



## ارتعاشات آزاد و ناپایداری دیورژانس لوله‌های حامل سیال با پارامترهای سازه‌ای نامعین

علی اصغر علیزاده<sup>1</sup>، حمیدرضا میردامادی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 آذر 1393

پذیرش: 29 دی 1393

ارائه در سایت: 11 اسفند 1393

کلید واژگان:

ارتعاشات اتفاقی

میدان‌های تصادفی

شبیه‌سازی مونت کارلو

اندرکنش سیال-سازه

آنالیز پایداری تصادفی

### چکیده

در این مقاله، از روش شبیه‌سازی مونت کارلو و ترکیب آن با اجزای محدود برای آنالیز احتمال‌اندیشانه ارتعاشات آزاد و پایداری لوله‌های حامل سیال استفاده می‌شود. برای اندرکنش سیال-سازه، از مدل تیر اویلر-برنولی برای آنالیز سازه‌ی لوله استفاده می‌شود و برای در نظر گرفتن جریان سیال درونی از مدل جریان با پروفیل سرعت-ثابت استفاده شده است. با در نظر گرفتن پارامترهای سازه‌ای سیستم بعنوان میدان‌های تصادفی، معادله‌ی دیفرانسیل پارهای متقن حاکم بر سیستم پیوسته، به یک معادله‌ی دیفرانسیل پارهای و تصادفی تبدیل می‌شود. میدان‌های تصادفی پیوسته، توسط روش‌های گسسته‌سازی نقطه-وسط و میانگین موضعی، گسسته می‌شوند. سپس، با استفاده از شبیه‌سازی‌های مونت کارلو در هر حلقه تکرار، هر معادله پارامتر-پیوسته ولی با پارامترهای تصادفی-گسسته، به یک معادله‌ی دیفرانسیل پارامتر-پیوسته‌ی متقن تبدیل می‌شود. هر کدام از این معادلات، به کمک اجزای محدود، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی متقن تبدیل می‌شود. بنابراین، همه‌ی پارامترهای متقن و تصادفی سیستم گسسته‌سازی می‌شوند. برای آنالیز ارتعاشات آزاد، مسأله‌ی مقدار ویژه برای به دست آوردن مقدارهای ویژه‌ی مختلط و فرکانس‌های بحرانی، حل می‌شود. در نتیجه، با داشتن فرکانس‌های مختلط و نقطه‌های دیورژانس، پاسخ‌های آماری مسأله تصادفی، همانند مقدار میانگین، انحراف استاندارد، تابع چگالی احتمال، و احتمال رخداد برای ناپایداری دیورژانس به دست می‌آید.

## Free vibration and divergence instability of pipes conveying fluid with uncertain structural parameters

Ali Asghar Alizadeh, Hamid Reza Mirdamadi\*

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

\* P.O.B. 8415683111 Isfahan, Iran, hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 06 December 2014  
Accepted 19 January 2015  
Available Online 02 March 2015

#### Keywords:

Random vibration  
Random fields  
Monte Carlo simulation  
Fluid-structure interaction  
Stochastic stability analysis

### ABSTRACT

In this article, Monte Carlo simulation method is used in conjunction with finite elements (FEs) for probabilistic free vibration and stability analysis of pipes conveying fluid. For fluid-structure interaction, Euler-Bernoulli beam model is used for analyzing pipe structure and plug flow model for representing internal fluid flow in the pipe. By considering structural parameters of system as random fields, the governing deterministic partial differential equation (PDE) of continuous system is transformed into a stochastic PDE. The continuous random fields are discretized by mid-point and local average discretization methods; then, by Monte Carlo simulations in each iteration loop, every distributed-parameter PDE having stochastic lumped-parameters is transformed into a deterministic distributed-parameter PDE. Each PDE is transformed into a system of deterministic ordinary differential equations (ODEs) by using FEs. Accordingly, all of the deterministic and stochastic parameters of system are discretized. For free vibration analysis, the eigenvalue problem is solved for investigating the complex-valued eigenvalues and critical eigenfrequencies. Consequently, having complex eigenfrequencies and divergence points, the statistical responses of stochastic problem are obtained like expected values, standard deviations, probability density functions, and the probability of occurrence for divergence instabilities.

### 1- مقدمه

سیال توسط بوریرز [1] در سال 1939 انجام شد. وی موفق شد برای نخستین بار معادلات حاکم بر حرکت را به طور صحیح استخراج کند و به نتایج دقیقی در ارتباط با پایداری لوله یک سرگیردار دست یابد. پس از آن هوزنر [2]، بنیامین [3] و پایدوسی [4]، به بررسی دقیق‌تر سیستم پرداختند. ژوو و همکارانش [5] با در نظر گرفتن توزیع سرعت جریان نایکنواخت در لوله‌ی حامل سیال، ضریبی جهت تصحیح جمله‌ی نیروی مرکزگریز در معادلات حرکت لوله، برای پروفیل جریان آرام و آشفته بدست

هدف اصلی در مسایل اندرکنش سیال-سازه، بررسی اثرات جریان سیال عبوری بر رفتار ارتعاشی سازه و محاسبه‌ی سرعت‌های بحرانی می‌باشد. سرعت‌های بحرانی، سرعت‌هایی‌اند که در آن‌ها ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر رخ می‌دهند. اندرکنش سیال-سازه زمانی اتفاق می‌افتد که سیال در تماس با یک سازه قرار گیرد و سیال بار فشاری یا گرمایی به جامد اعمال کند. نخستین مطالعه‌ی سیستماتیک رفتار دینامیکی لوله‌های حمل کننده‌ی

Please cite this article using:

A. A. Alizadeh, H. R. Mirdamadi, Free vibration and divergence instability of pipes conveying fluid with uncertain structural parameters, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 247-254, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد و پایداری دینامیکی لوله‌های حامل سیال پرداخته می‌شود. در این پژوهش، هر یک از پارامترهای تصادفی، بعنوان یک میدان تصادفی<sup>3</sup> (فرایندهای تصادفی مکان-پیوسته) در نظر گرفته می‌شود و با دو روش متفاوت گسسته‌سازی، این میدان‌های تصادفی به بردارهای تصادفی تبدیل می‌شوند. در نهایت، به کمک روش اجزای محدود و شبیه‌سازی مونت کارلو، ویژگی‌های آماری سیستم، از قبیل میانگین و انحراف استاندارد فرکانس‌های سیستم محاسبه می‌شوند. همچنین برای نخستین بار آنالیز پایداری احتمال‌اندیشانه برای این مسأله انجام شده است و احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس و تابع چگالی احتمال برای سرعت‌های مختلف محاسبه شده است.

## 2- آنالیز یقین‌اندیشانه لوله‌های حامل سیال

برای استخراج معادلات حرکت حاکم بر لوله‌های حامل سیال با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی، روش‌های متعددی وجود دارد که پایدوسی [17] روش‌های بدست آوردن این معادلات را بطور کامل توضیح داده است. در زیر بطور مختصر روش استفاده از نمودار آزاد المان‌های سیال و تیر، به کمک قانون دوم نیوتن توضیح داده شده است.

