



## تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک متقارن صفحه دایره‌ای توپر با ضخامت متغیر

سعید رضایی<sup>1</sup>، مهدی سلمانی تهرانی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\*اصفهان، صندوق پستی 84156-83111، tehrani@cc.iut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 شهریور 1393

پذیرش: 29 آبان 1393

ارائه در سایت: 29 آذر 1393

کلید واژگان:

کمانش الاستیک-پلاستیک متقارن

صفحه دایره‌ای توپر

ضخامت متغیر

روش ریلی-ریتز

### چکیده

در این مقاله کمانش الاستیک-پلاستیک متقارن صفحه دایره‌ای توپر با ضخامت متغیر، با فرض صفحه نازک و بر اساس دو نظریه نمودی و تغییرشکل بررسی شده است. بارگذاری به صورت فشار یکنواخت روی لبه خارجی و شرایط مرزی لبه خارجی به دو شکل ساده و گیردار در نظر گرفته شده است. تغییر ضخامت صفحه در راستای شعاعی به شکل توانی فرض شده است. برای کمینه کردن معیار انتگرالی یگانگی پاسخ، بر پایه روش ریلی-ریتز، یک تابع حدس شامل تعدادی ضریب مجهول که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کند، برای جابه‌جایی عرضی صفحه انتخاب شده است. آن‌گاه با جایگذاری تابع حدس در معیار پایداری و کمینه‌سازی انتگرال نسبت به ضریب‌های مجهول، یک دستگاه معادلات جبری همگن بر حسب ضریب‌های مجهول به دست می‌آید. برای داشتن پاسخ غیر بدیهی و با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، بار بحرانی کمانش به دست می‌آید. به منظور ارزیابی تحلیل، نتایج در حالت ضخامت ثابت با نتایج مراجع پیشین مقایسه و سازگاری خوبی بین نتایج مشاهده شده است. آن‌گاه برای صفحه با دو جنس آلومینیوم تجاری و فولاد 1403، اثر اندازه و چگونگی تغییرات ضخامت صفحه و نیز نوع تکیه‌گاه بر بار بحرانی کمانش بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند در حالتی که ضخامت مرکز 10% از ضخامت لبه بیشتر باشد نسبت به حالتی که ضخامت مرکز 10% از ضخامت لبه کمتر باشد، بار بحرانی کمانش می‌تواند تا حدود 40% افزایش یابد.

## Elastic-Plastic Symmetrical Buckling Analysis of a Solid Circular Plate of Variable Thickness

Saeid Rezaei, Mehdi Salmani Tehrani\*

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

\*P.O.B 84156-83111, Isfahan, Iran, tehrani@cc.iut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 14 September 2014  
Accepted 20 November 2014  
Available Online 20 December 2014

**Keywords:**  
Elastic-Plastic Symmetrical Buckling  
Solid Circular Plate  
Variable Thickness  
Rayleigh-Ritz Method

### ABSTRACT

In this paper, elastic-plastic symmetrical buckling of a thin solid circular plate of variable thickness under uniform edge pressure is investigated, based on both Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT). Two kinds of simply supported and clamped boundary conditions have been considered. A power-law function was assumed for thickness variation. To minimize the integral uniqueness criterion, based on Rayleigh-Ritz method, transversal displacement was approximated by a test function which includes some unknown coefficients and satisfies geometric boundary conditions. Substituting the test function in the stability criterion and minimizing with respect to the unknown coefficients results in a homogeneous algebraic set of equations in terms of unknown coefficients. For non-trivial solution, the determinant of coefficient matrix should be equated to zero. Using this equation, critical buckling load is determined. The results of the present study were compared with existing analytical solutions for circular plate of constant thickness and a good agreement was observed. This clearly shows the validity of the presented analysis. Then the effect of thickness variation and boundary conditions type on the critical buckling load was investigated for commercial aluminum and steel 1403 materials. The results show that when the thickness of circular plate center is 10% greater than its edge thickness the buckling load may increase up to 40% compared with the circular plate for which the center thickness is 10% less than its edge thickness.

### 1- مقدمه

پیستون‌ها اشاره کرد. خطاهای موجود در فرآیند تولید و یا نیاز به صفحه‌هایی با ضخامت متغیر در موارد خاص، باعث می‌شود که تغییرات ضخامت و نحوه تغییرات آن از اهمیت خاصی برخوردار شود. به دلیل ضخامت کم صفحه‌ها نسبت به ابعاد دیگر آن‌ها، طراحی مقاومتی این سازه‌ها معمولاً بر اساس میزان مستعد بودن سازه برای کمانش انجام می‌شود. کمانش پدیده‌ای است

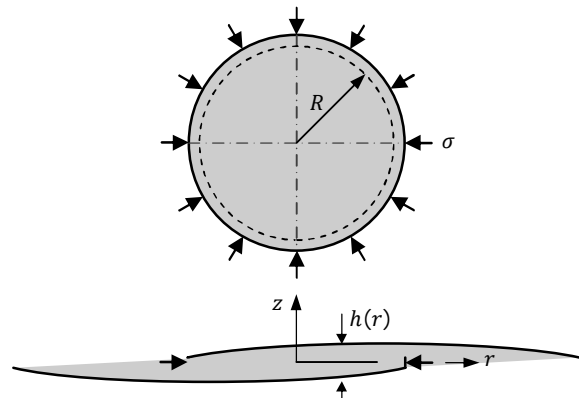
صفحه‌ها به شکل گسترده‌ای در سازه‌های مهندسی مانند فضاپیماها، کشتی‌ها، ماشین‌ها و ساختمان‌ها استفاده می‌شوند. در این میان می‌توان به طور خاص به کاربرد صفحه‌های دایره‌ای در دیافراگم‌های مخازن تحت فشار، توربین‌های بخار، صفحه‌های ساخته شده از مواد مرکب در سرپوش سیلندرها و

بار بحرانی کمتری نسبت به نظریهٔ نمودی پیش‌بینی می‌کند. همچنین آن‌ها نشان دادند که با افزایش ضخامت، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

در زمینهٔ تحلیل کمانش الاستیک صفحه با ضخامت متغیر نیز پژوهش‌هایی انجام شده است. بوشان و همکارانش [16] کمانش الاستیک صفحهٔ دایره‌ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر تحت بارگذاری شعاعی با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف تکیه‌گاهی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای حل مسأله از روش اجزای محدود استفاده کردند و نشان دادند که با افزایش ضخامت از لبه تا مرکز، سفتی صفحه بیشتر شده و در نتیجه بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. سیانسیو و ریس [17] کمانش الاستیک صفحه‌های دایره‌ای با ضخامت متغیر، تحت شرایط مرزی مختلف را به روش ریلی-ریتز بهینه شده بررسی کردند. آن‌ها تغییرات ضخامت را به صورت نمایی در نظر گرفتند و نشان دادند که نظریهٔ تغییرشکل، بار بحرانی کمتری را نسبت به نظریهٔ نمودی پیش‌بینی می‌کند. نایی و همتی [18] کمانش الاستیک صفحهٔ دایره‌ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر خطی با تکیه‌گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش را تحلیل کردند. آن‌ها برای این کار از روش ریلی-ریتز بهینه شده استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که در یک ضخامت ثابت، افزایش شعاع خارجی منجر به کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود. فره‌ت‌نیا و گل‌شاه [19] به بررسی کمانش الاستیک صفحهٔ دایره‌ای و حلقه‌ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر به روش ریلی-ریتز بهینه شده پرداختند. آن‌ها تغییرات ضخامت را به صورت خطی در نظر گرفته و نشان دادند که با تغییر تکیه‌گاه از ساده به گیردار، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

در داخل کشور، پژوهش‌های اندکی در زمینهٔ کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه‌ها منتشر شده است. معارف‌دوست و کدخدایان [20] به مقایسه‌ی نظریه‌های تغییرشکل و نمودی در تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ نازک مستطیلی به کمک روش یک-چهارم تفاضلی تعمیم‌یافته پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با گیردار شدن تکیه‌گاه صفحه، به دلیل افزایش سطح تنش، کمانش پلاستیک در آن سریع‌تر رخ می‌دهد. همچنین نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که اختلاف دو نظریهٔ تغییرشکل و نمودی در حالت تنش تک‌محوره افزایش می‌یابد.

