



مدل سازی دینامیکی و کنترل مود لغزشی یک ربات موازی سه درجه آزادی با ساختار 3[P2(US)]

محمود مزارع¹، مصطفی تقی زاده^{2*}، محمدرسول نجفی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
 2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
 3- مربی، مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم
 * تهران، صندوق پستی 1743524155، mo_taghizadeh@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، مدل سازی دینامیکی و کنترل یک ربات موازی با سه درجه آزادی انتقالی انجام شده است. با توجه به مقید بودن سیستم، معادلات قید بر اساس سینماتیک ربات استخراج و مدل دینامیکی ربات با استفاده از روش لاگرانژ به دست آمده است. به منظور کنترل موقعیت ربات روی مسیر طراحی شده، با توجه به عدم قطعیت در مدل دینامیکی استخراج شده، یک کنترل کننده مود لغزشی، طراحی شده که در مقابل ناپیچینی های مدل مقاوم می باشد. عملکرد کنترل کننده طراحی شده در شرایط مختلف از جمله در حضور اغتشاش و تغییر پارامترهای سیستم، شبیه سازی و مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، پاسخ کنترل کننده مود لغزشی با پاسخ یک کنترل کننده خطی سازی پسخوراند مقایسه شده و تاثیر اغتشاش و تغییر پارامترها روی هر دو کنترل کننده نشان داده شده است. همچنین تاثیر در نظر گرفتن توابع سطح لغزش متفاوت در عملکرد کنترل مود لغزشی و استفاده از انتگرال خطا بجای خود خطا بررسی شده است. نتایج نشان می دهند که کنترل کننده مود لغزشی پیشنهادی با وجود در نظر گرفتن اغتشاش و عدم قطعیت های موجود در مدل، قادر به کنترل حرکت ربات موازی روی مسیر طراحی شده بوده و دارای عملکرد مطلوبی می باشد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 25 تیر 1395
 پذیرش: 22 شهریور 1395
 ارائه در سایت: 11 مهر 1395
 کلید واژگان:
 ربات های موازی 3[P2(US)]
 مدل سازی دینامیکی
 معادلات سیستم مقید
 کنترل مود لغزشی
 تابع سطح لغزش

Dynamic Modeling and Sliding Mode Control of a Three DOF Parallel Robot with 3[P2(US)] Structure

Mahmood Mazare¹, Mostafa Taghizadeh^{1*}, Mohammad Rasool Najafi²

1- School of Mechanical Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
 2- School of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.
 * P.O.B. 1743524155, Tehran, Iran, mo_taghizadeh@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 15 July 2016
 Accepted 12 September 2016
 Available Online 02 October 2016

Keywords:

3[P2(US)] parallel manipulator
 dynamic modeling
 constrained systems equations
 sliding mode control
 sliding surface function

ABSTRACT

In this paper, dynamic modeling and control of a three-degrees-of-freedom parallel robot with pure translational motion is performed. Constraint equations are derived based on the kinematic model of the robot and Lagrange method is applied to derive the dynamic equations. In order to control the robot position on planned reference trajectories, in presence of uncertainties of the dynamic model a sliding mode controller is designed which is robust against the uncertainties and induced noises. Performance of the designed controller is simulated and evaluated in different conditions including the presence of noise and parameters variation. In this regard, a comparison has been made between the response of the proposed sliding mode controller and response of a feedback linearization controller, indicating their capabilities in noise rejection and compensation of parameters variation. Also, the effect of defining different sliding surfaces on the performance of the sliding mode controller, and using the integral of error instead of the error itself, have been studied and examined. Results show that the proposed sliding mode controller has a desirable performance in tracking the reference trajectories in presence of the model uncertainties and noise for this kind of parallel mechanism.

1- مقدمه

به علت مزایای ذکر شده در بالا، ربات های موازی زمینه ای است که تحقیقات گسترده ای روی آن در حال انجام است از قبیل: تحلیل سینماتیک، تحلیل فضای کاری، شناسایی پارامترها، و غیره [3,2]. ربات های موازی شش درجه آزادی دارای مزایای ذکر شده در بالا و همچنین کامل ترین نوع حرکت در فضا می باشند اما این ربات ها همیشه در کاربردهای رایج قابل استفاده نیستند [5,4]. از طرفی در سال های اخیر ربات های موازی با درجه آزادی کمتر از شش، که هم شامل مزایای مکانیزم های موازی و هم مزایای دیگری

ربات های موازی در چند دهه گذشته مورد توجه صنعت و دانشگاه قرار گرفته اند. در مقایسه با ربات های سریال، ربات های موازی دارای ویژگی های خاصی هستند از قبیل: صلبيت بالا، دقت و جهت گیری بهتر، عملکرد پایدارتر، ظرفیت بالای بار دینامیکی و موقعیت مناسب سیستم عملگرها [1]. از آنجا که این مکانیزم ها دارای صلبيت بالایی هستند عملگرها معمولاً در نزدیکی پایه قرار دارند و کنترل می شوند.

Please cite this article using:

M. Mazare, M. Taghizadeh, M. R. Najafi, Dynamic Modeling and Sliding Mode Control of a Three DOF Parallel Robot with 3[P2(US)] Structure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 10, pp. 60-68, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ربات داده شده بود [26].

طراحی مسیر بخش مهمی از سیستم کنترلی در سیستم‌های رباتیک است. هدف اصلی از طراحی مسیر برای ربات موازی یافتن مسیری است که از یک نقطه ابتدایی شروع و به یک نقطه انتهایی برسد. حرکت روی مسیر مورد نظر باید تا حد ممکن آرام و پیوسته باشد تا تغییرات ناگهانی در موقعیت، سرعت و شتاب رخ ندهد. توابع ریاضی متعددی از قبیل منحنی‌های چندجمله‌ای، منحنی‌های اسپلاین و منحنی‌های درجه سوم برای طراحی مسیر وجود دارد.

ساختار موازی [P2(US)]³ جهت حصول برخی ویژگی‌ها، نظیر داشتن سه درجه آزادی و دستیابی به حرکت انتقالی خالص در مجری نهایی، توسط نویسندگان ارائه شده و پارامترهای هندسی (ابعاد و زوایای) آن نیز برای دستیابی به ویژگی‌هایی مانند فضای کاری نسبتاً بزرگتر، و عدم ایجاد وضعیت‌های تکین در فضای کاری سینماتیکی، بهینه‌سازی و طراحی شده‌اند [27].

در این مقاله با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیکی ربات برای اولین بار استخراج شده و با استفاده از دینامیک معکوس و مستقیم، شبیه سازی دینامیکی ربات مورد مطالعه صورت گرفته است. به منظور کنترل موقعیت ربات مذکور، با استفاده از روش کنترل مود لغزشی یک کنترل کننده نیز طراحی شده است. طراحی مسیر ربات با استفاده از منحنی‌های اسپلاین انجام شده و به عنوان مسیر مرجع به ربات داده می‌شود تا توسط کنترل کننده مود لغزشی ردیابی شود.

نوآوری مقاله عبارتست از: 1) مدل سازی دینامیکی و استخراج معادلات حرکت ربات موازی [P2(US)]³. 2) اعمال روش‌های خطی سازی پس‌خوراند و مود لغزشی با دو دینامیک سطح لغزش متفاوت در حضور عدم قطعیت و نویز روی مکانیزم پیشنهادی و مقایسه نتایج مربوطه.