با توجه به این که از تئوری تیر اویلر-برنولی برای مدل‌سازی سیستم استفاده شده است، بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر آن بصورت رابطه (1) می‌باشد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1)$$

که در رابطه (1)  $w$  جابجایی جانبی،  $m$  جرم بر واحد طول سازه،  $E$  مدول الاستیسیته،  $I$  گشتاور اینرسی سطح مقطع تیر و  $f$  نیروی خارجی بر واحد طول می‌باشد. از طرفی برای جریان داخلی از مدل جریان با پروفیل سرعت-ثابت استفاده می‌شود. بنابراین، شتاب سیال از رابطه‌ی (2) بدست می‌آید:

$$a_f = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) j \quad (2)$$

که در رابطه (2)  $U$  سرعت سیال نسبت به سازه می‌باشد. نیروی وارد از طرف سیال به سازه بر واحد طول، از ضرب شتاب و جرم بر واحد طول سیال  $M_f$  بدست می‌آید:

$$f_f = M_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2M_f U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + M_f U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

با جایگذاری این نیرو در معادله‌ی (1)، معادله‌ی ارتعاشات آزاد بصورت رابطه (4) بدست می‌آید:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M_f U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2M_f U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (m + M_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

با در نظر گرفتن روابط (5) می‌توان معادله‌ی (4) را بی‌بعد کرد:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}$$

$$\beta = \frac{M_f}{m + M_f}, \quad u = \left( \frac{M_f}{EI} \right)^{1/2} LU$$

$$\tau = \left[ \frac{EI}{m + M_f} \right]^{1/2} \frac{t}{L^2} \quad (5)$$

که در آن  $U$  سرعت بی‌بعد شده‌ی سیال،  $\beta$  جرم بی‌بعد شده و  $\tau$  زمان بی‌بعد شده می‌باشد. فرم بی‌بعد شده‌ی معادله‌ی (4) بصورت رابطه‌ی (6) می‌باشد:

آوردند، که دلیل آن گرانروی سیال است. نی و همکارانش [6] با روشی به نسبت نوین و نیمه‌تحلیلی، به نام روش تبدیل دیفرانسیلی، ارتعاش آزاد لوله‌ی حامل جریان را بررسی کردند. لین و کیاو [7] به مطالعه‌ی ارتعاش و ناپایداری تیر متحرک غوطه‌ور در سیال با قیدهای تکیه‌گاه ساده و فنرهای پیچشی پرداختند. سپس، بر اساس روش مربع دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی سیستم را بدست آوردند. لیو و همکارانش [8] مسأله‌ی اندرکنش سیال-سازه را برای یک استوانه‌ی الاستیک با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی بررسی نمودند و رفتار ارتعاشی استوانه را برای هر دو جریان آرام و آشفته بدست آوردند. هوانگ و همکارانش [9] در پژوهشی به مطالعه‌ی بسامد طبیعی ناشی از اندرکنش سیال-سازه در لوله‌های حامل سیال به روش گالرکین با شرایط مرزی گوناگون پرداختند. همچنین، اثر نیروهای کوریولیس را بر تغییر بسامد طبیعی سیستم بررسی نموده و رابطه‌ی بین بسامد طبیعی لوله‌ی حامل سیال و تیر اویلر-برنولی را عنوان کردند.

پدیده‌های تصادفی، به دلیل فقدان یک الگو و یا نظم خاص شکل می‌گیرد [10]. عدم قطعیت بطور گسترده‌ای در سیستم‌های مهندسی و طبیعت مشاهده می‌شود. گاهی اوقات، این نامعینی‌ها همانند کنش‌های بیرونی برای یک سیستم دینامیکی رفتار می‌کنند که برانگیزش‌های تصادفی را باعث می‌شوند و گاهی اوقات همانند ویژگی‌های درونی یک سیستم دینامیکی رفتار می‌کنند که پدیدآورنده‌ی پارامترهای تصادفی می‌شوند. آنالیز مسایل اندرکنش سیال-سازه بطور معمول با فرض قطعی بودن پارامترهای سیستم انجام می‌شود. اما در واقعیت، این پارامترها قطعی نبوده و به منظور شناخت رفتار واقعی این نوع سیستم‌ها، شایسته است از رویکردی احتمال-اندیشانه بهره جست.

رامو و جانسن [11] تیری با مدول یانگ تصادفی را بررسی کردند که نیروهایی نامعین بر تیر اعمال می‌شد. در این پژوهش، از روش اجزای محدود و میانگین‌های موضعی پارامترهای تصادفی، برای بدست آوردن پارامترهای آماری بار کمانشی، از قبیل مقدار میانگین، پراش، و مودهای کمانشی نامعین استفاده شد. چنگ و ژیاو [12] ارتعاش آزاد یک تیر با پارامترهای تصادفی زیر بار محوری را با الگوریتمی بر پایه‌ی اجزای محدود تصادفی بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از ترکیب روش‌های پاسخ سطح، روش اجزای محدود و شبیه‌سازی مونت‌کارلو توانستند پاسخ فرکانسی تیر را بدست آورند. ژای و همکارانش [13] پاسخ دینامیکی یک لوله‌ی حامل سیال با مدل تیر تیموشنکو را زیر برانگیزشی تصادفی بدست آوردند و برای حل معادله حاکم، از روش شبه‌برانگیخته و روش برهم‌نهمش مودهای مختلط استفاده کردند. آریاراتنام و ناماچیویا [14] پایداری دینامیکی لوله‌های حامل سیال را با در نظر گرفتن نوسانات تصادفی سرعت و استفاده از روش میانگین‌گیری و تئوری فلوکه-لیاپانوف<sup>1</sup> بررسی کردند. رضایی و ملکی [15] تأثیر ترک بر رفتار ارتعاشی و سرعت بحرانی سیال را در لوله‌های جدار ضخیم ترک‌دار مورد بررسی قرار دادند. ایرانی و سازش [16] ارتعاشات اتفاقی تیری با مقطع متغیر را تحت تحریک اتفاقی گسترده ایستا با تابع چگالی احتمال گاوسی مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، از مدل تیر اویلر-برنولی برای مدل‌سازی سازه‌ی لوله و از مدل جریان با پروفیل سرعت-ثابت<sup>2</sup>، برای مدل‌سازی جریان سیال استفاده می‌شود. با توجه به وجود عدم قطعیت در پارامترهای سازه‌ای سیستم، نظیر جرم بر واحد طول لوله و سختی خمشی، با رویکردی احتمال‌اندیشانه به

