



## تحلیل دینامیکی تیر خمیده‌ی ساندویچی با هسته انعطاف پذیر در شرایط دمایی پایا و تحت ضربه‌ی کم سرعت شعاعی

کرامت ملک‌زاده فرد<sup>1\*</sup>، سعید شکراللهی<sup>2</sup>، ابراهیم عیسی‌زاده<sup>3</sup>، علیرضا پورموید<sup>4</sup>

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

3- دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی هوا- فضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

4- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

\* تهران، صندوق پستی 13445768، kmalekzadeh@mut.ac.ir

### چکیده

در این پژوهش رفتار تیر خمیده‌ی ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ای کم‌سرعت، با در نظر گرفتن تأثیر دمای محیط، با بکارگیری تئوری مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی مورد بررسی قرار گرفته است. تیر ساندویچی مورد مطالعه از ترکیب رویه‌های کامپوزیتی و هسته‌ی فومی تشکیل و شرایط تکیه‌گاهی در بارگذاری از نوع تکیه‌گاه دو طرف ساده با امکان تغییر مکان در راستای محیطی انتخاب شده است. برای مدل‌سازی ضربه از مدل دو درجه آزادی جرم و فنر استفاده گردیده است. در فرمول‌بندی ارائه شده برای رویه‌ها از تئوری برشی مرتبه‌ی اول استفاده شده و میدان جابجایی هسته مجهول در نظر گرفته شده است. سپس به کمک تئوری الاستیسیته و با استفاده از شرایط سازگاری در فصل مشترک هسته با رویه‌ها و روابط تنش- کرنش، میدان جابجایی هسته مشخص می‌شود. از اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت تیر استفاده شد. به منظور صحت‌گذاری نتایج بدست آمده از تحلیل، از نتایج مراجع و تحلیل عددی در نرم افزار آباکوس استفاده شده، که همخوانی نسبتاً خوبی بین نتایج برقرار است. در ادامه اثرات تغییر پارامترهایی نظیر سرعت و جرم ضربه زنده، دمای محیط، ضخامت هسته، ضخامت رویه‌ها، جنس هسته و رویه‌ها بر جابجایی‌های هسته و رویه‌ها و تنش‌های هسته و نیروی ضربه مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی نتایج نشان می‌دهد که با افزایش درجه حرارت محیط، تغییرات در نیروی ضربه کم بوده ولی برپاسخ دینامیکی تیر تأثیر قابل توجهی می‌گذارد. همچنین در بررسی‌ها مشخص شده که هرچه سفتی تیر بیشتر شود، نیروی ضربه افزایش و جابجایی‌ها و میزان جذب انرژی آن کاهش می‌یابد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 تیر 1395

پذیرش: 14 مرداد 1395

ارائه در سایت: 21 شهریور 1395

کلید واژگان:

ضربه سرعت پایین

تیر ساندویچی خمیده

درجه حرارت محیط

تئوری مرتبه‌ی بالا

## Dynamic analysis of the sandwich curved beams with flexible core in the steady state thermal condition and subjected to radial low-velocity impact

Keramat Malekzadeh Fard<sup>1\*</sup>, Said Shokrollahi<sup>1</sup>, Ebrahim Eissazadeh<sup>2</sup>, Ali Reza Pourmoayed<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Malek Ashtar University, Tehran, Iran.

2- Graduate Student, Aeronautical Department, Malek Ashtar University, Tehran, Iran

3- Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 13445768 Tehran, Iran, kmalekzadeh@mut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 15 July 2016

Accepted 04 August 2016

Available Online 11 September 2016

### Keywords:

Low-velocity impact

Curved sandwich beam

Environment temperature

High-order theory

### ABSTRACT

In this paper, the behavior of curved sandwich beam with a soft flexible core, under low-velocity impact, loaded with environmental thermal effects by pursuing the use of the high order shear deformation theory of sandwich structures is investigated. The sandwich beam is comprised of composite sheets and foam core. The boundary condition is simply supported by probability of circumferential deflection. Two degrees of freedom for mass-spring model was used for modeling the impact phenomena. In the presented formulation, the first order of shearing deformation theory is used for sheets, the core displacement field is considered unknown and then by using elasticity theory and compatible condition in the core, sheets common face and the relation of stress-strain core deflection are determined. In order to derive the governing equations of beam structure, the Hamilton principle was used. For validation, the results obtained from this research are compared with the results of other researchers and also the numerical result of ABAQUS software. The comparison of results show good agreement. The effects of various parameters like impact velocity and mass, environmental temperature, core and sheets thickness and materials on core and sheets deflection and core stress and impact force were studied. The obtained results showed that increasing environmental temperature has a slight effect on impact force, but a more considerable effect on beam dynamic response. It is also shown that with increasing the hardness of beam, the energy absorption is reduced.

Please cite this article using:

K. Malekzadeh Fard, S. Shokrollahi, E. Eissazadeh, A. R. Pourmoayed, Dynamic analysis of the sandwich curved beams with flexible core in the steady state thermal condition and subjected to radial low-velocity impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 113-123, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

**1- مقدمه**

امروزه سازه‌های ساندویچی بطور وسیعی در صنایع هوافضا، صنایع دریایی و خودروسازی کاربرد دارند. این مواد به واسطه‌ی سفتی و مقاومت ویژه بالا، عایق بودن نسبی در برابر حرارت و صدا، سهولت ساخت و پایداری مناسب مقبولیت ویژه‌ای یافته‌اند [1]. سازه‌های ساندویچی از دو رویه‌ی سفت و قوی و یک هسته نرم و انعطاف‌پذیر تشکیل شده‌اند. این رویه‌ها به وسیله‌ی هسته از هم جدا می‌شوند [2]. رویه‌ها معمولاً از ورق فلزی یا ورق‌های کامپوزیتی ساخته می‌شوند و هسته‌ی این مواد می‌تواند از پلیمرهای سبک، فوم‌ها، سازه‌های لانه زنبوری یا مواد با خاصیت توزیع تابعی تشکیل شود [3]. در سازه‌های ساندویچی رویه‌ها و هسته به ترتیب توانایی تحمل بارهای کششی و بارهای برشی را دارند. معمولاً نسبت ضخامت هسته به رویه در سازه‌های ساندویچی زیاد است که این امر موجب افزایش استحکام خمشی بدون افزایش قابل توجهی در وزن سازه می‌گردد [4]. رویه‌ها از موادی با سفتی و استحکام بالا ساخته می‌شوند که چگالی قابل توجهی دارند و هسته‌ها معمولاً دارای چگالی کم و سفتی پایین‌تری نسبت به رویه‌ها می‌باشند. سفتی هسته در راستای عمود بر رویه‌ها باید به اندازه‌ای باشد که بتواند رویه‌ها را در فاصله طراحی شده نگه داشته و سفتی خمشی کلی سازه را تامین کند. استحکام برشی هسته نیز باید به اندازه کافی بالا باشد تا در هنگام خمش سازه، رویه‌ها نسبت به یکدیگر لغزش نداشته باشند در غیر این صورت خاصیت ساندویچ بودن از بین می‌رود و رویه‌ها مانند تیر یا ورق‌های مجزا عمل می‌کنند [6].

در دهه‌های اخیر مطالعات زیادی بر روی مدل سازی و کنترل رفتار دینامیکی تیرها و ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مختلف توسط محققین ارائه شده است که اغلب این روش‌ها و مدل‌سازی‌های انجام شده از نظر محاسباتی پیچیده و زمان بر است. ونسی و پاکانو [7]، در سال 1970 پاسخ دینامیکی ورق مستطیل غیرایزوتروپیک را بررسی کردند. همچنین پاکانو [8] حل دقیقی برای مسائل چند لایه ارتوتروپیک مستطیلی تحت بار گسترده عرضی ارائه نمود. فروستگ و همکاران [9] تئوری مرتبه بالایی را برای تیر ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر عرضی بر پایه اصول تغییرات ارائه دادند. یکی از این روش‌ها که نسبت به سایر تئوری‌ها از پیچیدگی و حجم محاسباتی کمتری برخوردار است توسط فروستگ و همکاران ارائه شد [10]. در این تئوری که تئوری مرتبه بالایی سازه‌های ساندویچی نامگذاری شده، سازه ساندویچی به سه ناحیه رویه بالایی، جسم سه بعدی هسته و رویه پایینی تقسیم می‌شود که در آن، رویه‌های بالایی و پایینی از روابط ورق یا تیر پیروی کرده و هسته طبق تئوری الاستیسیته مدل سازی می‌شود. با اعمال شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در کلیه نقاط تماس هسته و رویه‌ها، معادلات سه ناحیه با یکدیگر مرتبط شده و با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل بدست آمده، رفتار کلیه اجزای سازه از جمله میزان فشردگی هسته محاسبه می‌شود.

تاکنون از تئوری‌های مرتبه بالایی سازه‌های ساندویچی برای مطالعه‌ی رفتار تیر ورق و پوسته‌های ساندویچی با شرایط مرزی مختلف تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی استفاده شده است [11-13].

ابریت و همکاران [14, 15] رفتار سازه‌های ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ی سرعت پایین را مورد بررسی قرار دادند. اولسون [16]، رفتار مواد را در برابر ضربه طبقه‌بندی کرد شیواکومار و همکاران [17] به بررسی پاسخ ضربه‌ی ورق‌های دایروی پرداختند.