ساختار این مقاله بدین ترتیب است: در قسمت 2 مکانیزم طراحی شده معرفی شده است. سپس در قسمت 3 به تحلیل سینماتیک ربات که شامل سینماتیک معکوس است، پرداخته شده و در قسمت 4 مدل سازی دینامیکی ربات آورده شده است. در قسمت 5 کنترل کننده مود لغزشی طراحی شده است. در قسمت 6 به طراحی مسیر با استفاده از منحنی‌های اسپلاین اشاره شده و در قسمت‌های 7 و 8 نتایج تکنیک کنترل در دو شبیه‌سازی و نتیجه-گیری ذکر شده است.

2- معرفی مکانیزم پیشنهادی

یکی از کاربردهای مهم ربات‌های موازی با درجات آزادی انتقالی در فرایندهای ماشین‌کاری است. شماتیک مدل ربات طراحی شده در شکل 1 نشان داده شده است. مکانیزم مورد نظر از یک صفحه پایینی متحرک به نام مجری نهایی، صفحه بالایی (پلتفرم ثابت) و سه بازو تشکیل شده است. هر بازو به وسیله یک مفصل کشویی به پایه متصل است.

روی هر شاخه دو مفصل یونیورسال توسط میله به دو مفصل کروی متصل شده است. طراحی مفاصل این ربات بر این مبنا بوده که فقط سه حرکت انتقالی برای مجری نهایی امکان‌پذیر باشد. بنابراین برای اینکه مجری نهایی دوران نداشته باشد یک ساختار متوازی‌الاضلاع توسط مفاصل یونیورسال و کروی تشکیل شده تا از دوران مجری نهایی جلوگیری کند. از این رو این ربات [P2(US)]³ نامگذاری شده است. مفاصل کشویی که به عنوان عملگر در این مکانیزم استفاده شده‌اند از یک طرف به پایه در یک

از قبیل کاهش هزینه تمام شده در طراحی و ساخت می‌باشند، توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده‌اند [6]. ربات‌های سه درجه آزادی بسیاری برای کاربردهای مختلف، طراحی و مونتاژ شده‌اند [7,8] که از جمله‌ی آنها می‌توان به ربات دلتا با سه درجه آزادی انتقالی، ربات موازی کروی با سه درجه آزادی چرخشی و ربات‌های موازی با درجات آزادی ترکیبی نیز اشاره کرد [9]. از میان این ساختارها، ربات‌های موازی انتقالی [10] دارای پتانسیل زیادی در کاربردهایی از قبیل شبیه‌سازهای حرکت، ابزارهای موقعیت‌یاب، ماشین‌کاری و غیره که نیازمند حرکت انتقالی خالص‌اند، می‌باشند.

تاکنون تحقیقات گسترده‌ای در زمینه مدلسازی و کنترل این نوع ربات‌ها صورت گرفته است. دوو و یانگ [11] و ربولت [12] با استفاده از روش نیوتن-اویلر مدل دینامیکی پلتفرم استوارت را استخراج نمودند. جی و همکاران [13] اثرات اینرسی پایه‌ها را در مدلسازی دینامیکی ربات‌های موازی در نظر گرفتند. همچنین استفان [14] با استفاده از معادلات ماتریسی برگشتی مدل دینامیکی ربات استوارت را استخراج نمود. روش لاگرانژ نیز توسط گرگوریو [15] و کاسکاول [16] به منظور مدلسازی دینامیکی ربات موازی مورد استفاده قرار گرفت.

از دیگر جنبه‌های ربات‌های موازی، مساله کنترل آن‌ها می‌باشد. این ربات‌ها به دلیل آن‌که در ساختار خود دارای زنجیره سینماتیکی حلقه بسته می‌باشند، دارای دینامیک پیچیده‌ای بوده که همین مساله نیز کنترل آن‌ها را با مشکل مواجه کرده است. الگوریتم‌های کنترل حرکت بر مبنای تکنیک‌های طراحی کنترل کننده می‌توانند طبقه‌بندی شوند. از میان این طبقه‌بندی‌ها می‌توان به کنترل کننده PID کلاسیک اشاره نمود. تحقیقات بسیاری در زمینه کنترل این دسته از ربات‌ها صورت گرفته است. کنترل کننده‌های غیرخطی از قبیل روش‌های مبتنی بر لیاپانوف [17,18] و کنترل دینامیک معکوس (گشتاور محاسبه شده) [19,20] نیز استفاده شده‌اند که در بهبود پاسخ سیستم کنترلی و ردیابی سیگنال مرجع عملکرد خیلی خوبی داشته‌اند. کوردجزی و اکبرزاده [21] با استفاده از کنترل کننده مبتنی بر دینامیک معکوس، به کنترل موقعیت یک نوع ربات موازی پرداختند که کنترل کننده طراحی شده را به ازای ورودی‌های مختلف تست نمودند. از آنجا که دینامیک ربات‌های موازی دارای عدم قطعیت‌های مختلف می‌باشد، کنترل کننده طراحی شده باید تا حد امکان مقاوم باشد. از جمله روش‌های کنترل مقاوم می‌توان به روش مود لغزشی اشاره نمود. سانگ و همکاران [22] یک کنترل کننده مود لغزشی به همراه روئیت‌گر طراحی نمودند که مقادیر بهینه بهره‌ها را با استفاده از الگوریتم ژنتیک تعیین کرده بودند و به منظور صحت‌گذاری نتایج کنترل کننده استخراجی، کنترل کننده طراحی شده را بصورت زمان واقعی روی پلتفرم استوارت پیاده‌سازی نمودند. کیانگ و همکاران [23] با در نظر گرفتن یک نقطه کار به عنوان نقطه کار اسمی که ماتریس‌های مدل دینامیکی در آن نقطه دارای مقادیر ثابتی بودند، یک مدل برای پلتفرم استوارت استخراج نمودند سپس با استفاده از الگوریتم کنترلی مود لغزشی یک کنترل کننده طراحی کردند. جعفری نسب و همکاران [24] با استفاده از مود لغزشی یک کنترل کننده برای کنترل موقعیت ربات موازی طراحی کردند. آن‌ها با استفاده از تابع لیاپانوف، اثبات پایداری برای کنترل کننده طراحی شده ارائه نمودند. تقی‌راد [25] و همکاران نیز یک کنترل کننده مود لغزشی مقاوم تطبیقی برای کنترل موقعیت ربات موازی کابلی ارائه کردند که پایداری آن را با استفاده از روش دوم لیاپانوف اثبات نمودند. معزی و همکاران یک کنترل کننده مود لغزشی برای یک ربات موازی صفحه‌ای طراحی کردند که با استفاده از الگوریتم فاخته یک مسیر بهینه به عنوان مسیر مرجع به

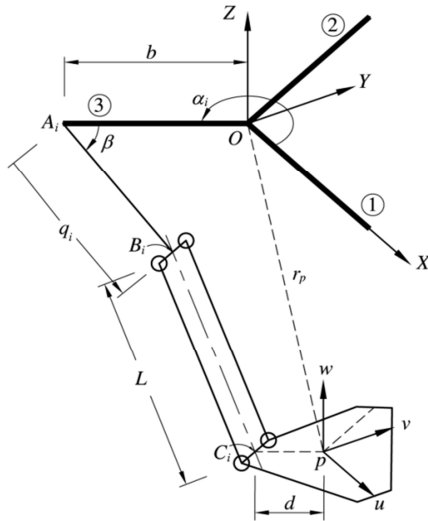


Fig. 2 Schematic of one link of a 3[P2(US)] robot

شکل 2 شماتیک یکی از پایه‌های مکانیزم 3[P2(US)]