1- Floquet-Lyapunov theory

2- Plug flow

3- Random fields

استفاده می‌شود:

$$\hat{X}(x) = X(x_i^c) = b_i, \quad X \in \Omega_i \quad (12)$$

دو گشتاور آماری اول متغیرهای تصادفی  $b_i$  را می‌توان مستقیماً از دو گشتاور اول میدان تصادفی بدست آورد:

$$E[b_i] = E[X(x_i^c)] = m \quad (13)$$

$$B_{ij} = \text{COV}(b_i, b_j) = B_x(x_i^c, x_j^c) \quad (14)$$

### 3-1-2 روش‌های گسسته‌سازی میانگین‌گیری

در این روش‌ها، متغیرهای اتفاقی عبارتند از انتگرال‌های وزنی میدان تصادفی بر روی یک دامنه از جامد مورد بررسی. بعنوان مثال، روش میانگین موضعی<sup>2</sup> در هر المان  $\Omega_i$  میدان تصادفی را بصورت یک میدان ثابت تقریب می‌زند، که توسط میانگین‌گیری از میدان پیوسته محاسبه می‌شود [18].

$$\hat{X}(x) = \frac{\int X(x) d\Omega}{\int d\Omega} = b_i, \quad X \in \Omega_i \quad (15)$$

گشتاورهای آماری مرتبه یکم و دوم متغیرهای تصادفی را می‌توان بر حسب گشتاورهای آماری میدان تصادفی بیان کرد:

$$E(b_i) = \frac{\int E[X(x)] d\Omega}{|\Omega_i|} = m \quad (16)$$

$$B_{ij} = \text{COV}(b_i, b_j) = \frac{\iint B_x(x, s) d\Omega_i d\Omega_j}{|\Omega_i| |\Omega_j|} \quad (17)$$

آشکارا مشخص است که محاسبه‌ی ماتریس هم‌پراش (کوواریانس) در روش گسسته‌سازی نقطه-وسط آسان‌تر از روش میانگین موضعی می‌باشد. ونمارک [18] عبارتی تحلیلی برای میدان‌های همگن یک بعدی بر روی یک شبکه منظم بدست آورد. بعنوان مثال، هم‌پراش بین دو المان  $U$  و  $U'$  از رابطه‌ی (18) بدست می‌آید:

$$\text{COV}(U, U') = \frac{\sigma^2}{2UU'} \left( U_0^2 \gamma(U_0) - U_1^2 \gamma(U_1) - U_2^2 \gamma(U_2) + U_3^2 \gamma(U_3) \right) \quad (18)$$

که در آن  $\sigma$  انحراف استاندارد،  $\gamma$  تابع پراش (واریانس) می‌باشد و از رابطه‌ی (19) بدست می‌آید:

$$\gamma(L) = \frac{2}{L} \int_0^L \left( 1 - \frac{k}{L} \right) \rho(k) dk \quad (19)$$

همچنین  $U_0, U_1, U_2$  و  $U_3$  بازه‌هایی هستند که در شکل 1 نمایش داده شده‌اند. در این مقاله، تعداد المان‌های میدان تصادفی با تعداد المان‌های روش اجزای محدود برابر انتخاب می‌شوند.

### 3-2 روش شبیه‌سازی مونت کارلو

پس از گسسته‌سازی میدان تصادفی، نوبت به حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای تصادفی حاکم بر ارتعاش سیستم می‌رسد. یکی از روش‌های موجود برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. بارزترین مزیت این روش بدست آوردن پاسخ‌های دقیق با استفاده از شمار زیادی شبیه‌سازی، برای تمامی مسایلی است که پاسخ متقن آن‌ها مشخص می‌باشد. در آغاز، هر یک از پارامترهای تصادفی موجود در مسأله، با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی و با توجه به تابع همبستگی، این میدان‌ها به متغیرهای تصادفی تبدیل می‌شوند. سپس، با قرار دادن هر یک از متغیرهای تصادفی محقق شده در المان‌های مختلف، به کمک روش المان محدود برای گسسته‌سازی مکانی، یک معادله دیفرانسیل معمولی متقن وابسته به زمان بدست می‌آید. در مرحله‌ی پسین، دوباره متغیرهای اتفاقی

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\beta^{1/2} u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (6)$$

برای حل معادله‌ی (4) می‌توان از روش‌های مختلفی مانند گالرکین، اجزای محدود، المان مرزی و غیره استفاده کرد. در این مقاله، به دلیل در نظر گرفتن پارامترهای تصادفی سیستم بصورت میدان‌های تصادفی و نیاز به گسسته‌سازی این میدان‌های تصادفی به بردارهای تصادفی، از روش اجزای محدود برای حل این معادله بهره گرفته شده است. در این روش ابتدا سیستم را گسسته‌سازی می‌کنند و با در نظر گرفتن یک میدان جایجایی برای هر المان محدود، می‌توان ماتریس‌های جرم، ژبروسکوپی، سختی هندسی حاصل از سیال و سختی خمشی برای هر المان را بصورت روابط (7) تا (10) بدست آورد:

$$M^{(e)} = (m + M_f) \int_0^{l_e} N^T N dx \quad (7)$$

$$G_f^{(e)} = 2M_f U \int_0^{l_e} N^T N' dx \quad (8)$$

$$K_g^{(e)} = -M_f U^2 \int_0^{l_e} N'^T N' dx \quad (9)$$

$$K_b^{(e)} = EI \int_0^{l_e} N''^T N'' dx \quad (10)$$

که در روابط (7) تا (10)  $N$  تابع شکل هرمیتی می‌باشد. سپس با سرهم کردن ماتریس‌های المان محدود می‌توان مدل محاسباتی رابطه (11) را بدست آورد:

$$M\ddot{u} + C_f \dot{u} + (K_b + K_f)u = 0 \quad (11)$$

### 3- آنالیز احتمال اندیشه لوله‌های حامل سیال

با تصادفی در نظر گرفتن پارامترهای سازه‌ای سیستم، نظیر سختی خمشی و جرم بر واحد طول سیال، معادلات حرکت حاکم بر لوله‌های حامل سیال به معادلات دیفرانسیل تصادفی تبدیل می‌شوند. برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، در آغاز میدان‌های تصادفی مربوط به هر یک از پارامترهای تصادفی، گسسته‌سازی می‌شود و سپس با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو پاسخ‌های سیستم بدست می‌آید.