صدیقی [18]، تئوری غیر خطی مرتبه‌ی بالایی سازه‌های ساندویچی را

برای تحلیل رفتار یک تیر ساندویچی تحت بارگذاری ضربه با سرعت پایین ارائه کرد. او با استفاده از روش ریتز معادلات حاکم را استخراج و با به کارگیری روش رانگ - کوتا آن را حل کرد. صدیقی و همکاران [19] همچنین رفتار یک تیر خمیده ساندویچی با رویه‌های همگن را با تئوری لایه‌گون<sup>1</sup> و تئوری مرتبه بالا بررسی کردند. معادلات حاکم با استفاده از روش ریتز استخراج و با استفاده از روش عددی رانگ - کوتا حل شد. چوی و همکاران [20]، ضربه‌ی سرعت پایین بر روی ساختار سازه‌های ساندویچی را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که برای پل‌های انجنا دار و تیرها می‌توان ضربه را بصورت جرم و فنر و یا روش انرژی به همراه اثرات پارامترهای مختلف مانند جرم و سرعت ضربه زننده، مدل سازی نمود.

مودی و همکاران [21]، بر روی تنش‌های فشاری پسماند روی پل ساندویچی اتحاددار تحت ضربه، مطالعاتی انجام دادند آن‌ها نشان دادند که با افزایش زاویه انحناء سفتی عرضی تیر و میزان آسیب و خرابی افزایش می‌یابد. اوزهان [22]، تست‌های ضربه‌ای مختلفی روی تیرهای خمیده با شرایط مرزی مختلف انجام دادند. آزمایشات وی نشان داد که با افزایش انحناء خیز بیشینه کاهش و نیروی تماس افزایش می‌یابد.

با توجه به بررسی و تحقیقات انجام شده موجود در مراجع، تا به حال در زمینه ضربه روی تیرهای خمیده ساندویچی کار چندان زیادی انجام نشده است. که این امر در مورد تأثیر دمای محیط بسیار حادثر نیز می‌باشد. تحقیقات زیادی روی اثر حرارت بر روی تیر تحت ضربه انجام نشده است.

در این تحقیق با استفاده از تئوری مرتبه بالای ورق‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر در تیرهای خمیده به همراه اثر دمای محیط در حل ضربه و بکارگیری مدل جرم و فنر خطی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی با هسته فومی تحت ضربه با سرعت پایین در مرکز رویه‌ی بالا، با شرایط تکیه‌گاهی ساده در دوسر با امکان جابجایی طولی، با استفاده از تئوری مرتبه بالا مورد بررسی قرار گرفته و برای استخراج معادلات حاکم، از روش انرژی و اصل همپلتون استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر تیر خمیده در حالات ضربه و اثرات محیطی به صورت کوپله با مدل جرم و فنر حل می‌گردد. آنگاه تأثیر پارامترهای مختلفی نظیر مدول الاستیسیته‌ی هسته و رویه‌ها، ضخامت هسته و رویه‌ها حرارت محیط، جرم و سرعت ضربه زننده بر جابجایی‌ها و تنش‌های هسته و نیروی تماس ضربه بررسی می‌شود.

**2- تحلیل**

به منظور بررسی رفتار دینامیکی تیر ساندویچی تحت ضربه همراه با تأثیر دمای محیط با استفاده از تئوری مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی، رویه‌های بالایی و پایینی با استفاده از تئوری برش مرتبه‌ی اول و هسته به صورت یک جسم دو بعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود با استفاده از روابط الاستیسیته مدل‌سازی شده‌اند. روابط سینماتیکی رویه‌ها و هسته با استفاده از شرایط سازگاری در فصل مشترک هسته با رویه‌ها و روابط تنش- کرنش نوشته شده و فرض می‌شود که هسته در برابر بارهای برشی و عمودی از خود مقاومت نشان می‌دهد. بعلاوه در کل طول مدت ضربه در کلیه نقاط تماس اتصال بین رویه‌ها و هسته کامل فرض می‌شود.

**3- مدل ریاضی و معادلات سینماتیکی رویه‌ها و هسته**

به منظور بدست آوردن روابط سینماتیکی رویه‌ها و هسته، هندسه تیر

<sup>1</sup> Layer wise

تعریف شود، در مختصات قطبی روابط سینماتیک رویه‌ها با فرض تئوری برشی مرتبه اول و در نظر گرفتن تغییر مکان‌ها و چرخش‌های کوچک برابر است با [23]:

$$\begin{cases} u_i(\varphi, z, t) = u_{0i} + z_i \beta_i \\ w_i(\varphi, z, t) = w_{0i} \\ \beta_i = \frac{u_{0i} - w_{i,\varphi}}{r_i} \end{cases} \quad (1)$$

در روابط (1)  $u$  و  $w$  به ترتیب تغییر مکان محیطی رویه‌ها و تغییر مکان شعاعی در هسته،  $\beta$  چرخش مقطع حول محور مینا در رویه‌های بالا و پایین،  $w_0$  و  $u_0$  به ترتیب تغییر مکان محیطی رویه‌ها و تغییر مکان شعاعی هسته حول محور مینا می‌باشند.

با استفاده از تعریف رابطه‌های کرنش-جابجایی از تئوری الاستیسیته با تأثیر شرایط محیطی در مختصات قطبی برای رویه‌ها و هسته روابط (2) بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} \varepsilon_{ssi} = \varepsilon_{0i} + z_i k_i + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{rr} = \frac{\partial w_c}{\partial r} + \varepsilon_{rrc} \\ \gamma_{sr} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_c}{\partial \varphi} - \frac{u_c}{r} \right) + \frac{\partial u_c}{\partial r} \end{cases} \quad (2)$$

در روابط فوق  $\varepsilon_{ss}$  کرنش محیطی رویه‌ها و  $\varepsilon_{rr}$  کرنش شعاعی هسته و  $\gamma_{rs}$  کرنش برشی هسته و  $\alpha$  ضرایب انبساط حرارتی رویه‌ها و  $\Delta T$  تغییرات درجه حرارت محیط می‌باشند و  $k_i, \varepsilon_{0i}$  به ترتیب مقدار کرنش در مرکز و مقدار انحناء در هریک از رویه‌ها می‌باشد که به صورت روابط (3) تعریف می‌شوند [23].

$$\begin{cases} \varepsilon_{0i}(\varphi) = \frac{u_{0i,\varphi} + w_{0i}}{r_i}, \quad i = t, b \\ K_i(\varphi) = \frac{u_{0i,\varphi} - w_{i,\varphi}}{r_i^2} \end{cases} \quad (3)$$

یکی از مسائل مهم در حل دقیق سازه‌های ساندویچی مسأله‌ی مرز مشترک بین آن‌ها است و اینکه چگونه مدل ریاضی مرز مشترک بین هسته و رویه‌ها بیان شوند که اتصال و چسبندگی بین آن‌ها را توصیف کند. با توجه به اینکه رویه‌ها و هسته میانی کاملاً به هم چسبیده و توابع کرنش در سطح اتصال لایه‌ها پیوسته فرض می‌شوند، بنابراین شرایط سازگاری در محل اتصال هسته و رویه‌ها به صورت روابط (4) تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} u_c(r, \varphi) = u_{0i}(\varphi) \\ + (-1)^k \frac{d_i(u_{0i}(\varphi) - w(\varphi)_{i,\varphi})}{2r_i} \\ (i = t, b) \begin{cases} i = t \Rightarrow k = 1 \\ i = b \Rightarrow k = 0 \end{cases} \\ w_c(r, \varphi) = w_{0i}(\varphi), \quad r = r_{ic}, i = t, b \end{cases} \quad (4)$$

روابط تنش-کرنش برای رویه‌ها و هسته در معادلات (5) بیان شده است که  $\sigma_c, \tau_c$  به ترتیب تنش شعاعی و برشی در هسته و  $\sigma_b, \sigma_t$  به ترتیب تنش محیطی در رویه‌ی بالا و پایین می‌باشند.

$$\begin{cases} \tau_c = G_c \gamma_c, \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c \\ \sigma_t = E_t \varepsilon_t = E_t [\varepsilon_{0t} + z_t k_t + \alpha_t \Delta T] \\ \sigma_b = E_b \varepsilon_b = E_b [\varepsilon_{0b} + z_b k_b + \alpha_b \Delta T] \end{cases} \quad (5)$$

$$N_i = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_i dz, \quad M_i = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_i z dz \quad (6)$$

در روابط فوق  $M_i, N_i$  شامل تمامی نیروها و ممان‌های منتجه مکانیکی

ساندویچی خمیده با انحناء استوانه‌ای و عرض  $b$  مطابق شکل 1 در نظر گرفته شده است. رویه‌هایی تیر دارای سیستم مختصات جداگانه  $z_i, s_i$  بوده که در آن  $s_i = r_i \varphi_i$  می‌باشد. برای هسته تیر از مختصات قطبی استفاده می‌شود که مرکز آن در مرکز انحناء تیر واقع می‌باشد. در تحقیق حاضر زیرنویس‌های  $t$  و  $b$  به ترتیب به رویه‌ی بالایی و پایینی و  $c$  به هسته اشاره دارد. شرایط تکیه‌گاهی در دو سر تیر از نوع ساده با امکان جابجایی در طول تیر در نظر گرفته شده است.