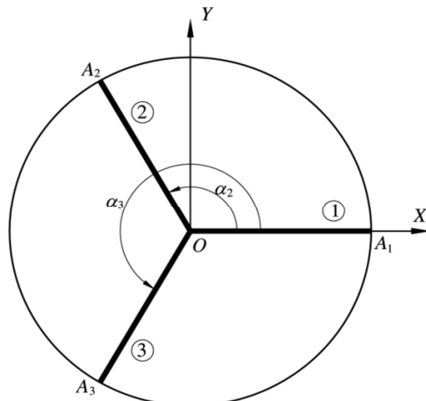


Fig. 3 Upper view of a 3[P2(US)] robot

شکل 3 مکانیزم 3[P2(US)] از نمای بالا

با تفاضل رابطه (2) از (1) داریم:

$$\vec{r}_{B_i C_i} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} + q_i \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha_i \\ \cos \beta \sin \alpha_i \\ \sin \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \cos \alpha_i \\ b \sin \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\vec{r}_{B_i C_i} = \begin{pmatrix} x_p + d \cos \alpha_i + q_i \cos \beta \cos \alpha_i - b \cos \alpha_i \\ y_p + d \sin \alpha_i + q_i \cos \beta \sin \alpha_i - b \sin \alpha_i \\ z_p + q_i \sin \beta \end{pmatrix} \quad (7)$$

اکنون فاصله دو نقطه B_i و C_i به دلیل قرار داشتن بر روی بازوی صلب توسط اندازه آن به صورت رابطه (8) و (9) مقید می‌گردد.

$$|\vec{r}_{B_i C_i}|^2 = L^2 \quad (8)$$

$$L^2 = [x_p + (d - b) \cos \alpha_i + q_i \cos \beta \cos \alpha_i]^2 + [y_p + (d - b) \sin \alpha_i + q_i \cos \beta \sin \alpha_i]^2 + [z_p + q_i \sin \beta]^2 \quad (9)$$

با ساده سازی رابطه (9) برای کمیت q_i سینماتیک معکوس استخراج می‌شود.

$$f_i = q_i^2 + 2\{z_p \sin \beta + [(x_p + (d - b) \cos \alpha_i) \cos \alpha_i + (y_p + (d - b) \sin \alpha_i) \sin \alpha_i] \cos \beta\} q_i + z_p^2 + (x_p + (d - b) \cos \alpha_i)^2 + (y_p + (d - b) \sin \alpha_i)^2 - L^2 = 0 \quad (10)$$

این سه معادله، معادلات قید سیستم را تشکیل می‌دهند. با تعریف کمیت



Fig.1 Schematic of a 3[P2(US)] parallel manipulator

شکل 1 شماتیک ربات موازی 3[P2(US)]

نقطه و از طرف دیگر به صفحه بالایی با زاویه 120 درجه متصل شده‌اند. دو مفصل کروی و دو مفصل یونیورسال توسط دو لینک به هم متصل شده‌اند که از یک طرف به مفصل کشویی و از طرف دیگر به مجری نهایی متصل شده‌اند. مجری نهایی در این ربات به دو صورت می‌تواند قرار بگیرد، در حالت اول مجری نهایی در بالای پایه ثابت یا رو به بالا قرار می‌گیرد و از آن می‌توان به عنوان شبیه‌ساز در کاربردهای مختلف استفاده کرد. حالت دوم این که می‌توان در کاربردهای مختلف از جمله به عنوان عملیات مونتاژ استفاده کرد.

3- تحلیل سینماتیک

برای تحلیل فضای کاری و همچنین تحلیل تکنیکی، استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر مکانیزم موازی سه درجه آزادی، ابتدا معادلات سینماتیکی شامل سینماتیک معکوس مربوط به موقعیت ربات مذکور استخراج شده و در ادامه به استفاده از آن پرداخته شده است.

3-1- سینماتیک معکوس

در تحلیل سینماتیک معکوس، با داشتن موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی باید موقعیت عملگرها را تعیین کرد. در این قسمت با توجه به شکل 2 و 3 به استخراج معادلات سینماتیک معکوس با استفاده از روش تحلیلی پرداخته شده است. مطابق شکل 2 دو چارچوب مختصات نسبی و همچنین صفحه عبوری از سه نقطه انتهایی لینک‌ها مطابق شکل در نظر گرفته شده است. چارچوب مختصات مرجع XYZ در محل تقاطع صفحه مذکور و محور تقارن عمودی قرار داده شده است. مختصات دکارتی محلی uvw در مرکز پلتفرم متحرک، و لینک میانی به طول L بین پلتفرم متحرک و ثابت نصب شده است.

بردار مکان نقاط ابتدا و انتهای شاخه نام به صورت روابط (1) و (2) نوشته می‌شود:

$$\vec{r}_{B_i} = \vec{r}_{A_i} + \vec{r}_{A_i B_i} \quad (1)$$

$$\vec{r}_{C_i} = \vec{r}_{P_i} + \vec{r}_{P_i C_i} \quad (2)$$

که کمیت‌های داده شده عبارتند از:

$$\vec{r}_{A_i B_i} = q_i \begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \alpha_i \\ -\cos \beta \sin \alpha_i \\ -\sin \beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

با توجه به شکل 3، $\alpha_i = (i - 1) \times 120^\circ$ و $\beta = 40^\circ$ می‌باشد.

$$\vec{r}_{A_i} = \begin{pmatrix} b \cos \alpha_i \\ b \sin \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{P_i C_i} = \begin{pmatrix} d \cos \alpha_i \\ d \sin \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{r}_{B_i C_i} = \vec{r}_{C_i} - \vec{r}_{B_i} \quad (5)$$

های A_i و F_i :

$$A_i = z_p \sin \beta + [(x_p + (d-b)\cos \alpha_i) \cos \alpha_i + (y_p + (d-b)\sin \alpha_i) \sin \alpha_i] \cos \beta \quad (11)$$

$$F_i = (x_p + (d-b)\cos \alpha_i)^2 + (y_p + (d-b)\sin \alpha_i)^2 + z_p^2 - L^2 \quad (12)$$

حال با جایگذاری روابط (11) و (12) در رابطه (10)، معادلات سینماتیک معکوس مکانیزم موازی ربات مورد نظر برای هر کدام از پایه‌ها به دست می‌آید.

$$q_i = -A_i \pm \sqrt{A_i^2 - F_i} \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

با توجه به رابطه (13) دو جواب برای سینماتیک معکوس بدست می‌آید که با توجه به پیکربندی در نظر گرفته شده برای ربات، جواب منفی در این مکانیزم قابل قبول است. ابعاد طراحی این مکانیزم در جدول 1 آمده است.

4- مدل سازی دینامیکی

در این بخش، مدل دینامیکی ربات بر مبنای مدل سینماتیکی ارائه شده در بخش سوم استخراج می‌شود. برای استخراج مدل دینامیکی ربات از روش لاگرانژ استفاده می‌شود. از آنجائی که معادلات قید مکانیزم موازی در مختصات تعمیم یافته هستند، فرمول بندی معادلات لاگرانژ برای سیستم مقید مطابق رابطه (14) به کار گرفته می‌شود

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = Q_j + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \quad , \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (14)$$

که θ_j ، زامین مختصه تعمیم یافته و Q_j نیروی تعمیم یافته نظیر آن می‌باشد. همچنین λ_i و f_i به ترتیب بیانگر ضرایب لاگرانژ و معادلات قید می‌باشند. مختصات تعمیم یافته برای توصیف سیستم به صورت رابطه (15) می‌باشند.

$$\theta = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad , \quad q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \quad , \quad p = [x_p \ y_p \ z_p]^T \quad (15)$$

که q حاوی مولفه‌های موقعیت عملگرها و p مولفه‌های موقعیت مجری نهایی می‌باشند. تابع لاگرانژین به صورت رابطه (16) نوشته می‌شود.