### 3-1-1 گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی

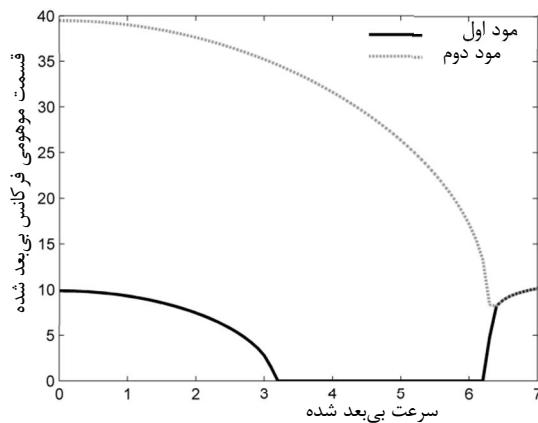
کار کردن مستقیم با میدان‌های تصادفی در مدل‌های عددی و محاسباتی آسان نیست. به همین منظور، نیاز به گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی می‌باشد. عبارتی، می‌توان گفت یک روش گسسته‌سازی، تقریبی از میدان تصادفی توسط مجموعه‌ای محدود از متغیرهای تصادفی می‌باشد. روش‌های گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای، میانگین‌گیری، و بسط به سری. در این مقاله، از روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای و میانگین‌گیری استفاده می‌شود.

### 3-1-1-1 روش‌های گسسته‌سازی نقطه‌ای

این روش میدان تصادفی  $X$  را با مقدارهای این میدان در برخی نقطه‌های داده شده،  $x_i$  مدل می‌کند. این نقطه‌ها، تعداد متغیرهای اتفاقی مورد نیاز برای بیان میدان تصادفی را مشخص می‌کند. در میان روش‌های مختلف گسسته‌سازی نقطه‌ای، روش گسسته‌سازی نقطه-وسط<sup>1</sup> بیشترین کاربرد را دارد. در این روش، در آغاز، میدان تصادفی بر روی یک شبکه، گسسته‌سازی می‌شود و از مقدار میدان تصادفی در نقاط وسط المان‌های شبکه، یعنی  $x_i^c$

2- Local average method

1- Mid-point discretization method



شکل 2 قسمت موهومی فرکانس بی بعد شده بر حسب سرعت بی بعد شده

می‌شود:

$$\rho(k) = e^{-\frac{k}{t}} \quad (22)$$

که در آن  $k$  بازه‌ی بین دو نقطه و  $l$  طول همبستگی می‌باشد. برای آنالیز احتمال‌اندیشانه و بدست آوردن پاسخ‌های آماری سیستم، از شبیه‌سازی‌های مونت کارلو با دو هزار حلقه شبیه‌سازی استفاده می‌شود. هم‌چنین، از هر دو روش گسسته‌سازی نقطه-وسط و میانگین موضعی برای گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی استفاده می‌شود.

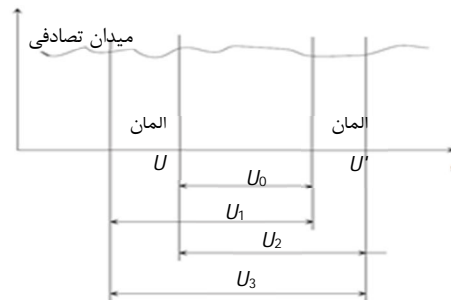
#### 4-2-1- میانگین فرکانس‌های بی بعد شده

میانگین قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس‌های بی بعد شده‌ی مساله‌ی اندرکنش سیال-سازه بر حسب سرعت بی بعد شده برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط به ترتیب در شکل 3 و شکل 4 و برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی به ترتیب در شکل 5 و شکل 6 رسم شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود، مقدار میانگین فرکانس‌های به دست آمده، بدلیل اندک بودن تغییرات در پارامترهای تصادفی، تفاوت چندانی با حالت متقن (شکل 2) ندارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش‌های گسسته‌سازی نقطه-وسط و میانگین موضعی، مقدار میانگین فرکانس‌ها را دقیقاً مثل هم محاسبه می‌کنند.

#### 4-2-2- انحراف استاندارد فرکانس‌های بی بعد شده

نمودارهای انحراف استاندارد قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس‌های بی بعد شده‌ی نوله‌ی حامل سیال بر حسب سرعت بی بعد شده، برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط به ترتیب در شکل 7 و شکل 8 و برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی به ترتیب در شکل 9 و شکل 10 ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل‌ها پیداست، سیستم در سرعت صفر دارای عدم قطعیت می‌باشد که آشکارا می‌توان آن را در مقدار انحراف استاندارد در این سرعت مشاهده کرد. در سرعت صفر عملاً سیال تأثیری بر روی سازه نمی‌گذارد، اما به دلیل تصادفی در نظر گرفتن پارامترهای سازه‌ای، مقدارهای ویژه مرتبط با این سرعت نیز دارای عدم قطعیت می‌باشند.

از شکل‌های مربوط به انحراف استاندارد فرکانس‌های بی بعد شده بر حسب سرعت بی بعد شده می‌توان اطلاعات مهم‌تری نیز به دست آورد. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود و از شکل 7 و شکل 8 و هم‌چنین شکل 9 و شکل 10 مشخص است، مقدار انحراف استاندارد در نزدیکی سرعت بحرانی بی بعد شده برای رخداد ناپایداری دیورژانس و فلاتر به مقدار بیشینه خود می‌رسد، که نتیجه‌ای کاملاً منطقی می‌باشد. در این سرعت‌های بحرانی، سیستم از حالت



شکل 1 بازه‌های تعریف شده در رابطه‌ی هم‌پراش بین میانگین‌های موضعی در یک بعد [18]

جدیدی محقق می‌شود و بار دیگر، یک معادله دیفرانسیل معمولی متقن دیگری بدست می‌آید که آن نیز باید حل گردد. این فرایند، به شمار زیاد تکرار می‌شود و سپس از پاسخ‌های بدست آمده در مراحل مختلف، می‌توان پاسخ‌های احتمال‌اندیشانه‌ی مورد نظر مسأله، مانند میانگین و پراش مقادیرهای ویژه را به دست آورد. در روش مونت کارلو، خطا برابر با  $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$  می‌باشد، که در آن  $\sigma$  انحراف استاندارد و  $N$  تعداد نمونه‌های مورد نیاز برای شبیه‌سازی می‌باشد. آشکارا هر چه شمار نمونه‌های شبیه‌سازی بیشتر باشد، این روش دارای خطای کمتری می‌باشد. اما از سوی دیگر، هزینه‌ی محاسباتی ناشی از افزایش شمار شبیه‌سازی‌ها باید در نظر گرفته شود.

#### 4- نتایج عددی

به منظور راستی آزمایی روش، در آغاز به حل معادلات دیفرانسیل متقن پرداخته می‌شود و پاسخ‌های بدست آمده با کارهای پیشین مقایسه می‌شود. سپس، با در نظر گرفتن پارامترهای سازه‌ای سیستم بعنوان میدان‌های تصادفی، تأثیر اتفاقی بودن این پارامترها بر روی سیستم ارزیابی می‌شود. در این مقاله، از تیری با تکیه‌گاه‌های ساده استفاده می‌شود. هم‌چنین،  $\beta = 0.5$  فرض می‌شود و مسأله برای سرعت‌های بی بعد شده‌ی مختلف حل می‌شود.

