



# Modal Identification of Structures via Processing of Recorded Videos and Output-only Algorithms

## ARTICLE INFO

### Article Type

Original Research

### Authors

Bekrpoushideh A.<sup>\*1</sup> MSc,  
Khademhosseini O.<sup>1</sup> MSc,  
Keyhani A.<sup>1</sup> PhD,  
Ahmadyfard A.<sup>1</sup> PhD

### How to cite this article

Bekrpoushideh A, Khademhosseini O, Keyhani A, Ahmadyfard A. Modal Identification of Structures via Processing of Recorded Videos and Output-only Algorithms. Modares Mechanical Engineering. 2021; 21(1):39-53.

<sup>1</sup>Earthquake and Structural Engineering Department, Civil Engineering Faculty, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

<sup>2</sup>Electronics & Communications Department, Electrical and Robotic Engineering Faculty, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

### \*Correspondence

Address: Earthquake and Structural Engineering Department, Civil Engineering Faculty, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.  
Phone: +98 (17)34491926  
Fax: +98 (21)91005531  
Afsanehbekrpoushideh@gmail.com

### Article History

Received: June 26, 2020  
Accepted: November 18, 2020  
ePublished: January 18, 2021

## ABSTRACT

One of the measurement systems for the identification of modal parameters of the structure is digital video cameras. Modal analysis based on video measurements, despite the many advantages, is associated with some challenges due to its dependence on high contrast markers. In the present study, a new algorithm is presented to use only the measured full-field responses, without additional preparation of the structural surface. This algorithm is phase-based and is implemented using the blind source separation method and motion magnification technique. It uses a multi-scale pyramid analysis technique to extract the full-field spatiotemporal pixel phases. To validate this algorithm, the free and random vibration videos of two cantilever and simple beams with known modal parameters were reconstructed in MATLAB. The average difference between the values identified and the theoretical values for the frequencies of the first to fourth modes is less than 2% and less than 0/1 for damping. The results obtained in this section also confirm the ability of the algorithm to identification closely-spaced modes of the structure. Also, to evaluate the performance of the algorithm in laboratory conditions, a free and random vibration video of an aluminum cantilever beam, prepared in the laboratory using a high-speed camera, is examined. Comparing the results with theoretical values or case study reports shows that using the techniques introduced in this article is a suitable and promising solution to identify the modal parameters of the structure.

**Keywords** Operational Modal Analysis, Non-Contact Measurement, Video Processing, Complex Steerable Pyramid, Blind Source Separation, Motion Magnification

## CITATION LINKS

[1] A summary review of vibration-based damage identification methods. [2] Modal testing: theory, practice and application. [3] Blind identification of full-field vibration modes of output-only structures from uniformly-sampled, possibly temporally-aliased (sub-Nyquist), video measurements. [4] Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study. [5] Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing. [6] Modal Testing Using A scanning laser doppler vibrometer. [7] Laser Doppler vibrometry: development of advanced solutions answering to technology's needs. [8] A method for performing modal testing using meaningful measurement parameters. [9] Modal analysis of wind turbine blade using machine vision. [10] A vision-based approach for the direct measurement of displacements in vibrating systems. [11] A vision-based system for remote sensing of bridge displacement. [12] Flexible videogrammetric technique for three-dimensional structural vibration measurement. [13] Computation of component image velocity from local phase information. [14] A phase-based approach to the estimation of the optical flow field using spatial filtering. [15] Phase-based video motion processing. [16] Modal identification of simple structures with high-speed video using motion magnification. [17] Visual vibrometry: Estimating material properties from small motions in video. [18] The steerable pyramid: a flexible architecture for multi-scale derivative computation. [19] Blind identification of full-field vibration modes from video measurements with phase-based video motion magnification. [20] A review of output-only structural mode identification literature employing blind source separation methods. [21] On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. [22] Modal identification using blind source separation techniques. [23] Telecommunication system engineering. [24] Random decrement technique for modal identification of structures.

## شناسایی مودال سازه‌ها با استفاده از پردازش ویدیوهای ثبت شده و الگوریتم‌های خروجی- محور

افسانه بکروپوشیده\* MSc

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی سازه و زلزله، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

امید خادم حسینی MSc

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی سازه و زلزله، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

علی کیهانی PhD

دانشیار، گروه مهندسی سازه و زلزله، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

علیرضا احمدی فرد PhD

دانشیار، گروه مهندسی مخابرات، دانشکده مهندسی برق و ریاضیات، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

### چکیده

یکی از سیستم‌های اندازه‌گیری جهت شناسایی پارامترهای مودال سازه، دوربین‌های ویدیویی دیجیتال است. تحلیل‌های مودال انجام شده بر اساس اندازه‌گیری‌های ویدیویی علی‌رغم مزایای زیاد، به دلیل وابستگی به نشانه‌های کنتراست بالا با چالش‌هایی همراه است. به همین دلیل پژوهش حاضر به ارائه الگوریتمی پردازش شده است که توانایی شناسایی و استخراج پارامترهای مودال با وضوح بالا را تنها بر اساس پاسخ‌های میدان-کامل اندازه‌گیری شده و بدون نیاز به آماده‌سازی اضافی سطح سازه‌ای دارد. این الگوریتم مبتنی بر فاز است و با بهره‌گیری از روش جداسازی کور منبع و تکنیک بزرگنمایی حرکت اجرا می‌شود. همچنین از یک تکنیک تجزیه هرمی چندمقیاسی برای استخراج فاز پیکسل‌های مکانی-زمانی و میدان-کامل استفاده می‌کند. به منظور صحت‌سنجی الگوریتم، ویدیوی ارتعاش آزاد و تصادفی دو تیر با اتصال گیردار و اتصالات مفصلی با پارامترهای مودال معلوم، در محیط نرم‌افزار متلب بازسازی شد. میانگین اختلاف مقادیر شناسایی شده با مقادیر تئوری برای فرکانس‌های مودهای اول تا چهارم کمتر از ۲ درصد و برای میرایی کمتر از ۰/۱ بدست آمده است. نتایج این بخش توانایی الگوریتم در تشخیص مودهای نزدیک به هم سازه را نیز تأیید می‌کند. همچنین جهت ارزیابی عملکرد آن در شرایط آزمایشگاهی، ویدیوی ارتعاش آزاد و تصادفی تیر آلومینیومی با اتصال گیردار که در آزمایشگاه و با استفاده از دوربین سرعت-بالا تهیه شده بود، مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ی نتایج با مقادیر تئوری و یا گزارشات ارائه شده در مطالعات موردی، نشان می‌دهد که استفاده از تکنیک معرفی شده در این مقاله راهکار مناسب و امیدبخشی جهت شناسایی پارامترهای مودال سازه است.

**کلیدواژه‌ها:** آنالیز مودال عملیاتی، اندازه‌گیری غیرتماسی، پردازش ویدیو، هرم مختلط جهت‌دار، جداسازی کور منبع، بزرگنمایی حرکت

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۸

\*نویسنده مسئول: Afsanehbekropushideh@gmail.com

### ۱- مقدمه

تکنیک‌های پایش سلامت و ارزیابی سازه‌های مهندسی بر اساس اطلاعات به‌دست‌آمده از ارتعاش، یکی از رایج‌ترین روش‌ها برای

شناسایی آسیب‌های سازه‌ای است [1]. ایده اساسی پذیرفته شده طی این مطالعات برای تشخیص آسیب بر اساس حرکت سازه، این است که تغییرات ناشی از خسارت در خواص فیزیکی (جرم، میرایی و سختی) موجب تغییرات قابل‌تشخیص در خواص مودال (فرکانس‌های طبیعی، میرایی مودال و اشکال مودی) خواهند شد. بدین ترتیب، تغییرات در پارامترهای مودال نشان‌دهنده‌ی تغییر در وضعیت سلامت سازه، یعنی آسیب است. بنابراین اندازه‌گیری و تعیین رفتار دینامیکی سازه از اهمیت بالایی برخوردار است. تکنیک مرکزی برای توصیف دینامیک سازه آنالیز مودال است [2].

به‌طور مرسوم، آنالیز مودال برای اندازه‌گیری ارتعاش نیازمند حسگرهایی است که با استفاده از سیم به سازه متصل می‌شوند. به‌کارگیری چنین سیستم‌هایی علی‌رغم ارائه‌ی اندازه‌گیری‌های قابل‌اعتماد می‌تواند منجر به بارگذاری جرمی روی سازه‌های سبک‌وزن شود. همچنین در سازه‌هایی که مشکلات مرتبط با دسترسی دارند؛ استفاده از این حسگرها پرهزینه، زمان‌بر و نیازمند تعمیر و نگهداری قابل‌توجهی است. از طرفی از نویزهای ناشی از کابل انتقال داده‌ها نیز نباید غافل شد. به جهت ارتقاء و رفع مشکلات ناشی از کابل‌کشی‌های این حسگرها، برخی محققین بر روی شبکه‌های حسگر بی‌سیم متمرکز شدند. در این مورد نیز مسائلی در ارتباط با امنیت و تامین انرژی شبکه مطرح است. به‌علاوه، به دلیل اینکه این حسگرها به‌طور معمول در تعداد محدودی از مکان‌های گسسته قرار می‌گیرند، دارای وضوح سنجش مکانی (Spatial resolution) پایینی هستند. بنابراین در بحث شناسایی آسیب دارای محدودیت خواهند بود [3-5].

از این‌رو، اخیراً تحقیقات بر روی امکان پایش بدون تماس متمرکز شده‌اند. تکنیک‌های سنجش از راه دور (Remote sensing) می‌توانند بسیاری از مشکلات مرتبط با شبکه‌های حسگر با توزیع پراکنده را از بین ببرند. یک نمونه از روش‌های غیرتماسی اندازه‌گیری جایجایی با استفاده از اسکن نوسان‌سنج لیزری است. نوسان‌سنج لیزری ظرفیت سنجش با دقت مکانی بالا را بدون نیاز به حسگر نصب‌شده بر روی سازه‌ها و بدون القای اثر بارگذاری جرم فراهم می‌کند. اما این دستگاه اندازه‌گیری نسبتاً پرهزینه است. از طرفی اجرای اندازه‌گیری‌های متوالی در سنجش نواحی بزرگ، می‌تواند زمان‌بر و خسته‌کننده باشد [6-8].

به‌عنوان یک روش غیرتماسی جایگزین، استفاده از دوربین‌های ویدیویی دیجیتال نسبتاً کم‌هزینه، سریع و آسان است. دوربین‌های دیجیتال اندازه‌گیری‌های هم‌زمان با وضوح مکانی بسیار بالا را بدون اعمال جرم اضافه بر روی سازه ارائه می‌دهند. اندازه‌گیری‌های مبتنی بر دوربین فیلم‌برداری در ترکیب با الگوریتم‌های پردازش تصویر به‌طور موفقیت‌آمیزی برای اندازه‌گیری ارتعاش و آنالیز مودال مورد استفاده قرار گرفته است [9-12].

باین‌حال این روش‌ها علی‌رغم مزایای زیاد، به دلیل وابستگی به الگوهای ظاهری و نشانه‌های کنتراست بالا، چالش‌هایی را در

می‌دهند<sup>[13]</sup>. این امر آن را در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی، نسبت به اطلاعات خام شدت تصویر برتری داده است. از این رو در این مقاله شناسایی مبتنی بر فاز با استفاده از ویدیوهای ثبت‌شده، اساس کار می‌باشد.