بر اساس جستجوی نگارندگان، تاکنون پژوهشی در زمینهٔ بررسی اثر نحوهٔ تغییرات ضخامت بر روی بار بحرانی کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ دایره‌ای منتشر نشده است. این مقاله به بررسی کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ دایره‌ای نازک توپر تحت فشار شعاعی و با در نظر گرفتن تغییرات ضخامت می‌پردازد. شکل 1 به صورت طرح‌واره، هندسه و بارگذاری مسأله مورد بررسی در این مقاله را نشان می‌دهد.



شکل 1 نمایش طرح‌واره‌ی هندسه و بارگذاری صفحه‌ی دایره‌ای توپر با ضخامت متغیر، تحت فشار یکنواخت شعاعی و با تکیه‌گاه ساده

که در آن یک سازه، تحت یکی از موده‌های ناپایداری متحمل تغییرشکل‌های بزرگ قابل مشاهده می‌شود. چنان‌چه در لحظهٔ وقوع کمانش، وضعیت تانسور تنش در هر نقطه از جسم به‌گونه‌ای باشد که تنش معادل در آن نقطه کمتر از تنش تسلیم اولیهٔ جسم باشد، کمانش الاستیک و در غیر این صورت، کمانش الاستیک-پلاستیک رخ خواهد داد. کمانش اجزای سازه‌ها ممکن است روی مقاومت و یا سفتی<sup>1</sup> تمام سازه تأثیر بگذارد و یا حتی موجب شکست غیرمنتظرهٔ سازه بشود. بنابراین، مهم است که میزان بار بحرانی کمانش یک سازه به‌منظور جلوگیری از شکست نابه‌هنگام آن، تعیین گردد. پژوهش‌های زیادی بر روی تحلیل کمانش الاستیک صفحه‌های نازک دایره‌ای انجام شده است. از جمله می‌توان به کارهای برایان [1]، یاماکی [2]، تیموشنکو [3] و ماجومدار [4] اشاره کرد. محاسبهٔ بار بحرانی کمانش الاستیک از آن جهت اهمیت دارد که می‌تواند به‌عنوان یک حد بالایی در طراحی‌های مهندسی مورد استفاده قرار گیرد. اما در مورد تحلیل‌های پیشرفته‌تر در زمینهٔ کمانش، دو نظریهٔ متداول در پلاستیسیته به‌کار گرفته شده‌اند. این نظریه‌ها عبارتند از نظریهٔ تغییرشکل<sup>2</sup> و نظریهٔ نمودی<sup>3</sup>. کافمن [5]، ایلیوشین [6]، استول [7] و شربورن و غزالی [8] را می‌توان از جمله توسعه‌دهندگان نظریهٔ تغییرشکل دانست. هندلمن و پراگر [9] و پیرسون [10] نیز به توسعهٔ نظریهٔ نمودی در تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک پرداخته‌اند.

دوربان [11] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه‌های دایره‌ای با سوراخ مرکزی تحت بارگذاری برشی در شرایط مختلف تکیه‌گاهی را به روش عددی اجزای محدود مورد بررسی قرار داد. نتایج وی نشان داد که نظریهٔ تغییرشکل، بار بحرانی کمتری نسبت به نظریهٔ نمودی پیش‌بینی می‌کند. همچنین او نشان داد که نتایج مربوط به نظریهٔ تغییرشکل، هم‌خوانی بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد. هنگ و همکارانش [12] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ دایره‌ای ضخیم با در نظر گرفتن تأثیر تغییرشکل برشی تحت شرایط مرزی مختلف را به روش ریلی-ریتز مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که چنان‌چه برای صفحهٔ ضخیم از فرض صفحهٔ نازک استفاده شود، بار بحرانی به‌مراتب بیشتری به‌دست خواهد آمد و پاسخ‌ها خطای زیادی خواهند داشت. دوربان و زوکرم [13] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ مستطیلی در بارگذاری دومحورهٔ کششی/فشاری را تحت شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی کردند. آن‌ها برای این کار از روش جداسازی متغیرها استفاده کردند و نشان دادند که وقتی لبهٔ گیردار تحت فشار قرار گیرد، نسبت به لبهٔ ساده، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. همچنین آن‌ها اثر تغییرشکل برشی را نیز در نظر گرفتند و نشان دادند که در نظر گرفتن آن، بیشتر بر روی پیش‌بینی بار بحرانی توسط نظریهٔ نمودی اثر می‌گذارد. کاسل و برمک [14] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحهٔ دایره‌ای با سوراخ مرکزی تحت فشار شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای این کار، از روش اجزای محدود استفاده کرده و تکیه‌گاه‌های مختلف را بررسی کردند. همچنین آن‌ها در تحلیل خود از مدل دوخطی برای منحنی تنش-کرنش استفاده کردند. آن‌ها اثر کارسختی بر روی بار بحرانی کمانش را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که اختلاف بین پاسخ‌های دو نظریهٔ تغییرشکل و نمودی بین 0% تا 10% است. وانگ و همکارانش [15] یکی از جامع‌ترین تحلیل‌های کمانش پلاستیک در مورد صفحه‌های ضخیم را انجام دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که نظریهٔ تغییرشکل

1- Stiffness  
2- Deformation Theory  
3- Incremental Theory

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1 - 2\nu) \frac{T}{E} - 3 \left( 1 - \frac{T}{S} \right) \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{T}{S} \right) \right] \quad (5)$$

پارامترهای  $E$ ،  $T$  و  $S$  در رابطه‌های (4) و (5) به ترتیب نشان‌گر مدول الاستیسیته، مدول مماسی و مدول وترتی ماده هستند. این پارامترها به صورت طرح‌واره در شکل 2 برای یک نقطه دلخواه مانند A از منحنی تنش-کرنش نشان داده شده‌اند.

در این مقاله برای رابطه تنش-کرنش از مدل رامبرگ-آزگود که به وسیله رابطه (6) بیان می‌شود [11]، استفاده شده است.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left( \frac{\sigma}{E} \right)^c \quad (6)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (6)، نسبت‌های مدول مماسی و مدول وترتی به مدول الاستیسیته، بر اساس رابطه‌ی (7) به دست می‌آیند.

$$\frac{T}{E} = \frac{1}{1 + k \left( \frac{\sigma}{E} \right)^{c-1}}$$

$$\frac{S}{E} = \frac{1}{1 + k \left( \frac{\sigma}{E} \right)^{c-1}} \quad (7)$$

برای تعیین شرایط آستانه ناپایداری و نقطه دوشاخگی، از معیار یگانگی پاسخ استفاده می‌شود [15]. معیار انتگرالی یگانگی پاسخ برای مسأله‌ی مورد بررسی به صورت رابطه‌ی (8) بیان می‌شود [15].

$$\int_V \left\{ (\sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta}) - \sigma \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^2 \right\} dV > 0 \quad (8)$$

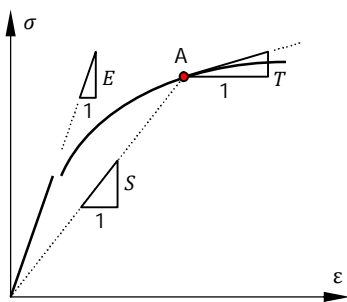
در رابطه‌ی (8)،  $\sigma$  فشار یکنواخت شعاعی وارد بر لبه صفحه دایره‌ای است.

با جایگذاری رابطه‌ی (2) برای نرخ کرنش و معادلات ساختاری (3) در رابطه‌ی (8)، معیار انتگرالی یگانگی پاسخ برای صفحه با ضخامت متغیر و تابع مختصه شعاعی  $r$ ، به صورت رابطه (9) تبدیل می‌شود.

$$\int_0^R \int_{-\frac{h(r)}{2}}^{+\frac{h(r)}{2}} \left\{ E \left[ \alpha \left( \frac{dv_r}{dr} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{v_r}{r} \right) \left( \frac{dv_r}{dr} \right) + \gamma \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 \right] - \sigma \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^2 \right\} r dz dr > 0 \quad (9)$$

با جایگذاری  $v_r$  برحسب  $v_z = \dot{w}$  از رابطه‌ی (1) در رابطه‌ی (9) و سپس ضرب نتیجه حاصل در  $(dt)^2$ ، رابطه‌ی (10) به دست می‌آید.

$$\int_0^R \int_{-\frac{h(r)}{2}}^{+\frac{h(r)}{2}} \left\{ E \left[ \alpha z^2 \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\beta z^2 \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \gamma z^2 \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] - \sigma \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right\} r dz dr > 0 \quad (10)$$



شکل 2 نمایش طرح‌واره‌ی مدول الاستیسیته، مدول مماسی و مدول وترتی در نقطه‌ی دلخواه A از منحنی تنش-کرنش

در شکل 1، شعاع  $R$  نشان‌گر فاصله مرکز صفحه تا تکیه‌گاه است. چرا که در عمل محل تکیه‌گاه کمی با لبه صفحه فاصله دارد. منظور از شعاع صفحه نیز همین شعاع  $R$  است. در این مقاله دو گونه تکیه‌گاه بررسی می‌شوند که عبارتند از تکیه‌گاه ساده و گیردار. هم‌چنان که در نمایش طرح‌واره متداول است، تکیه‌گاه ساده، همانند شکل 1، با دایره خط‌چین نشان داده می‌شود. به صورت مشابه تکیه‌گاه گیردار با دایره با خط توپر نشان داده می‌شود.