#### 4-1- پاسخ معادلات حرکت متقن

قسمت موهومی فرکانس‌های بی بعد شده‌ی اندرکنش سیال-سازه بر حسب سرعت بی بعد شده در شکل 2 رسم می‌شود. همان‌طور که پیداست این نمودار با نمودار رسم شده توسط پایدوسی [17] برای مدهای اول و دوم کاملاً هم‌خوانی دارد. از طرفی، سرعت ناپایداری دیورژانس برای این مساله برابر  $\pi$  می‌باشد که در [17] نیز همین مقدار بدست می‌آید.

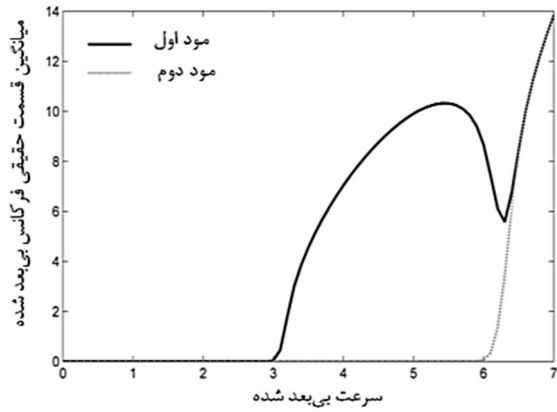
#### 4-2- پاسخ معادلات حرکت با دیدگاه تصادفی

در این مقاله، فقط پارامترهای سازه‌ای سیستم به صورت تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و ویژگی‌های سیال، متقن باقی می‌مانند. بنابراین، می‌توان سختی خمشی و جرم بر واحد طول سازه را به صورت زیر در نظر گرفت:

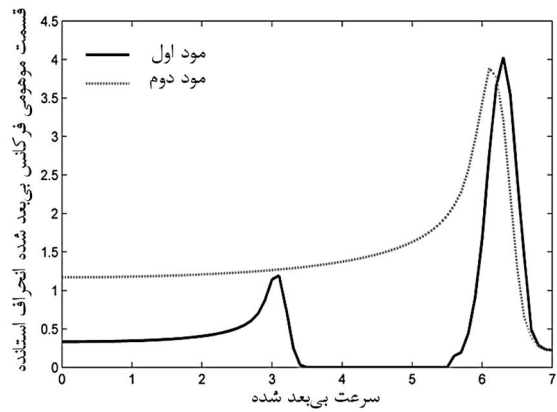
$$EI = \overline{EI}(1 + a(x)) \quad (20)$$

$$m = \overline{m}(1 + b(x)) \quad (21)$$

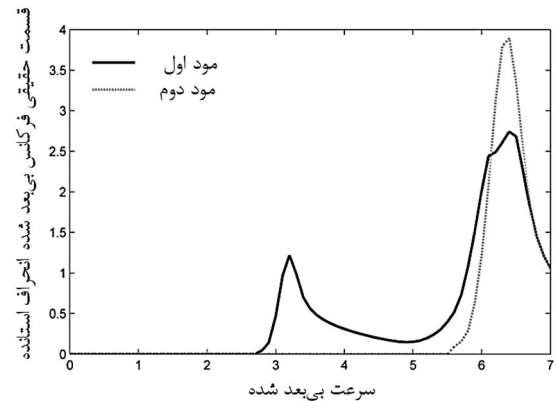
که در آن‌ها  $\overline{EI}$ ،  $\overline{m}$  به ترتیب مقادیر میانگین جرم بر واحد طول سازه و سختی خمشی سازه می‌باشند. هم‌چنین  $a(x)$  و  $b(x)$  دو میدان تصادفی و پیوسته مستقل تک متغیره‌ی گاوسی می‌باشند که میانگین و انحراف استاندارد هر یک از این میدان‌ها، به ترتیب برابر صفر و  $0/1$  فرض می‌شود. از طرفی، تابع همبستگی میدان‌های  $a(x)$  و  $b(x)$  به صورت نمایی فرض



شکل 6 میانگین قسمت حقیقی فرکانس بر حسب سرعت (روش میانگین موضعی)



شکل 7 انحراف استاندارد قسمت موهومی فرکانس بر حسب سرعت (روش نقطه-وسط)



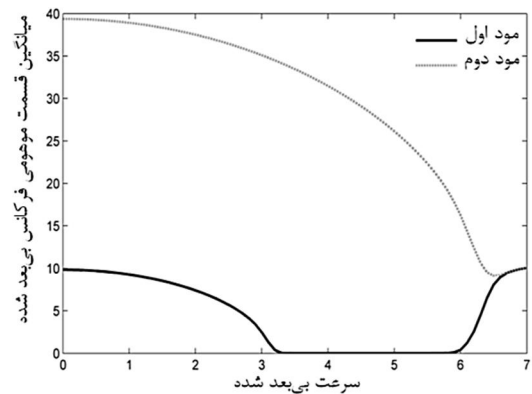
شکل 8 انحراف استاندارد قسمت حقیقی فرکانس بر حسب سرعت (روش نقطه-وسط)

#### 4-2-3- آنالیز ناپایداری دیورژانس

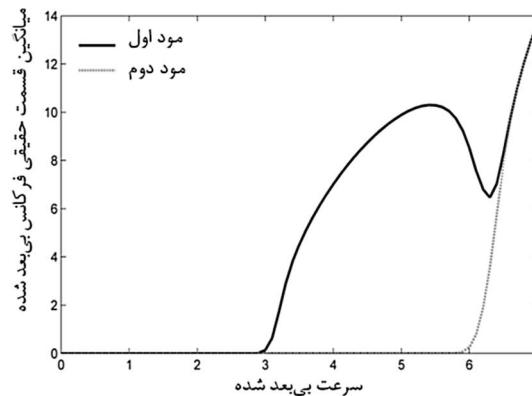
در این بخش، احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس بررسی می‌شود و تفاوت دیدگاه احتمال‌اندیشانه با دیدگاه یقین‌اندیشانه نیز ارزیابی می‌گردد. در آنالیز پایداری یقین‌اندیشانه، به دلیل متقن فرض کردن تمامی پارامترهای سیستم، یک سرعت بحرانی متقن بدست می‌آید. به بیانی، به ازای سرعت‌های بیشتر از سرعت بحرانی، از دیدگاه یقین‌اندیشانه، سیستم به طور قطع ناپایدار شده است. اما در آنالیز پایداری با دیدگاه احتمال‌اندیشانه، با توجه به حضور نامعینی در سیستم، بجای بدست آوردن یک سرعت بحرانی متقن، احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس در سرعت‌های مختلف محاسبه می‌شود. مزیت اصلی آنالیز پایداری یک سیستم با دیدگاه احتمال‌اندیشانه نسبت به دیدگاه یقین‌اندیشانه، بدست آمدن میزان احتمال رخداد ناپایداری در هر سرعت می‌باشد، که می‌تواند در طراحی مفید باشد. عبارتی، از دیدگاه متقن، در

پایدار به حالت ناپایدار می‌رسد و طبیعی است که بیشترین تغییرات ناشی از عدم قطعیت در سیستم، در این نقاط بحرانی رخ دهد.