## ۲-۱- نمایش محلی حرکت ارتعاشی مبتنی بر فاز

از آنجایی که حرکت سازه در تصاویر مختلف، از نظر مکانی، محلی است برای استخراج سیگنال فاز حاوی حرکت ارتعاشی باید از فیلترهای محلی و چندمقیاسی در بعد مکان استفاده شود. فیلتر هرم مختلط جهت‌دار (Complex steerable pyramid)<sup>[15,18]</sup> دارای زیرباندی (Sub-band) با این دو ویژگی است. با اعمال این فیلتر به هر فریم (حاوی  $N$  پیکسل) از ویدیو (شامل  $T$  فریم)، فاز محلی در مقیاس‌های مختلف مکانی به دست می‌آید:

$$I(x + \delta(x,t)) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} R_{\omega}(x,t) \quad (1)$$

$$= \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \rho_{\omega}(x,t) e^{j2\pi\omega_0(x+\delta(x,t))}$$

در رابطه‌ی فوق  $I$  شدت تصویر با مختصات پیکسل  $x$  و حرکت محلی  $\delta(x,t)$  در مکان و زمان است.  $R_{\omega}(x,t)$  نیز پاسخ فیلتر (نمایش زیرباند) در مقیاس مکانی  $\omega$  است:

$$R_{\omega}(x,t) = \rho_{\omega}(x,t) e^{j2\pi\omega_0(x+\delta(x,t))} \quad (2)$$

با دامنه‌ی محلی  $\rho_{\omega}(x,t)$  و فاز محلی  $\psi(x,t) = 2\pi\omega_0(x + \delta(x,t))$  که ارتعاش سازه در طول زمان را کدگذاری می‌کند. با حذف میانگین زمانی از فاز محلی می‌توان بر اساس  $\delta'(x,t) = 2\pi\omega_0\delta(x,t)$  شناسایی مودال خروجی-محور را انجام داد.

## ۲-۲- برهم‌نهی مودال حرکت ارتعاشی مبتنی بر فاز

ماتریس حرکت به دست آمده در بخش قبل را می‌توان با استفاده از اصل برهم‌نهی مودال به صورت ترکیب خطی از پاسخ‌های مودال بیان کرد<sup>[19]</sup>:

$$\delta'(x,t) = \Phi(x)q(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)q_i(t) \quad (3)$$

که  $\delta' \in R^{N \times T}$  ماتریس حرکت (در مقیاس اول با تعداد  $N$  پیکسل)،  $\Phi \in R^{N \times n}$  ماتریس شکل‌های مودی،  $q \in R^{n \times T}$  پاسخ‌های مودال و  $n$  تعداد مودها است. برای شناسایی مودال خروجی-محور،  $\Phi$  و  $q(t)$ ، هر دو باید تنها بر اساس ماتریس فاز به دست آمده شناسایی شوند. اما به دلیل اینکه در اندازه‌گیری‌های ویدیویی از سازه، تعداد پیکسل‌ها (بعد مکانی) بسیار بالاتر از تعداد مودهای فعال (بعد مودال) سازه است (یعنی  $n \gg N$ )، مسئله شناسایی مودال معرفی شده در رابطه ۳ معرف یک مدل فرامعین بوده و به صورت مستقیم قابل حل نیست. در همین راستا یک خانواده از رویکرد یادگیری ماشین بدون نظارت (unsupervised machine learning) با عنوان جداسازی کور منبع (Blind source separation or BSS)<sup>[20]</sup> اتخاذ شد تا مدل‌سازی و حل مسئله شناسایی مودال عنوان شده به طور

مورد سازه‌های بزرگ و غیرقابل دسترسی ایجاد می‌کنند. از طرفی پذیرش گسترده‌ی تکنیک‌های آنالیز مودال مبتنی بر اندازه‌گیری‌های دوربین فیلم‌برداری، ضرورت توسعه روش‌هایی را بیان می‌کند که تنها از اندازه‌گیری‌های ویدیویی بدون آماده‌سازی اضافی سطح سازه‌ای استفاده می‌کنند. از این رو اخیراً یک روش پردازش ویدیویی با استفاده از محاسبات جریان نوری مبتنی بر فاز<sup>[13,14]</sup> و روش بزرگنمایی حرکت ویدئویی<sup>[15]</sup> برای تحلیل مودال عملیاتی پیشنهاد شده است<sup>[16]</sup>. ارائه‌ی اشکال مودی با وضوح بالا بدون استفاده از رنگ‌ها یا نشانه بر روی سطح سازه از مزیت‌های این تکنیک است. اما به دلیل وابستگی به چندین پارامتر ورودی و نیاز به نظارت کاربر، برای اجرای خودکار در آنالیز مودال عملیاتی مناسب نیست. علاوه بر این، تکنیک مبتنی بر بزرگنمایی حرکت در تجزیه و تحلیل مودهای نزدیک به هم ناتوان است. تفسیر بزرگنمایی حرکت در شناسایی پارامترهای مودال نیز مشخص نشده است.

به همین دلیل پژوهش حاضر با اصلاح چهارچوب بزرگنمایی حرکت ویدیویی مبتنی بر فاز به ارائه‌ی یک الگوریتم آنالیز مودال خروجی-محور می‌پردازد. این الگوریتم نیاز به آماده‌سازی سطح سازه‌ای ندارد و تنها بر اساس پاسخ‌های میدان-کامل اندازه‌گیری شده با استفاده از دوربین‌های ویدیویی به صورت نسبتاً خودکار به شناسایی و استخراج پارامترهای مودال با وضوح مکانی بالا می‌پردازد.

به منظور صحت‌سنجی الگوریتم، ویدیوی ارتعاش آزاد و تصادفی دو تیر با اتصال یک سر گیردار و دو سر مفصل با پارامترهای مودال مشخص، در محیط نرم‌افزار متلب بازسازی شد. سپس با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و ویدیوهای تهیه شده، پارامترهای مودال محاسبه شده و با مقادیر تئوری مورد مقایسه قرار گرفت.

طی آزمونی دیگر، ویدیوی ارتعاش آزاد یک تیر با اتصال گیردار در مقیاس آزمایشگاهی، با استفاده از یک دوربین سرعت-بالا در محیط آزمایشگاه ثبت شد. در گام بعد پارامترهای مودال برای مودهای فعال در آن شناسایی شده‌اند. در پایان با اعمال الگوریتم بر اندازه‌گیری‌های ویدیویی انجام شده در پژوهش<sup>[17]</sup>، عملکرد آن در شناسایی مودال تیر با اتصال گیردار در محیط آزمایشگاه، تحت ارتعاش تصادفی نیز مورد بررسی قرار گرفت.

## ۲- روش حل

ویدیوها از مجموعه‌ای از تصاویر متوالی ساخته می‌شوند، بنابراین دارای دو دامنه هستند: دامنه‌ی مکانی مرتبط با یک میدان دوبعدی از مقادیر روشنایی در یک تصویر واحد و دامنه‌ی زمانی، بر اساس تشکیل ویدیو در طول زمان. تصاویر مشابه با آن‌چه که در استفاده از تبدیل فوری برای استخراج دامنه و فاز حرکت نوسانی انجام می‌شود، می‌توانند با فیلترشدن در دامنه‌ی مکانی به سیگنال‌های دامنه و فاز تجزیه شوند<sup>[16]</sup>. حرکت ارتعاش سازه‌ای نیز در این سیگنال‌های فاز و دامنه کدگذاری شده است. اطلاعات فازی به دلیل حساسیت کمتر نسبت به تغییرات نور و شرایط سطحی، در مقایسه با دامنه تقریباً بهتری از حرکت را ارائه

که  $U_r = [u_1, \dots, u_r] \in R^{N \times r}$ ،  $r \ll N$  ستون اول از  $U$  است و  $i$ امین ردیف از  $R^{r \times T}$   $\eta_i^* = [\eta_{1i}, \dots, \eta_{ri}]$ ، نیز معرف  $i$ امین مولفه‌ی اصلی  $\delta'$  است.

همچنین می‌توان به اثبات ویژگی PCA در خصوص حفظ اطلاعات با وضوح مکانی بالا پرداخت، به این صورت که با معکوس کردن تبدیل خطی مذکور با استفاده از  $r$  مولفه‌ی اصلی می‌توان به ماتریس حرکت با وضوح مکانی اولیه دست یافت:

$$\delta' = U_r \eta \quad (6)$$

### ۲-۲-۲- جداسازی کور مودهای ارتعاشی

در بخش قبل مسئله‌ی شناسایی کور از حالت فرامعین مرتبط با ماتریس حرکت سازه، به مسئله‌ی معین بر اساس مولفه‌های اصلی کاهش یافت. اما در بسیاری از مسائل فرض توزیع جرم یکنواخت برقرار نیست. بنابراین هر مولفه‌ی اصلی ترکیبی از مودهای فعال بوده و می‌تواند به صورت ترکیب خطی از پاسخ‌های مودال بیان شود<sup>[21]</sup>:

$$\eta(t) = Yq(t) = \sum_{i=1}^r \gamma_i q_i(t) \quad (7)$$

در اینجا  $Y \in R^{r \times r}$  حاوی ضرایب ترکیب و  $q(t)$  ماتریس مختصات مودال است.

با جایگذاری معادله‌های ۳ و ۷ در معادله‌ی ۶ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i q_i(t) = \delta' \approx U_r \eta = U_r Y q(t) = U_r \sum_{i=1}^r \gamma_i q_i(t) = \sum_{i=1}^r (U_r \gamma_i) q_i(t) \quad (8)$$

با مقایسه‌ی دو انتهای معادله ۸ و با فرض  $r \approx n$  نیز می‌توان نشان داد که:

$$\varphi_i = U_r \gamma_i \quad (9)$$

در رابطه‌ی فوق  $\varphi_i$  معرف  $i$ امین شکل مودی است.

از طرفی با اعمال مدل خطی الگوریتم BSS به مولفه‌های اصلی، می‌توان به پاسخ‌های مودال دست یافت<sup>[19]</sup>. تکنیکی که در این پژوهش در راستای دستیابی به مختصات مودال مجزا اتخاذ شد، یکی از الگوریتم‌های BSS به نام شناسایی کور مودال (Blind Modal Identification or BMID)<sup>[22]</sup> است. BMID جداسازی را بر اساس ناهمبستگی بین منابع انجام می‌دهد:

$$q(t) = W\eta(t) \quad (10)$$

در این بخش ماتریس تجزیه  $W \in R^{r \times r}$  و مختصات مودال  $q(t)$  به صورت هم‌زمان استخراج می‌شوند. همچنین با توجه به معادله‌های ۷ و ۱۰ می‌توان نشان داد که:

$$r = W^{-1} \quad (11)$$

بنابراین با توجه به معادله‌های ۹ و ۱۱ اشکال مودی با وضوح مکانی بسیار بالا قابل بازیابی هستند. فرکانس‌های مودال و نسبت‌های میرایی نیز بر اساس پاسخ‌های مودال به دست آمده، قابل محاسبه هستند.

مستقیم انجام شود. عملیات شناسایی بر اساس روش مبتنی بر BSS پیشنهاد شده طی دو گام فرمول‌بندی می‌شود: کاهش بعد و جداسازی مودال.

### ۲-۲-۱- کاهش بعد با استفاده از آنالیز مولفه‌های اصلی

کاهش بعد سیستم فرامعین تعریف شده در معادله ۳ با استفاده از آنالیز مولفه‌های اصلی (Principle Component Analysis or PCA) انجام می‌شود. PCA ضمن کاهش بعد ماتریس حرکت، وضوح مکانی بالای اطلاعات ارتعاشی را حفظ می‌کند. بنابراین می‌توان از آن در راستای حل سیستم فرامعین تعریف شده استفاده کرد و نشان داد که مولفه‌های اصلی که شامل بیشترین اطلاعات ماتریس حرکت سازه است، ارتباط نزدیکی با مولفه‌های مودال دارند.

