \quad (12)$$

اتصال موازی در مدار: مقدار پارامتر $\bar{e}_{31}$ برای حالت موازی در لایه بالا و پایین به ترتیب دارای مقادیر (۱۳) و (۱۴) است.

$$E_3(t) = -v_p(t)/h_p \quad (13)$$

$$E_3(t) = v_p(t)/h_p \quad (14)$$

در این نوع اتصال، رابطه گشتاور تیر به صورت کوپل با لایه پیزوالکتریک به صورت رابطه (۱۵) به دست می‌آید [24].

$$M^p(x, t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^2} - \vartheta_p v_p(t) [H(x) - H(x - L)] \quad (15)$$

که در آن ضریب کوپلینگ الکتریکی برای حالت اندازه‌گیری با مدار موازی به صورت رابطه (۱۶) است. این مقدار برابر با دو برابر مقدار کوپلینگ سری است.

$$\vartheta_p = 2\vartheta_s = \frac{\bar{e}_{31}b}{h_p} \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] \quad (16)$$

برای هر دو حالت از اتصال، مقدار سفتی خمشی معادل به صورت رابطه (۱۷) است [24].

$$YI = \frac{2b}{3} \left\{ Y_s \left(\frac{h_s}{2} \right)^3 + \bar{e}_{11}^E \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^3 \right] \right\} \quad (17)$$

پس از استخراج مقدار گشتاور و سفتی خمشی برای دو اتصال متفاوت، می‌توان معادلات حاکم را استخراج نمود. در حالت کلی معادلات حاکم بر سیستم شامل معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی و معادله مکانیکی با کوپلینگ الکتریکی است.

۲-۲- استخراج معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی

به منظور استخراج معادله الکتریکی حاکم بر سیستم با اتصالات موازی و سری، ابتدا باید رفتار الکترواستاتیکی یک لایه بررسی شود. با توجه به اینکه تنها کرنش قابل ملاحظه در تیر به صورت محوری است، بنابراین رابطه جابجایی الکتریکی به صورت رابطه (۱۸) به دست می‌آید [24].

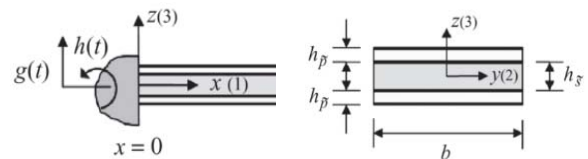
در رابطه فوق، توابع $\delta_1(x)$ و $\delta_2(x)$ به ترتیب برابر با توابع تاثیر جابجایی و دوران در پایه هستند. برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی یک سر گیردار این توابع به صورت روابط (۵) است [24].

$$\delta_1(x) = 1, \quad \delta_2(x) = x \quad (5)$$

گشتاور خمشی داخلی ناشی از تنش در تیر به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود.

$$M(x, t) = -b \left(\int_{-h_p/2}^{-h_s/2} T_1^p dz + \int_{-h_s/2}^{h_s/2} T_1^s dz + \int_{h_s/2}^{h_p/2} T_1^p dz \right) \quad (6)$$

که در آن b برابر عرض تیر، h_s برابر ضخامت تیر، h_p برابر ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک، T_1^s تنش محوری در تیر و T_1^p تنش محوری در پیزوالکتریک است (شکل ۲).



شکل ۲) مختصات استفاده شده و نام گذاری مربوط به ضخامت لایه‌ها [24]

از طرفی، تنش محوری در تیر و پیزوالکتریک با فرض همگن بودن مواد از رابطه‌های (۷) و (۸) به دست می‌آید.

$$T_1^s = YS_1^s \quad (7)$$

$$T_1^p = \bar{e}_{11}^E S_1^p - \bar{e}_{31} E_3 \quad (8)$$

که در آن $\bar{e}_{31}$ ثابت پیزوالکتریک، $\bar{e}_{11}^E$ مدول الاستیک پیزوالکتریک (بالانویس E به معنی میدان الکتریکی ثابت) و E_3 میدان الکتریکی را نشان می‌دهد. با فرض عدم جدایش لایه‌ها، کرنش طولی با استفاده از انحنای جابجاشده تیر نسبت به پایه سنجیده می‌شود و به صورت رابطه (۹) است.

$$S_1 = -z \frac{\partial^2 w_{rel}}{\partial x^2} \quad (9)$$

برای محاسبه گشتاور ایجادشده، طبق رابطه‌های (۷) و (۸)، مقدار تنش در لایه و تیر باید محاسبه شود. به این منظور، مقدار جابجایی الکتریکی باید محاسبه شود. این مقدار به نحوه گرفتن ولتاژ از سیستم بستگی دارد.

مطابق تحقیقات گذشته قرارگیری دو لایه پیزوالکتریک در مدار الکتریکی به صورت موازی و سری ممکن است. این نوع قرارگیری در مدار در شکل ۳ نشان داده شده است. برای حالت سری ولتاژ خروجی برابر با $v_s(t)$ است و مقدار ولتاژ هر لایه برابر با $v_s(t)/2$ خواهد بود. برای حالت موازی نیز ولتاژ خروجی برابر با $v_p(t)$ است و مقدار ولتاژ هر پایه نیز برابر با $v_p(t)$ است. بر این اساس میدان جابجایی الکتریکی و متعاقباً، گشتاور در تیر برای دو حالت سری و موازی به تفکیک استخراج شده است [24].

اتصال سری در مدار: مقدار پارامتر $\bar{e}_{31}$ برای این حالت در لایه بالا و پایین علامت مخالف هم دارد و در نتیجه مقدار میدان الکتریکی در هر دو لایه طبق رابطه (۱۰) است.

$$E_3(t) = -v_s(t)/2h_p \quad (10)$$

عبارت اول $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ در رابطه (۲۵)، ناشی از حرکت نسبی تیر و عبارت دوم $\left(U_\infty \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ، ناشی از تصویر سرعت محیط در راستای عمود بر تیر است. با توجه به اینکه فشار اتمسفر در اطراف تیر یکنواخت است، اختلاف فشاری که سبب اعمال نیرو بر تیر می‌شود در عدم حضور فشار استاتیکی به صورت رابطه‌های (۲۶) و (۲۷) در نظر گرفته شده است.

$$\Delta P_a(x, t) = P^d(x, t) - P_\infty \quad (26)$$

$$\Delta P_a(x, t) = P_\infty \gamma \frac{V_z}{C_\infty} \quad (27)$$

با جایگذاری رابطه (۲۵) در عبارت فوق، داریم:

$$\Delta P_a(x, t) = \frac{P_\infty \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)، در واقع از عبارات توان بالاتر از ۲ جایجایی تیر که به توان‌های بالاتر سرعت صوت تقسیم شده است و مقادیر بسیار اندکی دارد، صرف‌نظر شده است. حال رابطه فوق را می‌توان در معادله (۲۳) جایگذاری کرد.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (29)$$

در این معادله، مقدار میرایی به صورت سازه‌ای (c_s) در نظر گرفته شده است و البته علاوه بر میرایی سازه‌ای در سیستم، میرایی ناشی از انتشار انرژی به محیط نیز وجود دارد. این نوع میرایی ناشی از تقابل تیر با محیط است و به صورت عبارت $\frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \frac{\partial w}{\partial t}$ ظاهر شده است. با توجه به اینکه در این بخش اتصال سری مورد بررسی قرار می‌گیرد، رابطه (۲) با بالانویس S در رابطه فوق جایگذاری می‌شود.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w_{rel}^s}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^s}{\partial x^4 \partial t} + c_s I \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^4 \partial t} + \frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w_{rel}^s}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w_{rel}^s}{\partial x} \right) + \frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) = 0 \quad (30)$$

در این رابطه، برای عبارت w_b از بالانویس S استفاده نشده است؛ زیرا این عبارت برابر با حرکت پایه است و به نوع اتصال لایه‌های پیزوالکتریک وابسته نیست. با استفاده از روابط (۴) و (۵)؛ مشتقات عبارت حرکت پایه به صورت روابط (۳۱) تا (۳۴) استخراج می‌شوند.