در مدل ارائه شده، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است: ضخامت رویه‌های بالایی ( $d_b$ ) و پایینی ( $d_t$ ) در حالت کلی با یکدیگر متفاوت بوده، اما در مقایسه با طول و انحنای تیر کوچک می‌باشند.

هسته تیر با ضخامت  $t_c$  در تمامی طول تیر به رویه‌ها متصل بوده و تحت تنش شعاعی و برشی عرضی فرض می‌گردد. با توجه به اینکه در سازه‌های ساندویچی متداول از رویه‌های کامپوزیتی چند لایه یا فلزی با استحکام طولی بالا و هسته‌های نرم و سبک استفاده می‌شود و هم‌چنین نسبت ضخامت هسته به رویه‌ها عدد نسبتاً بزرگی است، لذا می‌توان از مقاومت هسته در راستای محیطی در مقایسه با رویه‌ها و در نتیجه از تنش محیطی در هسته صرف نظر کرد و با استدلالی مشابه می‌توان از تنش‌های شعاعی و برشی در رویه‌ها صرف نظر نمود.

روابط سینماتیکی مورد استفاده در رویه‌ها مربوط به تغییر مکان‌های کوچک بوده و لذا خطی می‌باشند و هیچ فرض اولیه‌ای در مورد تغییر مکان هسته‌ها انجام نمی‌گیرد. لایه چینی نیز به صورت بالانس و متقارن می‌باشد. از نیروهای اینرسی هسته و رویه‌ها و ممان اینرسی آن صرف نظر شده و فرض شده که تیر به صورت الاستیک خطی با جابجایی‌های کوچک و شامل یک هسته با دو رویه‌ی نازک و شامل صلبیت خمشی می‌باشد.

سطح مشترک هسته با رویه‌ها شامل اتصال کامل بوده و بار خارجی به صورت یک تک ضربه‌ی عرضی با سرعت پایین توسط یک ضربه‌زننده‌ی کروی، الاستیک و ایزوتروپیک به طور عمود بر سطح رویه بالایی تیر و در وسط آن، در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین سفتی ضربه‌زننده نسبت به تیر بزرگ فرض می‌شود و از اثر اصطکاک در هنگام برخورد با تیر صرف نظر می‌شود. هم چنین اثرات دمای محیط نیز در این تحقیق مد نظر قرار گرفته است.

با فرض ناچیز بودن ضریب انتقال حرارت در فوم از اثر دما بر روی فوم و از تغییرات خواص مکانیکی با تغییر دمای محیط نیز صرف نظر شده است.

برای استخراج رابطه‌های حاکم بر مسأله بر اساس روش انرژی و اصل همپلتون، لازم است ابتدا میدان‌های جابجایی برای تیر چند لایه کامپوزیتی

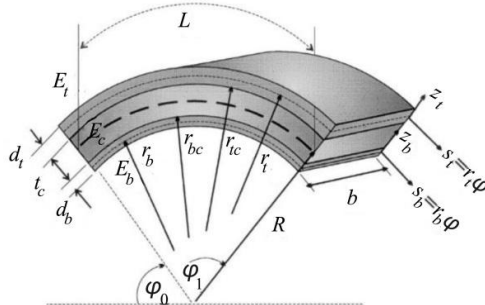


Fig. 1 Geometry of Sandwich beam

شکل 1 هندسه تیر ساندویچی [5]

نیروی برخورد حاصل از ضربه برحسب پارامترهای مساله از جمله سفتی مؤثر تماسی که نامشخص است نوشته خواهد شد. در این روش برای محاسبه جرم مؤثر ( $M_{eff}^p$ ) از روش سوانسون [25] استفاده شده است. این محقق نشان داد که نسبت جرم مؤثر سازه به جرم کل سازه به نوع سازه مانند شکل هندسی سازه و ضخامت جداره سازه، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. او نسبت جرم مؤثر سازه (شامل هر نوع سازه مثل کامپوزیتی و ساندویچی) به کل جرم آن را به طور تقریبی برای تیرهای دوسرگیردار 0.375 و برای تیرهای دوسر لولا 0.5 تخمین زد. این فرضیات برای تمامی سازه‌ها منجمله سازه‌های ساندویچی برقرار است.

نیروی تماسی از رابطه هرترز طبق رابطه (12) بدست می‌آید:

$$F(t) = K_c \delta^n \quad (12)$$

که در آن  $n=1.5$  و  $K_c$  به صورت رابطه (13) قابل محاسبه است:

$$K_c = \frac{4 \sqrt[3]{R}}{3\pi(K_1 + K_2)} \quad (13)$$

$K_1, K_2$  با رابطه (14) تعریف می‌شوند [26]:

$$K_k = \frac{1 - (v_k)^2}{\pi E_k}, \quad k = 1, 2 \quad (14)$$

که  $E_k, v_k$  به ترتیب ضریب پواسون عرضی و مدول الاستیسیته عرضی رویه‌ای که تحت ضربه قرار گرفته است می‌باشد و  $R$  با رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_t} \quad (15)$$

که  $r_i$  و  $r_t$  به ترتیب شعاع انحنا تیر در نقطه برخورد و شعاع ضربه زننده است.

لازم است که سفتی تماس خطی شده  $K_c^*$  معرفی شود، بنابراین نیروی تماسی خطی مطابق رابطه (16) می‌تواند تعریف شود [28,27].

$$F_c = K_c^* [Z_2(t) - Z_1(t)] \quad (16)$$

چو و همکاران [29] سفتی تماسی خطی شده را به صورت رابطه (17) تعریف کردند.

$$K_c^* = K_c^n F_{max}^{1-n} \quad (17)$$

که  $F_{max}$  نیروی تماسی در طول تماس می‌باشد که با معادلات حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر مطابق شکل 2، تعیین می‌شود.

$$M_{eff}^p \ddot{Z}_1 + K_g Z_1 + K_c^* (Z_1 - Z_2) = 0 \quad (18)$$

$$M_1 \ddot{Z}_2 + K_c^* (Z_2 - Z_1) = 0$$

شرایط اولیه رابطه (18) به صورت رابطه (19) است.

$$Z_1(t=0) = 0, Z_2(t=0) = 0 \quad (19)$$

$$\dot{Z}_1(t=0) = 0, \dot{Z}_2(t=0) = V$$

با فرض جابجایی‌های زیر برای شکل 2 می‌توان رابطه (20) را نوشت:

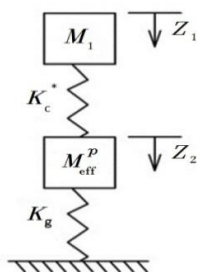


Fig. 2 Two degrees of freedom mass-spring model

شکل 2 مدل جرم و فنر دو درجه آزادی

و حرارتی می‌باشند که بصورت رابطه (7) تعریف شده و در معادلات وارد می‌شوند:

$$\begin{cases} N_i = N_i^M - N_i^T \\ M_i = M_i^M - M_i^T \end{cases} \quad (7)$$

که بالا نویسی‌های M, T به ترتیب مربوط به اثر بارهای مکانیکی و حرارتی می‌باشند.

هرکدام از نیروها و ممان‌ها به صورت روابط (8) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} [N^M] = [A]\{\epsilon_0\} + [B]\{k\} \\ [N^T] = [A]\{\alpha\}\Delta T \\ [M^M] = [B]\{\epsilon_0\} + [D]\{k\} \\ [M^T] = [B]\{\alpha\}\Delta T \end{cases} \quad (8)$$

که هر یک از ماتریس  $[A], [B], [D]$  به صورت رابطه (9) تعریف می‌شوند [23]

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (9)$$

انرژی جنبشی تیر ساندویچی وابسته به مؤلفه‌های سرعت و شتاب می‌باشد [7]. ابتدا جابجایی‌های محیطی و شعاعی هسته براساس جابجایی رویه‌ها بدست می‌آیند. با در نظر گرفتن جابجایی شعاعی و محیطی هسته بر اساس تغییرات خطی رویه‌های بالا و پایین، جابجایی‌های هسته برابر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u_c(r, \varphi, t) &= u_{bc}(\varphi, t) \\ &+ [u_{tc}(\varphi, t) - u_{bc}(\varphi, t)] \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} \\ w_c(r, \varphi, t) &= w_{bc}(\varphi, t) \\ &+ [w_{tc}(\varphi, t) - w_{bc}(\varphi, t)] \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} \end{aligned} \quad (10)$$

که با لحاظ کردن شرایط سازگاری به رویه‌ها و هسته معادله (11) حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که فقط در محاسبه‌ی انرژی جنبشی، تغییر مکان‌های هسته در راستای شعاعی به صورت خطی تقریب زده شده است. با توجه به دانسیته‌ی هسته و نسبت ضخامت هسته به پوسته‌ها در سازه‌های ساندویچی متداول، خطای ناشی از این تقریب در انرژی جنبشی کل سازه قابل صرف‌نظر کردن است و در ادامه توزیع واقعی مؤلفه‌های جابجایی بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_c &= \ddot{u}_{0t} \left(1 - \frac{d_t}{2r_t}\right) \left(\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) \\ &+ \ddot{u}_{0b} \left(1 + \frac{d_b}{2r_b}\right) \left(1 - \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) \\ &+ \ddot{w}_{t,\varphi} \frac{d_t}{2r_t} \left(\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) \\ &- \ddot{w}_{b,\varphi} \frac{d_b}{2r_b} \left(1 - \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) \\ \ddot{w}_c &= (\ddot{w}_t - \ddot{w}_b) \left(\frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}}\right) + \ddot{w}_b \end{aligned} \quad (11)$$