مرحله کاهش بعد با تجزیه‌ی مقادیر تکین ماتریس حرکت آغاز می‌شود:

$$\delta' = U \Sigma V^* = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^* \quad (4)$$

که  $\Sigma \in R^{N \times T}$  یک ماتریس قطری حاوی  $T$  المان قطری  $\sigma_i$  به عنوان  $i$ امین مقدار تکین ( $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_T \geq 0$ ) است،  $U = [u_1, \dots, u_N] \in R^{N \times N}$  و  $V = [v_1, \dots, v_T] \in R^{T \times T}$  نیز ماتریس‌هایی از بردارهای تکین چپ و راست هستند که با تجزیه‌ی مقدار ویژه از ماتریس‌های کوواریانس  $\delta'$  به دست می‌آیند.

همچنین  $r$  مرتبه‌ی ماتریس حرکت  $\delta'$  است؛ اگر تعداد مقادیر تکین غیر صفر آن برابر  $r$  باشد  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = 0$ . بدیهی است که  $i$ امین مقدار تکین،  $\sigma_i$ ، به انرژی پیش‌بینی شده برای  $i$ امین جهت اصلی ( $u_i$ ) ماتریس  $\delta'$  مرتبط است. در تحلیل دینامیکی سازه نیز نشان داده شده است که اگر یک سازه نامیرا یا با میرایی بسیار کم دارای ماتریس جرم متناسب با ماتریس همانی باشد، جهت‌های اصلی با توجه به مقادیر تکین مربوطه که نشان‌دهنده‌ی انرژی شرکت آن‌ها در پاسخ سازه  $\delta'$  است، به سمت اشکال مودی همگرا خواهند بود<sup>[21]</sup>. به عبارت دیگر مودهای فعال سازه بر روی  $r$  مولفه‌ی اصلی پیش‌بینی می‌شوند. از طرفی مشاهده‌ی تجربی اما درست، نشان می‌دهد که معمولا تنها چند مود فعال و غالب در پاسخ ارتعاش سازه‌ای وجود دارد. بنابراین مرتبه‌ی  $\delta'$  که تقریباً برابر با تعداد مقادیر تکین فعال است در مقایسه با بعد مکانی  $\delta'$  بسیار کوچک‌تر است ( $r \ll N$ ). پس می‌توان نتیجه گرفت که PCA با پیش‌بینی خطی بیشترین انرژی (مولفه‌های مودال)  $\delta'$  بر روی تعداد کمی از مولفه‌های اصلی قادر به کاهش بعد قابل توجهی در  $\delta'$  است:

$$\eta = U_r^* \delta' \quad (5)$$

حال با مقایسه‌ی انتهای راست دو معادله ۱۶ و ۱۷ می‌توان مشاهده نمود که هم‌زمان با بزرگنمایی حرکت مود  $i$ ام با ضریب  $(1 + \alpha)$ ، حرکت سایر مودها حذف شده است. به عبارت دیگر، مود  $i$ ام با حذف سایر مودها به صورت کور استخراج شده است. با انجام روند مشابه بر روی هر مقیاس از زیرباند اصلی می‌توان تصاویر (ویدیو) حاوی حرکت ارتعاشی تنها یک شکل مود بزرگنمایی شده را بازسازی نمود:

$$\hat{i}(x + \delta(x, t)) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{\omega}(x, t) \quad (18)$$

در گام آخر نیز می‌توان تکنیک تشخیص لبه استاندارد را بر روی  $\hat{I}$  اعمال کرد تا با جدا شدن سازه از پس‌زمینه، شکل مود با وضوح مکانی بالا قابل‌نمایش باشد.

سایر مودهای سازه می‌توانند در روند مشابه با آنچه که طبق معادله‌های ۱۲ تا ۱۸ انجام شد، استخراج و بزرگنمایی شوند.

### ۲-۳-۲- تحلیل نسبت سیگنال به نویز

بر اساس معادله‌های ۱۲ تا ۱۸ اثبات شد که با استفاده از الگوریتم پیشنهادی حتی حرکت ارتعاشی مودهای ضعیف نیز با ضریب  $(1 + \alpha)$  در یک ویدیوی بازسازی شده حاوی تنها همان مود مجزا، قابل بزرگنمایی است. از این رو در این بخش به پایداری الگوریتم نسبت به نویز می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه در حضور نویز و بدون بزرگنمایی آن می‌توان مود موردنظر را به صورت مجزا و با ضریب  $(1 + \alpha)$  بزرگنمایی کرد.

اگر تصویر  $I(x + \delta(x, t))$  آلوده به نویز  $Z(x, t)$  باشد، نمایش زیرباند تصویر نویزی  $I(x + \delta(x, t)) + Z(x, t)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{R}_{\omega}(x, t) = \rho_{\omega}(x, t) e^{j2\pi\omega_0(x, \delta(x, t))} + \mathbb{N}_{\omega}(x, t) \quad (19)$$

که " ~ " علامت نویزی بودن و  $\mathbb{N}_{\omega}(x, t)$  نشان‌دهنده‌ی زیرباند نویز است. فرض می‌کنیم که دامنه‌ی تصویر بدون نویز،  $\rho_{\omega}(x, t)$ ، نسبت به  $\mathbb{N}_{\omega}(x, t)$  بسیار بزرگتر است، بنابراین فاز استخراج شده از  $\hat{R}_{\omega}(x, t)$  هنوز برابر با  $\psi(x, t) = 2\pi\omega_0(x + \delta(x, t))$  خواهد بود، مانند آنچه که در معادلات ۳ تا ۱۵ ملاحظه گردید. در ادامه با استفاده از معادله ۱۶ بزرگنمایی فاز را به  $\hat{R}_{\omega}(x, t)$  اعمال می‌کنیم:

$$\hat{\hat{R}}_{\omega}(x, t) = R_{\omega}(x, t) e^{j\delta'} + \mathbb{N}_{\omega}(x, t) e^{j\delta'} \quad (20)$$

$$= \rho_{\omega}(x, t) e^{j\{2\pi\omega_0[x + \frac{(1+\alpha)\varphi_i q_i(t)}{2\pi\omega_0}]\}} + \mathbb{N}_{\omega}(x, t) e^{j\{(1+\alpha)\varphi_i q_i(t) - 2\pi\omega_0\delta(x, t)\}}$$

بر اساس معادله ۲۰ مشاهده می‌شود که علی‌رغم بزرگنمایی حرکت ارتعاشی مود  $i$ ام با ضریب  $(1 + \alpha)$  در تصویر بدون نویز، تکنیک بزرگنمایی حرکت مبتنی بر فاز تنها منجر به انتقال فاز مولفه‌ی نویزی می‌شود و دامنه‌ی آن تغییر نمی‌کند. بنابراین پس از جمع زیرباندها، مود  $i$ ام در تصویر بازسازی شده، با ضریب  $(1 + \alpha)$  و با همان سطح شدت نویز پیشین بزرگنمایی خواهد شد:

### ۳-۲- بزرگنمایی حرکت مودهای ارتعاشی

از آنجایی که روش پیشنهاد شده، فرضی بر روی تعداد مودها ندارد، قادر به شناسایی بسیاری از مودهای موجود در پاسخ ارتعاشی سازه خواهد بود. اما مسئله‌ی قابل توجه این است که در شناسایی مودال خروجی-محور برخی مودها (معمولا مودهای بالاتر) به سختی تحریک می‌شوند. در نتیجه در اندازه‌گیری پاسخ ارتعاش سازه‌ای به صورت خفیف ظاهر می‌شوند. به همین دلیل علی‌رغم توانایی الگوریتم در تخمین منطقی فرکانس و میرایی این مودها، دقت تخمین شکل مودی آن‌ها به شدت تضعیف شده و شکل مود به راحتی به نویز آلوده می‌شود.

راهکار پیشنهادی برای مقابله با این موضوع استفاده از تکنیک بزرگنمایی حرکت مبتنی بر فاز است. در ادامه به بررسی کاربرد آن در جهت رفع مسئله‌ی عنوان شده پرداخته شده است.

### ۲-۳-۱- بزرگنمایی مودهای ارتعاشی مجزا

بزرگنمایی و یا حتی تضعیف حرکت را می‌توان بعد از مرحله‌ی جداسازی مودها بر روی مختصات مودال مجزا اعمال کرد. به این صورت که در ابتدا پاسخ مودال مود موردنظر (مود  $i$ ام) با ضریب بزرگنمایی  $\alpha$  و پاسخ مودال سایر مودها با فاکتور تضعیف‌کننده  $\beta = -1$  ضرب شده<sup>[19]</sup> سپس در معادله‌ی ۷ جایگذاری می‌شوند:

$$\hat{\eta}(t) = Y\hat{q}(t) = \gamma_i(\alpha q_i(t)) + \sum_{l=1, l \neq i}^r \gamma_l(\beta q_l(t)) \quad (12)$$

$$= \alpha \gamma_i q_i(t) + \sum_{l=1, l \neq i}^r -\gamma_l q_l(t)$$

در اینجا  $\hat{\eta}$  بیانگر بزرگنمایی است.

در ادامه با جایگذاری معادله ۷ در معادله ۱۲ خواهیم داشت:

$$\hat{\eta}(t) = \alpha \gamma_i q_i(t) + \sum_{l=1, l \neq i}^r -\gamma_l q_l(t) \quad (13)$$

$$= \alpha \gamma_i q_i(t) + \gamma_i q_i(t) - \eta$$

$$= (1 + \alpha) \gamma_i q_i(t) - \eta$$

پس در ادامه می‌توان ماتریس حرکت بزرگنمایی شده،  $\delta'$ ، را با استفاده از معادله‌های ۶ و ۱۳ بازسازی کرد:

$$\delta' \approx U_r \hat{\eta} = U_r [(1 + \alpha) \gamma_i q_i(t) - \eta] \quad (14)$$

$$= (1 + \alpha) (U_r \gamma_i) q_i(t) - U_r \eta$$

از طرفی با جایگذاری معادله ۶ و ۹ در معادله ۱۴ می‌رسیم به:

$$\delta' \approx (1 + \alpha) (U_r \gamma_i) q_i(t) - U_r \eta \quad (15)$$

$$= (1 + \alpha) \varphi_i q_i(t) - \delta'$$

در نهایت تأثیر بزرگنمایی حرکت را می‌توان از طریق دست‌کاری (انتقال) فاز زیرباند اصلی مشاهده نمود<sup>[19]</sup>. به این صورت که با ضرب نمایش زیرباند اصلی  $R_{\omega}(x, t)$  در  $e^{j\delta'}$  و استفاده از معادله‌های ۲ و ۱۵ می‌توان پاسخ فیلتر را به صورت زیر بازسازی نمود:

$$\hat{\hat{R}}_{\omega}(x, t) = R_{\omega}(x, t) e^{j\delta'} = \rho_{\omega}(x, t) e^{j(2\pi\omega_0 x + \delta' + \delta')} \quad (16)$$

$$= \rho_{\omega}(x, t) e^{j\{2\pi\omega_0[x + (1+\alpha)\varphi_i q_i(t)/(2\pi\omega_0)]\}}$$

از طرفی با جایگذاری معادله ۳ در معادله ۲ خواهیم داشت:

$$R_{\omega}(x, t) = \rho_{\omega}(x, t) e^{j[2\pi\omega_0 x + \delta'(x, t)]} \quad (17)$$

$$= \rho_{\omega}(x, t) e^{j\{2\pi\omega_0[x + \varphi_i(x) q_i(t)/(2\pi\omega_0) + \sum_{l=1, l \neq i}^r \varphi_l(x) q_l(t)/(2\pi\omega_0)]\}}$$

(۱) در مرحله‌ی اول با اعمال فیلتر هرم مختلط جهت‌دار به هر فریم  $I(x + \delta(x,t))$  از ویدیو، تجزیه و نمایش چندمقیاسی انجام می‌شود. هدف از این کار محاسبه‌ی پاسخ فیلتر  $R_\omega(x,t)$  در مقیاس‌های مکانی مختلف است. سپس فاز محلی  $\psi(x,t)$  در هر پیکسل از فریم بر اساس پاسخ به‌دست‌آمده  $R_\omega(x,t)$  استخراج می‌شود. با حذف میانگین زمانی از فاز محلی ماتریس حرکت  $\delta'(x,t)$  در مقیاس‌های مختلف حاصل می‌شود.