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} = h(t) \quad (31)$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial t} = \dot{g}(t) + x \dot{h}(t) \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^4 \partial t} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} = \ddot{g}(t) + x \ddot{h}(t) \quad (34)$$

با استفاده از روابط فوق، معادله (۳۰) به صورت رابطه (۳۵) نوشته می‌شود.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w_{rel}^s}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^s}{\partial x^4 \partial t} + \frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w_{rel}^s}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w_{rel}^s}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{P_\infty b \gamma}{C_\infty} \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) = 0 \quad (35)$$

$$D_3 = \bar{e}_{31} S_1^p + \bar{e}_{33}^s E_3 \quad (18)$$

که در آن، D_3 جابجایی الکتریکی و $\bar{e}_{33}^s$ ثابت ظرفیت الکتریکی پیزوالکتریک است. اگر مقدار مقاومت خارجی مدار مطابق شکل ۳ برابر با R_l در نظر گرفته شود، جریان الکتریکی بر اساس قانون گاوس به صورت رابطه (۱۹) به دست می‌آید [24].

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A D \cdot n dA \right) = \frac{v(t)}{R_l} \quad (19)$$

که در آن، D بردار جابجایی الکتریکی در لایه پیزوالکتریک است و n بردار یکه عمود بر سطح الکتروود است که انتگرال‌گیری روی این سطح انجام می‌شود. با جایگذاری معادله (۱۸) در (۱۹) و به کارگیری رابطه (۱۳) معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید [24] که در آن h_p ، b و L به ترتیب عرض، ضخامت و طول لایه پیزوالکتریک است. h_{pc} نیز برابر با فاصله تار خنثی از مرکز لایه پیزوالکتریک است که مطابق رابطه (۲۱) به دست می‌آید.

$$\frac{\bar{e}_{33}^s b L}{h_p} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} + \bar{e}_{31} h_{pc} b \int_0^L \frac{\partial^3 w_{rel}(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx = 0 \quad (20)$$

$$h_{pc} = \frac{h_p + h_s}{2} \quad (21)$$

پس از استخراج کوپلینگ، معادلات حاکم بر سیستم با اتصال موازی و سری استخراج می‌شود.

۲-۲- معادلات حاکم با اتصال سری و اعمال نیروی آیروالاستیک

در بخش‌های قبلی، معادلات و روابط لازم برای استخراج کامل معادلات حاکم مورد مطالعه قرار گرفت. با جایگذاری گشتاور خمشی طبق رابطه (۱۱) در معادله (۲) داریم [24]:

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d^2 H(x)}{dx^2} - \frac{d^2 H(x-L)}{dx^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + b \Delta P_a(x, t) = 0 \quad (22)$$

که در آن، کوپلینگ الکتریکی در حالت سری (ϑ_s) طبق رابطه (۱۲) است و سفتی خمشی معادل نیز در رابطه (۱۷) تعریف شده است. عبارت ضریب $\vartheta_s v_s(t)$ توابع پله واحد است که بر اساس تابع دلتای دیراک نوشته می‌شود و لذا معادله (۲۲) را می‌توان به صورت معادله (۲۳) نوشت.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_s v_s(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + b \Delta P_a(x, t) = 0 \quad (23)$$

با توجه به اعمال نیروهای آیروالاستیک اختلاف فشار، رابطه به دست آمده یک رابطه غیرخطی است. در این تحقیق بسط خطی این عبارت استفاده شده است که به صورت رابطه (۲۴) است [27].

$$P^d(x, t) = P_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_z}{C_\infty} \right)^{2\gamma/\gamma-1} \quad (24)$$

در رابطه (۲۴)، P_∞ فشار اتمسفر، γ ضریب ثابت گاز ایزنتروپیک، C_∞ سرعت صوت و V_z سرعت عمودی جریان بر تیر (سرعت فروریزش؛ Downwash Velocity) است. در صورتی که سرعت سیال در محیط U_∞ باشد، سرعت فروریزش به صورت رابطه (۲۵) قابل بیان است.

$$V_z = \frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \quad (25)$$

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33} b L}{2 h_{\bar{p}}} \frac{d v_s(t)}{d t} + \frac{v_s(t)}{R_l} + \quad (49)$$

$$\bar{\epsilon}_{31} h_{\bar{p} c} b \int_0^L \sum_{r=1}^N \frac{d^3 \varphi_r(x)}{d x^3} \dot{\eta}_r^s(t) d x = 0$$

رابطه (۴۹) را می‌توان به شکل رابطه (۵۰) ساده‌تر نمود.

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33} b L}{2 h_{\bar{p}}} \frac{d v_s(t)}{d t} + \frac{v_s(t)}{R_l} + \sum_{r=1}^N \kappa_r \dot{\eta}_r^s(t) = 0 \quad (50)$$

که در آن:

$$\kappa_r = \bar{\epsilon}_{31} h_{\bar{p} c} b \int_0^L \frac{d^3 \varphi_r(x)}{d x^3} d x \quad (51)$$

معادله (۴۲) به‌دست‌آمده، معادله گسسته مکانیکی با کوپل الکتریکی است. معادله (۵۰) نیز معادله الکتریکی با کوپل مکانیکی گسسته‌شده است. این معادلات پس از انتخاب یک مقدار برای N به‌صورت کوپل و با استفاده از روش عددی حل می‌شوند. در ادامه معادلات حاکم بر اتصال موازی استخراج می‌شود.

۳-۲- معادلات حاکم با اتصال موازی و اعمال نیروی آیروالاستیک

به‌منظور استخراج معادلات حاکم برای حالت اتصال موازی و اعمال نیروی آیروالاستیک به آن رابطه گشتاور خمشی طبق رابطه (۱۵) در معادله (۲) جایگذاری می‌شود [24].

$$Y I \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d^2 H(x)}{d x^2} - \frac{d^2 H(x-L)}{d x^2} \right] + \quad (52)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + b \Delta P_a(x, t) = 0$$

که در آن کوپلینگ الکتریکی در حالت موازی (ϑ_p) طبق رابطه (۱۶) است و سفتی خمشی معادل نیز در رابطه (۱۷) تعریف شده است. عبارت ضریب $\vartheta_p v_p(t)$ مشتق دوم مکانی توابع پله واحد است که بر اساس تابع دلتای دیراک نوشته می‌شود و لذا معادله (۵۲) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$Y I \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d \delta(x)}{d x} - \frac{d \delta(x-L)}{d x} \right] + \quad (53)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + b \Delta P_a(x, t) = 0$$

برای اعمال نیروهای آیروالاستیک اختلاف فشار مطابق رابطه (۲۸) به‌صورت خطی‌سازی شده استخراج شد و با جایگذاری آن در رابطه فوق، رابطه حاکم بر ارتعاشات سیستم در حالت موازی به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$Y I \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d \delta(x)}{d x} - \frac{d \delta(x-L)}{d x} \right] + \quad (54)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \frac{P_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