#### 4- ارائه مدل ضربه و بدست آوردن نیروی ضربه

یکی از روش‌های بدست آوردن تاریخچه‌ی نیرو، استفاده از مدل جرم و فنر می‌باشد که اولین بار توسط شیواکو و همکاران [17] ارائه شده است که در واقع گسترش یافته‌ی مدل لی [24] می‌باشد و به منظور محاسبه‌ی تاریخچه‌ی نیروی ضربه روی یک تیر پیشنهاد شده بود. این روش برای تمامی مسائل ضربه سرعت پایین، که بتوان آن‌ها را با مدل جرم و فنر دو یا سه درجه آزادی مدل کرد کاربرد دارد. در این روش با استفاده از قانون تماس خطی شده، معادله حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر نوشته شده است و

$$K_c^* = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} (V)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (K_c)_{n+1}^{\frac{2}{n+1}} (M_1)_{n+1}^{\frac{n-1}{n+1}} \quad (27)$$

### 5- معادله حرکت

معادله حاکم برسیستم با استفاده از روش حساب تغییرات و معادلات سیستم حاکم بر تعادل مساله و شرایط مرزی متناظر با آن و به کمک اصل همیلتون و روش انرژی و کمینه نمودن آن به همراه شرایط مرزی استخراج می‌گردد.

$$\delta H = \delta \int (U - T + W) dt = 0 \quad (28)$$

در رابطه (34)،  $T$ ،  $U$ ،  $W$  به ترتیب انرژی‌های جنبشی، داخلی و کار نیروی خارجی و  $\delta$  عملگر تغییراتی می‌باشد. با فرض صفر بودن میدان جایجایی مجازی در محدوده‌ی زمانی  $t_1$ ،  $t_2$  و محاسبه‌ی انرژی‌های رویه بالا و پایین و هسته‌ی تیر به طور جداگانه و کار ضربه اقدام به استخراج معادلات می‌شود.

$$\delta U = \sum_{i=t,b} \int_{V_i} (\sigma_{ssi} \delta \epsilon_{ssi}) dv_i + \int_{V_c} (\tau_{rsc} \delta \gamma_{rsc} + \sigma_{rrc} \delta \epsilon_{rrc}) dv_c$$

$$\delta T = - \sum_{i=t,c,b} \left[ \int [\rho_i (\dot{u}_i \delta u_i + \dot{w}_i \delta w_i)] dv_i \right] dt$$

$$W = - \int F(\varphi, t) \delta w_t dv_t \quad (29)$$

در رابطه (29)  $F(\varphi, t)$  با استفاده از معادلات (30) بدست می‌آید.

$$F(\varphi, t) = \sum_{m=1}^M Q_m(t) \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

$$Q_m(t) = \sum_{m=1}^M b_m \sin\left(\frac{m\pi}{T} t\right)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T F_c(t) \sin\left(\frac{m\pi}{T} t\right) dt \quad (30)$$

با استفاده از شرایط سازگاری، روابط سینماتیکی، روابط نیرو، گشتاور و شتاب و جایگذاری در معادلات (29) و ساده‌سازی و استفاده از اصل همیلتون و برابر صفر قرار دادن ضرایب مجهولات  $\delta u_{0b}$ ،  $\delta u_{0t}$ ،  $\delta w_b$ ،  $\delta w_t$ ،  $\delta u_c$ ،  $\delta w_c$ ،  $\delta \tau$  ساندویچی با در نظر گرفتن شرایط محیطی به شکل روابط (31-37) تعیین می‌شوند.

$$w_t = 0 \Rightarrow + \frac{A_{11t}}{r_t} u_{0t,\varphi} + \frac{A_{11t}}{r_t} w_t$$

$$- \frac{D_{11}}{r_t^3} u_{0t,\varphi\varphi\varphi} + \frac{D_{11t}}{r_t^3} w_{t,\varphi\varphi\varphi} - br_{tc}(1 - k_t)\tau_{c,\varphi}$$

$$+ br_{tc}\sigma_{rr}^M(r = r_{tc}) - br_{tc}E_c\alpha_{rr}\Delta T - bA_{11}\alpha\Delta T$$

$$+ (m_t r_t + k_t)w_t - k_t(1 + k_b)k_b \dot{u}_{0b,\varphi}$$

$$- (k_t(1 - k_t)k_t - j_t)\dot{u}_{0t,\varphi} + k_2 \dot{w}_b$$

$$- (k_t^2 k_1 + j_t)\dot{w}_{t,\varphi\varphi} + k_t k_b k_2 \dot{w}_{b,\varphi\varphi} - br_t d_t F(r, \varphi) = 0 \quad (31)$$

$$w_b = 0 \Rightarrow + \frac{A_{11b}}{r_b} u_{0b,\varphi} + \frac{A_{11b}}{r_b} w_b - \frac{D_{11b}}{r_b^3} u_{0b,\varphi\varphi\varphi}$$

$$+ \frac{D_{11b}}{r_b^3} w_{b,\varphi\varphi\varphi} - br_{bc}(1 + k_b)\tau_{c,\varphi}(r=r_{bc})$$

$$- br_{bc}[\sigma_{rr}^M(r = r_{bc}) + E_c\alpha_{rr}\Delta T]$$

$$- bA_{11}\alpha\Delta T + (m_b r_b + k_3)\dot{w}_b + k_2 \dot{w}_t$$

$$+ k_b(1 - k_t)k_2 \dot{u}_{0t,\varphi} + (k_b(1 + k_b)k_3 + j_b)\dot{u}_{0b,\varphi}$$

$$+ k_t k_b k_2 \dot{w}_{t,\varphi\varphi} - (k_b^2 k_3 + j_b)\dot{w}_{b,\varphi\varphi} = 0 \quad (32)$$

$$\delta u_{0t} = 0 \Rightarrow - \frac{A_{11t}}{r_t} u_{0t,\varphi\varphi} - \frac{A_{11t}}{r_t} w_{t,\varphi}$$

$$Z_1 = B \sin(\omega t), Z_2 = A \sin(\omega t) \quad (20)$$

پس از حل معادلات (18) و جایگزین کردن  $Z_1$ ،  $Z_2$  در معادلات،

فرکانس طبیعی و شکل مودها به صورت روابط (21) تعریف می‌شوند:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_1} - \sqrt{\left(\frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_1}\right)^2 - 4 \frac{K_c^* K_g}{NM_1}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_1} - \sqrt{\left(\frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_1}\right)^2 - 4 \frac{K_c^* K_g}{NM_2}}$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\omega_1} = \frac{K_c^*}{K_c^* - M_1 \omega_1^2} = \phi_1$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\omega_2} = \frac{K_c^*}{K_c^* - M_1 \omega_2^2} = \phi_2 \quad (21)$$

$\phi_1$  و  $\phi_2$  به ترتیب شکل مودهای اول و دوم می‌باشند. در روابط،

$N = M_{eff}^p / M_1$  نسبت جرم مؤثر سازه‌ی مورد برخورد به جرم ضربه زننده

می‌باشد و همچنین سفتی پوسته مرکب در محل ضربه به صورت رابطه (22)

قابل محاسبه می‌باشد که در آن  $\delta$  خیز استاتیکی سازه و به ازای بار واحد در محل ضربه است.

$$k_g = \frac{1}{\delta} \quad (22)$$

نهایتاً معادله حرکت حاکم بر سیستم جرم و فنر به صورت رابطه (23)

نوشته می‌شود.

$$\begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1(t) + \varphi_1) + C_2 \begin{pmatrix} \phi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2(t) + \varphi_2) \quad (23)$$

با اعمال شرایط مرزی، ضرایب  $C_1$ ،  $C_2$  و  $\phi_1$  و  $\phi_2$  مطابق رابطه (24) به

دست می‌آید.

$$C_1 = \frac{V}{\omega_1(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$C_2 = \frac{V}{\omega_2(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (24)$$

با جایگذاری  $Z_1$ ،  $Z_2$  در رابطه (16) معادله نیروی تماس خطی شده به

صورت رابطه (25) بدست می‌آید.

$$F_c(t) = \frac{k_s V}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[ \frac{1 - \varphi_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) - \frac{1 - \varphi_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \quad (25)$$

برای محاسبه سفتی تماس خطی شده معادله (17) لازم است که نیروی

تماس ماکزیمم محاسبه گردد. لذا از بسط تیلور با دو جمله اول توابع  $\sin$  و

$\cos$  و جایگذاری در معادله (25) و با یک‌بار مشتق‌گیری، بیشترین زمان

تماسی و متناظر با آن، نیروی ماکزیمم به صورت رابطه (26) بدست می‌آید

[31,30]

$$t_{max} = \sqrt{\frac{2NM_1}{(N+1)K_c^*}}$$

$$F_{cmax} = \frac{2}{3} V \sqrt{\frac{2NM_1 K_c^*}{(N+1)}} \quad (26)$$

و در نهایت با کمک رابطه (17) سفتی تماسی خطی شده به صورت

معادله (27) بدست می‌آید [31,30]:

هسته  $(w_c, u_c)$  از روابط (42,41) بدست می‌آید:

$$w_c(r, \varphi) = w_b + \frac{\tau_\varphi}{E_c} \left[ \frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + K_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right] + (w_b - w_t) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \quad (41)$$

$$u_c = \frac{r}{r_{bc}} (1 + k_b) u_{0b} + \left[ 1 - \frac{r}{r_{bc}} (1 + k_b) \right] w_{b,\varphi} + \frac{1}{2} \left( \frac{r^2 - r_{bc}^2}{r r_{bc}^2} \right) \frac{\tau_\varphi}{G_c} + \frac{\tau_{\varphi,\varphi\varphi}}{E_c} \left[ -\frac{(r - r_{bc})^2}{2r r_{bc}^2} + \frac{k_0 \left( 1 - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right] - (w_{t,\varphi} - w_{b,\varphi}) \frac{\left( 1 - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \quad (42)$$

حال با توجه به معادلات ارائه شده برای تنش‌های برشی و عمودی هسته می‌توان با جایگذاری این معادلات در معادلات حاکم (31) تا (35) معادلات حاکم را بازنویسی کرده و مجهولات موجود در معادلات را به پنج مجهول  $\tau_\varphi, w_t, w_b, u_{0t}, u_{0b}$  کاهش داد. برای تعیین مجهولات باقی مانده و ارضا شرایط مرزی ساده در معادلات، می‌توان آن‌ها را به شکل سری فوریه و با نمایش تغییرات وابسته در جهت  $\varphi$  به صورت زیر نمایش داد. بطوری که شرایط مرزی حاکم برای مسئله را نیز ارضا کنند (حل ناوبری). توجه شود که اثرات ناشی از حرارت که به صورت ضریبی ثابت  $\Delta T$  ثابت هست) در معادلات وارد می‌شوند. این ضرایب ثابت را نیز باید به صورت سری فوریه سینوسی نوشت تا بتوان معادلات را ساده‌سازی و حل نمود.

$$w_t(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{wt}^m(t) \sin\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \\ w_b(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{wb}^m(t) \sin\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \\ u_{0t}(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{ut}^m(t) \cos\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \\ u_{0b}(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_{ub}^m(t) \cos\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \\ \tau(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M C_\tau^m(t) \cos\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \\ F(t, \varphi) = \sum_{m=1}^M Q_m(t) \sin\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha_0}\right) \quad (43)$$

در روابط فوق ضرایب فوریه  $C_\tau, C_{ub}, C_{ut}, C_{wb}, C_{wt}$  ثوابت زمانی هستند که باید محاسبه شوند.

با مشتق‌گیری از سری فوریه و جایگذاری آن‌ها در معادلات حاکم و فاکتورگیری  $\sin(m\pi\varphi/\alpha_0)$  و  $\cos(m\pi\varphi/\alpha_0)$  از طرفین، معادلات حاکم را می‌توان به شکل ماتریسی رابطه (44) نوشت:

$$[M]\dot{C}_m(t) + [K]C_m(t) = \{Q\} \quad (44)$$

که در آن  $K$  ماتریس سفتی و  $M$  ماتریس جرم و  $Q$  کار نیروهای خارجی است. برای حل معادله‌ی (44) از نرم افزار متلب استفاده شده است. پس از مشخص شدن ضرایب زمانی، با جایگذاری این ضرایب در روابط (43) و بسط

$$-\frac{D_{11t}}{r_t^3} u_{0t,\varphi\varphi} + \frac{D_{11t}}{r_t^3} w_{t,\varphi\varphi\varphi} + br_{tc}(1 - k_t)\tau_{c(r=r_{bc})} + (m_t r_t + J_t + (1 - k_t)^2 k_t) \ddot{u}_{0t} + (1 - k_t)(1 + k_b)k_2 \ddot{u}_{0b} + (k_t(1 - k_t)k_1 - J_1) \ddot{w}_{t,\varphi} - (k_b(1 + k_t)k_2) \ddot{w}_{t,\varphi} = 0 \quad (33)$$

$$u_{0b} = 0 \Rightarrow -\frac{A_{11b}}{r_b} u_{0b,\varphi} - \frac{A_{11b}}{r_b} w_{b,\varphi} - \frac{D_{11b}}{r_b^3} u_{0b,\varphi\varphi} + \frac{D_{11b}}{r_b^3} w_{b,\varphi\varphi\varphi} - br_{bc}(1 + k_b)\tau_{c(r=r_{bc})} + (m_b r_b + J_b + (1 + k_b)^2 k_3) \ddot{u}_{0b} + (1 - k_t)(1 + k_b)k_2 \ddot{u}_{0b} + (k_t(1 + k_b)k_2) \ddot{w}_{t,\varphi} - (k_b(1 + k_b)k_3 + J_b) \ddot{w}_{t,\varphi} = 0 \quad (34)$$

$$\tau\delta = 0 \Rightarrow (1 - k_t)u_{0t} \frac{r_{tc}}{r_{bc}} (1 + k_b)u_{0b} - \left[ (1 - k_t) + \frac{k_0 r_{tc}}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right] w_{t,\varphi} + \frac{r_{tc}}{r_{bc}} \left[ (1 + k_b) + \frac{k_0 r_{bc}}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right] w_{b,\varphi} - \tau \frac{k_0}{2G_c} \frac{r_{bc} + r_{tc}}{r_{bc}} + \tau_{\varphi\varphi} \frac{k_0}{2E_c} \left[ \frac{r_{bc} + r_{tc}}{r_{bc}} + 2k_0 \frac{r_{tc}}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} \right] = 0 \quad (35)$$

$$\delta u_c = 0 \Rightarrow 2\tau_c + r\tau_{c,r} = 0 \quad (36)$$

$$\tau_{c,\varphi} + r\sigma_{rr,r} + \sigma_{rr} = 0 \quad (37)$$

در کنار استخراج معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی، شرایط مرزی مربوط به تیر خمیده‌ی ساندویچی نیز بدست می‌آیند که برای یک تیر خمیده با تکیه‌گاه‌های ساده و امکان جابجایی در جهت محیطی و جایگزینی روابط بنیادی نیرو و ممان، شرایط مرزی ساده شده‌ی روابط (38) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} u_{0i,\varphi} + w_i = 0, w_i = 0, u_{0i,\varphi} - w_{i,\varphi\varphi} = 0 \\ \tau_{c,\varphi} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

## 6- حل مساله

دو معادله تعادل (36) و (37) بیانگر رابطه میان تنش‌ها در هسته بوده و از سایر معادلات حاکم دی-کوپله می‌باشند. بنابراین می‌توان آن‌ها را جداگانه حل کرد. با حل توأم این معادلات و با استفاده از شرایط پیوستگی توابع، تغییر مکان هسته بر حسب تغییر مکان‌های پوسته و تابع مجهول  $\tau$  بدست می‌آید.

$$\tau_c = \frac{\tau_\varphi}{r^2} \quad (39)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\tau_{\varphi,\varphi}}{r^2} \left( \frac{r(r_{tc} - r_{bc})}{r_{tc} r_{bc} \ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} + 1 \right) + \frac{E_c}{r \ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{tc}}\right)} (w_b - w_t) \quad (40)$$

توجه شود که تنش نرمال بدست آمده برای هسته، فقط تنش مکانیکی است و تنش کلی برابر است با مجموع تنش مکانیکی و تنش حرارتی. با توجه به اینکه ضریب انتقال حرارت هسته (فوم فشرده) بسیار ناچیز می‌باشد، از تغییرات درجه حرارت در هسته می‌توان صرف‌نظر کرد. با استفاده از روابط بنیادی تنش-کرنش جابجایی محیطی و شعاعی

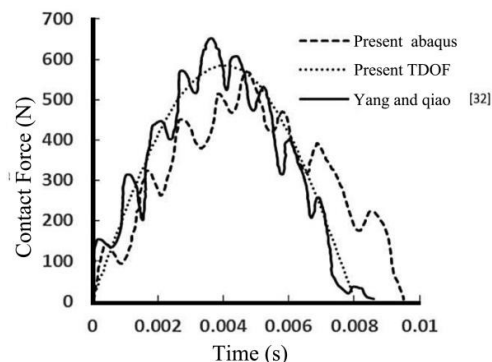


Fig. 3 the history of contact force predicted from Finite element analysis and analytical

شکل 3 تاریخچه‌ی نیروی تماسی پیش‌بینی شده از آنالیز المان محدود و تحلیلی

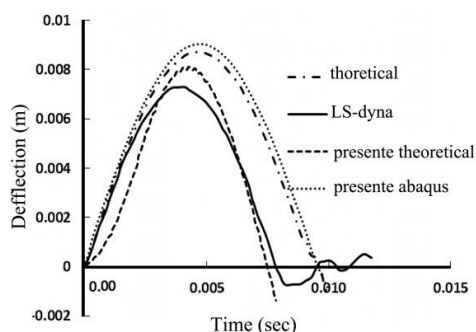


Fig. 4 The deflection of the top face beam at impact from Finite

شکل 4 خیز رویه بالای تیر در محل ضربه از آنالیز تحلیلی و المان محدود

برای صحنه‌گذاری بیشتر روابط به صحنه‌گذاری تاریخچه جابجایی رویه ی بالا از مدل ارائه شده با نتایج قبلی پرداخته می‌شود.