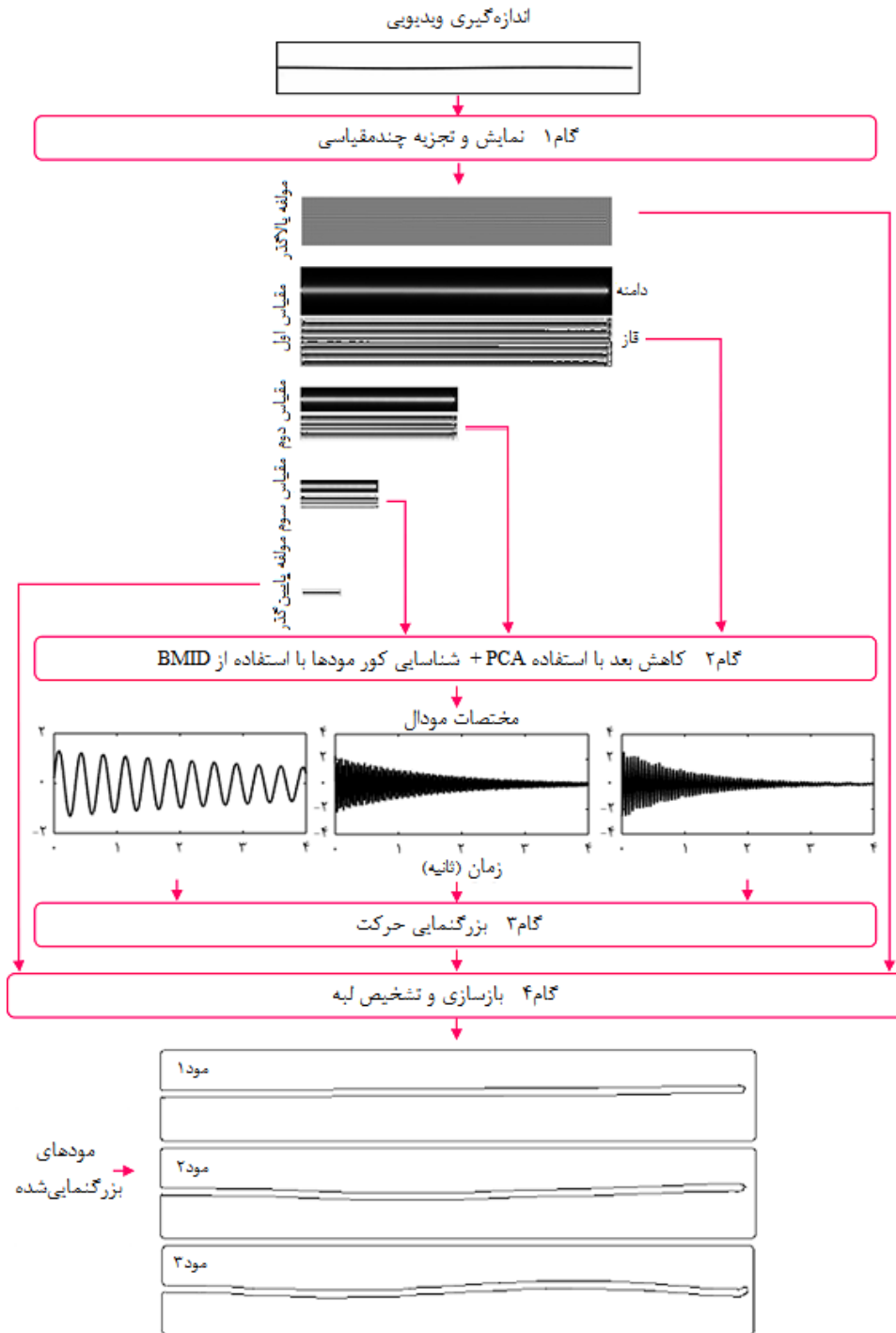
$$\hat{I}(x,t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{R}_\omega(x,t) \tag{۲۱}$$

$$= \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \rho_\omega(x,t) e^{j\left\{2\pi\omega_0\left[x + \frac{(1+\alpha)\varphi_i q_i(t)}{2\pi\omega_0}\right]\right\}}$$

$$+ N_\omega(x,t) e^{j[(1+\alpha)\varphi_i q_i(t) - 2\pi\omega_0\delta(x,t)]}$$

**۴-۲- خلاصه روش پیشنهادی**

نمودار جریان ترسیم‌شده در شکل ۱ خلاصه موارد ارائه‌شده در معادلات ۱ تا ۱۸ را نشان می‌دهد که بر اساس مراحل زیر انجام می‌شوند:



شکل ۱) نمودار جریان روش پیشنهادشده برای آنالیز مودال عملیاتی مبتنی بر اندازه‌گیری و پردازش ویدیویی

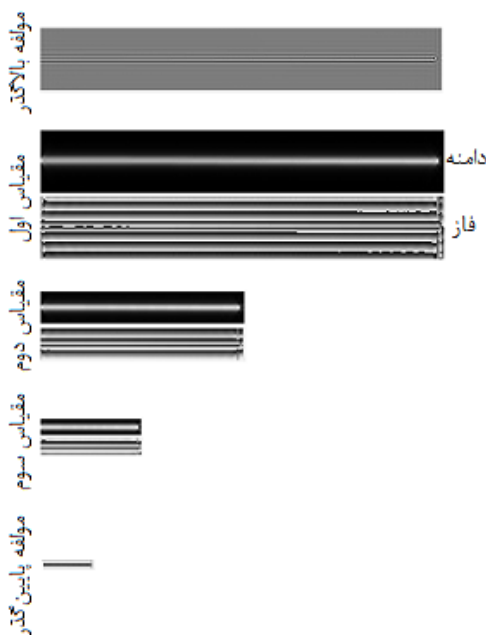
### ۳-۱-۱- ارتعاش آزاد تیر با اتصال گیردار

ویدیوی ارتعاش آزاد تیر مذکور با شرایط تکیه‌گاهی گیردار تنها با ترکیب ۳ مود فعال با نرخ نمونه‌برداری ۱۳۰ فریم بر ثانیه به مدت ۴ ثانیه بازسازی شده است. سپس با اعمال الگوریتم بر ویدیوی تهیه‌شده، پارامترهای مودال آن شناسایی و استخراج شده‌اند. ذکر این نکته نیز لازم است که در تمامی آزمون‌های انجام‌شده در این پژوهش نرخ نمونه‌برداری بر اساس قضیه نایکوئیست<sup>[23]</sup> انتخاب شده است.

در ادامه به منظور درک بهتر عملکرد الگوریتم، روند اجرای آن به صورت گام‌به‌گام، به همراه نتایج هر گام ارائه شده است:

گام ۱: ابتدا با اعمال فیلتر محلی و چندمقیاسی هرم مختلط جهت‌دار بر هر فریم از ویدیو، پاسخ فیلتر در مقیاس‌های مختلف مکانی محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که در تمامی آزمون‌های انجام‌شده در این پژوهش به دلیل سادگی هندسه‌ی سازه، از ویژگی جهت‌دار بودن هرم مختلط جهت‌دار استفاده نشده است. بنابراین پاسخ فیلتر در هر مقیاس، تنها در یک جهت مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۳ یک فریم از ویدیو در ۳ مقیاس مختلف به همراه مولفه‌های بالاگذر و پایین‌گذر آن نمایش داده شده است.

گام ۲: در مرحله‌ی دوم، بر اساس پاسخ فیلتر به دست‌آمده در گام اول، فاز محلی در هر پیکسل از هر فریم استخراج شده و ماتریس فاز مکانی-زمانی در مقیاس‌های مختلف تشکیل شده است. در شکل ۴ نمودار تاریخچه زمانی و چگالی طیفی توان متناظر با آن برای فاز محلی استخراج شده از سه پیکسل دلخواه در مقیاس اول رسم شده است.



شکل ۳) فریم تجزیه‌شده به سه مقیاس مکانی مختلف به همراه مولفه‌های بالاگذر و پایین‌گذر

۲) در هر مقیاس، با اعمال PCA بر  $\delta'(x,t)$  کاهش بعد انجام می‌شود تا  $r$  مولفه اصلی  $\eta$  به دست آید. سپس با اعمال BSS بر  $\eta$  پاسخ‌های مودال  $q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) حاصل می‌شوند. فرکانس و نسبت میرایی هر یک از مودهای فعال در سازه نیز بر اساس پاسخ‌های به دست‌آمده قابل محاسبه است.

۳) در هر مقیاس، بزرگنمایی مود  $i$ ام با ضرب  $q_i(t)$  با ضریب  $\alpha$  و معکوس مراحل ۲ و ۱ به منظور بازسازی ماتریس فاز بزرگنمایی شده  $\delta'(x,t)$  اجرا می‌شود. در نهایت با ضرب  $R_\omega(x,t)$  در  $e^{i\delta'}$  پاسخ فیلتر بزرگنمایی شده  $\hat{R}_\omega(x,t)$  قابل محاسبه است.

۴) در گام آخر با جمع پاسخ‌ها  $\hat{R}_\omega(x,t)$ ، آمین مود بزرگنمایی شده  $\hat{I}(x + \delta(x,t))$  بازسازی شده و با اعمال تکنیک لبه‌یابی بر  $\hat{I}$  شکل مود آن نیز با وضوح بالا استخراج می‌شود. گام‌های ۳ و ۴ برای سایر مودها تکرار می‌شوند.

### ۳- نتایج و بحث

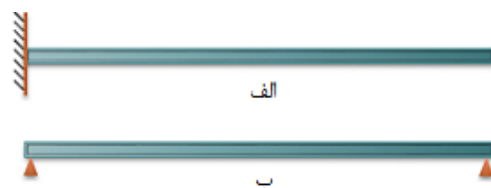
در این قسمت ابتدا به صحت‌سنجی الگوریتم توسعه‌یافته با استفاده از مدل شبیه‌سازی شده می‌پردازیم. سپس عملکرد آن را در شرایط آزمایشگاهی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

#### ۳-۱- آزمون اول: مدل عددی

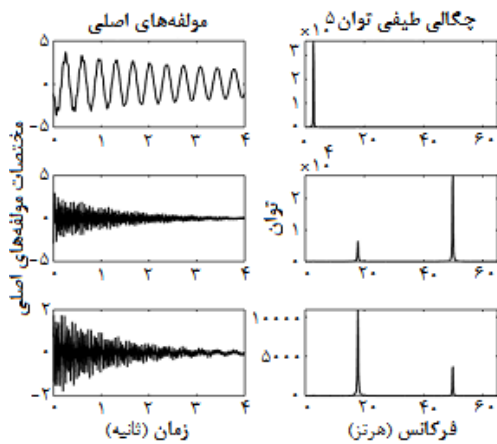
هدف از این آزمون اعتبارسنجی الگوریتم پیشنهادی بوده است. به همین منظور در ابتدا پارامترهای مودال یک تیر فولادی با مشخصات ارائه شده در جدول ۱ با استفاده از روابط تئوری برای دو حالت اتصال یکسر گیردار و دو سر مفصل محاسبه گردید. در شکل ۲ تصویری از این دو نوع اتصال نمایش داده شده است. در گام بعد ویدیوی ارتعاش آزاد و اجباری هر یک از دو تیر در محیط نرم‌افزار متلب بازسازی شد. سپس پارامترهای مودال تخمینی با استفاده از الگوریتم با مقادیر تئوری مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته‌اند. همچنین در پایان این بخش با ارائه‌ی یک مثال توانایی الگوریتم در تشخیص فرکانس‌های نزدیک به هم سازه مورد تایید قرار گرفته است.