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta) \quad (16)$$

که K و U به ترتیب انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ربات می‌باشند. ترم انرژی جنبشی ربات به صورت رابطه (17) بیان می‌شود.

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \quad (17)$$

$$m_1 = m_p + \frac{m_i}{2} \quad , \quad m_2 = m_e + 3 \left(\frac{m_i}{2} \right)$$

که m_p و m_i ، m_e به ترتیب بیانگر جرم مجری نهایی، جرم میله‌های رابط و جرم پیستون عملگرهای ربات هستند. لازم به ذکر است که جرم شش میله رابط، مساوی با هم و هریک متمرکز در دو انتها فرض شده است. همچنین می‌توان انرژی پتانسیل مکانیزم را به صورت رابطه (18) نوشت.

$$U = m_1 g \sin \beta (q_1 + q_2 + q_3) + m_2 g z_p \quad (18)$$

جدول 1 ابعاد و زوایای ربات

Table 1 Dimensions and angles of the robot

پارامترها	مقادیر
α_i	$(i-1) \times 120^\circ$
β	40°
d (mm)	28
b (mm)	325
L (mm)	340

که β زاویه بین راستای مفصل کشویی با پلتفرم ثابت است. با جایگذاری

روابط (17) و (18) در رابطه (14)، لاگرانژین به صورت رابطه (19) بازنویسی می‌شود.

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) - [m_1 g \sin \beta (q_1 + q_2 + q_3) + m_2 g z_p] \quad (19)$$

با جایگذاری لاگرانژین در معادلات (19)، شش معادله لاگرانژ به صورت زیر در خواهند آمد:

$$m_1 \ddot{q}_i - 2\lambda_i \{ \sin \alpha_i \cos \beta [x_p - y_p + (d-b + q_i \cos \beta)] + \sin \beta (z_p + q_i \sin \beta) \} - m_1 g \sin \beta = F_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

$$m_2 \ddot{x}_p - \sum_{j=1}^3 2\lambda_j \{ x_p + (d-b + q_j \cos \beta) \cos \alpha_j \} = 0 \quad (21)$$

$$m_2 \ddot{y}_p - \sum_{j=1}^3 2\lambda_j \{ y_p + (d-b + q_j \cos \beta) \sin \alpha_j \} = 0 \quad (22)$$

$$m_2 \ddot{z}_p + m_2 g - \sum_{j=1}^3 2\lambda_j \{ z_p + q_j \sin \beta \} = 0 \quad (23)$$

برای حل شش معادله دیفرانسیل حاصل که شامل 9 مجهول هستند، نیاز به سه معادله دیگر می‌باشد که با دو بار مشتق‌گیری از معادلات قید (10) به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$[q_i + (d-b)\cos \beta + z_p \sin \beta + x_p \cos \beta \sin \alpha_i - 2y_p \cos \beta \cos \alpha_i] \ddot{q}_i + [x_p - (d-b)\sin \alpha_i + q_i \cos \beta \sin \alpha_i] \ddot{x}_p + [y_p - (d-b)\cos \alpha_i - q_i \cos \beta \cos \alpha_i] \ddot{y}_p + (z_p + q_i \sin \beta) \ddot{z}_p + \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2 + 2\dot{q}_i \dot{x}_p \cos \beta \sin \alpha_i - 2\dot{q}_i \dot{y}_p \cos \beta \cos \alpha_i + 2\dot{q}_i \dot{z}_p \sin \beta = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad (24)$$

با محاسبه ضرایب لاگرانژ از معادلات (21) تا (23) و قرار دادن در معادلات (20) ضرایب لاگرانژ حذف شده و در نهایت معادلات دینامیکی ربات به صورت شش معادله دیفرانسیل غیرخطی (20) و (24) در می‌آیند. این شش معادله را می‌توان به فرم ماتریسی (25) نشان داد.

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) = F \quad (25)$$

که M و C و G به ترتیب ماتریس‌های جرم، ماتریس اثرات گریز از مرکز و ژيروسکوپی و بردار نیروهای گرانشی می‌باشند.

5- کنترل کننده مود لغزشی

عدم قطعیت مدل در سیستم‌های مکانیکی می‌تواند اثرات منفی بر عملکرد آنها بگذارد. رهیافت کنترل مقاوم از جمله ابزارهای مهم برای مقابله با عدم قطعیت در مدل می‌باشد. به عنوان نمونه یکی از رهیافت‌های کنترل مقاوم، روش کنترل مود لغزشی می‌باشد [22].

از جمله معایب این روش کنترلی که معمولاً کاربرد آن را برای کنترل سیستم‌های مکانیکی محدود می‌کند، سوئیچینگ فرکانس بالا است که باعث به وجود آمدن پدیده چترینگ می‌شود. یک سیستم تک ورودی-تک خروجی غیرخطی به صورت رابطه (26) تعریف می‌شود:

$$q^{(n)} = f(q, t) + b(q, t)u(t) \quad (26)$$

که q بردار متغیرهای حالت، u ورودی کنترلی، f و b نیز توابعی از متغیرهای حالت و زمان‌اند. مساله کنترلی بدین صورت است که حالت q طوری تعیین شود که یک حالت متغیر با زمان مشخص q_d را با وجود نایقینی تعقیب کند. خطای تعقیب مسیر در متغیر حالت q را به صورت $\bar{q}(t) = q(t) - q_d(t)$ در نظر می‌گیریم. یک سطح متغیر با زمان در فضای حالت n بعدی به صورت رابطه (27) تعریف می‌شود.

$$S(q, t) = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^{n-1} \bar{q} = 0 \quad (27)$$

که در آن Λ یک ثابت اکیدا مثبت می‌باشد. به منظور کاهش خطای ردیابی مسیر، عبارت انتگرالی به رابطه (27) اضافه می‌شود.

$$V = \frac{1}{2} S^T S > 0 \quad (41)$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه (41):

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \leq 0 \quad (42)$$

که معادله (42) شرط پایداری می باشد. با توجه به شرایط پایداری تابع لیاپانوف و با استفاده از معادله سطح در نظر گرفته شده، با ساده سازی ریاضی، قانون کنترل مود لغزشی برای ربات موازی به صورت رابطه (43) استخراج می شود:

$$F = M(\ddot{q}_d - 2\Lambda e - \Lambda^2 e) + C\dot{q} + G - Mktanh(S) \quad (43)$$

6- طراحی مسیر

به منظور استفاده از ربات در فعالیت های صنعتی، طراحی مسیر از اهمیت خاصی برخوردار است. طراحی مسیر ربات به وسیله تعدادی نقطه دقت که نشان دهنده موقعیت مجری نهایی در چند لحظه از زمان می باشد، صورت گرفته است. نقاط انتخابی باید درون فضای کاری قابل دسترس و همچنین به دور از نقاط تکین ربات باشند. تحلیل فضای کاری و تکنیکی مکانیزم پیشنهادی توسط نویسندگان انجام شده است [27]. از توابع درون یاب درجه سوم برای تولید مسیر مطلوب از میان نقاط انتخابی به گونه ای استفاده شده است که پیوستگی سرعت و شتاب حفظ شود.

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \text{spline}(X, T, t) \\ y_d(t) &= \text{spline}(Y, T, t) \\ z_d(t) &= \text{spline}(Z, T, t) \end{aligned} \quad (44)$$

به منظور شبیه سازی و اعمال تکنیک کنترلی یک مسیر در صفحه افقی طراحی شده و برای حرکت ربات مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج پیاده سازی سیستم حلقه بسته برای کنترل ربات در دو شبیه سازی روی مسیر طراحی شده در قسمت بعد آورده می شود.