همان‌طور که در شکل 4 نشان داده شده است با مقایسه جابجایی رویه بالا در محل ضربه با استفاده از مدل تحلیلی و المان محدود مرجع [32] مشخص می‌شود که بین بیشینه‌ی خیز به‌وجود آمده در تحلیل حاضر با تحلیل مرجع [32] دارای اختلاف 6.7 درصدی می‌باشد و همچنین 11.9 درصد اختلاف با مدل المان محدود مرجع [32] و 18 درصد اختلاف با مدل المان محدود مرجع فوق دارد. این اختلاف بخاطر نوع مدل‌سازی، المان انتخاب شده، مش‌بندی و نوع حل گر مسئله و اختلاف دقت نرم افزارهای آباکوس و ال اس داینما می‌باشد.

بنابراین درحالت کلی می‌توان گفت که صحنه‌گذاری مدل‌های ارائه شده بسیار خوب و دقت نتایج بالا می‌باشد. اختلاف نتایج به خاطر تئوری مورد استفاده در این تحقیق با پژوهش مرجع [32] می‌باشد.

#### 8- نتایج مربوط به مطالعه پارامتری و بحث

تمام بررسی‌های پارامتریک انجام شده در این مقاله برای یک تیر خمیده ساندویچی با هسته فومی و با ویژگی‌های هندسی و مکانیکی بیان شده در جدول‌های 4 تا 6 انجام شده است. و به بررسی اثر بعضی از پارامترهای هندسی و مکانیکی سازه ساندویچی مانند، نسبت ضخامت رویه‌ها، نسبت مدل الاستیسیته‌ی هسته و رویه‌ها، نسبت ضخامت هسته به ضخامت تیر، تغییرات شرایط دما، سرعت و جرم ضربه زننده به تاریخچه‌ی نیروی ضربه و

سری فوریه مجهولات مورد نظر تعیین می‌گردند.

#### 7- صحنه‌گذاری نتایج

با توجه به اینکه بیشتر تحقیقات انجام شده در زمینه ورق‌های ساندویچی بوده و در زمینه تیر تحقیقات به مراتب کمتر و در مورد تیر خمیده همراه با تأثیر دمای محیط تحقیقی انجام نپذیرفته است. لذا در این پژوهش برای صحنه‌گذاری روش تحلیلی ارائه شده، با در نظر گرفتن شعاع انحنا تیر خمیده به سمت بی‌نهایت معادلات حاکم بر تیر خمیده به معادلات مربوط به تیر تخت تبدیل می‌شود. با صفر قرار دادن پارامترهای مربوط به دما، ابتدا نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات مربوط به یک تیر تخت مقایسه گردید و سپس با نتایج شبیه‌سازی نرم افزار آباکوس مقایسه شده‌اند.

در این اعتبارسنجی تیر خمیده ساده شده، با یک تیر ساندویچی تخت، تحت ضربه یک ضربه زننده کروی در وسط تیر بررسی می‌شود. تیر دارای هسته فوم بوده و رویه‌های آن همگن می‌باشند و خواص هندسی و مکانیکی این سازه در جدول‌های 1 تا 3 داده شده است. در این مقاله رویه‌ها به صورت همگن و متقارن می‌باشند [32]. با توجه به این که هدف از بیان مساله فوق صحنه‌گذاری نتایج حاصل از مدل تحلیلی ارائه شده و همچنین مقایسه نتایج حاصل از المان محدود تحلیل حاضر و کارهای قبلی انجام شده می‌باشد، لذا در این تحقیق برای اعتبار سنجی نتایج پارامترهایی که در پژوهش‌های قبلی استفاده شده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مدل سازی در نرم افزار المان محدود، رویه‌ها به صورت المان شل، هسته به صورت همگن سالیید و ضربه زننده به صورت جسم صلب مدل شده است.

در شکل 3 تاریخچه نیروی حاصل از ضربه به روش تحلیلی و المان محدود آورده شده است که با نتایج بدست آمده از کارهای قبلی مقایسه گردیده است. از مشاهده‌ی شکل 3 دیده می‌شود که بین نتایج المان محدود و نتایج تحلیلی مرجع [32]، توافق بسیار نزدیکی در شکل 4، وجود دارد. از جمله اینکه نتایج تحلیلی دقیقاً منطبق بر نتایج قبلی می‌باشد. همچنین در شکل دیده می‌شود مدل جرم و فنر با مدل آباکوس اختلافی وجود دارد و در نتایج حاصل از مدل المان محدود نوساناتی وجود دارد که این اختلاف و نوسان به دلیل نادیده گرفتن اثر موج تنش در آنالیز تحلیلی است. در ادامه

جدول 1 خصوصیات مکانیکی تیر ساندویچی [32]

Table 1 Mechanical properties of sandwich beam

مدول یانگ (GPa)	ضربه پواسون	مدل برش (GPa)	دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )	
0.05	0.2	0.20	52	هسته
36	0.3	13.84	4400	رویه‌ها

جدول 2 خصوصیات هندسی تیر

Table 2 The geometric properties of beam

ضخامت (mm)	عرض (mm)	طول (mm)	
20	20	300	هسته
3	20	300	رویه‌ها

جدول 3 خصوصیات مکانیکی و هندسی ضربه‌زننده

Table 3 Mechanical and geometric properties of impactor

مدل یانگ (GPa)	ضربه پواسون	مدل برشی (GPa)	سرعت (m/s)	جرم (kg)	شعاع (mm)
207	0.3	78	3	1	5

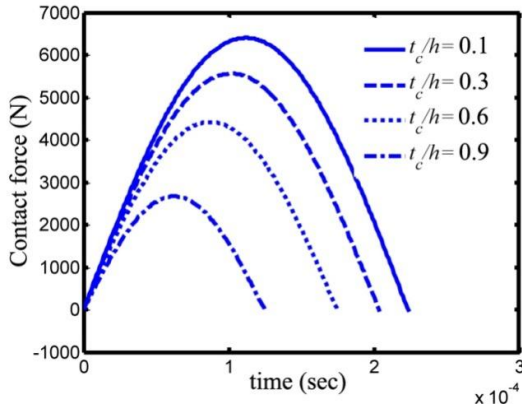


Fig. 5 Changing of the force history with change of the core thickness  
شکل 5 تغییرات تاریخچه نیرو با تغییر ضخامت هسته

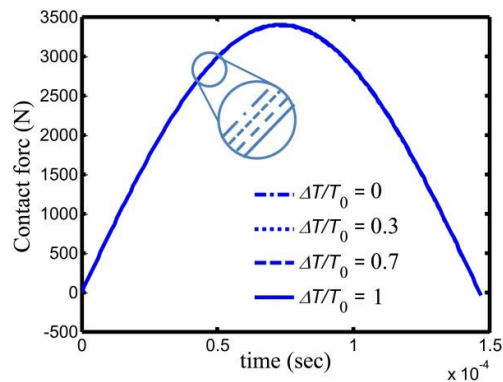


Fig. 6 The effect of environment temperature change on the history of force

شکل 6 اثر تغییر درجه حرارت محیط بر تاریخچه‌ی نیرو

سازه کاهش می‌یابد و به اصطلاح سازه نرم‌تر می‌شود، این افزایش دما باعث افزایش جابجایی‌ها می‌شود. این تغییر دما در مورد جابجایی‌های شعاعی تأثیر چندانی ندارد ولی برای جابجایی‌های محیطی قابل ملاحظه است. از طرفی با تغییر دما نیروی ناشی از حرارت نیز به افزایش جابجایی کمک می‌کند.

### 3-8- اثر تغییر درجه حرارت محیط بر جابجایی‌های هسته در راستای ضخامت آن

شکل‌های 9 و 10 نشان می‌دهند که با افزایش ضخامت هسته یعنی از رویه‌ی پایین به سمت رویه بالا جابجایی شعاعی و محیطی هسته افزایش می‌یابد که این امر در معادلات ارائه شده کاملاً مشخص می‌باشد. با افزایش دما محیط سفتی کل تیر کاهش و جابجایی‌ها افزایش می‌یابد. همچنین نیرویی که ناشی از افزایش حرارت به تیر اعمال می‌شود منجر به افزایش جابجایی‌ها می‌شود.

### 4-8- اثر تغییر حرارت محیط بر جابجایی رویه بالا در طول تیر در محل ضربه

شکل‌های 11 و 12 نشان می‌دهند که جابجایی‌های شعاعی و محیطی رویه بالا با افزایش دمای محیط به دلیل کاهش سفتی معادل تیر همچنین کاهش نیروی ضربه و افزایش نیروی حرارتی افزایش می‌یابد. با توجه به شکل، همان‌طور که انتظار می‌رفت جابجایی شعاعی در ابتدا و انتهای تیر به دلیل

جدول 4 خصوصیات هندسی تیر [23]

رویه	هسته	
3	20	ضخامت (mm)
10	10	عرض (mm)
--	0.6	شعاع (m)
--	0.815	زاویه (rad)
[0/90/0]	--	لایه چینی

جدول 5 خصوصیات مکانیکی و هندسی ضربه زننده [23]

مدل یانگ (GPa)	ضرب پواسون	مدل برشی (GPa)	سرعت (m/s)	جرم (kg)	شعاع (mm)
207	0.3	78	3	0.5	12.7

جدول 6 خصوصیات مکانیکی تیر ساندویچی [23]

$\alpha$	دانسیته (kg/m <sup>3</sup> )	مدل برشی (GPa)	ضرب پواسون	مدول یانگ (GPa)	
-	110	0.04	0.286	0.105	هسته
		$G_{12} = 5.9$	$\nu_{12} = 0.21$	$E_{11} = 138$	رویه بالا
	1550	$G_{13} = 5.9$	$\nu_{13} = 0.21$	$E_{22} = 14.5$	و پایین
		$G_{23} = 5.9$	$\nu_{23} = 0.21$	$E_{33} = 14.5$	

پاسخ دینامیکی تیر پرداخته می‌شود.