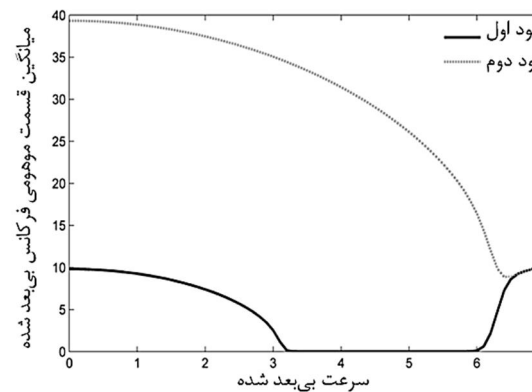
از سوی دیگر، همان‌طور که در [19] نشان داده شده است، روش گسسته‌سازی نقطه-وسط از کرانی بالا و روش گسسته‌سازی میانگین موضعی از کرانی پایین به مقدار عددی پراش میدان تصادفی در هر المان میل می‌کند. در این پژوهش، از مقایسه‌ی شکل 7 و شکل 8 برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط با شکل 9 و شکل 10 برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی می‌توان نتیجه گرفت که مقدار انحراف استاندارد برای روش میانگین موضعی کمتر از این مقدار برای روش نقطه-وسط می‌باشد که کاملاً با [19] هم‌خوانی دارد. عبارتی، به کمک این دو روش، یک بازه برای مقدار انحراف استاندارد فرکانس‌های بی‌بعد شده‌ی سیستم، در سرعت‌های مختلف به‌دست می‌آید، که کران پایین این بازه توسط روش گسسته‌سازی میانگین موضعی و کران بالای آن توسط روش گسسته‌سازی نقطه-وسط مشخص می‌شود.



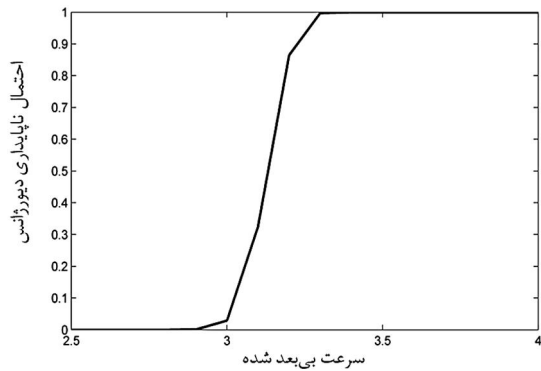
شکل 3 میانگین قسمت موهومی فرکانس بر حسب سرعت (روش نقطه-وسط)



شکل 4 میانگین قسمت حقیقی فرکانس بر حسب سرعت (روش نقطه-وسط)



شکل 5 میانگین قسمت موهومی فرکانس بر حسب سرعت (روش میانگین موضعی)



شکل 12 احتمال ناپایداری دیورژانس بر حسب سرعت (روش میانگین موضعی)

بین صفر و یک را اختیار می‌کند، که این بازه می‌تواند از دیدگاه طراحی مهندسی حایز اهمیت باشد.

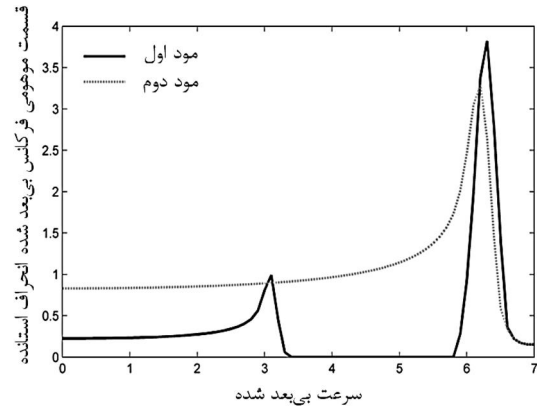
همان‌طور که پیشتر نیز گفته شد و از نمودارهای شکل 7 و شکل 8 برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط و نمودارهای شکل 9 و شکل 10 برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی نیز مشخص است، مقدار انحراف استاندارد برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط بیشتر از مقدار آن برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی می‌باشد. از طرفی، هر چه مقدار انحراف استاندارد برای یک سیستم بزرگتر باشد، شیب نمودار احتمال آن کاهش می‌یابد. از این‌رو، همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود، نمودارهای شکل 11 و شکل 12 به درستی شیب احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس در یک سرعت مشخص برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط را کمتر از میزان این شیب برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی پیش‌بینی می‌کنند.

#### 4-2-4- تابع چگالی احتمال

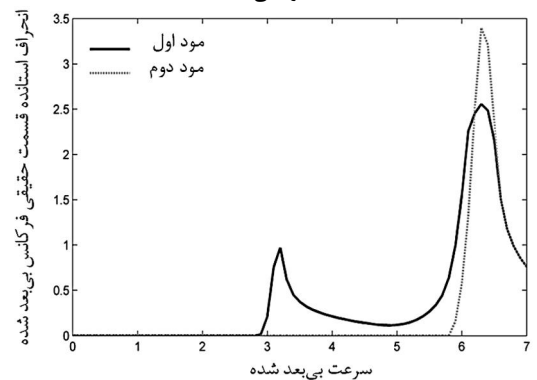
تابع چگالی احتمال به تابعی گفته می‌شود که توزیع آماری یک متغیر تصادفی را به فرم نقطه‌ای نمایش دهد. در شکل 13 و شکل 14 تابع چگالی احتمال قسمت موهومی فرکانس‌های بی‌بعد شده برای مود اول، در دو سرعت مختلف رسم شده است. همان‌طور که از این شکل‌ها پیداست، به دلیل گاوسی فرض کردن میدان‌های تصادفی سیستم، تابع چگالی احتمال فرکانس‌های مختلف، تقریباً شکل زنگوله‌ای خود را حفظ می‌کنند. نتیجه‌ی جالب دیگری که می‌توان از نمودارهای تابع چگالی احتمال به‌دست آورد، این است که این توابع احتمال به فرم دو تکه‌ای می‌شوند. عبارتی، برای سرعت‌های مختلف، یک چگالی احتمال متمرکز در نزدیکی فرکانس صفر و تکه‌ای دیگر، به فرم پیوسته، برای فرکانس‌های بیشتر از صفر پدید می‌آید. همان‌طور که انتظار می‌رود، هر چه به سرعت‌های بحرانی دیورژانس نزدیک‌تر می‌شویم، تکه‌ی چگالی احتمال متمرکز در فرکانس صفر بیشتر و پهنای آن باریک‌تر می‌شود. با میل شمار شبیه‌سازی‌های مونت کارلو به سوی بی‌نهایت، امید آن می‌رود که چگالی متمرکز در فرکانس صفر به یک تابع دلتای دیراک تبدیل گردد.

#### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله‌ی اندرکنش سیال-سازه با دیدگاه تصادفی مورد بررسی قرار گرفت. در آغاز، با استفاده از تئوری تیر اولیور-برنولی و همچنین مدل جریان با پروفیل سرعت-ثابت، معادلات حاکم بر لوله‌ی حامل سیال به‌دست آمد. از طرفی، به دلیل حضور عدم قطعیت ذاتی در پارامترهای سازه‌ای مسایل اندرکنش سیال-سازه، این پارامترها، همانند سختی خمشی و جرم بر

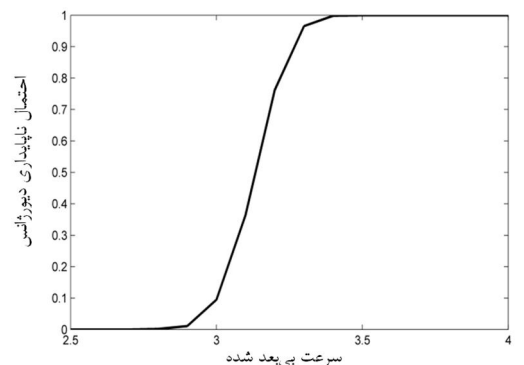


شکل 9 انحراف استاندارد قسمت موهومی فرکانس بر حسب سرعت (روش میانگین موضعی)

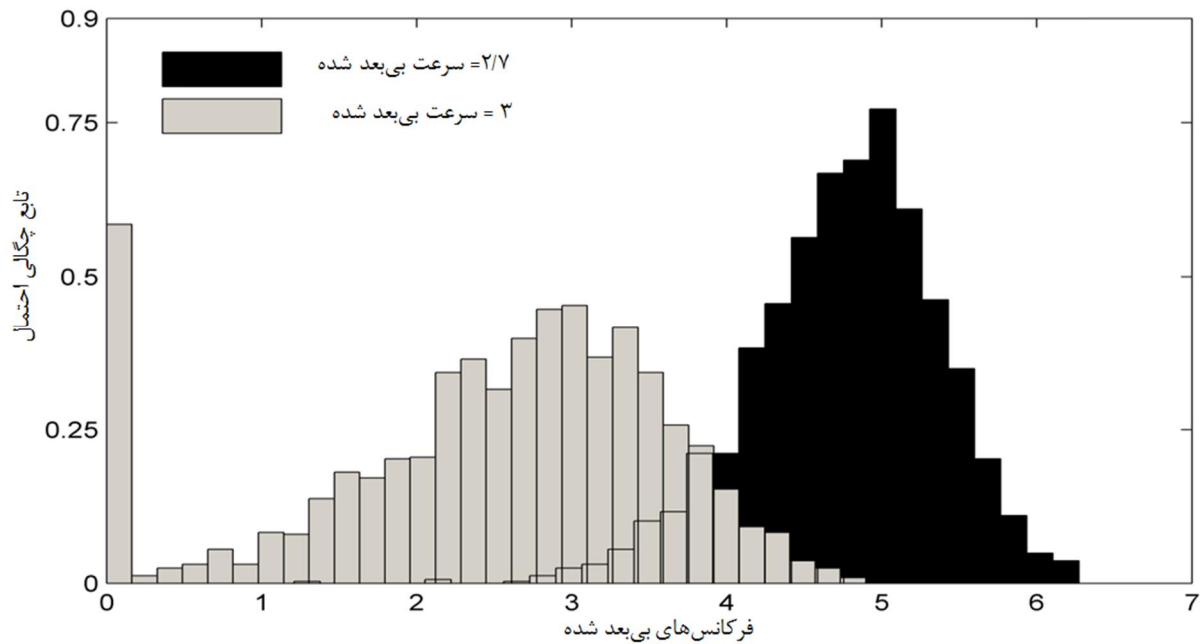


شکل 10 انحراف استاندارد قسمت حقیقی فرکانس بر حسب سرعت (روش میانگین موضعی)

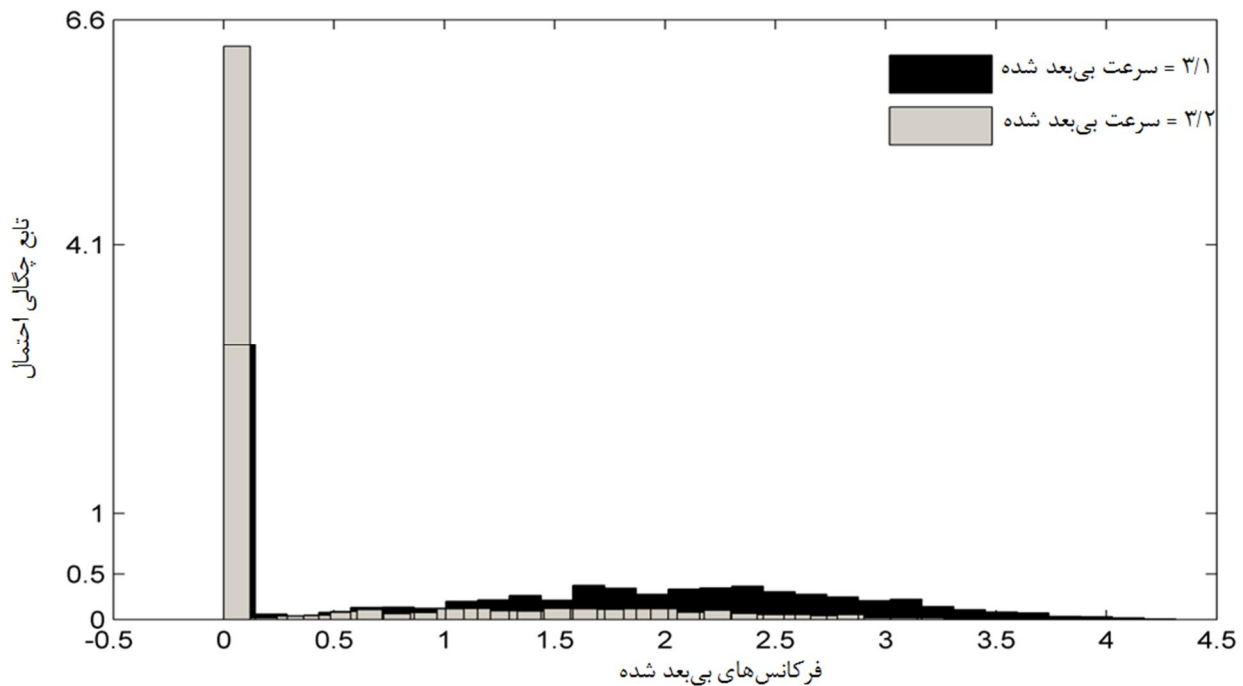
دسترس نبودن میزان رخداد ناپایداری دیورژانس در یک سرعت می‌تواند موجب استفاده از ضریب ایمنی بزرگ برای طراحی سیستم شود که مطلوب نیست، زیرا می‌تواند موجب افزایش هزینه‌ی ساخت سیستم شود، در صورتی که احتمال دارد رخداد ناپایداری در آن سرعت بخصوص بسیار ناچیز باشد. نمودار شکل 11 احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس را توسط روش گسسته‌سازی نقطه-وسط و همچنین نمودار شکل 12 احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس را توسط روش گسسته‌سازی میانگین موضعی نشان می‌دهد. البته می‌توان گفت که احتمال رخداد ناپایداری در لوله‌ی حامل سیال مورد بررسی، در واقع همان احتمال شکست برای سیستم می‌باشد. همان‌طور که از شکل 11 و شکل 12 هویداست، احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس برای  $u < 2.5$  برابر صفر می‌باشد. همچنین، این احتمال برای  $u > 3.5$  برابر یک می‌باشد، اما برای  $2.5 < u < 3.5$  احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس عددی