7- نتایج

1-1- شبیه سازی 1

در شبیه سازی اول، دو تکنیک کنترلی خطی سازی پسخوراند و مود لغزشی در تعقیب مسیر مورد نظر پیاده سازی شده است. در این شبیه سازی سه نیروی اغتشاشی سینوسی با دامنه های 2، 3 و 4 نیوتن و فرکانس های 60، 40 و 20 رادیان بر ثانیه روی عملگرها در نظر گرفته شده اند. با محاسبه نیروهای ناشی از اینرسی روی سه عملگر مشخص شد که تغییرات در پارامتر جرم می تواند تأثیر قابل توجهی در سیگنال های کنترلی داشته باشد. بنابراین، به جهت بررسی عملکرد مقاوم تکنیک های کنترلی، بر اساس برآوردی که نویسندگان از تغییراتی که اتصال ابزارهای مختلف روی مجری نهایی و اتصالات موجود روی عملگرها، می تواند روی پارامتر جرم ایجاد کند، یک عدم قطعیت 20 درصدی در ماتریس جرم در نظر گرفته شده است.

مسیرهای مطلوب و کنترل شده مجری نهایی در شکل 4 نشان داده شده اند. رفتار کیفی حاصل نشان دهنده عملکرد بهتر کنترل کننده مود لغزشی در حضور عدم قطعیت می باشد.

تعقیب مسیر مطلوب در منحنی های نمودار زمانی حرکت مجری نهایی و عملگرها در شکل های 5 و 6 به طور واضح تر مشاهده می شود.

مولفه های خطای تعقیب مسیر در شکل 7 نمایش داده شده است. همانطور که در شکل 7 قابل مشاهده است سیگنال خطای حاصل از تکنیک مود لغزشی علاوه بر داشتن مقدار کوچکتر، نوسان های کمتری نیز دارد.

سیگنال های کنترلی عملگرها برای کنترل ربات روی مسیر مطلوب در شکل 8 نشان نشان داده شده اند.

$$S(q, t) = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^{n-1} \int_0^t \tilde{q} dt \quad (28)$$

هدف از این تعریف، ننگ داشتن شیب سطح لغزش در نزدیکی صفر است. با انتخاب قانون کنترل u معادله (26) طوری بدست می آید که خارج از رابطه (29) برقرار است.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S^2 \leq -\eta |S| \quad (29)$$

که در آن η یک ثابت اکیدا مثبت است. همچنین:

$$\text{if } S(0) > 0 \rightarrow \frac{d}{dt} S(t) \leq -\eta \quad (30)$$

به منظور از بین بردن تغییرات، از زمان صفر تا زمان رسیدن به سطح، انتگرال گرفته می شود:

$$\int_0^{t_{\text{reach}}} \frac{d}{dt} S(t) dt \leq - \int_0^{t_{\text{reach}}} \eta dt \rightarrow S(t_{\text{reach}}) - S(0) \leq -\eta(t_{\text{reach}} - 0) \quad (31)$$

رابطه (30) تضمین می کند که اگر q به q_d نرسد سطح $S(t)$ در یک زمان محدود کوچکتر از $S(t=0)/\eta$ به دست می آید.

$$\text{if } S(0) < 0 \rightarrow 0 - S(0) \leq -\eta(t_{\text{reach}}) \rightarrow S(0) \leq -\eta(t_{\text{reach}}) \rightarrow t_{\text{reach}} \leq \frac{|S(0)|}{\eta} \quad (32)$$

با شروع از نقطه $S(0) < 0$ می توان نتایج مشابهی نیز بدست آورد، پس

$$t_{\text{reach}} \leq \frac{|S(0)|}{\eta} \quad (33)$$

حال متغیر لغزش به صورت رابطه (34) تعریف می شود:

$$S(q, t) = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^{n-1} \tilde{q} \quad (34)$$

از طرفین رابطه (34) و با انتخاب $n = 2$ نسبت به زمان مشتق گیری می شود.

$$\dot{S} = (\dot{q} - \dot{q}_d) + \Lambda(q - q_d) \quad (35)$$

یک سیستم مرتبه دو به صورت رابطه (36) در نظر گرفته می شود.

$$\ddot{q} = f(q, t) + b(q, t)u(t) \rightarrow \dot{S} = f + u - \dot{q}_d + \Lambda(q - q_d) \quad (36)$$

قانون کنترلی $\hat{u}(t)$ جهت رسیدن به $\dot{S} = 0$ به صورت (37) تقریب زده می شود.

$$\hat{u}(t) = -\dot{f} + \dot{q}_d - \Lambda(q - q_d) \quad (37)$$

برای اینکه شرط لغزش (30) با وجود ناپیوستگی در دینامیک $f(q, t)$ برقرار باشد، روی سطح $S = 0$ ، یک جمله ناپیوسته به $\hat{u}(t)$ اضافه شده که بیانگر قانون کنترلی سوئیچینگ است.

$$u(t) = \hat{u}(t) - k(q, t) \text{sgn}(S(t)) \quad (38)$$

که تابع سوئیچینگ بصورت رابطه (39) می باشد:

$$\text{sgn}(S(t)) = \begin{cases} 1 & , s > 0 \\ 0 & , s = 0 \\ -1 & , s < 0 \end{cases} \quad (39)$$

در کاربردهای عملی به جای تابع علامت sgn از تابع \tanh به علت عملکرد بهتر استفاده می شود. در شبیه سازی انجام شده در این پژوهش نیز از این تابع استفاده شده است.

در رابطه (38)، $k(q, t)$ یک ثابت مثبت است. بنابراین با انتخاب $k(q, t)$ نسبتاً بزرگ، می توان تضمین کرد که رابطه (30) برقرار است؛ یعنی مربع فاصله تا سطح، در امتداد همه مسیرهای سیستم کاهش می یابد. مجدداً معادله سطح لغزش به صورت رابطه (40) در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} S(q, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^2 \left(\int_0^t \tilde{q} dt \right) \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\Lambda \frac{d}{dt} + \Lambda^2 \right) \left(\int_0^t \tilde{q} dt \right) \\ &= \dot{e} + 2\Lambda e + \Lambda^2 \int_0^t e dt \end{aligned} \quad (40)$$

با استفاده از تئوری لیاپانوف، تابع لیاپانوف بصورت رابطه (41) در نظر گرفته می شود:

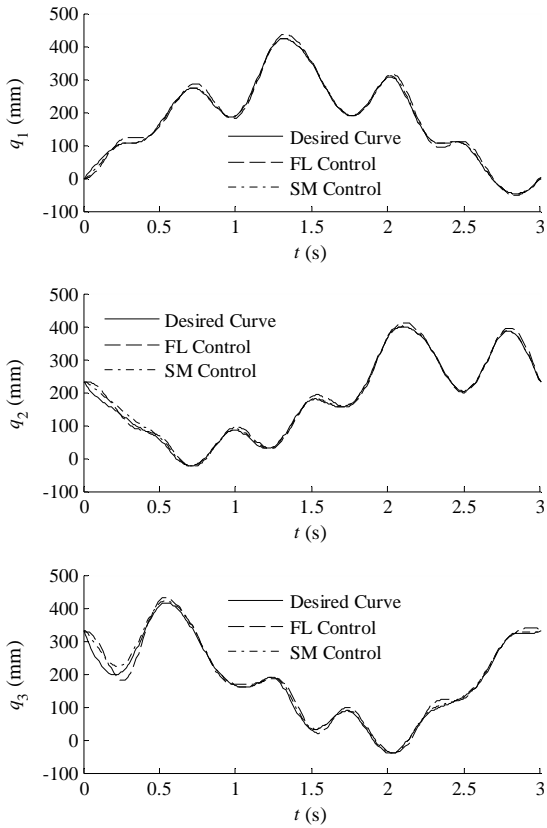


Fig. 6 Actuator motion plots

شکل 6 نمودار زمانی حرکت عملگرها

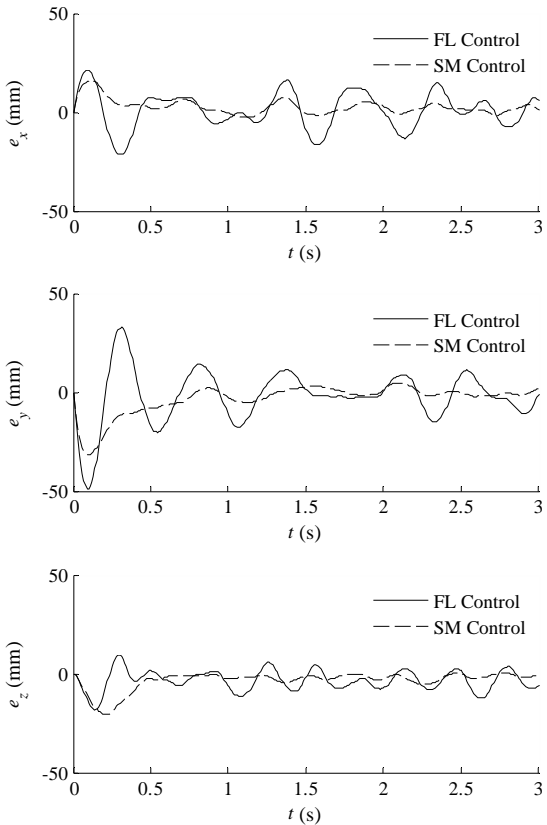


Fig.7 Tracking error components

شکل 7 مولفه های خطای تعقیب مسیر

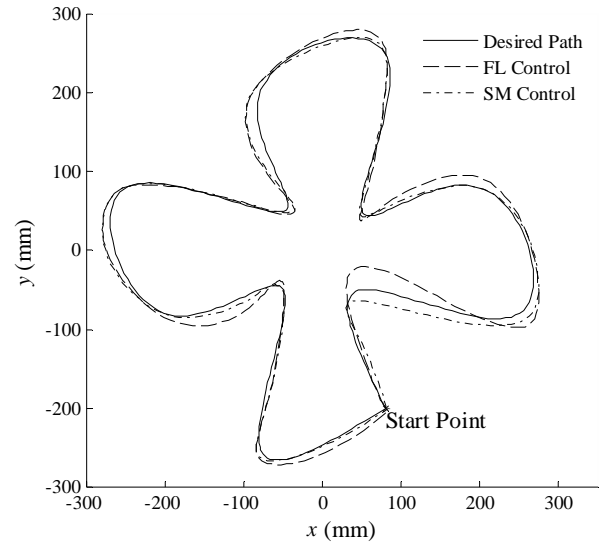


Fig. 4 Desired and actual paths

شکل 4 مسیرهای واقعی و مطلوب

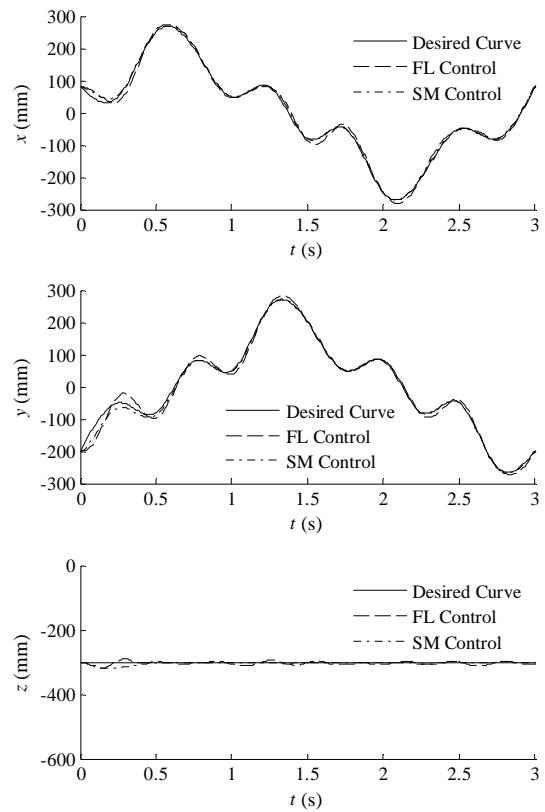


Fig. 5 End-effector motion plots

شکل 5 نمودار زمانی حرکت مجری نهایی

2-7- شبیه سازی

در شبیه سازی دوم، دو کنترل مود لغزشی با دو تابع سطح لغزش متفاوت پیاده سازی شده است. یک تابع با استفاده از رابطه (27) به ازای $n=2$ و تابع دیگر با استفاده از رابطه (28) به ازای $n=3$ و حاوی عبارت انگرالی انتخاب می شوند. بنابراین، دو تابع سطح لغزش در کنترل اول و دوم به ترتیب به صورت روابط (45) و (46) در نظر گرفته شده اند.

$$S(q, t) = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right) \bar{q} \quad (45)$$