### 8-1- تأثیر افزایش ضخامت هسته بر تاریخچه نیرو

شکل 5 نشان می‌دهد که با کاهش ضخامت هسته (ضخامت تیر ثابت نگه داشته شده است) مقدار نیروی برخورد افزایش می‌یابد و زمان تماس نیز افزایش پیدا می‌کند. و این بدین دلیل است که با کاهش ضخامت هسته، و در پی آن افزایش ضخامت رویه، جرم کل تیر زیاد می‌گردد. زیرا چگالی رویه‌ها بسیار بیشتر از چگالی هسته است، با افزایش جرم تیر، جرم مؤثر سازه زیاد می‌شود. جرم مؤثر تیر در سفتی برخورد مؤثر بوده و در واقع سفتی برخورد تیر افزایش پیدا می‌کند که این نیز باعث افزایش مقدار نیروی ضربه می‌گردد، از طرفی با افزایش ضخامت هسته فرکانس نوسان نیروی حاصل از مدل جرم و فنر کاهش پیدا می‌کند و این امر باعث افزایش زمان ضربه می‌گردد.

### 8-2- اثر تغییر درجه حرارت محیط بر تاریخچه نیرو و جابجایی‌های رویه بالا

شکل 6 نشان می‌دهد که با افزایش دمای محیط تغییر محسوس در منحنی تاریخچه‌ی نیروی ضربه ایجاد نمی‌شود و تمامی نمودارها تقریباً برهم منطبق می‌شوند. در تحلیل این رخداد می‌توان گفت که با افزایش دما سفتی معادل سازه‌ی هدف کاهش می‌یابد و در نتیجه جابجایی استاتیکی حاصل از نیروی واحد افزایش می‌یابد و به دنبال آن سفتی سازه‌ی هدف کاهش می‌یابد که این امر باعث کاهش نیروی ضربه می‌شود ولی چون تغییرات دما در محدوده‌ای است که خواص مکانیکی مواد تغییر نمی‌کند (یعنی نوسانات دما کم است) میزان تغییرات سفتی هم کم بوده به همین دلیل تأثیر چندانی در نیروی ضربه نمی‌گذارد. اگر میزان تغییرات دما قابل توجه باشد، آنگاه با کاهش سفتی سازه‌ی نیروی ضربه کاهش و زمان ضربه افزایش می‌یابد.

شکل‌های 7 و 8 نشان می‌دهند که جابجایی شعاعی و محیطی رویه بالا با افزایش دمای محیط افزایش می‌یابد. با افزایش دمای محیط سفتی کل



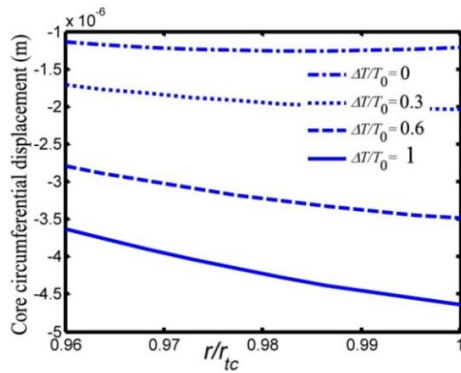


Fig. 10 The effect of environment temperature change on the core circumferential displacement along of thickness.

شکل 10 اثر تغییر درجه حرارت محیط بر جابجایی محیطی هسته در راستای ضخامت

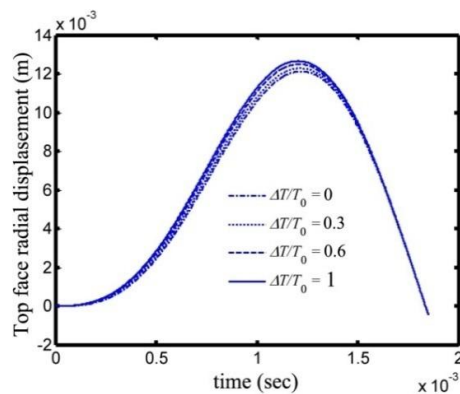


Fig. 7 The effect of environment temperature change on radial displacement

شکل 7 اثر تغییر درجه حرارت محیط بر جابجایی شعاعی

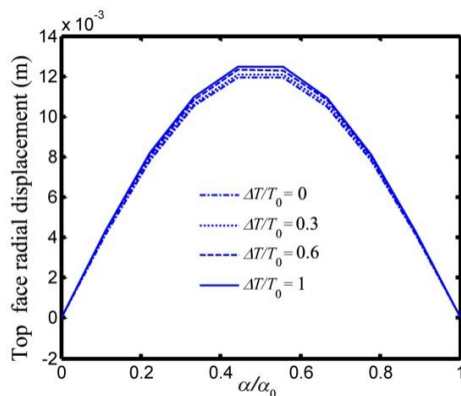


Fig. 11 Changing of the top face radial displacement along of beam

شکل 11 تغییرات جابجایی شعاعی رویه بالایی در طول تیر

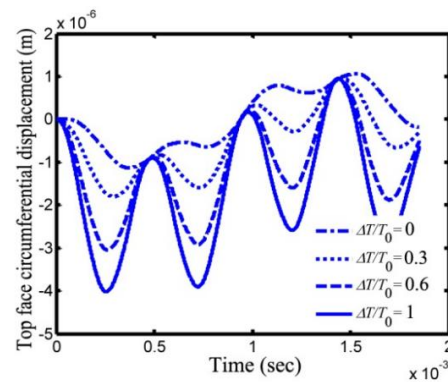


Fig. 8 The effect of environment temperature change on circumferential displacement

شکل 8 اثر تغییر درجه حرارت محیط بر جابجایی محیطی

شرایط مرزی دو سر لولا صفر و در مرکز تیر ماکزیمم می‌باشد. و جابجایی محیطی در ابتدا و انتهای تیر به دلیل آزاد بودن حرکت در راستای طولی مقدار حداکثر و در وسط تیر صفر می‌باشد.

### 8-5- اثر افزایش درجه حرارت محیط بر جابجایی‌های رویه بر حسب

#### نیروی ضربه در محل ضربه

سطح زیر منحنی شکل 13 و 14 میزان جذب انرژی سازه را نشان می‌دهد

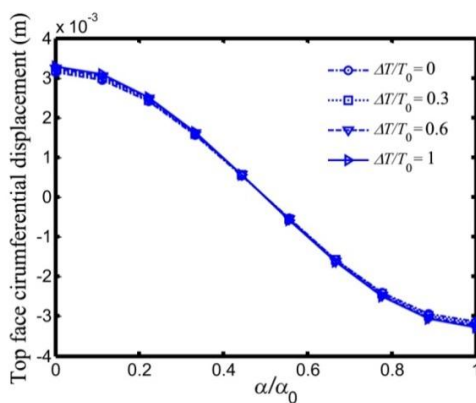


Fig. 12 Changing of the top face circumferential displacement along of beam

شکل 12 تغییر جابجایی محیطی رویه بالایی در طول تیر

مشخص است که هر چه سفتی سازه کمتر شود میزان جذب انرژی آن افزایش می‌یابد.

### 9- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر برای اولین بار پاسخ دینامیکی تیرخمیده ساندویچی تحت

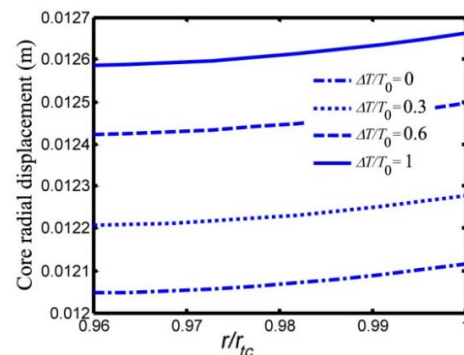


Fig. 9 The effect of environment temperature change on the core radial displacement along of thickness.

شکل 9 اثر تغییر درجه حرارت محیط بر جابجایی شعاعی هسته در راستای ضخامت

نیروی ضربه باعث افزایش جابجایی‌ها و تنش‌ها خواهد شد. قابل ذکر است که تغییر دمای محیط بر جابجایی محیطی رویه‌ها تأثیر بیشتری خواهد گذاشت.

- افزایش دمای محیط بدلیل کاهش سفتی سازه‌ای و نیروی ناشی از حرارت منجر به افزایش جابجایی هسته می‌گردد. توجه شود که با افزایش ضخامت هسته جابجایی‌ها افزایش می‌یابد.

- با افزایش ضخامت رویه‌ها به دلیل افزایش جرم مؤثر سازه‌ی هدف و افزایش سفتی سازه نیروی ضربه افزایش می‌یابد و به دنبال آن جابجایی‌های شعاعی و محیطی رویه‌ها و هسته نیز افزایش می‌یابد. با نزدیک شدن ضخامت رویه‌های بالا و پایین میزان تغییرات جابجایی‌های هسته در راستای آن ضخامت آن کاهش یافته و به همدیگر نزدیک می‌شوند.