جدول ۱) مشخصات تیر فولادی

مدول الاستیسیته (نیوتن بر مترمربع)	چگالی (کیلوگرم بر مترمکعب)	طول (متر)	عرض (متر)	ضخامت (متر)
$2 \times 10^{11}$	۷۸۰۰	۱/۲	۰/۱	۰/۰۰۵



شکل ۲) پیکره بندی تیر فولادی: الف) با اتصال گیردار، ب) با اتصالات مفصلی

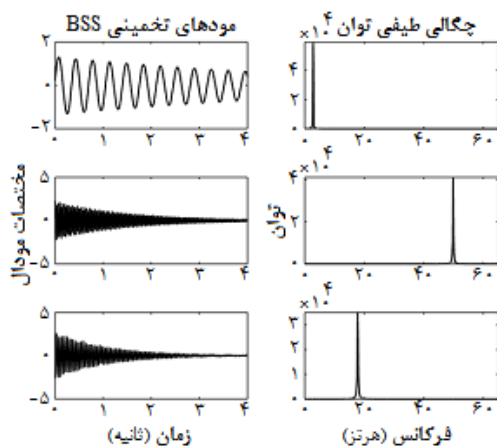


شکل ۶) مولفه‌های اصلی ماتریس فاز مکانی-زمانی در مقیاس اول و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار)

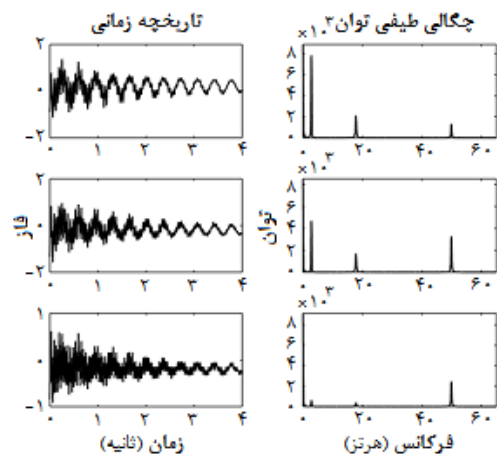
PCA وظیفه کاهش بعد خود را به‌درستی انجام‌داده و مسئله فرامعین را به حالت برابری تعداد منابع و ترکیبات تبدیل‌کرده است.

گام ۴: در گام چهارم مولفه‌های اصلی با استفاده از تکنیک BSS تجزیه‌شده و پاسخ‌های مودال سازه به دست می‌آیند. همان‌طور که در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود هر یک از پاسخ‌های مودال تنها شامل یک مولفه فرکانسی هستند. بنابراین می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه و تکنیک کاهش لگاریتمی به‌ترتیب فرکانس و میرایی هر مود را بر اساس پاسخ مودال آن محاسبه کرد. پارامترهای محاسبه‌شده در مقایسه با مقادیر تئوری آن‌ها در جدول ۲ نشان داده‌شده است. جدول ۲ و مقایسه‌ی انجام‌شده بیانگر دقت و سازگاری بالای نتایج الگوریتم پیشنهادی و محاسبات تئوری است.

گام ۵: هدف از این گام بازسازی ویدیوی بزرگنمایی شده‌ی هر یک از مودهای فعال در سازه و استخراج اشکال مودی آن‌ها است. به همین منظور در این مرحله تکنیک بزرگنمایی حرکت، در



شکل ۷) پاسخ‌های مودال تخمین زده‌شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار)

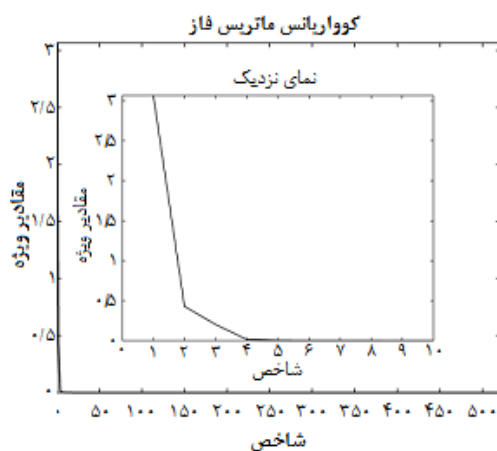


شکل ۸) نمودار تاریخچه زمانی و چگالی طیفی توان متناظر با آن برای فازهای محلی استخراج‌شده از سه پیکسل دلخواه در مقیاس اول (ویدیوی بازسازی‌شده ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار در محیط نرم‌افزار متلب)

با توجه به شکل ۴، هر یک از سیگنال‌های ترسیم‌شده که معرف حرکت سازه در طول زمان هستند حضور تنها ۳ مود فعال در پاسخ ارتعاش سازه‌ای را نشان می‌دهند.

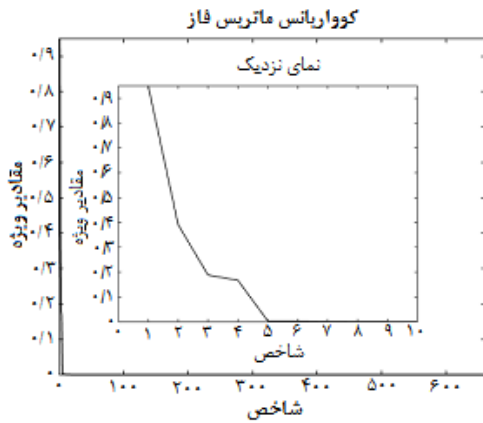
گام ۳: در این گام با اعمال PCA بر ماتریس فاز به‌دست‌آمده در گام قبل، هم‌زمان با کاهش بعد می‌توان به مولفه‌های اصلی دست یافت. با اعمال تبدیل فوریه بر هر یک از مولفه‌های به‌دست‌آمده مشاهده می‌شود که هر مولفه‌ی اصلی ترکیبی از پاسخ‌های مودال غالب در سازه است. از طرفی توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز نیز وجود تنها سه مولفه‌ی اصلی فعال را در پاسخ سازه نشان می‌دهد. زیرا ویدیوی مورد بررسی تنها بر اساس سه مود اول سازه بازسازی‌شده بود. در شکل ۵ توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز نمایش داده‌شده است.

همچنین می‌توان در شکل ۶ مولفه‌های اصلی را به همراه چگالی طیفی توان متناظر با آن‌ها که در واقع نمایشی از مودهای فعال در سازه است، مشاهده کرد. نتایج نشان‌دهنده‌ی آن است که



شکل ۵) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار)



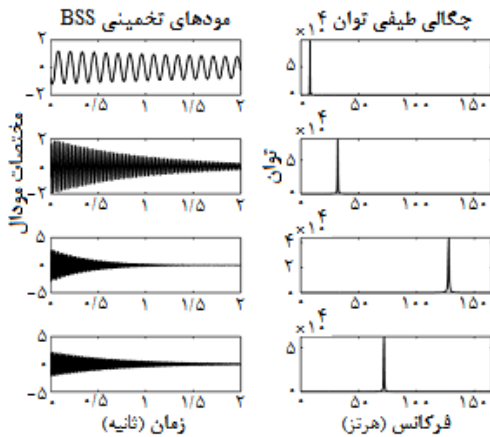


شکل ۹) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

مقادیر فرکانس و میرایی محاسبه‌شده بر اساس شکل ۱۰، در مقایسه با محاسبات تئوری، در جدول ۳ ارائه شده است. شکل مود استخراج‌شده برای هریک از مودهای فعال در سازه نیز در شکل ۱۱ نمایش داده شده است.

۳-۱-۳- ارتعاش تصادفی تیر با اتصال گیردار

در این آزمون پارامترهای مودال تیر فولادی با اتصال گیردار تحت اثر ورودی تصادفی (نویز سفید) و با استفاده از روش اجزای محدود محاسبه شده است. سپس ویدیوی ارتعاش آن با نرخ نمونه‌برداری ۲۵۰ فریم بر ثانیه و تنها بر اساس ترکیب ۴ مود اول سازه در مدت زمان ۴ ثانیه بازسازی و ذخیره شد.



شکل ۱۰) پاسخ‌های مودال تخمین زده‌شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

جدول ۳) پارامترهای مودال تئوری در مقایسه با مقادیر تخمینی برای ویدیوی بازسازی شده ارتعاش آزاد

مود	فرکانس (هرتز)		نسبت میرایی (درصد)	
	تئوری	تخمینی	تئوری	تخمینی
۱	۷/۹۷	۸/۰۰	۰/۴۳	۰/۴
۲	۳۱/۸۹	۳۱/۹۰	۰/۵	۰/۵
۳	۷۱/۷۵	۷۱/۸۷	۰/۳	۰/۳
۴	۱۲۷/۵۶	۱۲۷/۶	۰/۳	۰/۳

جدول ۲) پارامترهای مودال تئوری در مقایسه با مقادیر تخمینی برای ویدیوی بازسازی شده ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار

مود	فرکانس (هرتز)		نسبت میرایی (درصد)	
	تئوری	تخمینی	تئوری	تخمینی
۱	۲/۸۳	۲/۷۹	۰/۹۵	۱
۲	۱۷/۷۹	۱۷/۷۷	۰/۸	۰/۸
۳	۴۹/۸۴	۴۹/۸۹	۰/۲	۰/۲

هر مقیاس مکانی، بر روی پاسخ‌های مودال تخمین زده‌شده اعمال می‌شود.

به‌عنوان مثال برای بزرگنمایی مود اول، ابتدا پاسخ مودال آن  $q_1$  با ضریب بزرگنمایی  $\alpha = 40$  و پاسخ سایر مودها  $(q_2, q_3)$  با ضریب کوچکنمایی  $\beta = -1$  ضرب شده‌اند، سپس روند معکوس تکنیک BSS و PCA در جهت بازسازی ماتریس فاز اجرا شده است. در نهایت با ضرب ماتریس فاز بازسازی شده در زیرباند اصلی و جمع پاسخ‌های بزرگنمایی شده فیلتر در مقیاس‌های مختلف، ویدیوی بزرگنمایی شده مود اول حاصل شده است.

گام ۶: در گام آخر نیز به‌منظور استخراج شکل مود با وضوح بالا، روش تشخیص لبه‌ی کنی (Canny) بر روی هر فریم از ویدیوی بزرگنمایی شده اعمال شده است.

گام‌های ۵ و ۶ به‌منظور استخراج سایر شکل‌های مودی و بازسازی ویدیوی بزرگنمایی شده‌ی آن‌ها تکرار شده است. ضرایب بزرگنمایی مودهای دوم و سوم به ترتیب برابر ۱۷۰ و ۲۰۰ در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ اشکال مودی استخراج‌شده برای هر مود فعال در سازه نمایش داده شده‌اند.