با توجه به اینکه در این بخش اتصال موازی مورد بررسی قرار می‌گیرد، رابطه (۳) با بالانویس p در رابطه فوق جایگذاری می‌شود.

$$Y I \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x, t)}{\partial x^4} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d \delta(x)}{d x} - \frac{d \delta(x-L)}{d x} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w_{rel}^p}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^p}{\partial x^4 \partial t} + c_s I \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^4 \partial t} + \frac{P_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} \left(\frac{\partial w_{rel}^p}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w_{rel}^p}{\partial x} \right) + \frac{P_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) = 0 \quad (55)$$

در نهایت، می‌توان گفت رابطه فوق معادله مکانیکی حاکم بر سیستم در اتصال سری با کوپلینگ الکتریکی است. لازم به ذکر است که در این معادله عبارت ρA جرم واحد طول است که از رابطه (۳۶) قابل استخراج است.

$$\rho A = b(\rho_s h_s + 2\rho_{\bar{p}} h_{\bar{p}}) \quad (36)$$

که در آن، ρ_s و $\rho_{\bar{p}}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده جرم واحد حجم تیر و لایه پیزوسرامیکی است. معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی نیز برای اتصال سری به‌صورت معادله (۳۷) نوشته می‌شود.

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33} b L}{2 h_{\bar{p}}} \frac{d v_s(t)}{d t} + \frac{v_s(t)}{R_l} + \bar{\epsilon}_{31} h_{\bar{p} c} b \int_0^L \frac{\partial^3 w_{rel}^s(x, t)}{\partial x^3 \partial t} d x = 0 \quad (37)$$

پاسخ معادله (۳۵) بر اساس روش گالرکین به‌صورت رابطه (۳۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$w_{rel}^s(x, t) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(x) \eta_r^s(t) \quad (38)$$

در این رابطه، $\eta_r^s(t)$ توابع زمانی مجهول است، $\varphi_r(x)$ تابع شکل مود نرمال ارتعاشی تیر یک‌سر گیردار است که طبق رابطه (۳۹) تعریف شده است [30] و N برابر با تعداد مودهای مفروض در پاسخ است.

$$\varphi_r(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} \left[\cosh \lambda_r \frac{x}{L} - \cos \lambda_r \frac{x}{L} - \sigma_r \left(\sinh \lambda_r \frac{x}{L} - \sin \lambda_r \frac{x}{L} \right) \right] \quad (39)$$

در این رابطه، σ_r به‌صورت رابطه (۴۰) است.

$$\sigma_r = \frac{\sinh \lambda_r - \sin \lambda_r}{\cosh \lambda_r + \cos \lambda_r} \quad (40)$$

در روابط (۳۹) و (۴۰)، مقدار ویژه λ_r از حل رابطه (۴۱) به‌دست می‌آید.

$$1 + \cos \lambda_r \cosh \lambda_r = 0 \quad (41)$$

رابطه (۳۸) در (۳۵) جایگذاری شده و به طرفین آن $\varphi_m(x)$ ضرب شده و در طول تیر انتگرال‌گیری می‌شود تا رابطه (۴۲) استخراج شود.

$$\dot{\eta}_r^s(t) + \left(2\xi_r^s \omega_r + \frac{P_{\infty} b \gamma}{\rho A C_{\infty}} \right) \eta_r^s(t) + \omega_r^2 \eta_r^s(t) - \quad (42)$$

$$\chi_r^s v_s(t) = f_r(t)$$

در معادله گسسته‌شده (۴۲)، روابط (۴۳) تا (۴۸) در نظر گرفته شده است.

$$Y I \int_0^L \frac{d^4 \varphi_r(x)}{d x^4} \varphi_m(x) d x = \omega_r^2 \delta_{rm} \quad (43)$$

$$\xi_r^s = \frac{c_s \omega_r}{2 Y} \quad (44)$$

$$\rho A \int_0^L \varphi_r(x) \varphi_m(x) d x = \delta_{rm} \quad (45)$$

$$\chi_r^s = \vartheta_s \left. \frac{d \varphi_r(x)}{d x} \right|_{x=L} \quad (46)$$

$$\alpha_{mr} = \int_0^L \frac{d \varphi_m(x)}{d x} \varphi_r(x) d x \quad (47)$$

$$f_r(t) = - \left[\rho A \ddot{g}(t) + \frac{P_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} \dot{g}(t) + \frac{P_{\infty} U_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} h(t) \right] \int_0^L \varphi_r(x) d x - \left[\rho A \ddot{h}(t) + \frac{P_{\infty} b \gamma}{C_{\infty}} \dot{h}(t) \right] \int_0^L x \varphi_r(x) d x \quad (48)$$

پس از استخراج معادله گسسته زمانی حاکم بر مکانیک سیستم، لازم است که معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی نیز گسسته‌سازی شود. به این منظور معادله (۳۸) در رابطه (۳۷) جایگذاری می‌شود (رابطه ۴۹).

مطابق معادله (۵۸) در رابطه (۵۷) جایگذاری می‌شود.

$$\frac{\bar{E}_{33} b L}{h_p} \frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{2R_l} + \quad (66)$$

$$\bar{E}_{31} h_{pc} b \int_0^L \sum_{r=1}^N \frac{d^3 \varphi_r(x)}{dx^3} \dot{\eta}_r^p(t) dx = 0$$

این رابطه را می‌توان به شکل رابطه (۶۷) ساده‌تر نمود.

$$\frac{\bar{E}_{33} b L}{h_p} \frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{2R_l} + \sum_{r=1}^N \kappa_r \dot{\eta}_r^p(t) = 0 \quad (67)$$

معادلات (۵۹) و (۶۷)، معادلات حاکم بر سیستم هستند. این معادلات پس از انتخاب یک مقدار برای N به‌صورت کوپل و با استفاده از روش عددی حل می‌شوند. برای حل تمام این معادلات از روش رانگ-کوتا و برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار متلب استفاده شده است. در ادامه نتایج حاصل از این معادلات مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

۳- نتایج و بحث

در این تحقیق یک نمونه از تیر یک‌سر گیردار با دو لایه پیزوالکتریک در نظر گرفته شده است و سپس نتایج مورد نیاز برای حالت‌های سری و موازی استخراج شد.

به‌منظور بررسی عددی مساله و حل معادلات حاکم بر سیستم، مقادیر ابعادی و ویژگی‌های مکانیکی و الکتریکی به‌صورت زیر در نظر گرفته شد که در تحقیقات /رتورک و /اینمن^[24] و حسینی و /طفی/اسدی^[31]، نیز همین نوع تیر بررسی شده است. جدول‌های ۱ تا ۳، به‌ترتیب ویژگی‌های ابعادی و مکانیکی تیر یک‌سر گیردار، لایه پیزوالکتریک و محیط را نشان می‌دهند.

در بسط پاسخ نیز طبق معادله (۳۸) یا (۵۸) از سه تابع پایه اول استفاده شده است؛ به‌عبارتی $N=3$ فرض شده است. در ادامه به‌منظور بررسی صحت روابط و حل ارایه‌شده فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس به‌دست‌آمده از پاسخ آزاد مقایسه می‌شود. مطابق مباحث ارتعاشات پیشرفته فرکانس طبیعی اول سیستم تیر یک سرگیردار به‌صورت رابطه (۶۸) است^[32].