- با افزایش سفتی سازه‌ی هدف، میزان جذب انرژی آن کاهش می‌یابد. افزایش ضخامت رویه‌ها و مدول الاستیسیته هسته بدلیل افزایش سفتی سازه‌ای باعث کاهش جذب انرژی و کاهش جابجایی‌ها شده و افزایش دمای محیط بدلیل کاهش سفتی سازه‌ای باعث کاهش جذب انرژی و جابجایی‌ها می‌شود.

#### 10- مراجع

- [1] J. R. Vinson, *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, New York: Technomic, pp. 81-105, 1999.
- [2] T. E. Lasy, Y. Hwang, Numerical Modeling of Impact Damaged Sandwich Composites Subjected To Compression-After-Impact Loading, *Composite Structures*, Vol. 61, No 1, pp. 115-128, 2003.
- [3] N. Pirmohammadi, G. Liaghat, H. Sabouri, Experimental and numerical investigation of sandwich panels made of honeycomb core subjected projectile impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 153-164, 2014. (in Persian)
- [4] L. Carlsson, G. Kardomateas, *Structural and failure mechanics of sandwich composites*, pp. 39-83, New York: Springer Netherlands, 2011.
- [5] G. Rahimi, R. Rahmani, Pitch effect on flexural behavior of sandwich structure with composite skins and corrugated combinatorial core with trapezoidal geometry, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 194-202, 2014. (in Persian)
- [6] S. Nemati, J. Jam, M. Beheshty, Effect of rigid polyurethane foam core density on flexural and compressive properties of sandwich panels with glass/epoxy faces, *Iranian Journal of Polymer Science and Technology*, Vol. 23, No. 1, pp. 3-16, 2010. (in Persian)
- [7] J. M. Whitney, N. J. Pagano, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, No. 4, pp. 1031-1036, 1970.
- [8] N. J. Pagano, Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composites Materials*, Vol. 4, No. 1, pp. 20-34, 1970.
- [9] Y. Frosting, M. Baruch, O. Vinay, I. Shteinman, Higher-order theory for sandwich beams behavior with transversely flexible core, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No 5, pp. 1026-1043, 1992.
- [10] Y. Frosting, M. Baruch, O. Vinay, I. Shteinman, Bending of nonsymmetric sandwich beams with flexible core-bending behavior, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 9, pp. 1931-1952, 1992.
- [11] Y. Frostig, N. Rodcheuy, G. Kardomateas, Blast response of sandwich plates with compressible core: Extended high-order approach, *AIAA Journal*, Vol. 53, No. 5, pp. 1211-1225, 2015.
- [12] Y. Frostig, O. Thomsen, Thermal buckling and postbuckling of sandwich Panels with transversely flexible Core, *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 8, pp. 1976-89, 2008.
- [13] H. Schwarts-Givli, O. Rabinovitch, Y. Frostig, Free vibration of delaminated unidirectional sandwich panels with transversely flexible core and general boundary conditions-A high order approach, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 10, No. 2, pp. 99-131, 2008.
- [14] S. Abrate, Impact on laminated composite materials, *Journal of Applied Mechanic Reviews*, Vol. 44, No. 4, pp. 155-190, 1991.
- [15] S. Abrate, Impact on laminated composites: Recent advances, *Journal of Applied 157 Mechanic Reviews*, Vol. 47, No. 11, pp. 517-544, 1994.
- R. Olsson, Impact response of orthotropic composite plates predicted from a oneparameter differential equation, *Journal of AIAA*, Vol. 30, No. 6, pp.

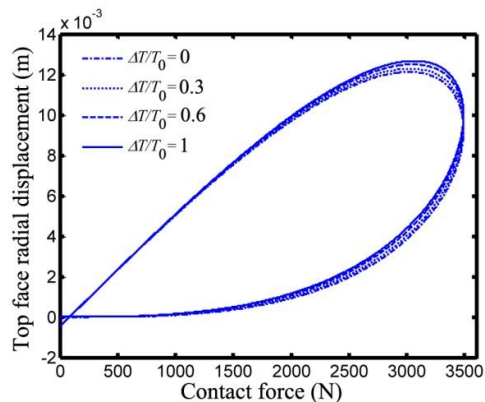


Fig. 13 The effect of environment temperature change on the core radial displacement along of thickness.

شکل 13 اثر تغییر حرارت محیط بر جابجایی شعاعی هسته در راستای ضخامت

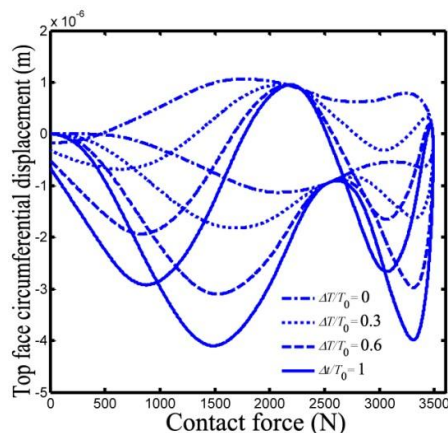


Fig. 14 The effect of environment temperature change on the core circumferential displacement along of thickness.

شکل 14 اثر تغییر حرارت محیط بر جابجایی محیطی هسته در راستای ضخامت

ضربه کم‌سرعت با تأثیر درجه حرارت محیط بر اساس تئوری برش مرتبه‌ی اول و روابط بنیادی تنش در و کرنش و روابط سازگاری بین رویه‌ها و هسته مورد بررسی قرار و معادلات حرکت با یکارگیری اصل همپلتون بدست‌آمده و با استفاده از روش سری فوریه و به روش نیمه‌تحلیلی حل شده‌است. مهمترین نتایج بدست‌آمده در این مقاله را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- با افزایش سرعت جرم‌ضربه‌زننده، میزان ضربه افزایش می‌یابد و در این بین افزایش سرعت تأثیر بیشتری روی نیروی ضربه خواهد گذاشت.
- افزایش ضخامت هسته به دلیل کاهش ضخامت رویه‌ها، باعث کاهش سفتی تیر و در نتیجه کاهش نیروی ضربه و به دنبال آن افزایش جابجایی‌ها و تنش‌ها خواهد شد.
- افزایش درجه حرارت باعث کاهش سفتی سازه‌ی هدف شده و در نتیجه باعث کاهش نیروی ضربه می‌گردد اما این کاهش نیرو، به دلیل ثابت ماندن خواص مکانیکی مواد و کم بودن میزان تغییرات دما، قابل توجه نمی‌باشد ولی افزایش دمای محیط، به دلیل نیروی حرارتی ایجادشده، علی‌رغم کاهش

- pp. A-129- A-138, 1940.
- [25] S. Swanson, Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures, *Composites Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 261-267, 1992.
- [26] L. Greszczuk, *Impact dynamics*, pp. 55-94, New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [27] K. Malekzadeh, M. R. Khalili, R. Olsson, A. Jafari, Higher-order dynamic response of composite sandwich panels with flexible core under simultaneous low-velocity impacts of multiple small masses, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 22, pp. 6667-6687, 2006.
- [28] I. H. Choi, C. Hong, New approach for simple prediction of impact force history on composite laminates, *Journal of AIAA*, Vol. 132, No.10, pp. 2072-272, 1994.
- [29] I. H. Choi, C. H. Lim, Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law, *Composite Structures*, Vol. 66, No.4, pp. 125-132, 2004.
- [30] S. Khalili, K. Malekzadeh, A. Veysi Gorgabadi, Low-velocity transverse impact response of functionally graded plates with temperature dependent properties, *International Journal of Composite Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 64-74, 2013.
- [31] A. Veysi Gorg Abadi, *Dynamic Analysis of FGM Core Sandwich Beam Under a Mass Collision Picky*, Tehran: MA Thesis, University of Tehran Khaje Nasir Toosi, Iran, 2012. (in Persian فارسی)
- [32] Y. Mijia, Q. Pizhong, Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, No. 20, pp. 5460-5490, 2005.
- 1587-1596, 1992.
- [17] K. Shivakumar, W. Elber, W. Illg, Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No. 3, pp. 674-680, 1985.
- [18] M. Sadighi, Anonlinear high order theory for analysis of sandwich beam with flexible cor, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 194-202, 2015. (in Persian فارسی)
- [19] M. Sadighi, M. Afshin, E. Sadeghpour, A theoretical investigation on low-velocity impact response of a curved sandwich beam, *International Journal of Mechanical Seinces*, Vols. 101-102, No. 3, pp. 21-28, 2015.
- [20] G. Chai, S. Zhu, A review of low-velocity impact on sandwich structures, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 225, No. 4, pp. 207-30, 2011.
- [21] R. Moody, J. Harris, A. Vizzini, Scaling and curvature effects on the damage tolerance of impacted composites and wichpanels, *Journal of Sandwich Structure Material*, Vol. 4, No. 1, pp. 71-82, 2002.
- [22] B. B. Özhan, Impact response of sandwich beams with various curvature sand debonds, *Journal of Sandwich Structure Material*, Vol. 15, No. 2, pp. 137-55, 2013.
- [23] E. Bozhevolnaya, Y. Frostig, Free vibrations of curved sandwich beams with a transversely flexible core, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 3, No. 4, pp. 311, 2001.
- [24] E. H. Lee, Impact of a mass striking a beam. American Society of Mechanical Engineers Transactions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7,