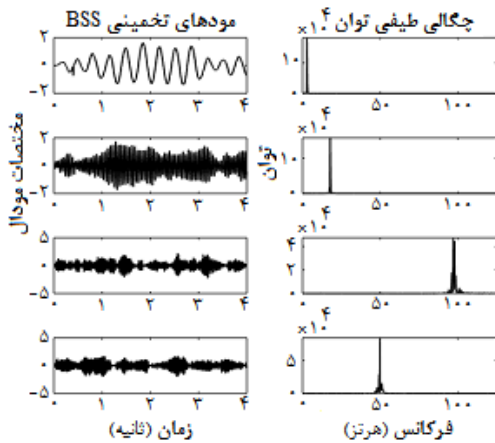
۳-۱-۲- ارتعاش آزاد تیر با اتصالات مفصلی

در این حالت پارامترهای مودال برای یک تیر فولادی با اتصالات مفصلی با مشخصات ارائه‌شده در جدول ۱ محاسبه گردید. سپس با اعمال الگوریتم توسعه‌یافته بر ویدیوی ارتعاش آزاد آن که با نرخ ۳۰۰ فریم بر ثانیه و در مدت‌زمان ۲ ثانیه بازسازی شده بود، پارامترهای مودال ۴ مود فعال در سازه تخمین زده شده‌اند. تشخیص تعداد مودهای فعال در سازه بر اساس توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز، مطابق با شکل ۹ انجام شده است.



شکل ۸) اشکال مودی استخراج‌شده: الف. شکل مود اول ( $\alpha=40$ )، ب. شکل مود دوم ( $\alpha=170$ )، ج. شکل مود سوم ( $\alpha=200$ ) - (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار)

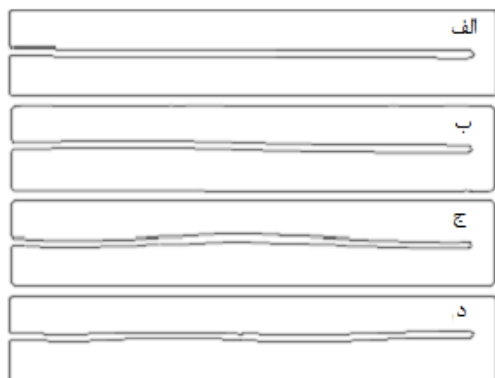
فرکانس و میرایی هریک از مدهای به دست آمده نیز به ترتیب با استفاده از تبدیل فوریه و تکنیک کاهش تصادفی (Random decrement technique or RDT) [24] محاسبه شده است. این مقادیر در مقایسه با محاسبات تئوری، در جدول ۴ ارائه شده اند. همچنین ویدیوی بزرگنمایی شده‌ی مدهای فعال سازه پس از تقویت هریک با استفاده از تکنیک بزرگنمایی حرکت، بازسازی شد. شکل ۱۵ اشکال مودی استخراج شده بر اساس ویدیوهای بزرگنمایی شده را نشان می‌دهد.



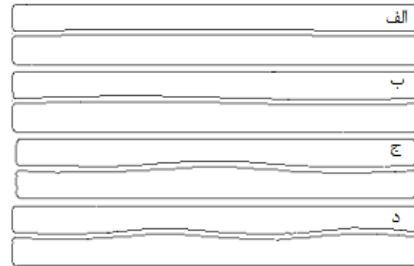
شکل ۱۴) پاسخ‌های مودال تخمین زده شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصال گیردار)

جدول ۴) پارامترهای مودال تئوری در مقایسه با مقادیر تخمینی برای ویدیوی بازسازی شده‌ی ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصال گیردار

مود	فرکانس (هرتز)		نسبت میرایی (درصد)	
	تئوری	تخمینی	تئوری	تئوری
۱	۲/۸۴	۲/۹۳	۱/۹۵	۲
۲	۱۷/۸۳	۱۷/۸۲	۰/۸۴	۰/۸
۳	۴۹/۹۳	۴۹/۸۰	۱/۰۶	۱
۴	۹۷/۸۴	۹۷/۹۰	۰/۸۳	۰/۹

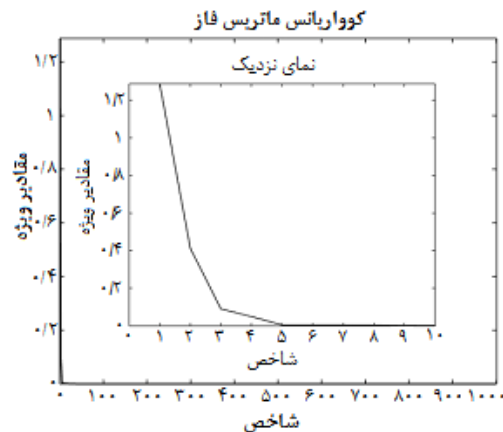


شکل ۱۵) اشکال مودی استخراج شده: الف. شکل مود اول ( $\alpha=200$ )، ب. شکل مود دوم ( $\alpha=300$ )، ج. شکل مود سوم ( $\alpha=600$ )، د. شکل مود چهارم ( $\alpha=700$ ) - (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصال گیردار)

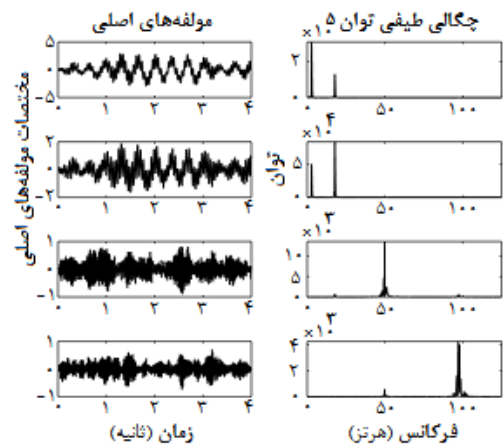


شکل ۱۱) شکل های مودی استخراج شده: الف) شکل مود اول ( $\alpha=200$ )، ب) شکل مود دوم ( $\alpha=250$ )، ج) شکل مود سوم ( $\alpha=300$ )، د) شکل مود چهارم ( $\alpha=300$ ) - (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

در گام بعد پس از اعمال الگوریتم بر ویدیوی به دست آمده، طی روند اجرای آن مشاهده شد که مقادیر ویژه محاسبه شده برای ماتریس کوواریانس فاز، وجود تنها ۴ مود فعال در ارتعاش سازه را نشان می‌دهد. در شکل ۱۲ توزیع این مقادیر قابل مشاهده است. همچنین هر یک از مولفه‌های اصلی به دست آمده که در شکل ۱۳ نمایش داده شده‌اند، به صورت ترکیبی از ۴ مود فعال نمایان شده‌اند. در مرحله‌ی بعد مولفه‌های اصلی با استفاده از روش جداساز کور منابع به پاسخ‌های مودال مجزا، مطابق با شکل ۱۴ تجزیه شدند.



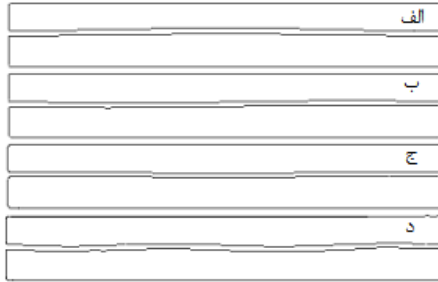
شکل ۱۲) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصال گیردار)



شکل ۱۳) مولفه‌های اصلی ماتریس فاز مکانی-زمانی در مقیاس اول و چگالی طیفی توان متناظر با هریک (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصال گیردار)

جدول ۵) پارامترهای مودال تئوری در مقایسه با مقادیر تخمینی برای ویدیوی بازسازی‌شده ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصالات مفصلی

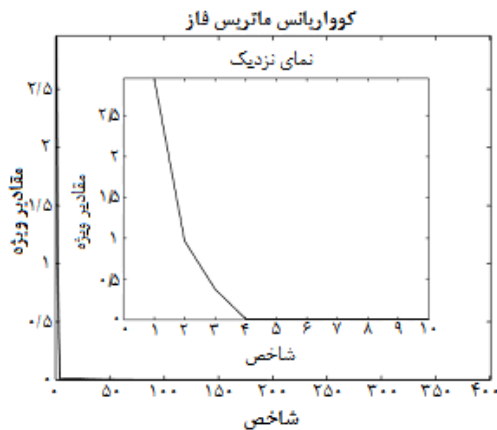
مود	فرکانس (هرتز)			نسبت میرایی (درصد)	
	تئوری	تخمینی	تئوری	تئوری	تئوری
۱	۷/۷۹	۷/۷۳	۱	۱/۱۵	
۲	۳۱/۸۹	۳۱/۹	۰/۵	۰/۴۹	
۳	۷۱/۷۵	۷۲/۱۹	۰/۳	۰/۳	
۴	۱۲۷/۵۶	۱۲۷/۶	۰	۰	



شکل ۱۸) اشکال مودی استخراج‌شده: الف. شکل مود اول ( $\alpha=150$ ) ، ب. شکل مود دوم ( $\alpha=400$ )، ج. شکل مود سوم ( $\alpha=700$ )، د. شکل مود چهارم ( $\alpha=1000$ ) \_ (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

۳-۱-۵- شناسایی مودهای نزدیک به هم

هدف از این آزمون بررسی توانایی الگوریتم در تشخیص فرکانس‌های نزدیک به هم سازه است. به همین منظور ویدیوی ارتعاش آزاد یک تیر طره با دو فرکانس نزدیک به هم در محیط نرم‌افزار متلب تهیه شد. این ویدیو با ترکیب ۳ مود فعال، با نرخ نمونه‌برداری ۱۰۰ فریم بر ثانیه و به مدت ۴ ثانیه بازسازی شده است. فرکانس مودهای اول تا سوم به ترتیب برابر ۲/۸۳، ۱۷/۷۹ و ۱۸/۱۹ هرتز در نظر گرفته شد. همانطور که مشاهده می‌شود مودهای دوم و سوم تنها ۰/۴ هرتز اختلاف دارند. توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز مطابق با شکل ۱۹ حضور ۳ مود فعال سازه را تایید می‌کند. همچنین مطابق با شکل ۲۰ مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی در شناسایی و تخمین فرکانس‌های نزدیک به هم سازه موفق بوده است.

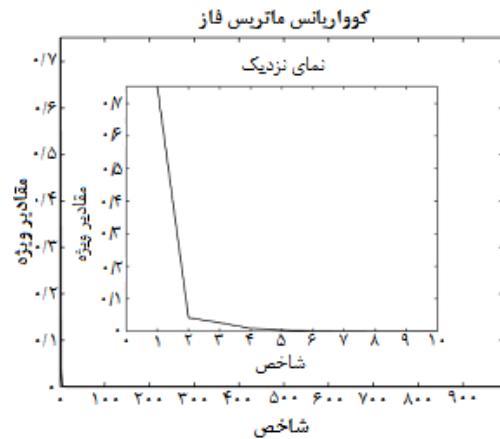


شکل ۱۹) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار و مودهای نزدیک به هم)

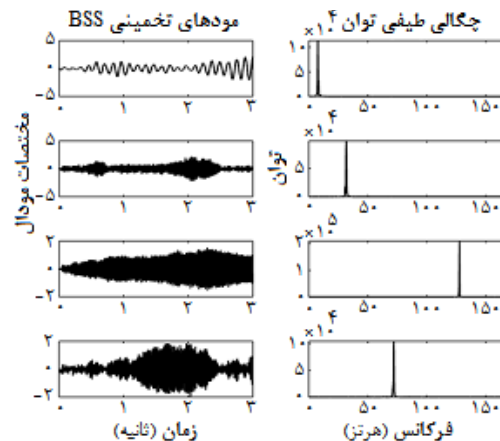
۳-۱-۴- ارتعاش تصادفی تیر با اتصالات مفصلی

در این بخش به بررسی ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصالات مفصلی می‌پردازیم. پارامترهای مودال تئوری تیر مذکور با استفاده از روش المان محدود محاسبه گردید. ویدیوی ارتعاش آن نیز به مدت ۳ ثانیه با نرخ نمونه‌برداری ۳۰۰ فریم بر ثانیه بازسازی شد. برای ایجاد ارتعاش تصادفی سازه، از نویز سفید به‌عنوان نیروی خارجی استفاده شده است. با اعمال الگوریتم بر این ویدیو، بر اساس توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز مطابق با شکل ۱۶ چهار مود فعال در سازه شناسایی شده است، زیرا ویدیوی ارتعاش سازه بر اساس ترکیب ۴ مود اول سازه بازسازی شده بود.