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{YI}{\rho A L^4}} \quad (68)$$

که در آن، λ_i از حل معادله (۴۱) قابل استخراج است. مقادیر سه فرکانس طبیعی اول مطابق رابطه فوق و تئوری دقیق برای نمونه حاضر در جدول (۴) ارایه شده است.

در نمودار ۱، پاسخ انتهای تیر دارای دو لایه پیزو و اتصال سری، به شرایط اولیه از نوع جابجایی نشان داده شده است که اثر میرایی باعث ازبین‌رفتن این پاسخ پس از مدتی می‌شود.

جدول ۱) ویژگی‌های ابعادی و مکانیکی تیر یک‌سر گیردار^[19]

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
مدول یانگ	E	۱۰۵	GPa
جرم واحد حجم	ρ_s	۹۰۰۰	Kg/m ³
طول	L	۲۴/۵۳	mm
عرض	b	۶/۴	mm
ضخامت	h_s	۰/۱۴	mm

در این رابطه، برای عبارت w_b از بالانویس استفاده نشده است؛ زیرا این عبارت برابر با حرکت پایه است و به نوع اتصال لایه‌های پیزوالکتریک وابسته نیست. با ساده‌سازی رابطه (۵۵) معادله مکانیکی با کوپل الکتریکی به‌صورت رابطه (۵۶) بازنویسی می‌شود. در این رابطه عبارات ناشی از تحریک پایه در سمت دوم تساوی نوشته شده است.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}^p(x,t)}{\partial x^4} - \vartheta_p v_p(t) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}^p}{\partial x^4 \partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w_{rel}^p}{\partial t^2} + \frac{P_{\infty} b \gamma}{c_{\infty}} \left(\frac{\partial w_{rel}^p}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w_{rel}^p}{\partial x} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{P_{\infty} b \gamma}{c_{\infty}} \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \quad (56)$$

در نهایت می‌توان گفت که رابطه (۵۶) معادله مکانیکی حاکم بر سیستم در اتصال موازی با کوپلینگ الکتریکی است. در این معادله، عبارت ρA جرم واحد طول است که در رابطه (۳۶) برای تیر با دو لایه پیزوالکتریک تعریف شده است. معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی نیز برای اتصال موازی به‌صورت معادله (۵۷) نوشته می‌شود:

$$\frac{\bar{E}_{33} b L}{h_p} \frac{dv_p(t)}{dt} + \frac{v_p(t)}{2R_l} + \bar{E}_{31} h_{pc} b \int_0^L \frac{\partial^3 w_{rel}^p(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx = 0 \quad (57)$$

دقت شود که در این معادله عبارت $\bar{E}_{33}$ دارای بالانویس s است که به معنای اندازه‌گیری در تنش ثابت است. پاسخ معادله (۵۶) بر اساس روش گالرکین را این بار به‌صورت رابطه (۵۸) و مجموعه موده‌های ارتعاشی در نظر می‌گیریم:

$$w_{rel}^p(x,t) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(x) \eta_r^p(t) \quad (58)$$

در این رابطه، $\eta_r^p(t)$ توابع زمانی مجهول است، $\varphi_r(x)$ تابع شکل مود نرمال ارتعاشی تیر یک‌سر گیردار است که طبق رابطه (۳۹) تعریف شده است^[30]. رابطه (۵۸) در (۵۶) جایگذاری شده و به طرفین آن تابع شکل مود $\varphi_m(x)$ ضرب شده و در طول تیر انتگرال‌گیری می‌شود تا رابطه (۵۹) استخراج شود.

$$\ddot{\eta}_r^p(t) + \left(2\xi_r^p \omega_r + \frac{P_{\infty} b \gamma}{\rho A c_{\infty}} \right) \dot{\eta}_r^p(t) + \omega_r^2 \eta_r^p(t) - \chi_r^p v_p(t) = f_r(t) \quad (59)$$

برای ساده‌سازی رابطه فوق از روابط (۳۱) تا (۳۴) استفاده شده است. همچنین در معادله گسسته‌شده (۵۹)، روابط (۶۰) تا (۶۵) در نظر گرفته شده است.

$$YI \int_0^L \frac{d^4 \varphi_r(x)}{dx^4} \varphi_m(x) dx = \omega_r^2 \delta_{rm} \quad (60)$$

$$\xi_r^p = \frac{c_s \omega_r}{2Y} \quad (61)$$

$$\rho A \int_0^L \varphi_r(x) \varphi_m(x) dx = \delta_{rm} \quad (62)$$

$$\chi_r^p = \vartheta_p \left. \frac{d\varphi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (63)$$

$$\alpha_{mr} = \int_0^L \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \varphi_r(x) dx \quad (64)$$

$$f_r(t) = - \left[\rho A \ddot{g}(t) + \frac{P_{\infty} b \gamma}{c_{\infty}} \dot{g}(t) + \frac{P_{\infty} U_{\infty} b \gamma}{c_{\infty}} h(t) \right] \int_0^L \varphi_r(x) dx - \left[\rho A \dot{h}(t) + \frac{P_{\infty} b \gamma}{c_{\infty}} \dot{h}(t) \right] \int_0^L x \varphi_r(x) dx \quad (65)$$

همانند حالت قبل، پس از استخراج معادله گسسته زمانی حاکم بر مکانیک سیستم، لازم است تا معادله الکتریکی با کوپلینگ مکانیکی نیز گسسته‌سازی شود. به این منظور پاسخ فرض‌شده

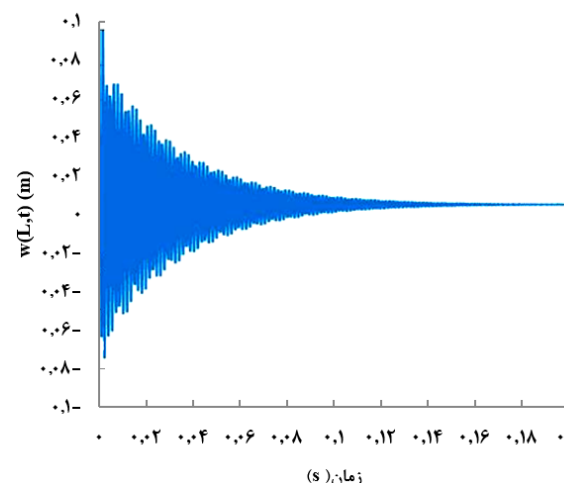
پارامتر	نماد	مقدار	واحد
مدول یانگ	$\bar{E}_{11}$	۶۰/۹	GPa
جرم واحد حجم	ρ_p	۷۵۰۰	Kg/m ³
طول	L	۲۴/۵۳	mm
عرض	b	۶/۴	mm
ضخامت	h_p	۰/۲۶۵	mm
ثابت پیزوالکتریک	$\bar{e}_{31}$	-۱۶/۶	C/m ²
ثابت ظرفیت الکتریکی	$\bar{\epsilon}_{33}$	۲۵/۵۵	nF/m

جدول (۳) ویژگی‌های محیط^[۱۹]

پارامتر	نماد	مقدار	واحد
فشار	P_∞	۱۰۰	KPa
سرعت سیال	U_∞	۲۰	m/s
ضریب گازها	γ	۱/۴	-

جدول (۴) سه فرکانس طبیعی اول

ω_1 rad/s	ω_2 rad/s	ω_3 rad/s
۳۹۴۱/۷۴۶۸	۲۴۷۰۲/۷۰۵۹	۶۹۱۶۸/۷۷۹۹



نمودار (۱) پاسخ انتهای تیر به شرایط اولیه از نوع جابجایی

در صورتی که از پاسخ فوق تبدیل فوریه گرفته شود، پاسخ فرکانسی سیستم استخراج می‌شود که در نمودار ۲ نشان داده شده است. همچنین پاسخ فرکانسی در حالت اتصال موازی نیز در نمودار ۳ نشان داده شده است.