شکل 11 احتمال ناپایداری دیورژانس بر حسب سرعت (روش نقطه-وسط)



شکل 13 تابع چگالی احتمال فرکانس‌های موهومی مود اول برای سرعت‌های مختلف



شکل 14 تابع چگالی احتمال فرکانس‌های موهومی مود اول برای دو سرعت دیگر

- گردیدند. همچنین، اثر پارامترهای تصادفی بر روی ارتعاشات آزاد و ناپایداری دیورژانس این مسأله بررسی شد و نتایج زیر به دست آمد:
- 1- به دلیل اندک بودن پراش پارامترهای تصادفی، میانگین قسمت‌های موهومی و حقیقی فرکانس‌ها، برای هر دو روش گسسته‌سازی نقطه-وسط و میانگین موضعی، تقریباً برابر با مقادیر این فرکانس‌ها در حالت متقن بود.
  - 2- وجود عدم قطعیت در پارامترهای سازه‌ای سیستم، موجب حضور عدم قطعیت در مقادیر ویژه متناظر با سرعت صفر شد.
  - 3- مقدار انحراف استاندارد فرکانس‌ها در سرعت بحرانی برای رخداد ناپایداری دیورژانس به مقدار بیشینه خود رسید.
  - 4- مقدار انحراف استاندارد فرکانس‌های سیستم برای روش گسسته-سازی نقطه-وسط، بیشتر از مقادیر متناظر آن‌ها برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی شد.
  - 5- احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس برای لوله‌ی حامل سیال در سرعت‌های بی‌بعد شده  $u < 2.5$  برابر صفر و در  $u > 3.5$  برابر با یک و برای  $2.5 < u < 3.5$  مقداری بین صفر و یک اختیار کرد.
  - 6- شیب نمودار احتمال رخداد ناپایداری دیورژانس بر حسب سرعت بی‌بعد شده برای روش گسسته‌سازی نقطه-وسط کمتر از مقدار بدست آمده برای روش گسسته‌سازی میانگین موضعی

- [7] W. Lin, N. Qiao, Vibration and stability of an axially moving beam immersed in fluid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 1445-1457, 2008.
- [8] Z.G. Liu, Y. Liu, J. Lu, Fluid-structure interaction of single flexible cylinder in axial flow, *Computers & Fluids*, Vol. 56, pp. 143-151, 2012.
- [9] Y. Huang, Y. S. Liu, B. H. Li, Y. J. Li, Z. F. Yue, Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, pp. 461-467, 2010.
- [10] R.G. Ghanem, P. D. Spanos, Stochastic Finite Element - A Spectral Approach, Revised Edition, Dover Publication, 2003.
- [11] S. A. Ramu, R. Ganesan, Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 11, pp. 105-115, 1992.
- [12] J. Cheng, R. Xiao, Probabilistic free vibration analysis of beams subjected to axial loads, *Advances in Engineering Software*, Vol. 38, pp. 31-38, 2007.
- [13] H. Zhai, Z. Wu, Y. Lin, Z. Yue, Dynamic response of pipeline conveying fluid to random excitation, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 241, pp. 2744-2749, 2011.
- [14] S. T. Ariaratnam, N. S. Namachchivaya, Dynamic stability of pipes conveying fluid with stochastic flow velocity, In: *Elishakoff, I., Lyon, R.H. (Eds.), Random Vibration—Status and Recent Developments*, Vol. 14, pp. 1-17, 1986.
- [15] M. Rezaee, V. A. Maleki, Vibration analysis of a cracked pipe conveying fluid, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, pp. 66-76, 2012. (In Persian)
- [16] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, pp. 138-145, 2013. (In Persian)
- [17] M. P. Paidoussis, Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, Vol. 1, Academic Press, London 1998.
- [18] E. Vanmarcke, Random Fields- Analysis and Synthesis, The MIT Press, 1983.
- [19] A. D. Kiureghian, J. B. Ke, The stochastic finite element method in structural reliability, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, pp. 83-91, 1988.

پیش‌بینی شد.

7- برای این مسأله اندرکنش، تابع چگالی احتمال برای سرعت‌های مختلف بصورت دو تکه‌ای پدیدار شد و این تابع فرم زنگوله‌ای خود را حفظ کرد.

در این پژوهش، پارامترهای سازه‌ای مسأله‌ی اندرکنش سیال-سازه بعنوان میدان‌های تصادفی در نظر گرفته شده‌اند و برای نخستین بار است که این میدان‌های تصادفی توسط دو روش گسسته‌سازی نقطه-وسط و میانگین موضعی، گسسته می‌شوند. البته هنوز جای توسعه و کار زیادی برای انجام آنالیز لوله‌های حامل سیال با دیدگاه تصادفی وجود دارد. بعنوان مثال می‌توان پارامترهای سیال را نیز بصورت تصادفی در نظر گرفت و یا اثر طول همبستگی را بر روی پاسخ‌های سیستم بررسی کرد.

## 6- مراجع

- [1] F. J. Bourrieres, Sur un phknomhe d'oscillation auto-entretenee en mckanique des fluides reels, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de l'Air*, Vol. 147, 1937.
- [2] G. W. Housner, Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, No. 3, pp. 205-208, 1952.
- [3] T. B. Benjamin, Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid, *Proceedings of the Royal Society A261*, Vol. 130, pp. 457-486, 1961.
- [4] M. P. Paidoussis, N. T. Issid, Dynamic stability of pipes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, pp. 267-294, 1974.
- [5] C. Q. Guo, C. H. Zhang, M. P. Paidoussis, Modification of equation of motion of fluid-conveying pipe for laminar and turbulent flow profiles, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 26, pp. 793-803, 2010.
- [6] Q. Ni, Z. L. Zhang, L. Wang, Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217, pp. 7028-7038, 2011.