پاسخ هر یک از مودهای فعال سازه در شکل ۱۷ ترسیم شده است. فرکانس و میرایی هر یک نیز در مقایسه با مقادیر تئوری در جدول ۵ گزارش شده است. همچنین شکل‌های مودی استخراج‌شده در شکل ۱۸ قابل مشاهده هستند.



شکل ۱۶) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

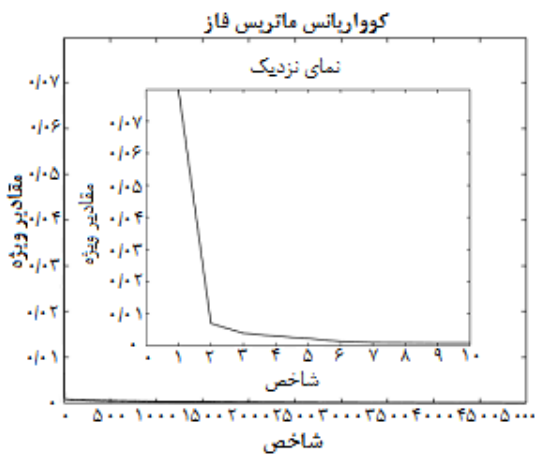


شکل ۱۷) پاسخ‌های مودال تخمین زده شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش تصادفی تیر فولادی با اتصالات مفصلی)

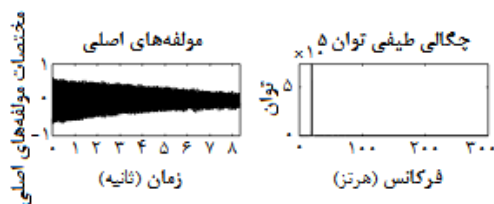
در گام بعد جهت بهبود عملکرد الگوریتم و کاهش زمان محاسبات تعداد پیکسل‌ها به  $504 \times 504$  نمونه‌برداری شده و سپس الگوریتم اجرا شد. حین اجرای الگوریتم، تجزیه ویژه ماتریس کوواریانس فاز، نشان‌دهنده‌ی حضور تنها یک مود فعال (مود اول) در پاسخ سازه بود. شکل ۲۲ توزیع این مقادیر را نشان می‌دهد. همچنین پاسخ مودال به‌دست‌آمده به همراه چگالی طیفی توان متناظر با آن در شکل ۲۳ نمایش داده شده است. بر اساس شکل ۲۳ فرکانس مود فعال در سازه  $19/63$  هرتز محاسبه شد که در مقایسه با مقدار تئوری  $20/3$  هرتز دارای دقت نسبتاً خوبی است. نسبت میرایی به‌دست آمده برای مود موردنظر نیز  $0/11$  درصد است.

### ۳-۲-۲- ارتعاش تصادفی مدل آزمایشگاهی تیر با اتصال گیردار

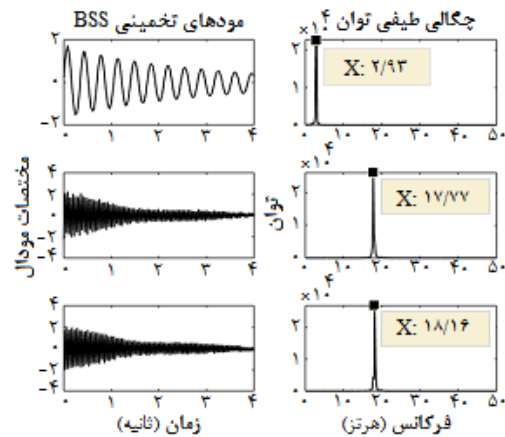
در این آزمون از ویدیوی تهیه شده در پژوهش دیویس و همکاران<sup>[17]</sup> استفاده شده است. طی این مطالعه میله‌هایی از فلزات مختلف (فولاد، آلومینیوم، مس و برنج) متصل شده به بلوک بتنی، در طول‌های ۱۵ و ۲۲ اینچ مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. میله‌ها با قرارگیری در مقابل یک بلندگو مرتعش شده و ارتعاش آن‌ها با یک دوربین سرعت بالا با وضوح پیکسل  $80 \times 2016$  و نرخ  $2500$  فریم بر ثانیه به مدت ۱۷ ثانیه فیلم‌برداری شده است. نمایی از مدل آزمایشگاهی اندازه‌گیری ویدیویی در شکل ۲۴ نمایش داده شده است.



شکل ۲۲) توزیع مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس فاز (ارتعاش آزاد مدل آزمایشگاهی)



شکل ۲۳) مولفه‌ی اصلی ماتریس فاز مکانی-زمانی در مقیاس اول و چگالی طیفی توان متناظر با آن (ارتعاش آزاد مدل آزمایشگاهی)



شکل ۲۰) پاسخ‌های مودال تخمین زده شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش آزاد تیر فولادی با اتصال گیردار و موده‌های نزدیک به هم)

نتایج بررسی شده در پنج حالت فوق بیانگر این است که الگوریتم خروجی-محور توسعه‌یافته قادر به شناسایی و تخمین دقیق فرکانس‌های تشدید و نسبت‌های میرایی موده‌های فعال در سازه است. همچنین توانایی آن در ارائه‌ی اشکال مودی با وضوح بالا، تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های ویدیویی به‌دست‌آمده از سازه مورد تأیید قرار گرفته است.

### ۳-۲-۳ آزمون دوم: مدل آزمایشگاهی

پس از صحت‌سنجی الگوریتم توسعه‌یافته، در این بخش به ارزیابی عملکرد آن در شرایط آزمایشگاهی می‌پردازیم. به همین منظور در ادامه ارتعاش آزاد و تصادفی مدل آزمایشگاهی تیر آلومینیومی با اتصال گیردار را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۳-۲-۱- ارتعاش آزاد مدل آزمایشگاهی تیر با اتصال گیردار

این آزمون با تحریک یک مدل آزمایشگاهی تیر آلومینیومی با اتصال گیردار، در ناحیه‌ی نزدیک به تکیه‌گاه آغاز شد. هم‌زمان با اعمال ضربه، پاسخ سازه با یک دوربین فیلم‌برداری سرعت-بالا با وضوح پیکسل  $1008 \times 1008$  و نرخ  $600$  فریم بر ثانیه به مدت  $8/3$  ثانیه اندازه‌گیری شد. در شکل ۲۱ مدل آزمایشگاهی تیر با اتصال گیردار نمایش داده شده است.



شکل ۲۱) مدل آزمایشگاهی اندازه‌گیری ویدیویی در آزمایش ارتعاش آزاد تیر آلومینیومی با اتصال گیردار

جدول ۶) پارامترهای مودال تخمینی برای تیر آلومینیومی با اتصال گیردار به طول ۲۲ اینچ در مقایسه با نتایج مرجع [۱۷]

مود	فرکانس (هرتز)		نسبت میرایی (درصد)	
	مرجع [۱۷]	روش حاضر	مرجع [۱۷]	روش حاضر
۱	۶۱۸۶	۶۱۸۶	-	۰/۲۷
۲	۴۳/۳۵	۴۳/۳۳	-	۰/۵
۳	۱۲۱/۴۸	۱۲۰	-	۰
۴	۲۳۸/۱۷	۲۳۹/۹۱	-	۰

\* در مرجع [۱۷] میرایی محاسبه نشده است.

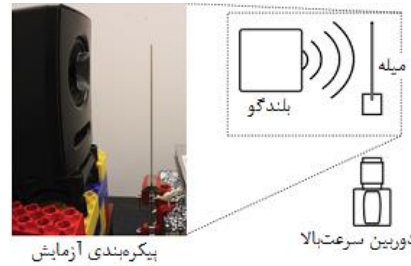
بر اساس مقایسه انجام شده در جدول فوق، مشاهده می‌شود که خروجی الگوریتم توسعه‌یافته و مقادیر ارائه شده در مرجع [۱۷] دارای تطابق خوبی هستند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر به پیاده‌سازی یک الگوریتم آنالیز مودال خروجی-محور پرداخته شده است. این الگوریتم بدون نیاز به آماده‌سازی سطح سازه‌ای و تنها بر اساس پاسخ‌های میدان-کامل اندازه‌گیری شده با استفاده از دوربین‌های ویدیویی به شناسایی و استخراج پارامترهای مودال با وضوح مکانی بالا می‌پردازد.

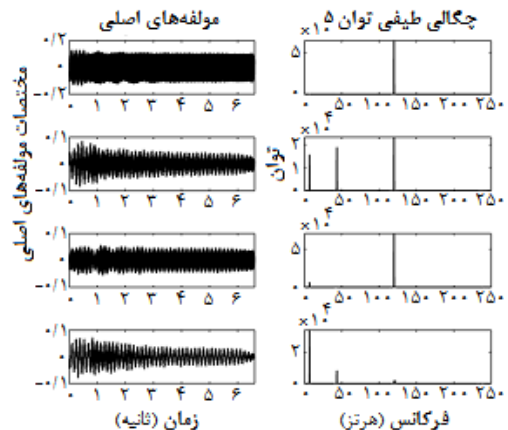
به‌منظور صحت‌سنجی الگوریتم پیشنهادی، ویدیوی ارتعاش آزاد و تصادفی دو تیر فولادی با اتصال یک‌سر گیردار و دو سر مفصل با پارامترهای مودال مشخص، در محیط نرم‌افزار متلب بازسازی شد. با پیاده‌سازی الگوریتم بر ویدیوهای تهیه شده و مقایسه‌ی خروجی آن‌ها با مقادیر تئوری عملکرد روش مورد تایید قرار گرفت. همچنین قابلیت آن در تشخیص و جداسازی مودهای نزدیک به هم سازه نشان‌داده شد. طی روند تعیین مقادیر تئوری پارامترهای مودال و بازسازی ویدیوی ارتعاش هر یک از تیرها، در انتخاب مقادیر فرکانس‌های تشدید هیچ‌گونه محدودیتی وجود نداشت. انتخاب نرخ نمونه‌برداری مناسب بر اساس قضیه‌ی نایکوئیست نیز شناسایی تمامی فرکانس‌های موردنظر را امکان‌پذیر ساخت. نسبت‌های میرایی سازه در جهت انطباق با میرایی مودال سازه‌های متعارف کمتر از ۵ درصد در نظر گرفته شد. حال آن‌که با اتخاذ نسبت‌های میرایی بالاتر نیز نتایج رضایت‌بخش بود. ویدیوی ارتعاش هر یک از مودهای مجزا و به دنبال آن استخراج اشکال مودی نیز با موفقیت انجام شد. همچنین نتایج آزمایش‌ها بیانگر آن است که ضریب بزرگنمایی هر یک از مودها در یک طیف گسترده با نتایج رضایت‌بخش قابل تنظیم است.