در این نمودارها فرکانس‌های طبیعی سیستم به ترتیب ۳۹۴۰، ۲۴۷۱۰ و ۶۹۱۶۰ است که در مقایسه با مقادیر جدول ۱ دارای خطای نسبی ۰/۴٪، ۰/۳٪ و ۰/۱۳٪ است. این نمودارها صحت معادلات ارائه شده را نشان می‌دهد و همچنین نتیجه می‌دهد که نوع اتصال مدار تأثیری بر فرکانس‌های سیستم و پاسخ فرکانسی ندارد. نمودار ۴، حرکت عرضی پایه $g(t)$ و حرکت دورانی پایه $h(t)$ را نمایش می‌دهد که در آن یک حرکت تصادفی (الف) و یک حرکت هارمونیک (ب) به عنوان حرکت بستر میزبان در نظر گرفته شده است. همچنین نمودار ۵، پاسخ انتهای تیر را برای هر یک از این ورودی‌ها نشان می‌دهد.

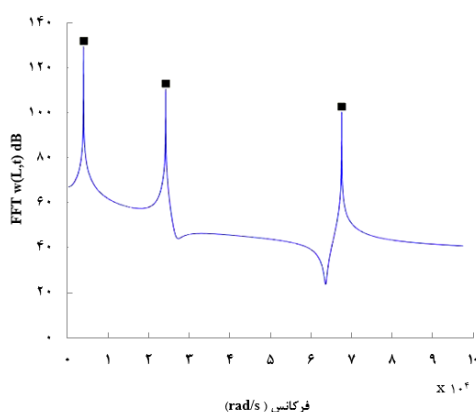
لازم به ذکر است که در هر دو پاسخ به دست آمده در نمودار ۵، بخش اول پاسخ گذرای سیستم است و در اثر میرایی و فشار محیط این پاسخ پس از ۱۵/۰ ثانیه به صفر می‌رسد و در ادامه پاسخ ماندگار سیستم رفتاری شبیه به تحریک پایه دارد.

خروجی ولتاژ در پیزوالکتریک‌ها به میزان جابجایی بستگی دارد و با افزایش جابجایی تیر، میزان ولتاژ افزایش می‌یابد. از طرفی میزان جابجایی در تیر به ویژگی‌های تحریک پایه از جمله دامنه و فرکانس آن بستگی دارد و می‌توان گفت با افزایش دامنه تحریک پایه، میزان ولتاژ افزایش می‌یابد. در مورد فرکانس حرکت پایه نیز می‌توان گفت که مطابق نمودارهای ۲ و ۳، زمانی پاسخ سیستم افزایش می‌یابد که فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم باشد، لذا تحریک هارمونیک پایه، زمانی در یک دامنه مشخص می‌تواند ولتاژ بیشتری تولید کند که فرکانس تحریک هارمونیک نزدیک فرکانس طبیعی تیر باشد.

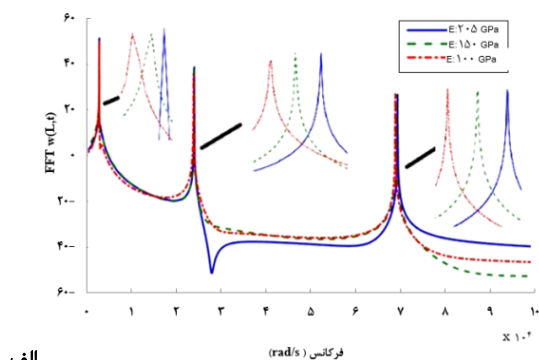
تحریک تصادفی دارای فرکانس خاصی نیست و تمام فرکانس‌های تیر را تحریک می‌کند و لذا برای افزایش میزان ولتاژ در این نوع تحریک شرطی وجود ندارد.

در ادامه تأثیر سفتی تیر (الاستیک) بر رفتار ارتعاشی و ولتاژ خروجی بررسی می‌شود. بدین منظور تبدیل فوریه پاسخ زمانی ارتعاشی و ولتاژ در نمودار ۶ نشان داده شده است. در این نمودار از دو لایه پیزوالکتریک به صورت اتصال سری استفاده شده است.

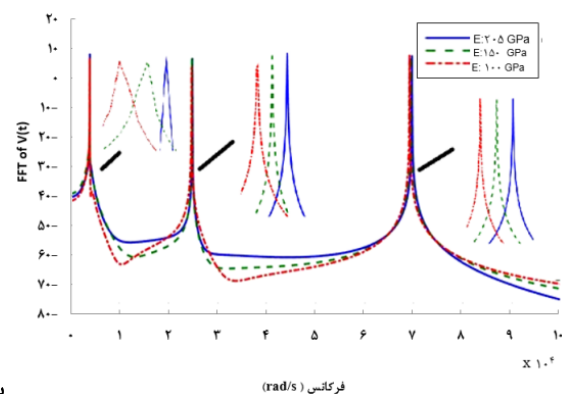
مطابق انتظار، افزایش سفتی تیر، فرکانس طبیعی ارتعاشی را افزایش می‌دهد (نمودار ۶). در صورتی که افزایش یا کاهش قدرت ولتاژ خروجی به فرکانس تحریک بستگی دارد. نمودار ۶، نشان می‌دهد که میزان ولتاژ در نزدیکی فرکانس تشدید سیستم (فرکانس تحریک پایه مساوی فرکانس طبیعی سیستم باشد) به مقدار سفتی تیر بستگی ندارد و اثر سفتی در این فرکانس‌ها بسیار کم است. در حالی که در فرکانس نزدیک 10^6 rad/s ولتاژ متناظر با بیشترین سفتی ($E=205 \text{ GPa}$) بیشترین مقدار است و برای فرکانس‌های تحریک بالاتر مانند $9 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ، این مساله برعکس شده است و ولتاژ متناظر با سفتی $E=205 \text{ GPa}$ کمترین مقدار است.



نمودار (۲) پاسخ فرکانسی انتهای تیر به شرایط اولیه از نوع جابجایی در سیستم با اتصال سری



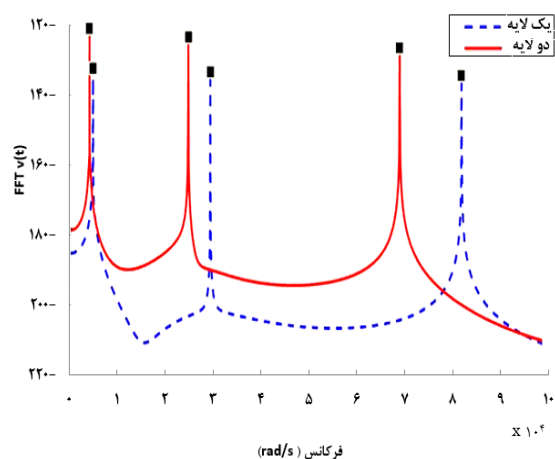
الف



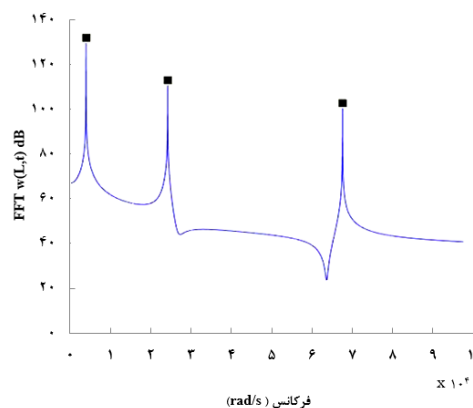
ب

نمودار ۳ اثر سفتی تیر بر پاسخ فرکانسی سیستم (الف) و قدرت ولتاژ خروجی سیستم (ب)