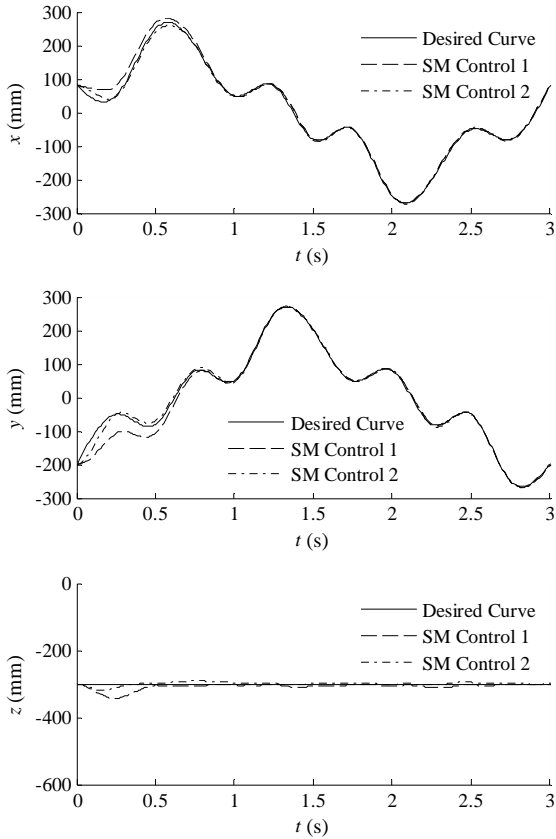


Fig. 10 Time variations of end-effector positions

شکل 10 تغییرات زمانی موقعیت مجری نهایی

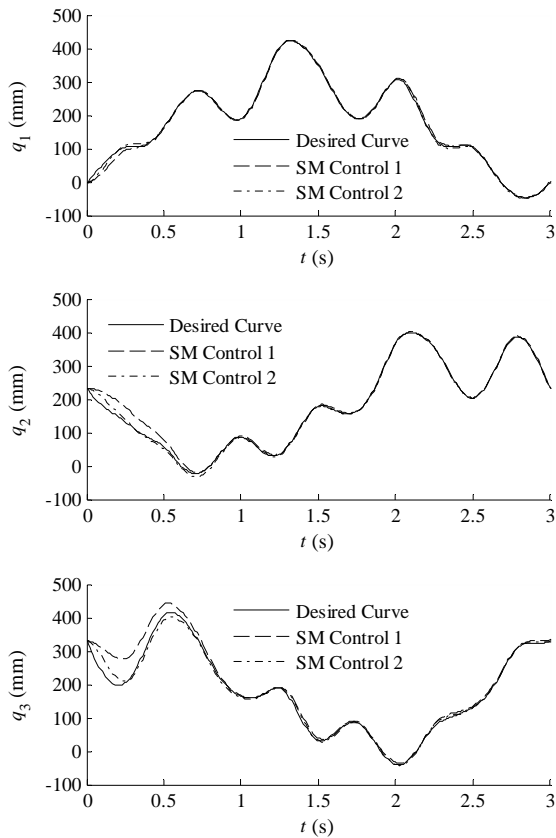


Fig. 11 Time variations of actuator positions

شکل 11 تغییرات زمانی موقعیت عملگرها

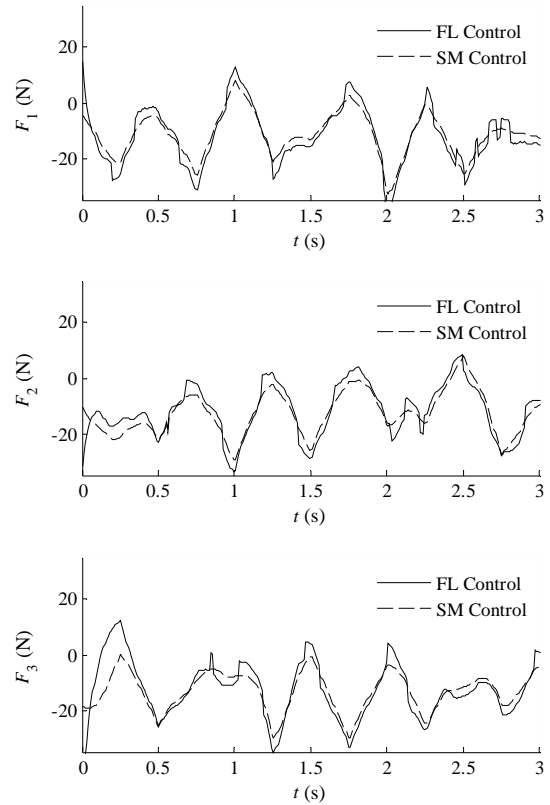


Fig. 8 Control signals

شکل 8 سیگنال های کنترلی

$$S(q, t) = \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right)^2 \left(\int_0^t \tilde{q} dt \right) \quad (46)$$

نیروهای اغتشاشی و عدم قطعیت مربوط به شبیه سازی اول در این شبیه سازی نیز در نظر گرفته شده اند. مسیرهای مطلوب و کنترل شده مجری نهایی در شکل 9 نشان داده شده اند. رفتار کیفی حاصل نشان دهنده عملکرد بهتر کنترل مود لغزشی دوم به علت عملکرد انتگرالی می باشد.

تعقیب مسیر مطلوب در منحنی های نمودار زمانی حرکت مجری نهایی و عملگرها در شکل های 10 و 11 به طور واضح تر دیده می شود. همانطور که از شکل ها مشاهده می شود در نظر گرفتن انتگرال خطا به جای خود خطا در طراحی کنترل کننده مود لغزشی، نتایج خوبی بر جای گذاشته است.

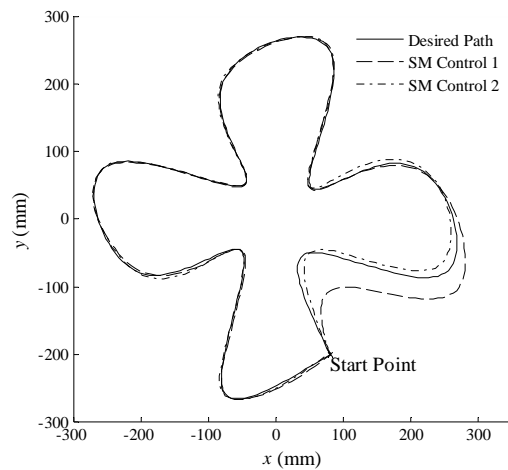


Fig. 9 Desired and actual paths

شکل 9 مسیرهای واقعی و مطلوب

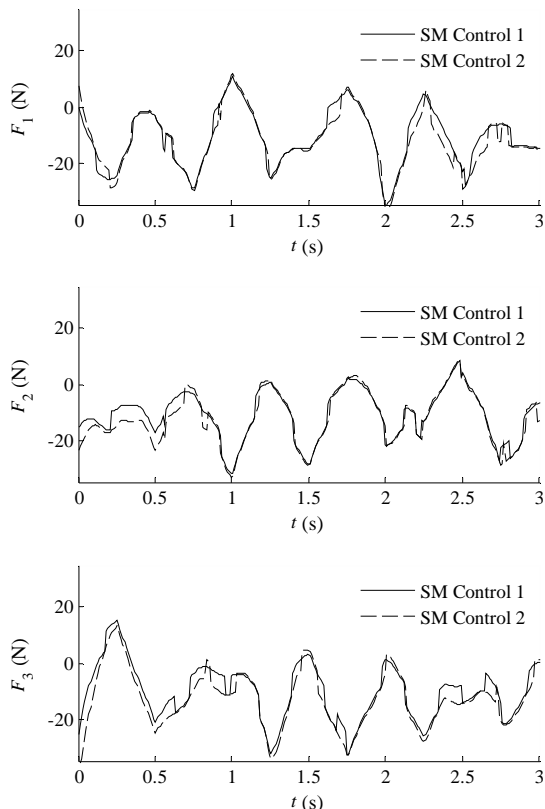


Fig. 13 Control signals of actuators forces

شکل 13 سیگنال‌های کنترلی نیروی عملگرها

سعی و خطا نیز تنظیم شدند. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که کنترل کننده مود لغزشی نسبت به کنترل کننده خطی‌سازی پسخوراند در مقابل عدم قطعیت‌های مدل عملکرد بهتری نشان می‌دهد. همچنین کنترل کننده مود لغزشی با تابع سطح لغزش انتگرالی عملکرد مناسب‌تری برای کنترل ربات 3[P2(US)] مورد مطالعه، داشته است.

9-مراجع

- [1] J. P. Merlet. *Parallel Robots*, Second edition, pp. 116-124, London: Kluwer Academic Publishers, 2006.
- [2] A. E. Codourey, A. Burdet, body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Alberquerque, Melborn, Austria, NM, 1997.
- [3] B. Monsarrat, C. Gosselin, Workspace analysis and optimal design of a 3-leg 6-DOF parallel platform mechanism, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 6, pp. 954-966, 2003.
- [4] G. Liu, Z. Li, A unified geometric approach to modeling and control of constrained mechanical systems, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* Vol. 18, No. 4, pp. 574-587, 2002.
- [5] K. Homma, O. Fukuda, J. Sugawara, Y. Nagata, M. Usuba, A wire-driven leg rehabilitation system: Development of a 4-DOF experimental system, in *Proceedings of IEEE/ASME International Conferences on Advanced Intelligent Mechatronics*, Sweden, pp. 908-913, 2003.
- [6] M. Ceccarelli, E. Ottaviano, A workspace evaluation of an eclipse robot, *Robotica*, Vol. 20, No. 3, pp. 299-313, 2002.
- [7] Z. Wang, S. Ji, Y. Li, Y. Wan, A unified algorithm to determine the reachable and dexterous workspace of parallel manipulators. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, Vol. 26, No. 5, pp. 454-460, 2010.
- [8] C. Gosselin, J. Angeles, Singularity analysis of closed-loop kinematic chains, *Robotics and Automation, IEEE Transactions*, Vol. 6, No. 3, pp. 281-290, 1990.
- [9] H. B. Choi, A. Konno, M. Uchiyama, Analytic singularity analysis

سیگنال‌های کنترلی عملگرها برای کنترل ربات روی مسیر مطلوب در مؤلفه‌های خطای تعقیب مسیر در شکل 12 نمایش داده شده است. همانطور که در شکل قابل مشاهده است، سیگنال خطای حاصل از تکنیک مود لغزشی دوم کوچکتر است.