پس از صحت‌سنجی الگوریتم، در گام بعد به ارزیابی عملکرد آن در شرایط آزمایشگاهی پرداخته شد. به این صورت که طی یک آزمون آزمایشگاهی، ویدیوی ارتعاش آزاد یک تیر آلومینیومی با اتصال گیردار در مقیاس آزمایشگاهی، با استفاده از یک دوربین سرعت-بالا ثبت شد. سپس پارامترهای مودال برای تنها مود فعال در آن با موفقیت شناسایی شده‌اند. علت شناسایی تنها یک

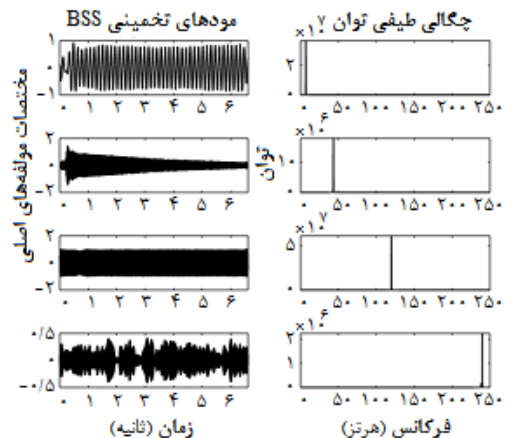


شکل ۲۴) مدل آزمایشگاهی اندازه‌گیری ویدیویی در آزمایش ارتعاش تصادفی تیر آلومینیومی با اتصال گیردار با استفاده از بلندگو [۱۷]

در پژوهش حاضر، با اعمال الگوریتم پیشنهادی بر ویدیوی ارتعاش تیر آلومینیومی به طول ۲۲ اینچ پارامترهای مودال برای چهار مود اول آن استخراج شده‌اند. به‌منظور کاهش زمان محاسبات تنها ۶/۶ ثانیه از اندازه‌گیری ویدیویی به‌عنوان ورودی الگوریتم در نظر گرفته شد. مولفه‌های اصلی و پاسخ‌های مودال به‌دست آمده به همراه چگالی طیفی توان متناظر با هر یک، در شکل‌های ۲۵ و ۲۶ ترسیم شده است. فرکانس‌ها و میرایی‌های محاسبه شده نیز در مقایسه با نتایج اعلام شده در مرجع [۱۷] در جدول ۶ ارائه شده‌اند.



شکل ۲۵) مولفه‌های اصلی ماتریس فاز مکانی-زمانی در مقیاس اول و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش تصادفی مدل آزمایشگاهی [۱۷])



شکل ۲۶) پاسخ‌های مودال تخمین زده شده با استفاده از الگوریتم BSS و چگالی طیفی توان متناظر با هر یک (ارتعاش تصادفی مدل آزمایشگاهی [۱۷])

$\varphi$	بردار شکل مود	مود فعال، ورودی نامناسب الگوریتم ناشی از عدم وجود دوربین و شرایط آزمایشگاهی متناسب با آزمون شناخته شده است. بدان جهت که کاربرد اصلی دوربین مورد استفاده در این آزمون در حوزه‌ی دینامیک سیالات و ثبت حرکت در فواصل نزدیک از هدف موردنظر است. اما در این پژوهش با توجه به شرایط آزمون دوربین فوق الذکر برای اندازه‌گیری ویدیویی، در فاصله‌ی نسبتاً زیادی از سازه قرار گرفته است. به همین دلیل ثبت ارتعاشات ریز سازه امکان‌پذیر نبوده و تنها حرکت کلی آن در قالب شکل مود اول ذخیره شده است. زیرا علاوه بر سیستم اندازه‌گیری نامناسب، سایر مودهای سازه (بجز مود اول) از نسبت سیگنال به نویز پایینی برخوردار بوده‌اند. در صورتی‌که اگر ویدیوی مناسبی از ارتعاش سازه ثبت می‌گردید؛ بر اساس توضیحات بخش ۲-۳-۲ و همچنین مثال ارائه شده در قسمت ۲-۲-۳ شناسایی مودهای با نویز بالا (نسبت سیگنال به نویز پایین) نیز با استفاده از الگوریتم پیشنهادی امکان‌پذیر است. در پایان با اعمال الگوریتم بر ویدیوی تهیه شده در پژوهشی دیگر، عملکرد آن در شناسایی مودال سازه تیر با اتصال گیردار در محیط آزمایشگاه، تحت ارتعاش تصادفی نیز مورد بررسی و تأیید قرار گرفت.
$\psi$	فاز	با توجه به پتانسیل الگوریتم ارائه شده در آنالیز مودال عملیاتی، پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی به توسعه آن در کارهای عملی و در محیط باز پرداخته شود. همچنین با توجه به اینکه سازه‌ها در دنیای واقعی دارای حرکت ارتعاش درون صفحه‌ای و خارج از صفحه هستند، لازم است روش پیشنهادی به سه بعد گسترش یابد. تعمیم روش ارائه شده برای اندازه‌گیری‌ها با استفاده از دوربین‌های معمولی (با نرخ نمونه‌برداری پایین) نیز می‌تواند در پژوهش‌های بعدی مورد تحقیق و بررسی قرار گیرد.
$\omega$	مقیاس مکانی	
$\omega_0$	فرکانس مکانی	
$N$	پاسخ فیلتر نویز	
$I$	شدت تصویر	
$\hat{I}$	شدت تصویر بزرگنمایی شده	
$\hat{I}$	شدت تصویر نویزی بزرگنمایی شده	
$N$	تعداد پیکسل‌ها	
$R$	پاسخ فیلتر	
$\bar{R}$	پاسخ فیلتر نویزی	
$\hat{R}$	پاسخ فیلتر بزرگنمایی شده	
$\hat{R}$	پاسخ فیلتر نویزی بزرگنمایی شده	
$T$	تعداد نمونه‌های زمانی	
$U$	ماتریس بردار تکین چپ	
$V$	ماتریس بردار تکین راست	
$W$	ماتریس تجزیه	
$j$	اپراتور موهومی (Imaginary operator)	
$n$	تعداد مودها	
$q$	مختصات مودال	
$\hat{q}$	مختصات مودال بزرگنمایی شده	
$r$	مرتبه‌ی ماتریس	
$t$	شاخص زمان	
$u$	بردار تکین چپ	
$v$	بردار تکین راست	

**تشکر و قدردانی:** نویسندگان مراتب سپاس و قدردانی خود را از دانشگاه صنعتی شاهرود به منظور فراهم آوردن شرایط مناسب و امکانات آزمایشگاهی و محاسباتی اعلام می‌دارند.

**تأییدیه اخلاقی:** محتویات علمی حاصل پژوهش نویسندگان و صحت نتایج آن نیز بر عهده آنها است.

تعارض منافع: هیچ گونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص وجود ندارد.

**سهم نویسندگان:** افسانه بکروپوشیده (نویسنده اول)، نگارنده مقدمه / پژوهشگر اصلی / تحلیل‌گر داده‌ها / نگارنده بحث (۴۹٪)؛ امید خادم حسینی (نویسنده دوم)، روش‌شناس / پژوهشگر اصلی / نگارنده بحث (۱۷٪)؛ علی کیهانی (نویسنده سوم)، روش‌شناس / پژوهشگر اصلی / تحلیل‌گر داده‌ها (۱۷٪)؛ علیرضا احمدی فرد (نویسنده چهارم)، روش‌شناس / پژوهشگر کمکی / تحلیل‌گر داده‌ها (۱۷٪)

**منابع مالی:** بخشی از هزینه‌ها توسط دانشگاه صنعتی شاهرود و بخشی توسط نویسندگان تأمین شده است.

**فهرست علائم و اختصارات**

$x$	مختصات پیکسل
$Z$	اندازه نویز
$\gamma$	ماتریس ترکیب مولفه‌های اصلی
$\Sigma$	ماتریس مقدار تکین
$\Phi$	ماتریس شکل مود
$\alpha$	ضریب بزرگنمایی
$\beta$	ضریب تضعیف‌کننده
$\gamma$	بردار ترکیب مولفه‌ی اصلی
$\delta$	حرکت
$\delta'$	فاز مرکزی شده (Centered phase)
$\delta''$	فاز مرکزی بزرگنمایی شده
$\eta$	مولفه‌های اصلی
$\hat{\eta}$	مولفه‌های اصلی بزرگنمایی شده
$\rho$	دامنه
$\sigma$	مقدار تکین

- magnification. *Journal of Sound and Vibration*. 2015;345:58-71.
- 17- Davis AL, Bouman KG, Chen JT, Rubinstein M, Durand F, Freeman WT. Visual vibrometry: Estimating material properties from small motions in video. 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2015;5335-5343.
- 18- Simoncelli E, Freeman W. The steerable pyramid: a flexible architecture for multi-scale derivative computation. *Proceedings, International Conference on Image Processing*. 1995;444-447.
- 19- Yang Y, Dorn C, Mancini T, Talken Z, Kenyon G, Farrar C, Mascareñas D. Blind identification of full-field vibration modes from video measurements with phase-based video motion magnification. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017;85:567-90.
- 20- Sadhu A, Narasimhan S, Antoni J. A review of output-only structural mode identification literature employing blind source separation methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017;94:415-31.
- 21- Feeny B, Kappagantu R. On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*. 1998;211(4):607-16.
- 22- McNeill SI. Modal identification using blind source separation techniques. Ph.D. Dissertation. [Houston]: University of Houston; 2007.
- 23- Freeman RL. *Telecommunication system engineering*. 4th ed. New Jersey: John Wiley & Sons; 2004.
- 24- Ibrahim S. Random decrement technique for modal identification of structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1977;14(11):696-700.
- 1- Doebling SW, Farrar CR, Prime MB. A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*. 1998;30(2):91-105.
- 2- Ewins DJ. *Modal testing: theory, practice and application*. John Wiley & Sons; 2009 Jul 20.
- 3- Yang Y, Dorn C, Mancini T, Talken Z, Nagarajaiah S, Kenyon G, Farrar C, Mascareñas D. Blind identification of full-field vibration modes of output-only structures from uniformly-sampled, possibly temporally-aliased (sub-Nyquist), video measurements. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;390:232-56.
- 4- Fan W, Qiao P. Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study. *Structural health monitoring*. 2011;10(1):83-111.
- 5- Khatybi MM, Ashory MR. Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing. *Modares Mechanical Engineering*. 2014;14(8):183-192.
- 6- Stanbridge A, Ewins D. Modal Testing Using A scanning laser doppler vibrometer. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 1999;13(2):255-70.
- 7- Castellini P, Martarelli M, Tomasini E. Laser Doppler vibrometry: development of advanced solutions answering to technology's needs. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006;20(6):1265-85.
- 8- Di Maio D, Ewins DJ. Continuous Scan, a method for performing modal testing using meaningful measurement parameters; Part I. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2011;25(8):3027-42.
- 6- Hosseininia SJ, Khalili K, Emam SM. Modal analysis of wind turbine blade using machine vision. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;15 (11):377-386
- 10- Wahbeh AM, Caffrey JP, Masri SF. A vision-based approach for the direct measurement of displacements in vibrating systems. *Smart Materials and Structures*. 2003;12(5):785-94.
- 11- Lee JJ, Shinozuka M. A vision-based system for remote sensing of bridge displacement. *NDT & E International*. 2006;39(5):425-31.
- 12- Chang CC, Ji YF. Flexible videogrammetric technique for three-dimensional structural vibration measurement. *Journal of Engineering Mechanics*. 2007;133(6):656-64.
- 13- Fleet DJ, Jepson AD. Computation of component image velocity from local phase information. *International Journal of Computer Vision*. 1990;5(1):77-104.
- 14- Gautama T, Van Hulle MA. A phase-based approach to the estimation of the optical flow field using spatial filtering. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 2002;13(5):1127-36.
- 15- Wadhwa N, Rubinstein M, Durand F, Freeman WT. Phase-based video motion processing. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. 2013;32(4):1-0.
- 16- Chen JG, Wadhwa N, Cha Y-J, Durand F, Freeman WT, Buyukozturk O. Modal identification of simple structures with high-speed video using motion