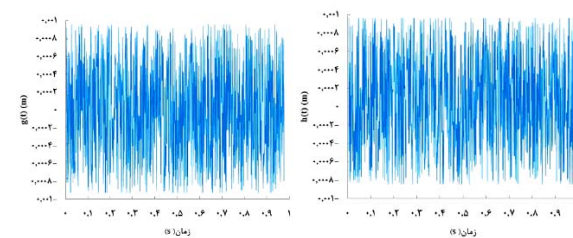
به منظور بررسی اثر تعداد لایه پیزوالکتریک و نوع اتصال مدار بر میزان ولتاژ خروجی، نمودارهای ۷ و ۸ آورده شده است. نمودار ۷ نشان می‌دهد که با استفاده از دو لایه پیزوالکتریک، مقدار فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد و میزان تاثیر بر فرکانس سوم بیشتر است؛ در حالی که مقدار ولتاژ افزایش می‌یابد و مقدار تاثیر بر ولتاژ در حوالی فرکانس اول بیشتر است. در نمودار ۸، قدرت ولتاژ خروجی در اتصال مدار به صورت موازی و سری نشان داده شده است. مطابق این نمودار، دو ولتاژ کاملاً بر هم منطبق‌اند و نشان می‌دهد که نوع مدار اندازه‌گیری خروجی تاثیری بر مقدار ولتاژ ندارد.



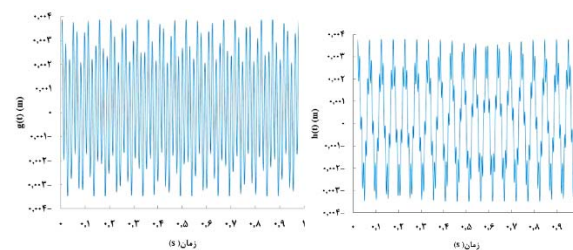
نمودار ۷ قدرت ولتاژ خروجی سیستم برای یک لایه و دو لایه از پیزوالکتریک



نمودار ۳ پاسخ فرکانسی انتهای تیر به شرایط اولیه از نوع جابجایی در سیستم با اتصال موازی

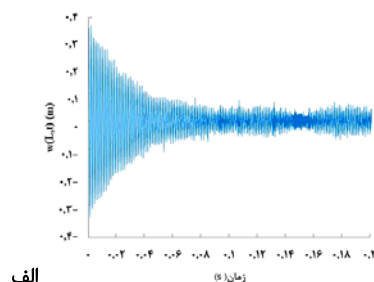


الف

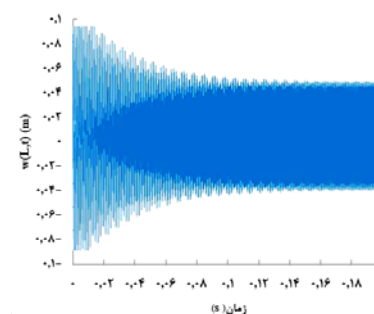


ب

نمودار ۴ حرکات عرضی و دورانی پایه؛ الف) تحریک تصادفی عرضی و دورانی پایه و ب) تحریک هارمونیک عرضی $g(t)$ و دورانی پایه $h(t)$

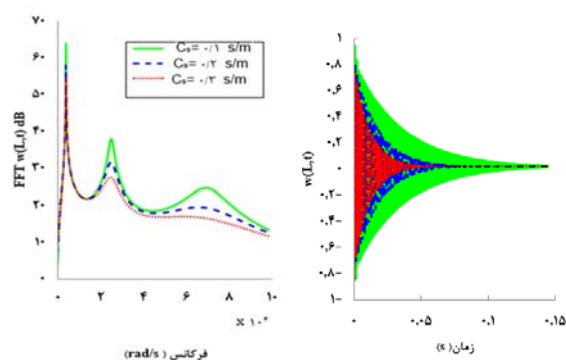


الف

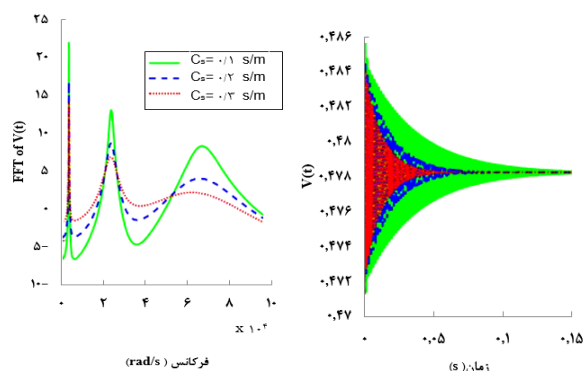


ب

نمودار ۵ پاسخ انتهای تیر به حرکت عرضی پایه $g(t)$ و حرکت دورانی پایه $h(t)$ به صورت حرکات تصادفی (الف) و هارمونیک (ب)

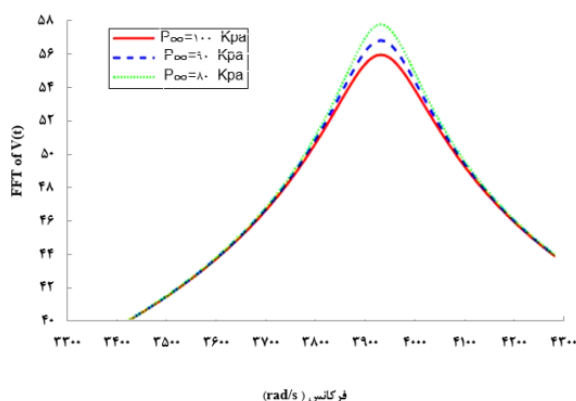


الف



ب

نمودار ۹) تاثیر میرایی ساختاری سیستم بر پاسخ آزاد ارتعاشی انتهای تیر (الف) و ولتاژ خروجی سیستم (ب)

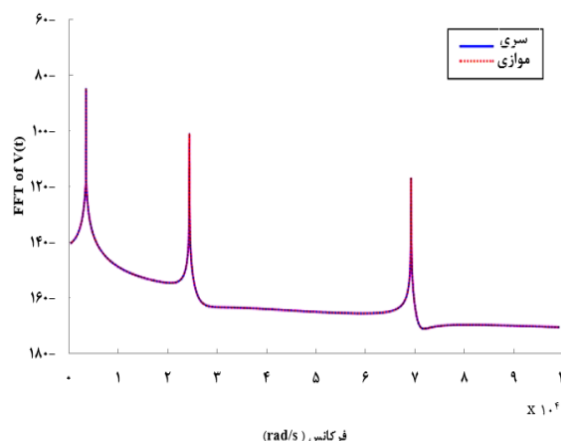


نمودار ۱۰) تاثیر فشار بر ولتاژ خروجی

۴- نتیجه‌گیری کلی

در حالت کلی نتایج حاصل از این پژوهش به‌صورت ذیل خلاصه می‌شود:

۱. میرایی پس از گذشت مدت زمانی باعث از بین رفتن پاسخ انتهای تیر دارای دو لایه پی‌زو و اتصال سری یا موازی به شرایط اولیه از نوع جابجایی می‌شود.
۲. بیشترین دامنه ارتعاشی زمانی حاصل می‌شود که در نزدیکی فرکانس‌های طبیعی سیستم قرار گیرد.
۳. نوع اتصال مدار (سری یا موازی) تاثیری بر فرکانس‌های سیستم و پاسخ فرکانسی ندارد.