شکل 13 نشان نشان داده شده‌اند. چنانکه دیده می‌شود، سیگنال‌های کنترلی در هر دو تکنیک نسبتاً هموار بوده و به محدوده اشباع خود نرسیده‌اند. سیگنال کنترلی در دو حالت از نظر اندازه تفاوت چندانی ندارند که نشان دهنده تلاش کنترلی تقریباً یکسان می‌باشد. با توجه به نرمال بودن سیگنال‌ها از نظر مقدار و فرکانس با انتخاب عملگرهای مناسب، هر دو سیگنال نشان داده شده می‌توانند در محدوده عملکرد عملگرها قرار بگیرند.

8- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا با استفاده از هندسه ربات معادلات سینماتیک معکوس یک ربات موازی استخراج شده و به کمک این معادلات، معادلات قید حاکم بر مکانیزم بدست آمده است. به منظور کنترل ربات، معادلات دینامیکی ربات با استفاده از روش لاگرانژ استخراج شده است. در مدل‌سازی دینامیکی ربات، با توجه به مقید بودن سیستم از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود. به منظور حفظ پیوستگی سرعت و شتاب، طراحی مسیر با استفاده از درون‌یابی اسپلاین صورت گرفته است. با توجه به این که مدل دینامیکی ربات مورد مطالعه دارای عدم قطعیت پارامتری می‌باشد، به منظور کنترل ربات روی مسیر طراحی شده، کنترل کننده مود لغزشی طراحی شده است که حتی الامکان در مقابل این عوامل مقاوم باشد. از دو تابع سطح لغزش مختلف در طراحی کنترل کننده استفاده شده است. ضرایب کنترل کننده‌ها به صورت

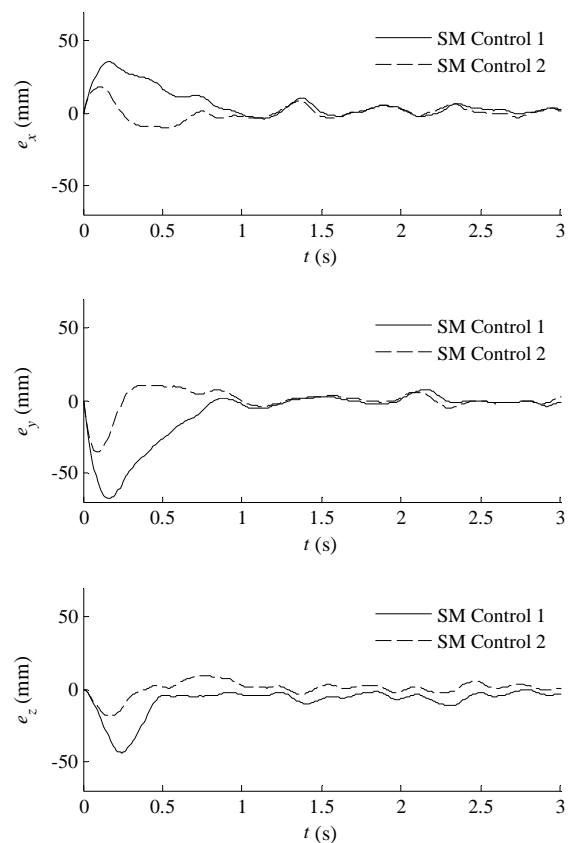


Fig. 12 Error components

شکل 12 مولفه های خطا

- robots with redundant cables: controllers with positive tensions, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, No. 3, pp.457-465, 2005.
- [20] K.Williams, L. Robert, J. Vadia. Planar Translational Cable-Direct-Driven Robots, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 20, No. 3, pp.107-120, 2003.
- [21] H. Kordjazi, A. Akbarzadeh, Control of 3-PRR parallel robots using computed torque method, *Tenth Conference on Manufacturing Engineering*, Babol, Iran, 2010. (in Persian فارسی)
- [22] K. U. Sung, M. C. Lee, S. Kwon, W.Y. Suk, Sliding Mode controller with sliding perturbation observer based on gain optimization using genetic algorithm, *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 4, pp. 630-639, 2004..
- [23] W. Qiang, C. Juan, T. Zhiyong, Study of sliding mode control for stewart platform based on simplified dynamic model, *The IEEE International Conference On Industrial Informatics (INDIN 2008) DCC Daejeon*, Korea, July 13-18, 2008.
- [24] M. Jafarinasab, Sliding mode control of a novel 6-DOF parallel manipulator with rotary actuators, , *16th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, IEEE, Athens, Greece, 2011.
- [25] H.Taghirad, R.Babaghasabha, M. Khosravi, Adaptive robust control of fully-constrained cable driven parallel robots, *Mechatronics*, Vol. 25, pp. 27-36, 2015.
- [26] S.A.Moezi, M.Rafeeyan, S.Ebrahimi, Sliding mode control of 3-RPR parallel robot on the optimal path using cuckoo optimization algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 147-158, 2015. (in Persian فارسی)
- [27] M. Mazare, M. Taghizadeh, M. R. Najafi, Design, Manufacturing and Kinematic Analysis of a Kind of 3-DOF Translational Parallel Manipulator, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 327-334, 2016. (in Persian فارسی)
- of a 4-DOF parallel robot based on Jacobian deficiencies. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 8, No. 2, pp. 378-384, 2010.
- [10] X. Kong, C. M. Gosselin, Type synthesis of 3-DOF translational parallel manipulators based on screw theory, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 1, pp. 83-92, 2004.
- [11] W. Do, D. Yang, Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot, *Journal of Robot Systems*, Vol. 121, No. 5, pp. 209-227, 1988.
- [12] C .Reboulet, T Berthomieu, Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulator, *Proceedings of the IEEE fifth international conference on robotics and automation*, France, pp. 1153-57. 1991.
- [13] J. Zhiming. Dynamics decomposition for Stewart platforms, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, No. 1, pp. 67-69, 1994.
- [14] S. Stefan, Dynamics modelling of a Stewart-based hybrid parallel robot, *Advanced Robotics*, Vol. 29, No.14, pp. 929-938, 2015.
- [15] D. Gregório R. Parenti-Castelli, Dynamics of a class of parallel wrists, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 41, No.3, pp. 126-436, 2004.
- [16] C. Fabrizio, B.Siciliano, L. Villani. The Tricept robot: dynamics and impedance control., *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* Vol. 8, No. 2, pp. 263-268, 2003.
- [17] M. Oh, So. Ryeok, Sunil K. Agrawal, Generation of feasible set points and control of a cable robot, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, No. 3, pp. 551-558, 2006.
- [18] M. Khosravi, H. Taghirad, Dynamic analysis and control of fully-constrained cable robots with elastic cables: *Variable stiffness formulation In Cable-Driven Parallel Robots*, Vol. 124, No. 7, pp. 161-177. Springer International Publishing, 2015.
- [19] M. Oh, So-Ryeok, Sunil K. Agrawal, Cable suspended planar