## 2- معادلات حاکم

صفحه‌ی دایره‌ای توپر به شعاع  $R$  و ضخامت متغیر  $h(r)$  را که فشار شعاعی یکنواخت  $\sigma$  روی لبه بیرونی آن وارد می‌شود، همانند شکل 1، در نظر بگیرید. بر اساس فرضیه صفحه نازک، میدان سرعت قابل قبول برای تغییرشکل متقارن محوری این صفحه به صورت رابطه‌ی (1) نوشته می‌شود [15].

$$v_r = -z \frac{dv_z}{dr}$$

$$v_\theta = 0$$

$$v_z = \dot{w} \quad (1)$$

در رابطه (1)  $\dot{w}$  سرعت در راستای عرضی است.

در این مقاله کماتش متقارن محوری صفحه دایره‌ای تحلیل می‌شود. بنابراین کمیت‌ها به مختصه محیطی  $\theta$  وابسته نیستند [15]. میدان نرخ کرنش متناظر با رابطه‌ی (1) در تغییرشکل متقارن محوری، به وسیله رابطه‌ی (2) محاسبه می‌شوند [15].

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = -z \frac{d^2 v_z}{dr^2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{z}{r} \frac{dv_z}{dr}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{dv_z}{dr} + \frac{dv_z}{dr} = 0 \quad (2)$$

مؤلفه‌های دیگر نرخ کرنش نیز صفر هستند. با استفاده از شکل نرخ معادلات ساختاری الاستیک-پلاستیک، نرخ مؤلفه‌های غیر صفر تنش بر حسب مؤلفه‌های کرنش بر اساس رابطه‌های (3) به دست می‌آیند [15].

$$\dot{\sigma}_{rr} = E(\alpha \varepsilon_{rr} + \beta \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = E(\beta \varepsilon_{\theta\theta} + \gamma \varepsilon_{rr}) \quad (3)$$

در رابطه‌ی (3)  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  ثابت‌هایی هستند که بر اساس ضریب پواسون و نسبت مدول‌های مماسی و وترتی به مدول الاستیسیته بیان می‌شوند.

این ثابت‌ها برای دو حالت نظریه‌های تغییرشکل و نموی متفاوت هستند. برای نظریه نموی این ثابت‌ها مطابق رابطه‌ی (4) به دست می‌آیند [15].

$$\rho = (5 - 4\nu) - (1 - 2\nu)^2 \frac{T}{E}$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left( 1 + 3 \frac{T}{E} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1 - 2\nu) \frac{T}{E} \right]$$

$$\gamma = \frac{4}{\rho} \quad (4)$$

برای نظریه تغییرشکل نیز ثابت‌های  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  بر اساس رابطه‌ی (5) به دست می‌آیند [15].

$$\rho = 3 \frac{E}{S} + (1 - 2\nu) \left[ 2 - (1 - 2\nu) \frac{T}{E} - 3 \left( 1 - \frac{T}{S} \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left( 1 + 3 \frac{T}{S} \right)$$

مقاله از روش ریلی-ریتز استفاده شده است. در این روش یک خانواده از تابع‌ها که هر عضو از آن شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا می‌کنند، انتخاب می‌شود. آن‌گاه تابع جابه‌جایی بی‌بعد  $\bar{w}$  به‌صورت یک ترکیب خطی از جمله از خانواده انتخاب شده، در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله دو نوع شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار در لبه صفحه، بررسی شده است. شرط مرزی هندسی برای تکیه‌گاه ساده به‌وسیله رابطه‌ی (16) و برای تکیه‌گاه گیردار به‌وسیله رابطه‌ی (17) بیان می‌شوند.

$$\bar{w}(\bar{r} = 1) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{cases} \bar{w}(\bar{r} = 1) = 0 \\ \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}}(\bar{r} = 1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

در این مقاله برای تخمین تابع جابه‌جایی بی‌بعد،  $\bar{w}$ ، از خانواده تابع‌های مثلثاتی استفاده شده است. تابع  $\bar{w}$  برای تکیه‌گاه ساده به‌صورت رابطه‌ی (18) و برای تکیه‌گاه گیردار به‌صورت رابطه‌ی (19) انتخاب شده‌اند.

$$\bar{w} = \sum \bar{D}_i \sin\left(i \frac{\pi}{2} (1 - \bar{r})\right), \quad (i = 1 \text{ to } N) \quad (18)$$

$$\bar{w} = \sum \bar{D}_i \left[ \sin\left(i \frac{\pi}{2} (1 - \bar{r})\right) \right]^2, \quad (i = 1 \text{ to } N) \quad (19)$$

در رابطه‌های (18) و (19)،  $N$  تعداد جمله‌ها را نشان می‌دهد و  $\bar{D}_i$  ضرایب ثابت بی‌بعد و مجهول هستند. به‌آسانی می‌توان نشان داد که رابطه‌ی (18) شرط مرزی (16) و رابطه‌ی (19) شرط‌های مرزی (17) را ارضا می‌کنند.

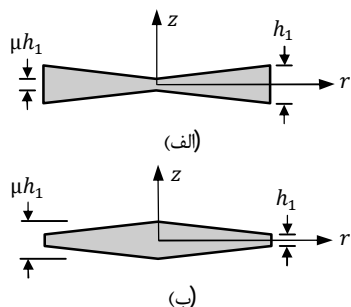
با جایگذاری تابع  $\bar{w}$  از یکی از دو رابطه‌ی (18) یا (19)، بسته به نوع تکیه‌گاه، و پس از جایگذاری تابع  $\bar{h}(\bar{r})$  از رابطه‌ی (15)، انتگرال رابطه‌ی (14) به‌صورت تابعی بر حسب ثابت‌های بی‌بعد مجهول  $\bar{D}_i$  محاسبه می‌شود.

برای کمینه‌سازی حاصل این انتگرال، لازم است مشتق نسبی عبارت حاصل انتگرال نسبت به هر یک از  $\bar{D}_i$ ها برابر صفر قرار داده شود. با مساوی صفر قرار دادن مشتق انتگرال نسبت به هر یک از  $\bar{D}_i$ ها، یک دستگاه  $N$  معادله و  $N$  مجهولی خطی و همگن همانند رابطه‌ی (20) نتیجه خواهد شد.

$$[K]_{N \times N} [\bar{D}]_{N \times 1} = [0]_{N \times 1} \quad (20)$$

برای آن‌که دستگاه خطی و همگن (20) پاسخ غیر بدیهی داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب  $[K]$  برابر صفر شود. کوچکترین ریشه این معادله جبری، بار بحرانی بی‌بعد کمانش،  $\bar{\sigma}_{cr}$ ، خواهد بود [15].