نمودار ۸) قدرت ولتاژ خروجی سیستم برای دو لایه از پی‌زوالکتریک در اتصال سری و موازی

در ادامه، تاثیر مقدار میرایی ساختاری سیستم بر رفتار ارتعاشی و ولتاژ خروجی بررسی شده است. با توجه به اینکه مقدار میرایی تنها بر پاسخ گذرای سیستم تاثیرگذار است، لذا خروجی سیستم بدون تحریک و تحت شرایط اولیه جابجایی استخراج شده است. نمودار ۹- الف و ب، به‌ترتیب پاسخ ارتعاشی انتهای تیر و ولتاژ خروجی را برای سه مقدار میرایی نشان می‌دهد. در هر یک از نمودارها قدرت سیگنال نیز نشان داده شده است. نمودار ۹، نشان می‌دهد که افزایش میرایی باعث کاهش ارتعاش سیستم می‌شود. به عبارت دیگر، در محل‌های فرکانس طبیعی و در محل‌های دورتر از فرکانس طبیعی با افزایش میرایی دامنه ارتعاشی کاهش خواهد یافت. در مورد ولتاژ نیز پاسخ (نمودار ۹- ب سمت چپ) زمانی که در آن ارتعاش با فرکانس‌های طبیعی رخ می‌دهد، نشان می‌دهد که با افزایش میرایی مقدار ولتاژ کاهش می‌یابد. در حالی که پاسخ فرکانسی اطلاعات کلی‌تری در اختیار می‌گذارد و نشان می‌دهد که در ارتعاش در محل‌های دورتر از فرکانس‌های طبیعی این مساله برعکس است و با افزایش میرایی مقدار ولتاژ افزایش می‌یابد. این تنها در صورتی است که ارتعاش سیستم با فرکانس طبیعی و آزاد نباشد.

همچنین از نمودار ۹، مشاهده می‌شود که جابجایی اولیه (بدون تحریک خارجی یا پایه) باعث ولتاژ تقریبی ۰/۴۸ ولت می‌شود. با توجه به اینکه نوسان فشار در محیط با افزایش ارتفاع از سطح زمین اتفاق می‌افتد، در نمودار ۱۰ تاثیر نوسان فشار بر قدرت خروجی ولتاژ در حوالی فرکانس طبیعی اول نشان داده شده است. با توجه به نمودار ۱۰، مشخص می‌شود که تاثیر فشار در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم مشهود است و به‌گونه‌ای اثر می‌کند که با افزایش فشار در محیط مقدار ولتاژ خروجی کاهش می‌یابد. طبیعتاً با افزایش فشار در محیط، مقاومت در مقابل ارتعاشات افزایش یافته و دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و در نتیجه مقدار ولتاژ خروجی کاهش خواهد یافت.

منابع مالی: موردی توسط نویسنده گزارش نشده است.

فهرست علائم

b	عرض تیر
c_s	ضریب میرایی سازه‌ای
C_∞	سرعت صوت
$\bar{c}_{11}$	مدول الاستیک پیزوالکتریک
D_3	جابجایی الکتریکی
E	میدان الکتریکی
$\bar{e}_{31}$	ثابت پیزوالکتریک
H	تابع پله واحد
$h_{\bar{p}}$	ضخامت هر یک از لایه‌های پیزوالکتریک
$h_{\bar{p}c}$	فاصله تار خنثی از مرکز لایه پیزوالکتریک
h_s	ضخامت تیر
I	ممان اینرسی سطح
L	طول لایه پیزوالکتریک
N	تعداد مودهای مفروض در پاسخ
$P(x, t)$	نیروی خارجی بر واحد طول تیر
P_∞	فشار اتمسفر
$T_1^{\bar{p}}$	تنش محوری در پیزوالکتریک
T_1^s	تنش محوری در تیر
U_∞	سرعت سیال در محیط
$v_p(t)$	ولتاژ خروجی حالت موازی
$v_s(t)$	ولتاژ خروجی حالت سری
V_z	سرعت عمودی جریان بر تیر (سرعت فروریزش)
$w_b(x, t)$	حرکت پایه
$w_{rel}(x, t)$	حرکت تیر نسبت به پایه
Y	مدول یانگ تیر
γ	ضریب ثابت گاز ایزنتروپیک
$\Delta P_a(x, t)$	اختلاف فشار آیرودینامیکی اعمالی به تیر
$\delta_1(x)$	تابع تأثیر جابجایی در پایه
$\delta_2(x)$	تابع تأثیر دوران در پایه
$\bar{e}_{33}^s$	ثابت ظرفیت الکتریکی پیزوالکتریک
$\eta_r^s(t)$	تابع زمانی مجهول
ρA	جرم واحد طول
$\rho_{\bar{p}}$	جرم واحد حجم لایه پیزوسرامیکی
ρ_s	جرم واحد حجم تیر
$\varphi_r(x)$	تابع شکل مود نرمال ارتعاشی تیر یک‌سرگیردار
ϑ_s	ضریب کوپلینگ الکتریکی در حالت سری
ϑ_p	ضریب کوپلینگ الکتریکی در حالت موازی

منابع

- 1- Erturk A. Electromechanical modeling of piezoelectric energy harvesters [Dissertation] Blacksburg: Virginia Tech, 2009.
- 2- Sodano HA, Inman DJ, Park G. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. Shock and Vibration Digest. 2004;36(3):197-206.
- 3- Salmani H, Rahimi GH. Investigation of the exponentially tapering effect on the behavior of piezoelectric energy harvester including geometric, inertial, material and damping nonlinearities. Modares Mechanical Engineering. 2018;18(2):434-442. [Persian]

۴. تأثیر سفتی تیر بر رفتار ارتعاشی به‌گونه‌ای است که با افزایش سفتی، فرکانس طبیعی ارتعاشی تیر افزایش می‌یابد.

۵. تأثیر سفتی تیر بر ولتاژ خروجی به‌گونه‌ای است که میزان ولتاژ در نزدیکی فرکانس تشدید سیستم (فرکانس تحریک پایه مساوی فرکانس طبیعی سیستم باشد) به مقدار سفتی تیر بستگی ندارد و اثر سفتی بسیار کم است.

۶. تأثیر تعداد لایه پیزوالکتریک بر رفتار سیستم به‌گونه‌ای است که با افزایش تعداد لایه‌های پیزوالکتریک، مقدار فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین مقدار ولتاژ خروجی نیز با افزایش لایه‌های پیزو افزایش می‌یابد.

۷. تأثیر مقدار میرایی ساختاری سیستم بر رفتار ارتعاشی به‌گونه‌ای است که افزایش میرایی باعث کاهش ارتعاش سیستم می‌شود.

۸. تأثیر مقدار میرایی ساختاری سیستم بر ولتاژ خروجی به‌گونه‌ای است که در محل فرکانس طبیعی با افزایش میرایی مقدار ولتاژ کاهش می‌یابد و در ارتعاش در محل‌های دورتر از فرکانس‌های طبیعی با افزایش میرایی مقدار ولتاژ افزایش می‌یابد.