در این مقاله برای محاسبه بار بحرانی کمانش، یک برنامه در محیط نرم‌افزار میپل<sup>1</sup> تدوین شده است. با اجرای این برنامه، ضخامت بی‌بعد لبه



شکل 3 نمایش طرح‌واره‌ی چگونگی تغییر ضخامت برای صفحه با ضخامت لبه  $h_1$  در حالت تغییرات خطی ضخامت ( $n_h=1$ ) و به‌ازای دو حالت (الف)  $\mu < 1$  و (ب)  $\mu > 1$

در رابطه‌ی (10)، تنها جمله‌های شامل  $z^2$  تابع مختصه ضخامت،  $z$  هستند. بعلاوه عبارت‌های ضریب  $z^2$  مستقل از  $z$  هستند. در نتیجه محاسبه-ی انتگرال داخلی بر حسب ضخامت در رابطه‌ی (10)، به رابطه‌ی (11) می‌انجامد.

$$\int_0^R \left\{ \frac{h(r)^3}{12} \left[ \alpha \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \gamma \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] - h(r) \frac{\sigma}{E} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right\} r dr > 0 \quad (11)$$

برای صفحه با ضخامت ثابت، رابطه‌ی (11) به رابطه‌ی (12) ساده می‌شود.

$$\int_0^R \left\{ \alpha \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \gamma \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{12}{h^2} \frac{\sigma}{E} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right\} r dr > 0 \quad (12)$$

### 3- روش حل

بار بحرانی آستانه‌ی کمانش، با استفاده از کمینه‌سازی انتگرال رابطه‌ی (11) (یا رابطه‌ی (12) برای حالت ضخامت ثابت) بدست می‌آید [15]. در این بخش ابتدا با معرفی کمیت‌های بی‌بعد، شکل بی‌بعد معادلات استخراج می‌شوند. سپس روند کلی حل شرح داده خواهد شد.

#### 3-1- بی‌بعدسازی متغیرها و معادله‌های حاکم

متغیرها و کمیت‌های بی‌بعد  $\bar{r}$ ،  $\bar{h}$ ،  $\bar{w}$  و  $\bar{\sigma}$  بر اساس رابطه‌ی (13) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R} \\ \bar{h} &= \frac{h}{R} \\ \bar{w} &= \frac{w}{R} \\ \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{E} \end{aligned} \quad (13)$$

با استفاده از کمیت‌های بی‌بعد معرفی شده در رابطه‌ی (13)، شکل بی‌بعد شده رابطه‌ی (11) به‌صورت رابطه‌ی (14) بدست می‌آید.

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\bar{h}(\bar{r})^3}{12} \left[ \alpha \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{r}^2} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \right) \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{r}^2} \right) + \gamma \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \right)^2 \right] - \bar{h}(\bar{r}) \bar{\sigma} \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \right)^2 \right\} \bar{r} d\bar{r} > 0 \quad (14)$$

در این مقاله برای بررسی اثر تغییر ضخامت، تابع ضخامت بی‌بعد،  $\bar{h}(\bar{r})$ ، به‌صورت رابطه‌ی توانی (15) فرض شده است.

$$\bar{h}(\bar{r}) = \frac{h_1}{R} ((1 - \mu) \bar{r}^{n_h} + \mu) = \bar{h}_1 ((1 - \mu) \bar{r}^{n_h} + \mu) \quad (15)$$

در رابطه‌ی (15) نشان‌گر ضخامت لبه صفحه و  $\mu$  بیان‌گر نسبت ضخامت مرکز صفحه به ضخامت لبه صفحه است. پارامتر  $n_h$  نیز چگونگی تغییر ضخامت از لبه به سمت مرکز صفحه را مشخص می‌کند. برای نمونه چگونگی تغییرات ضخامت برای حالت تغییرات خطی ( $n_h=1$ ) و در دو حالت  $\mu < 1$  و  $\mu > 1$  به‌صورت طرح‌واره در شکل 3 نشان داده شده است.

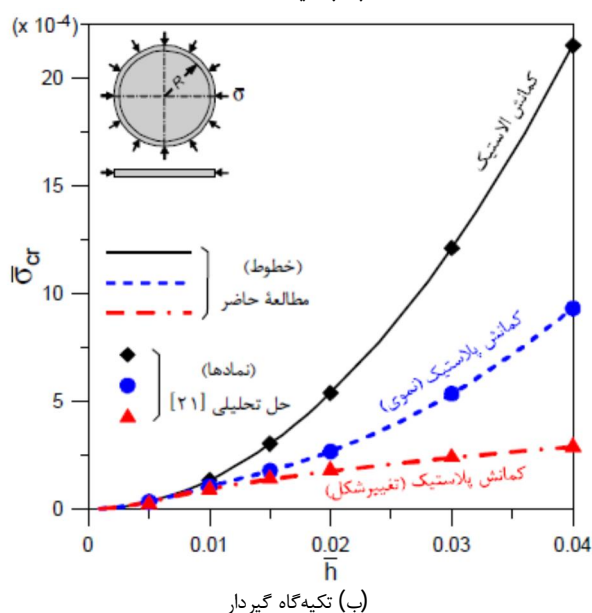
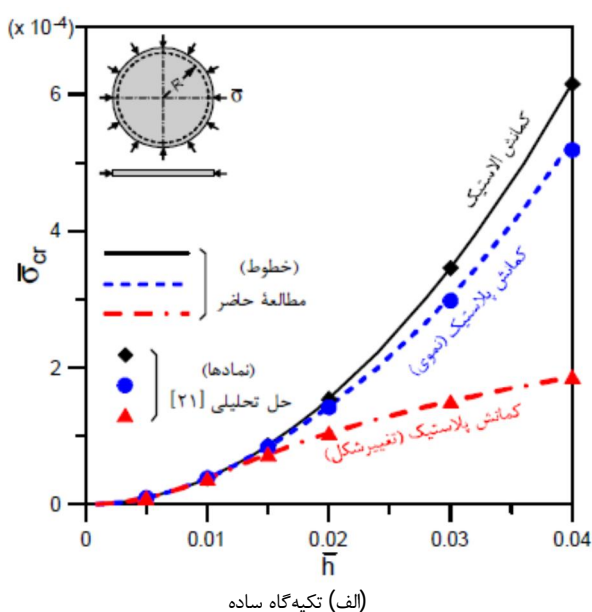
#### 3-2- روند کلی حل

برای کمینه‌سازی رابطه انتگرالی (14) و محاسبه بار بحرانی کمانش، در این

1- Maple

نموی و تغییر شکل،  $\bar{\sigma}_{cr}$  را بر حسب نسبت ضخامت به شعاع صفحه،  $\bar{h}$ ، برای صفحه آلومینیومی با ضخامت ثابت و دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار نشان می‌دهند.

بیشترین مقدار خطا در مقایسه‌ی نتایج این مقاله با حل تحلیلی مرجع [21] برابر 2/5% و مربوط به نظریه‌ی نموی است. سازگاری بسیار خوبی که بین نتایج تحلیل این مقاله و پاسخ‌های تحلیلی مرجع [21] در نمودارهای شکل 5 مشاهده می‌شود به‌روشنی نشان‌دهنده‌ی اعتبار نتایج تحلیل این مقاله است. همچنین مقایسه‌ی نمودارهای بخش (الف) و (ب) شکل 5 نشان می‌دهد، همان‌گونه که انتظار می‌رود، بار کمانش در حالت تکیه‌گاه گیردار بزرگتر از حالت تکیه‌گاه ساده است. این تغییر نوع تکیه‌گاه بر روی بار کمانش الاستیک بیشترین اثر و بر روی بار کمانش الاستیک-پلاستیک به‌دست آمده از نظریه تغییر شکل کمترین اثر را دارد.



شکل 5 مقایسه‌ی بار بی‌بعد کمانش با نتایج تحلیلی مرجع [21]. برای ورق آلومینیومی با ضخامت ثابت و مشخصات جدول 1، برای دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار

صفحه، پارامتر توان  $n$  و نسبت ضخامت  $\mu$  به‌عنوان ورودی دریافت می‌شود. آن‌گاه بار بحرانی بی‌بعد کمانش،  $\bar{\sigma}_{cr}$ ، به‌عنوان خروجی محاسبه می‌شود.

#### 4- نتایج عددی و بحث

پیش از بررسی اثر تغییر ضخامت بر پیش‌بینی بار بحرانی کمانش، ابتدا نتایج به‌دست آمده ارزیابی و اعتبار آن‌ها نشان داده می‌شود. سپس اثر در نظر گرفتن تغییر ضخامت بر بار بحرانی کمانش بررسی می‌شود. در این مقاله برای ارزیابی عددی نتایج، از دو ماده آلومینیوم تجاری و فولاد 1403 که ثابت‌های رامبرگ-آزگود آن‌ها از مرجع [11] برگرفته شده و در جدول 1 نشان داده شده است، استفاده می‌شود.

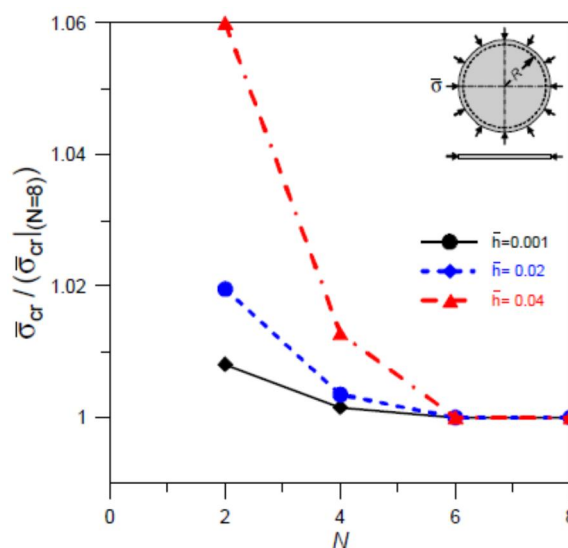
#### 4-1- ارزیابی نتایج

برای ارزیابی نتایج، ابتدا روند همگرایی بار بحرانی کمانش بر حسب افزایش تعداد جمله‌ها در تابع حدس بررسی می‌شود. پس از آن، برای حالت صفحه با ضخامت ثابت، نتایج این مقاله با نتایج تحلیلی موجود مقایسه می‌شوند. روند همگرایی پاسخ‌ها برای تعداد جمله‌های مختلف، به‌ازای سه مقدار مختلف  $\bar{h}$  در نمودارهای شکل 4 نشان داده شده است. در شکل 4، بار بحرانی بی‌بعد کمانش برای هر  $\bar{h}$ ، با تقسیم بر مقدار آن به‌ازای  $N=8$  جمله، یک‌گانه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد جمله‌ها، پاسخ‌ها همگرا می‌شوند. به‌گونه‌ای که پاسخ‌ها به‌ازای تابع حدس با  $N=6$  و  $N=8$  جمله یکسان شده‌اند. بر همین اساس و برای کاهش زمان محاسبات، در محاسبات بعدی از تابع حدس شش-جمله‌ای استفاده شده است.

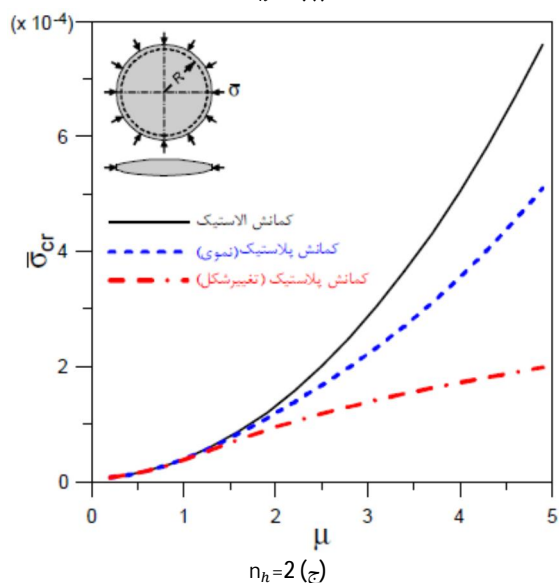
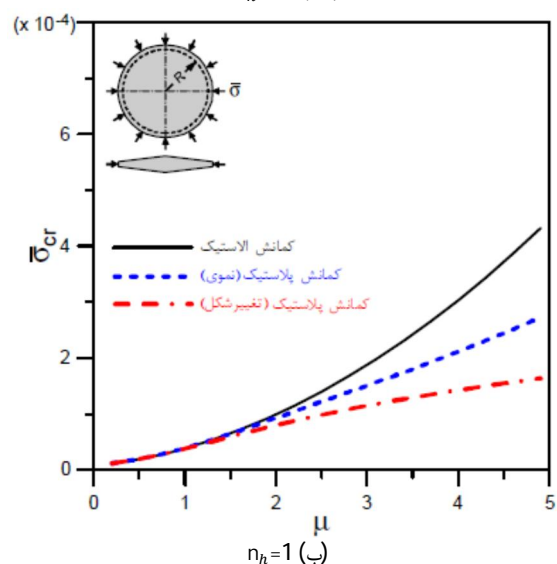
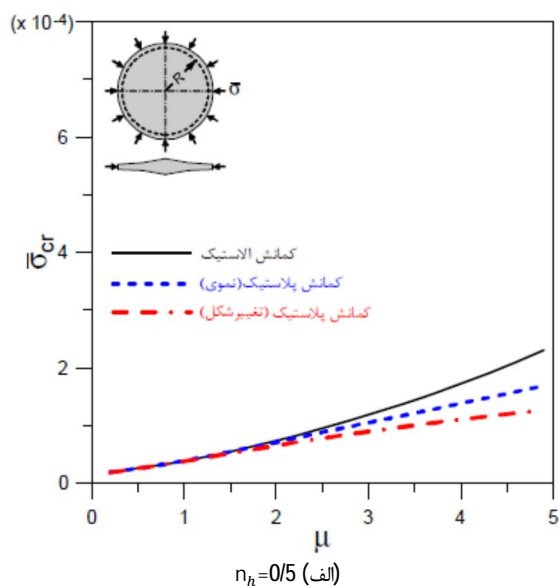
اکنون بمنظور ارزیابی نتایج، بار بحرانی کمانش به‌دست آمده از تحلیل این مقاله با نتایج تحلیلی مشابه از مرجع [21]، مقایسه می‌شوند. نمودارهای شکل 5 بار بحرانی کمانش الاستیک و الاستیک-پلاستیک بر اساس نظریه‌های

جدول 1 ثابت‌های رابطه رامبرگ-آزگود برای آلومینیوم تجاری و فولاد 1403 [11]

جنس	پارامتر		
	$E$ (GPa)	$k$	$c$
آلومینیوم تجاری	68/7	$1/27 \times 10^{10}$	3/72
فولاد 1403	210	$3/7 \times 10^{12}$	4/9



شکل 4 نمودار روند همگرایی تنش بحرانی بی‌بعد یک‌گانه شده، بر حسب افزایش تعداد جمله‌های تابع حدس جابه‌جایی، برای ورق آلومینیومی با مشخصات جدول 1



شکل 6 بار بی‌بعد کماتش بر حسب نسبت ضخامت، برای ورق آلومینیومی با تکیه‌گاه ساده و سه حالت مختلف تغییر ضخامت، (الف)  $n_h=0/5$ ، (ب)  $n_h=1$  و (ج)  $n_h=2$

2-4- بررسی اثر تغییر ضخامت بر بار بحرانی کماتش الاستیک-پلاستیک در این بخش اثر چگونگی تغییر ضخامت و اندازه آن بر بار بحرانی بی‌بعد کماتش،  $\bar{\sigma}_{cr}$ ، بررسی می‌شود. برای این منظور نمودار بار بحرانی کماتش الاستیک و الاستیک-پلاستیک بر حسب نسبت ضخامت مرکز به لبه،  $\mu$ ، برای ورق با دو جنس آلومینیومی و فولادی، در شکل‌های 6 تا 9 رسم شده‌اند. در نمودار شکل‌های 6 و 7 تکیه‌گاه ساده فرض شده و در شکل‌های 8 و 9 تکیه‌گاه به صورت گیردار در نظر گرفته شده است. برای بررسی اثر چگونگی تغییر ضخامت بر بار کماتش، در هر حالت نمودار بار کماتش برای سه مقدار مختلف توان تغییر ضخامت رسم شده‌اند ( $n_h=2$  و  $n_h=1$ ،  $n_h=0/5$ ).

لازم است توجه شود که شکل‌های طرح‌واره داخل نمودارها که چگونگی تغییر ضخامت را نشان می‌دهند، به صورت نمادین ارائه شده‌اند. زیرا همان‌گونه که پیشتر اشاره شد، در محدوده  $\mu < 1$  ضخامت مرکز کوچکتر از ضخامت لبه و در محدوده  $\mu > 1$  ضخامت مرکز بزرگتر از ضخامت لبه صفحه است.

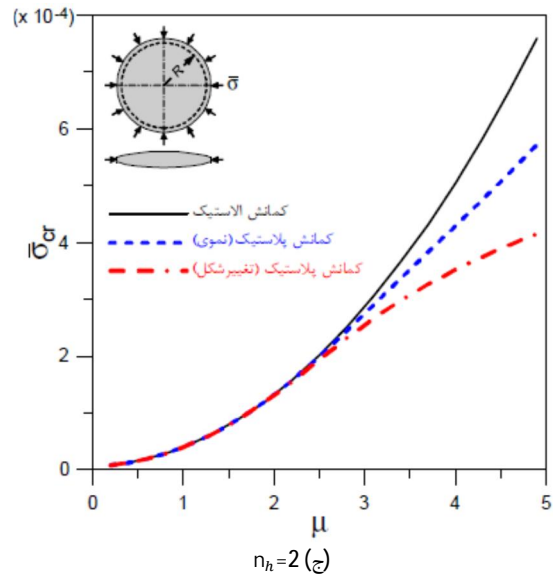
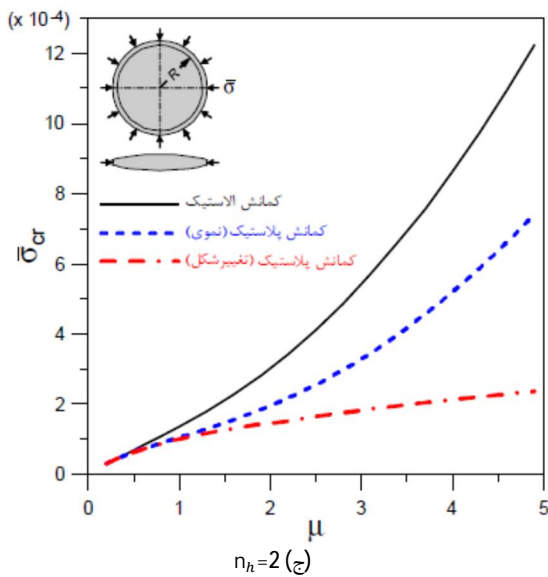
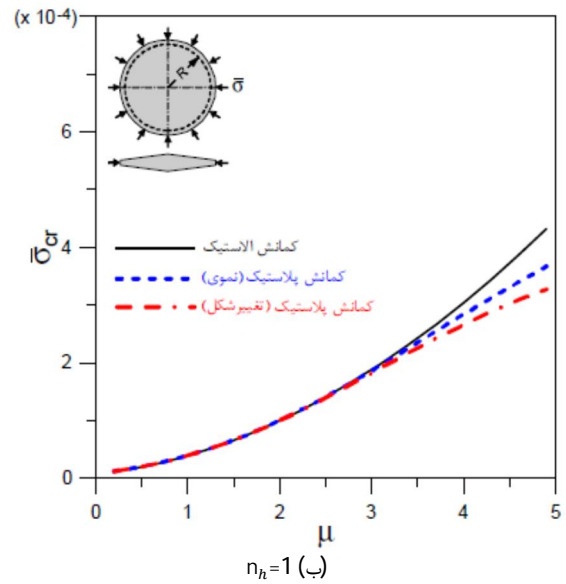
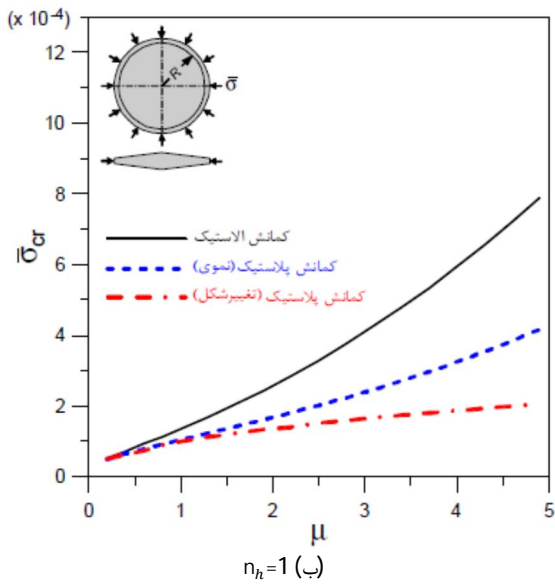
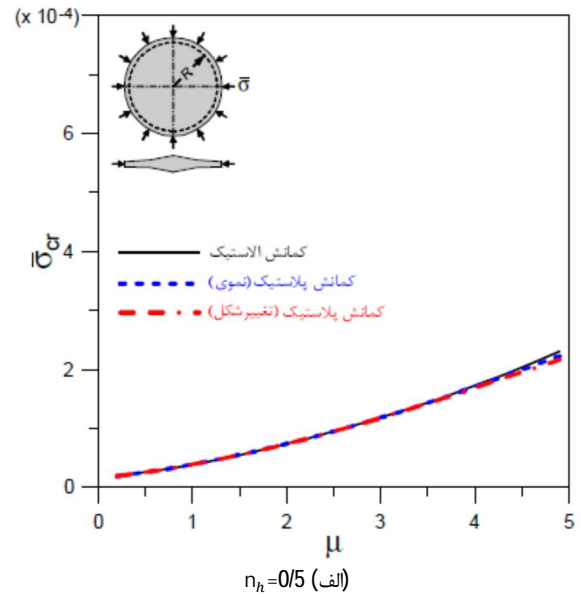
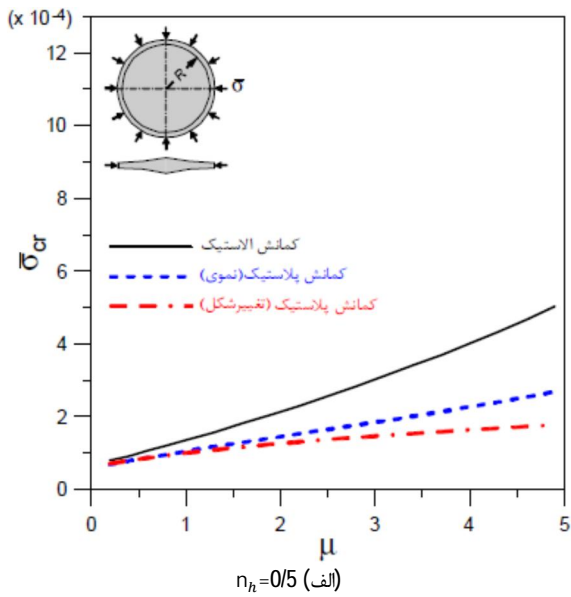
نخستین نتیجه مشترک در همه نمودارهای شکل‌های 6 تا 9 این است که بار بحرانی کماتش الاستیک از بار بحرانی کماتش الاستیک-پلاستیک بزرگتر است. این نتیجه از آن جهت که با فرض رفتار الاستیک، سفتی صفحه افزایش می‌یابد، بدیهی است [15 و 21]. هم‌چنین در بین دو نظریه نمودی و تغییرشکل، نظریه تغییرشکل پیش‌بینی محتاطانه‌تری از بار بحرانی کماتش دارد. این نتیجه در مراجع دیگر مانند [15] نیز مشاهده می‌شود. اما دلیل مشخصی برای این موضوع بیان نشده است. البته در مرجع [11] نشان داده شده است که برای صفحه دایره‌ای توخالی با ضخامت ثابت، نتایج نظریه تغییرشکل به نتایج تجربی نزدیک‌تر است. مقایسه نمودارهای شکل‌های 6 و 8 و هم‌چنین مقایسه نمودارهای شکل‌های 7 و 9 نشان می‌دهند با تبدیل تکیه‌گاه ساده به گیردار، بار بحرانی کماتش افزایش می‌یابد. این نتیجه که مورد انتظار نیز هست، در پژوهش‌های دیگر مانند [15] نیز گزارش شده است. هم‌چنین با مقایسه هر یک از نمودارهای مربوط به جنس آلومینیوم با نمودار مشابه از جنس فولاد، می‌توان دریافت که با افزایش خصوصیت‌های مادی در رابطه رامبرگ-آزگود (6)، بار بحرانی کماتش افزایش می‌یابد. این نتیجه نیز به دلیل افزایش استحکام ماده، علاوه بر آن که قابل پیش‌بینی بود، در نتایج مراجع دیگر مانند [11] و [15] نیز گزارش شده است.

در شکل (7-الف) که مربوط به صفحه فولادی با تکیه‌گاه ساده است، نوع تکیه‌گاه و نیز نوع تغییر ضخامت سبب شده بار بحرانی کماتش پایین باشد. از سوی دیگر بالا بودن مشخصات مکانیکی ماده سبب شده که نسبت‌های  $(T/E)$  و  $(S/E)$  در این حالت در مقایسه با حالت‌های دیگر، بیشتر به عدد یک نزدیک شوند. به همین دلیل بار بحرانی کماتش الاستیک و کماتش الاستیک-پلاستیک به دست آمده از هر دو نظریه نمودی و تغییرشکل، در این حالت کمترین اختلاف را با یکدیگر نشان می‌دهند.

اما دست‌آورد اصلی این مقاله، نتایج مربوط به اثر تغییر ضخامت بر روی بار بحرانی کماتش است. در این زمینه نتایج از دو جنبه قابل بررسی هستند. جنبه نخست به اثر اندازه  $\mu$ ، نسبت ضخامت مرکز به ضخامت لبه صفحه، مربوط می‌شود. دومین جنبه به چگونگی روند تغییر ضخامت که به وسیله پارامتر توان،  $n_h$ ، مشخص می‌شود، باز می‌گردد.

از نظر جنبه اول، در همه نمودارهای شکل‌های 6 تا 9 مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت مرکز به ضخامت لبه،  $\mu$ ، بار بحرانی کماتش افزایش می‌یابد. بنابراین بین دو صفحه با ضخامت غیر یکنواخت، بار بحرانی کماتش صفحه‌ای که ضخامت مرکز آن بزرگتر از ضخامت لبه‌اش است ( $\mu > 1$ )





شکل 8 بار بی بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت، برای ورق آلومینیومی با تکیه‌گاه گیردار و سه حالت مختلف تغییر ضخامت،  $n_h = 0/5$  (الف)،  $n_h = 1$  (ب) و  $n_h = 2$  (ج)

شکل 7 بار بی بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت، برای ورق فولادی با تکیه‌گاه ساده و سه حالت مختلف تغییر ضخامت،  $n_h = 0/5$  (الف)،  $n_h = 1$  (ب) و  $n_h = 2$  (ج)

به مراتب بزرگتر از صفحه‌ای است که ضخامت مرکز آن کوچکتر از ضخامت لبه‌اش است ( $\mu < 1$ ). به عبارت دیگر صفحه با  $\mu > 1$  از نظر کمانش ایمن تر از صفحه با  $\mu < 1$  است. از نظر چگونگی روند تغییر ضخامت نیز نتایج شکل‌های 6 تا 9 نشان می‌دهند با افزایش پارامتر توان،  $n_h$ ، بار بحرانی کمانش و در نتیجه ایمنی صفحه در برابر کمانش، افزایش می‌یابد. لازم است توجه شود که با افزایش  $n_h$ ، تراکم ماده در مرکز صفحه بیشتر می‌شود.

در مجموع، هر دو جنبه مورد بررسی نشان می‌دهند که با افزایش تراکم ماده در مرکز صفحه، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

برای درک اهمیت در نظر گرفتن اندازه و چگونگی تغییرات ضخامت اثر آن بر روی بار بحرانی کمانش، یک حالت خاص مورد توجه قرار می‌گیرد. برای این منظور صفحه‌ی آلومینیومی با تکیه‌گاه ساده و با فرض تغییرات سهمی شکل ضخامت،  $n_h = 2$ ، (شکل 6-ج) انتخاب شده است. نتایج نشان می‌دهند در این حالت، با افزایش نسبت ضخامت مرکز به ضخامت لبه از  $\mu = 0/9$  به  $\mu = 1/1$ ، بار بی‌بعد کمانش از  $\bar{\sigma}_{cr} = 0/328$  به  $\bar{\sigma}_{cr} = 0/453$  افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر در این حالت، اگر ضخامت مرکز صفحه 10% بزرگتر از لبه صفحه باشد ( $\mu = 1/1$ )، بار بحرانی کمانش حدود 38% بیش از صفحه‌ای است که ضخامت مرکزش 10% کوچکتر از ضخامت لبه باشد ( $\mu = 0/9$ ).

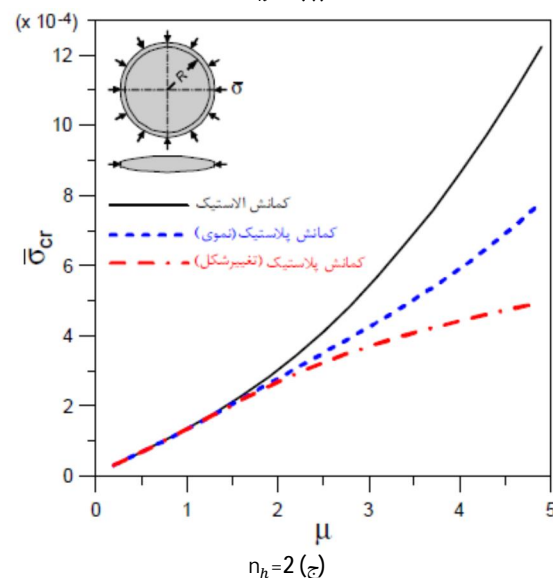
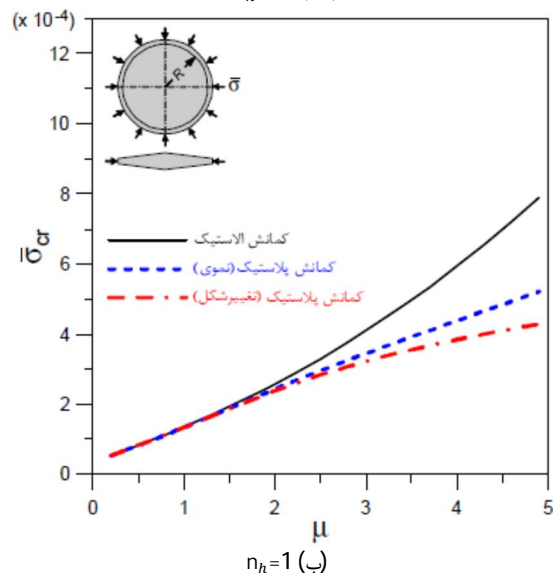
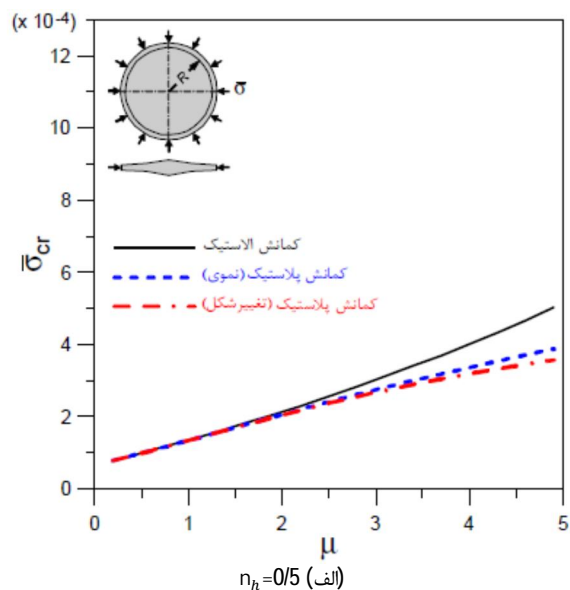
کافی است توجه شود که به دلیل دقت پایین در تولید، 10% تغییر ضخامت به‌طور متداول در ورق‌ها مشاهده می‌شود. از این رو این نتیجه به‌روشنی اهمیت در نظر گرفتن تغییرات ضخامت را در محاسبه بار بحرانی کمانش الاستیک-پلاستیک نشان می‌دهد.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه نازک دایره‌ای تحت فشار شعاعی با در نظر گرفتن تغییرات ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک از دو نظریه پلاستیسیته تغییرشکل و نموی استفاده و اثر چگونگی و اندازه تغییرات ضخامت و نیز نوع تکیه‌گاه برای دو جنس آلومینیوم تجاری و فولاد 1403 بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند نظریه تغییرشکل، بار بحرانی کمانش به مراتب کمتری نسبت به نظریه نموی پیش‌بینی می‌کند. همچنین با کاهش تمرکز ماده در مرکز صفحه، ( $\mu < 1$  یا  $n_h < 1$ )، و نیز با افزایش استحکام ماده، اختلاف دو نظریه نموی و تغییرشکل کاهش می‌یابد. بعلاوه در شرایط مشابه، با تغییر تکیه‌گاه از ساده به گیردار، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا می‌کند. هر چه ضخامت صفحه کمتر باشد، اختلاف بار بحرانی کمانش مربوط به دو حالت ساده و گیردار کمتر خواهد بود. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش پارامترهای  $c$  و  $k$  در رابطه رامبرگ-آزگود، بار بحرانی کمانش افزایش یافته و هم‌زمان اختلاف نتایج مربوط به نظریه‌های نموی و تغییرشکل نیز کمتر می‌شود. در مجموع نتایج به‌دست آمده را می‌توان به‌صورت زیر برشمرد.

1- اثر اندازه و چگونگی تغییرات ضخامت بر روی بار بحرانی کمانش، در نظریه نموی به مراتب بیشتر از نظریه تغییرشکل است. به‌عنوان مثال برای صفحه با تکیه‌گاه ساده و به‌ازای یک ضخامت لبه مشخص، اگر نسبت ضخامت مرکز به لبه از  $\mu = 3$  به  $\mu = 3/3$  افزایش یابد، بار بحرانی کمانش نظریه تغییرشکل حدود 8% افزایش می‌یابد. در حالی که بار بحرانی کمانش در نظریه نموی حدود 46% افزایش می‌یابد.

2- نتایج نشان می‌دهند چنانچه توزیع ماده بیشتر در شعاع خارجی ( $\bar{r} = 1$ ) متمرکز باشد، بار بحرانی کمانش پلاستیک با استفاده از هر دو نظریه



شکل 9 بار بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت ضخامت، برای ورق فولادی با تکیه‌گاه گیردار و سه حالت مختلف تغییر ضخامت، (الف)  $n_h = 0/5$ ، (ب)  $n_h = 1$  و (ج)  $n_h = 2$



$\rho$  ثابت بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته

$\sigma_{ij}$  مؤلفه‌های تنش (Pa)

$\sigma$  بارگذاری تنش شعاعی روی لبه خارجی صفحه دایره‌ای (Pa)

$\bar{\sigma}_{ij}$  مؤلفه‌های بی‌بعد تنش

$\bar{\sigma}_{cr}$  تنش بحرانی بی‌بعد کمانش

## عملگرها

( $\cdot$ ) مشتق نسبت به زمان

## 7- مراجع

- [1] G. H. Bryan, On the Stability of a Plane Plate with Thrusts in Its Own Plane with Applications to the Buckling of the Sides of a Ship, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 22, No. 4, pp. 54-67, 1891.
- [2] N. Yamaki, Buckling of Thin Annular Plate Under Uniform Compression, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, No. 3, pp. 267-273, 1958.
- [3] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Mc-Graw-Hill, New York, 1961.
- [4] S. Majumdar, Buckling of a Thin Annular Plate Under Uniform Compression, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 9, pp. 1701-1707, 1971.
- [5] W. Kaufmann, Uber Unelastisches Knicken Rechtiger Platten, *Ingenieur Archiv*, Vol. 7, No. 6, pp. 156-162, 1936.
- [6] A. A. Illyushin, The Elastic Plastic Stability of Plates, *NACA Technical Memorandum*, No. 1188, 1946.
- [7] E. Z. Stowell, A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates, *NACA Technical Note*, No. 1556, 1948.
- [8] H. A. El-Ghazaly, A. N. Sherbourne, Deformation Theory for Elastic-Plastic Buckling Analysis of Plates Under Non-Proportional Planar Loading, *Computers and Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 131-149, 1986.
- [9] G. H. Handelman and W. Prager, Plastic Buckling of Rectangular Plates Under Edge Thrusts, *NACA Technical Note*, No. 1530, 1948.
- [10] C. E. Pearson, Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plates and Column, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol. 17, No. 7, pp. 417-424, 1950.
- [11] E. Ore, D. Durban, Elastoplastic Buckling of Annular Plates in Pure Shear, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, No. 4, pp. 644-651, 1989.
- [12] G. M. Hong, C. M. Wang, T. J. Tan, Analytical Buckling Solution for Circular Mindlin Plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, No. 3, pp. 534-542, 1993.
- [13] D. Durban, Z. Zuckerman, Elastoplastic Buckling of Rectangular Plates in Biaxial Compression/Tension, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, No. 3, pp. 751-765, 1999.
- [14] F. Kosel, B. Bremec, Elastoplastic Buckling of Circular Annular Plates under Uniform in-plane Loading, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, No. 3, pp. 101-117, 2003.
- [15] C. M. Wang, Y. Xiang, J. Chakrabarty, Elastic/Plastic Buckling of Thick Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 48, pp. 8617-8640, 2001.
- [16] B. Bhushan, G. Singh, G. Venkatesvara Rao, Buckling of Tapered Orthotropic Circular Plates Using a Computationally Economic Approach, *Computers and Structures*, Vol. 46, No. 3, pp. 421-428, 1993.
- [17] P. M. Ciano, J. A. Reyes, Buckling of Circular, Annular Plates of Continuously Variable Thickness Used as Internal Bulkheads in Submersibles, *Ocean Engineering*, Vol. 30, No. 3, pp. 1323-1333, 2002.
- [18] M. H. Naei, A. Hemmati, Buckling Analysis of Orthotropic Circular Plate with Various Thickness and Edges Elastically Restrained against Rotation, *Journal of Institute of Technology*, Vol. 39, No. 1, pp. 95-102, 2003. (In Persian)
- [19] F. Farhatnia, A. Golshah, Buckling of Orthotropic Circular Annular Plates with Various Thickness and Rayleigh-Ritz Method, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 31-40, 2008. (In Persian)
- [20] M. Maarefdoust, M. kadkhodayan, A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 11-26, 2012. (In Persian)
- [21] J. Chakrabarty, *Applied Plasticity*, Second Edition, New York: Springer, 2010.

اختلاف ناچیزی با بار کمانش پیش‌بینی شده توسط تحلیل الاستیک دارد. به‌طوری که در بدترین حالت این اختلاف تنها 0/2% است. به این ترتیب می‌توان برای بار بحرانی کمانش الاستیک-پلاستیک همان بار بحرانی کمانش الاستیک را گزارش کرد.

3- برای طراحی صفحه مقاوم در برابر کمانش و با ضخامت متغیر، می‌توان از صفحه‌ای استفاده کرد که در لبه خارجی دارای ضخامت کمتر و در قسمت مرکزی دارای ضخامت بیشتری باشند. بعنوان مثال نتایج نشان می‌دهند که با فرض تغییرات ضخامت به‌صورت سهمی‌شکل، بار بحرانی کمانش پلاستیک صفحه‌ای که ضخامت مرکزی آن 50% بیشتر از ضخامت لبه خارجی آن باشد نسبت به حالتی که ضخامت مرکزی 50% کمتر از ضخامت لبه خارجی باشد، حدوداً 4/5 برابر افزایش می‌یابد.

## 6- فهرست نمادها و نشانه‌ها

$c$	یکی از ثابت‌های مکانیکی بی‌بعد در رابطه رامبرگ-آزگود
$\bar{D}_i$	ضریب بی‌بعد جمله‌ها در تقریب ریتز جابه‌جایی بی‌بعد شده
$E$	مدول الاستیسیته و از ثابت‌های رابطه رامبرگ-آزگود (Pa)
$k$	یکی از ثابت‌های مکانیکی بی‌بعد در رابطه رامبرگ-آزگود
$h_1$	ضخامت لبه صفحه (m)
$\bar{h}_1$	ضخامت بی‌بعد لبه صفحه
$\bar{h}(\bar{r})$	ضخامت بی‌بعد، تابعی از مختصه شعاعی بی‌بعد
$n_r$	پارامتر بی‌بعد توان در تابع ضخامت
$N$	تعداد جمله‌ها در تقریب ریتز جابه‌جایی
$r$	مختصه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای (m)
$\bar{r}$	مختصه شعاعی بی‌بعد
$R$	فاصله مرکز صفحه دایره‌ای تا تکیه‌گاه (m)
$S$	مدول وتری (Pa)
$T$	مدول مماسی (Pa)
$v_r, v_\theta, v_z$	به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری سرعت (m/s)
$w$	جابه‌جایی عرضی (m)
$\bar{w}$	جابه‌جایی عرضی بی‌بعد
$z$	مختصه در راستای ضخامت صفحه دایره‌ای (m)

## نمادهای یونانی

$\alpha$	ثابت بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
$\beta$	ثابت بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
$\gamma$	ثابت بی‌بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مدول مماسی به مدول الاستیسیته
$\varepsilon_{ij}$	مؤلفه‌های کرنش
$\theta$	مختصه محیطی در دستگاه استوانه‌ای
$\mu$	نسبت بی‌بعد ضخامت مرکز به ضخامت لبه صفحه دایره‌ای
$\nu$	ضریب پواسون