۹. تأثیر نوسانات فشار بر قدرت خروجی ولتاژ به‌گونه‌ای است که با افزایش فشار در محیط، مقدار ولتاژ خروجی کاهش می‌یابد.

از مزایای این نوع تحلیل و ساختار می‌توان به این موارد اشاره کرد که اولاً از بین روش‌های گوناگون برداشت انرژی از ارتعاشات محیطی، استفاده از پیزوالکتریک به‌دلیل داشتن تأثیرات مساعد کوپل الکتریکی- مکانیکی از بهترین روش‌های برداشت انرژی است. ثانیاً در این تحقیق از مدل غیرخطی تئوری پیستون برای مدل‌سازی نیروی آیروالاستیک استفاده شده و معادلات الکترومکانیکی با حضور نیروی آیروالاستیک استخراج شده است.

با مقایسه نتایج تحقیق حاضر با تحقیق حسینی وطفی/اسدی^[31]، می‌توان مشاهده نمود که اثر تغییرات میرایی و پاسخ فرکانسی انتهای تیر به جابجایی اولیه پایه در تحقیق آنها مطابقت کاملی با تحقیق حاضر دارد. همچنین مطابق نتایج آنها در فرکانس ارتعاشی نزدیک به فرکانس طبیعی، افزایش میرایی ساختاری منجر به کاهش ولتاژ خروجی می‌شود؛ در حالی که در فرکانس ارتعاشی دور از فرکانس طبیعی رفتار عکس می‌شود.

پیشنهاد می‌شود از مدل تیر تیموشنکو بدون صرف‌نظرکردن از ابعاد مقطع تیر در برابر طول آن استفاده شود. برای اعمال نیروهای آیروالاستیک در این تحقیق از بسط خطی (معادله ۲۴) استفاده شد که می‌توان در پژوهش‌های بعدی از بسط غیرخطی اختلاف فشار بهره برد. همچنین، پیشنهاد می‌شود برای صحت‌سنجی بیشتر معادلات استخراج‌شده از روش اجزای محدود نیز استفاده شود.

تشکر و قدردانی: موردی توسط نویسنده گزارش نشده است.

تأییدیه اخلاقی: موردی توسط نویسنده گزارش نشده است.

تعارض منافع: موردی توسط نویسنده گزارش نشده است.

سهم نویسندگان: مهدی عباسقلی‌پور، نگارنده مقدمه/روش‌شناس/پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث (۱۰۰٪)

harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*. 2009;18(2):25009-25018.

19- Kim SH, Ahn JH, Chung HM, Kang HW. Analysis of piezoelectric effects on various loading conditions for energy harvesting in a bridge system. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2011;167(2):468-483.

20- Ali SF, Friswell MI, Adhikari S. Analysis of energy harvesters for highway bridges. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2011;22(16):1929-1938.

21- Lueke J, Rezaei M, Moussa WA. Investigation of folded spring structures for vibration-based piezoelectric energy harvesting. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2014;24(12):125011.

22- Asgharzadeh M, Jahani K, Kianpoor A, Sadeghi MH. Energy Harvesting Investigation from Unimorph Trapezoidal Beam Vibrations using Distributed Parameters Method. *Modares Mechanical Engineering*. 2015;14(15):96-102.

23- Kim M, Dugundji J, Wardle BL. Efficiency of piezoelectric mechanical vibration energy harvesting. *Smart Materials and Structures*. 2015;24(5):055006.

24- Erturk A, Inman DJ. Piezoelectric energy harvesting. In: Erturk A, Inman DJ, editors. *Piezoelectric Energy Harvesting*. Hoboken: Wiley; 2011. pp. 112-221.

25- Davidson J, Mo Ch. Recent advances in energy harvesting technologies for structural health monitoring applications. *Smart Materials Research*. 2014;2014:410316.

26- T. Martinez, G. Pillonnet, F. Costa. A 15-mV inductorless start-up converter using a piezoelectric transformer for energy harvesting applications. *IEEE Transactions on Power Electronics*. 2018;33(3):2241-2253.

27- Jin W, Wang Z, Huang H, Hu X, He Y, Li M. High-performance piezoelectric energy harvesting of vertically aligned Pb(Zr,Ti)O₃ nanorod arrays. *RSC Advances*. 2018;8(14):7422-7427.

28- Song HC, Kumar P, Maurya D, Kang MG, Reynolds WT, Jeong DY, et al. Ultra-low resonant piezoelectric MEMS energy harvester with high power density. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2017;26(6):1226-1234.

29- Liu L, Pang Y, Yuan W, Zhu Z, Yang Y. A self-powered piezoelectric energy harvesting interface circuit with efficiency-enhanced P-SSHI rectifier. *Journal of Semiconductors*. 2018;39(4):045002.

30- Meirovitch L. *Analytical methods in vibration*. 1st Edition. London: Pearson; 1967.

31- Hosseini M, Lotfi Asadi F. Vibration analysis of a cantilever beam with piezoelectric layers under aeroelastic force and base excitation. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17(1):221-228. [Persian]

32- Rao SS. *Vibration of continuous systems*. 1st Edition. Hoboken: Wiley; 2007. pp. 110-231.

4- Jabbari M. The effect of strain nodes on the energy harvesting of the cantilever piezoelectric beam with the vibration mode excitation. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17(10):65-72. [Persian]

5- Sobhanirad S, Afsharfard A. Experimental study of galloping-based energy harvesting system using piezoelectric materials. *Modares Mechanical Engineering*. 2017;17(10):233-241. [Persian]

6- Karimi M, Tikani R, Ziaei-Rad S. Piezoelectric energy harvesting from bridge vibrations under moving consecutive masses. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;16(6):108-118. [Persian]

7- Williams CB, Yates RB. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. *Sensors and Actuators A: Physical*. 1996;52(1-3):8-11.

8- Goldfarb M, Jones LD. On the efficiency of electric power generation with piezoelectric ceramic. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 1999;121(3):566-571.

9- El-Hami M, Glynne-Jones P, White NM, Hill M, Beeby S, James E, et al. Design and fabrication of a new vibration-based electromechanical power generator. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2001;92(1-3):335-342.

10- Kasyap A, Lim JS, Johnson D, Horowitz S, Nishida T, Ngo K, et al. Energy reclamation from a vibrating piezoceramic composite beam. *Ninth International Congress on Sound and Vibration, Icsv9*, Unknown Date, Orlando, Florida. Florida: University of Florida; Unknown Publish Year.

11- Huang C, Lin YY, Tang TA. Study on the tip-deflection of a piezoelectric bimorph cantilever in the static state. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004;14(4):530.

12- Roundy S. On the effectiveness of vibration-based energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2005;16(10):809-823.

13- Roundy S, Leland ES, Baker J, Carleton E, Reilly E, Lai E, et al. Improving power output for vibration-based energy scavengers. *IEEE Pervasive Computing*. 2005;4(1):28-36.

14- Roundy S, Wright PK. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. *Smart Materials and Structures*. 2004;13(5):1131.

15- Stephen NG. On energy harvesting from ambient vibration. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;293(1-2):409-425.

16- Beeby SP, Tudor MJ, White NM. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measurement Science and Technology*. 2006;17(12):R175.

17- Ajitsaria J, Choe SY, Shen D, Kim DJ. Modeling and analysis of a bimorph piezoelectric cantilever beam for voltage generation. *Smart Materials and Structures*. 2007;16(2):447.

18- Erturk A, Inman DJ. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy