

## تحلیل ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM)

شاهرخ حسینی هاشمی<sup>۱\*</sup>، کمیل خرمی<sup>۲</sup>

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران  
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران  
\*تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶. shh@iust.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله ارتعاش پوسته استوانه‌ای FGM با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) مطالعه می‌شود. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی، مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری است که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمامی نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسأله خاصی مربوط نیست و فقط به نقاط شبکه و مرتبه مشتق بستگی دارد. پوسته FGM خواص متغیری در راستای ضخامت بر حسب تابع نمایی دارد. همگرایی سریع روش DQM نشان داده شده و دقت آن با سایر مقالات و تئوری‌های پوسته، و همچنین با نتایج نرم‌افزار ABAQUS مقایسه و تأیید شده است. اثر کسر حجمی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM برای شرایط مرزی کلاسیک (تمامی ترکیبات شرایط مرزی ساده و گیردار) در برابر تعداد موج پیرامونی، نسبت طول به شعاع و نسبت ضخامت به شعاع برای مقادیر مختلف توان نمایی بررسی شده است.  
**کلیدواژه‌گان:** ضرایب وزنی، نقاط شبکه، فرکانس‌های طبیعی، کسر حجمی.

## Analysis of Free Vibrations of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Using Differential Quadrature Method

Sh. Hosseini-Hashemi<sup>1</sup>, K. Khorami<sup>2\*</sup>

1- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Iran Univ of Science and Tech.  
2- M.Sc. Student of Mechanical Eng. Dept., Iran Univ of Science and Tec.  
\*P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran. shh@iust.ac.ir

**Abstract-** In this paper vibration frequency characteristics of functionally graded cylindrical (FGM) shells are investigated using the differential quadrature method (DQM). The essence of the differential quadrature method is that the partial derivative of a smooth function with respect to a variable is approximated by a weighted sum of function values at all discrete points in that direction. Its weighting coefficients are not related to any special problem and only depend on the grid points and the derivative order. The material properties are graded in the thickness direction of the shell according to the volume fraction power law distribution. The fast convergence behavior of the method is demonstrated and its accuracy is verified by comparing the results with those of other shell theories obtained using conventional methods and also with those of ABAQUS software. Effects of the exponential volume fraction law on the natural frequencies of FGM cylindrical shells for classical boundary conditions (all possible combinations of clamped (C) and simply supported (S) boundary conditions) are studied against circumferential wave number, length to radius ratio and thickness to radius ratio for different values of power law exponents.

**Keywords:** Weighting Coefficients, Grid Points, Natural Frequency, Volume Fraction.

## ۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای مدور در کاربردهای مختلف مهندسی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. محدوده کاربردها ساختارهای بزرگ مکانیکی و عمرانی تا تجهیزات کوچک الکترونیکی را شامل می‌شود و به عنوان مثال می‌توان به مخازن تحت فشار، مخازن نفت، تجهیزات حفاری و سازه‌های تحمل بار (یاتاقان) در هواپیما اشاره کرد. پوسته‌ها اغلب برای ذخیره‌سازی و انتقال گاز با فشار بالا و نیز مایعات به کار می‌روند و همچنین در طراحی دودکش، بدنه هواپیما، کشتی و ساخت و سازه‌های ساختمانی کاربرد دارند.

تاکنون روش‌های مختلفی برای بررسی ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای به کار رفته است. روش DQM که نخستین بار توسط بلمن و کاستی<sup>۱</sup> [۱] معرفی شد، روشی جایگزین برای حل مستقیم معادلات حاکم بر مسائل مختلف مهندسی است. به تازگی روش DQM برای حل مسائل مربوط به تیر، ورق و پوسته به کار می‌رود. نسخه بهبود یافته روش DQ، GDQ نامیده می‌شود که توسط شو<sup>۲</sup> [۲] معرفی شده است. وی همچنین با به کارگیری روش GDQ ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک لاو مطالعه کرد [۳]. برت و مالک<sup>۳</sup> [۴] با استفاده از روش DQ رفتار ارتعاشی پوسته نازک همگن با شرایط مختلف مرزی را بر حسب سه مؤلفه جابه‌جایی و با به کارگیری تئوری فلوگ<sup>۴</sup> بررسی کردند. ژانگ و همکاران<sup>۵</sup> [۵] ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای را برای شرایط مختلف مرزی با استفاده از روش LaDQM بررسی کردند که معادلات حاکم در مطالعه آنان بر اساس تئوری پوسته گولدنوایزر-نووویلوف<sup>۶</sup> نوشته شده است.

ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای مدور نخست توسط سوفی جرمین<sup>۷</sup> در سال ۱۸۲۱ مطالعه شد و پس از آن در اواخر قرن نوزدهم توسط ریلی<sup>۸</sup> [۶] و لاو [۷] ادامه یافت. لاو برای اولین

بار نظریه پوسته خطی را بر اساس فرضیه کریشف صفحات ارائه کرد. سایر نظریه‌ها در این مورد بر اساس نظریه لاو<sup>۹</sup> استوار بوده و فقط شامل تغییر در برخی از شرایط فیزیکی هستند. ردی و لیو<sup>۱۰</sup> [۸] با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی، پوسته‌های چند لایه الاستیک را بررسی کردند، این تئوری حالت اصلاح شده تئوری پوسته سندرز است و توزیع سهمی‌وار کرنش برشی عرضی در سرتاسر ضخامت پوسته را در نظر می‌گیرد. خدیر<sup>۱۱</sup> و ردی [۹] مطالعه‌ای را در زمینه ارتعاش، خمش و کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای مدور با استفاده از تئوری‌های کلاسیک مرتبه اول<sup>۱۲</sup>، مرتبه سوم<sup>۱۳</sup> و روش فضای حالت<sup>۱۴</sup> انجام دادند. نویسر<sup>۱۵</sup> و ردی [۱۰] ارتعاش و پایداری در پوسته‌های استوانه‌ای مدور چند لایه را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی که بر تئوری تغییر شکل برشی دائل<sup>۱۶</sup> و تئوری کلاسیک دائل مبتنی است، بررسی کردند.

با گسترش رو به رشد وسایل نقلیه پرسرعت، مواد مقاوم در برابر شرایط محیطی سخت، مانند دمای بسیار بالا و شیب حرارتی بالا در موتورهای دیزلی و توربین، اهمیت ویژه‌ای یافته است. مواد FGM در واقع موادی کامپوزیتی هستند، که در آن ترکیب مواد یا ساختار میکروسکوپی به صورتی تغییر می‌کند که خواص مکانیکی و حرارتی سازه ساخته شده از FGM در دماهای بالا و شرایط سیکل حرارتی، عملکرد مطلوبی داشته باشد. مواد FGM برای کاربردهای با شیب حرارتی بالا، مانند سازه‌های حرارتی در هواپیماهای پیشرفته و موتورهای هوافضا و صفحات مداری در کامپیوتر، ایدئال هستند [۱۱]. در سال ۱۹۸۴ گروهی در ژاپن شامل یامانوچی<sup>۱۷</sup> و همکاران [۱۲] و کویزومی<sup>۱۸</sup> [۱۳]، برای نخستین بار ایده مواد FGM را ارائه کردند. لوی و همکاران [۱۴] ارتعاش در پوسته استوانه‌ای FGM را مطالعه کردند که این تحلیل با استفاده از روابط

9. Love  
10. Reddy and Liu  
11. Khdeir  
12. First order  
13. Third order  
14. State-space  
15. Nosier  
16. Donnel  
17. Yamanouchi  
18. Koizumi

1. Belman and Casti  
2. Shu  
3. Bert and Malik  
4. Flugge  
5. Zhang et al  
6. Goldenveizer-Novozhilof  
7. Sophie Germaine  
8. Rayleigh

نمایی بر فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف تعداد موج پیرامونی، نسبت طول به شعاع و نسبت ضخامت به شعاع، ارزیابی شده است.

## ۲- مواد FGM

مواد FGM، موادی کامپوزیتی هستند که با مخلوط کردن دو یا چند ماده مختلف ساخته شده‌اند. از مواد FGM اغلب در دمای بالا استفاده می‌شود و خواص آنها وابسته به دما است. به عنوان مثال اگر  $P_1$  یکی از خواص ماده مورد نظر باشد، می‌توان آن را به صورت تابعی از دمای محیط  $T(K)$  به شکل زیر توصیف کرد [۱۸]:

$$P_i = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1)$$

که در آن  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  و  $P_3$  ضرایب دمایی وابسته به مواد تشکیل دهنده است (جدول ۱). خواص مواد نهایی  $P_{fgm}$  مربوط به FGM توسط کسر حجمی  $V$  و خواص مواد  $P^1$  در سطح داخلی و  $P^2$  در سطح خارجی، با استفاده از رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$P_{fgm} = (P^2 - P^1)V + P^1 \quad (2)$$

که  $P^1$  خواص مربوط به ماده یک (ماده موجود در سطح داخلی پوسته) و  $P^2$  خواص مربوط به ماده دو (در سطح خارجی پوسته) است. کسر حجمی نوعی تابع مکانی<sup>۵</sup> است و برای پوسته استوانه‌ای شکل ۱ به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$V = \left( \frac{\xi - R_i}{R_o - R_i} \right)^N \quad (3)$$

که در آن  $R_i$  و  $R_o$  شعاع داخلی و خارجی پوسته استوانه‌ای است.  $\xi$  فاصله شعاعی ( $R_i \leq \xi \leq R_o$ ) در راستای ضخامت و توان  $N=0$  نمایشی<sup>۶</sup> مقدار مثبت است. توجه دارید که به ازای  $N=0$  می‌توان نوشت:  $P_{fgm} = P^2$  و اگر  $N$  بسیار بزرگ باشد  $P_{fgm}$  به

کرنش جابه‌جایی به دست آمده از تئوری پوسته لاو انجام شده و مقادیر ویژه<sup>۱</sup> معادلات حاکم با استفاده از ریلی ریتز به دست آمده است. پوسته FGM از نیکل و فولاد ضد زنگ ساخته شده بود و این تحلیل شامل بررسی فرکانس‌های طبیعی، تأثیر کسر حجمی و همچنین اثر وضعیت قرار گرفتن مواد در سازه بر فرکانس است. پرادهان<sup>۲</sup> و همکاران [۱۵] ارتعاش در پوسته استوانه‌ای FGM را در شرایط مختلف مرزی بررسی کردند که در آن FGM از فولاد ضد زنگ و زیرکونیا تشکیل شده بود. آنان روابط جابه‌جایی کرنش مربوط به تئوری پوسته لاو را به کار برده و برای استنتاج معادلات حاکم بر مسأله از روش ریلی استفاده کردند. سانتوز و همکاران [۱۶] با استفاده از نوعی مدل المان محدود نیمه تحلیلی، پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی مطالعه کردند. تورنابن [۱۷] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای و صفحات دایروی FGM را با به کارگیری تئوری الاستیسیته خطی بررسی کرد.

در این پژوهش، پوسته استوانه‌ای FGM از نیکل و فولاد ضد زنگ تشکیل شده است: نیکل در سطح داخلی و فولاد در سطح بیرونی و خواص در راستای ضخامت برحسب کسر حجمی نمایشی تغییر می‌کند. روابط جابه‌جایی، انحنا و کرنش بر اساس نظریه تغییر شکل برشی دانل<sup>۳</sup> نوشته شده است. به منظور به دست آوردن معادلات فرکانسی در شکل مسأله مقدار ویژه، روش عددی DQM به کار رفته است. تحلیل ارتعاشی برای شرایط مرزی کلاسیک (دو سر ساده (S-S)، دو سر گیردار (C-C) و یک سر ساده-یک سر گیردار (S-C)) انجام شده است. پوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی، نازک و نسبتاً ضخیم بوده و در واقع در این مطالعه اثر اینرسی چرخشی و تنش برشی در راستای شعاعی نیز در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به پوسته استوانه‌ای همگن و FGM با نتایج سایر مقالات و نتایج به دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS مقایسه و بر دقت و سرعت روش DQM تأیید شده است. تأثیر توان

4. Volume Fraction  
5. Spatial Function  
6. Power Law Exponent

1. Eigenvalue  
2. Pradhan  
3. Donnel

$$\frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = I_2 \ddot{v} + I_3 \ddot{\phi}_2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{N_2}{R} = I_1 \ddot{w}$$

که در آن شعاع استوانه،  $u$ ،  $v$  و  $w$  مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای محورهای  $x_1$ ،  $x_2$  و  $\xi$  و  $\phi_1$  و  $\phi_2$  توابع دوران<sup>۲</sup> و مشتق‌های موجود در معادله نسبت به زمان است. برای مسأله ما موجود برایندهای تنش<sup>۳</sup> چنین است:

$$\begin{aligned} N_1 &= A_{11}\varepsilon_1^0 + A_{12}\varepsilon_2^0 + B_{11}\kappa_1^0 + B_{12}\kappa_2^0 \\ N_2 &= A_{21}\varepsilon_1^0 + A_{22}\varepsilon_2^0 + B_{21}\kappa_1^0 + B_{22}\kappa_2^0 \\ N_6 &= A_{66}\varepsilon_6^0 + B_{66}\kappa_6^0 \\ M_1 &= B_{11}\varepsilon_1^0 + B_{12}\varepsilon_2^0 + D_{11}\kappa_1^0 + D_{12}\kappa_2^0 \\ M_2 &= B_{21}\varepsilon_1^0 + B_{22}\varepsilon_2^0 + D_{21}\kappa_1^0 + D_{22}\kappa_2^0 \\ M_6 &= B_{66}\varepsilon_6^0 + D_{66}\kappa_6^0 \\ Q_1 &= K_{55}^2 A_{55} \varepsilon_5^0, \quad Q_2 = K_{44}^2 A_{44} \varepsilon_4^0 \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $K_{55}^2$  و  $K_{44}^2$  ضرایب تصحیح برشی است. در روابط (۵) و (۶) عبارتهای اینرسی، کرنش و انحنای<sup>۴</sup> و همچنین ضرایب سختی، به ترتیب به شکل روابط زیر است:

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, \xi, \xi^2) d\xi \quad (7)$$

و

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2^0 = \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_4^0 = \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \varepsilon_5^0 &= \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_6^0 = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \kappa_1^0 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}, \quad \kappa_2^0 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}, \quad \kappa_6^0 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (8)$$

و

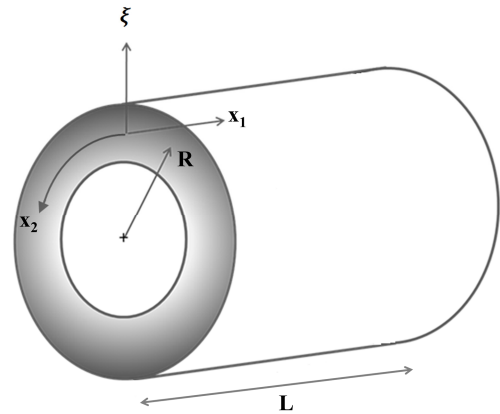
$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}(1, \xi, \xi^2) d\xi \quad (9)$$

در ادامه، معادلات حرکت برای تئوری مرتبه اول برشی برحسب مؤلفه‌های کلی جابه‌جایی، با جایگذاری رابطه (۸) در

$P^1$  میل می‌کند. برای پوسته استوانه‌ای با ضخامت یکنواخت  $h$  که سطح مرجع در سطح میانی آن قرار دارد، کسر حجمی با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$V = \left( \frac{\xi + h/2}{h} \right)^N \quad (4)$$

همان‌طور که در رابطه (۲) بیان شده، باید توجه شود که در  $\xi = -h/2$ ، خواص ماده FGM همان خواص ماده یک بوده و در  $\xi = h/2$ ، خواص ماده FGM با خواص ماده دو یکی است. بنابراین خواص ماده FGM در راستای ضخامت، از ماده یک در سطح داخلی به سمت ماده دو که در سطح خارجی قرار دارد، تغییر می‌کند. عامل مؤثر بر این تغییرات، کسر حجمی و در نتیجه توان نمایشی است.



شکل ۱ طرحواره پوسته استوانه‌ای FGM

### ۳- معادلات حاکم بر مسأله

معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای مدور با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی<sup>۱</sup> به صورت زیر نوشته می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} &= I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\phi}_1 \\ \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} &= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\phi}_2 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} - Q_1 &= I_2 \ddot{u} + I_3 \ddot{\phi}_1 \end{aligned}$$

1. FSDT

2. Rotation Functions  
3. Stress Resultants  
4. Curvature

$L(x)$  مشتق اول  $x_i$  و مختصات نقاط نمونه است که ممکن است به صورت اختیاری انتخاب شوند. سپس تابع  $f(x)$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) \cong P_M(x) = \sum_{j=1}^M d_j p_j(x) \quad (15)$$

که  $d_j$  مقداری ثابت است. به آسانی می توان نشان داد که چند جمله ای  $P_M(x)$ ، یک فضای برداری خطی  $M$  بعدی تشکیل می دهد. بدیهی است که در فضای برداری خطی  $V_M$ ،  $P_j(x)$  مجموعه ای از بردارهای پایه است. با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۲) و با استفاده از رابطه (۱۳)، برای ضرایب وزنی می توان نوشت:

$$P_j^{(1)}(x_i) = c_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L^{(1)}(x_j)} \quad (16)$$

$$c_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^M c_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه دوم و بالاتر:

$$c_{ij}^{(n)} = n \left( c_{ii}^{(n-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (17)$$

$$c_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^M c_{ij}^{(n)}, \quad i \neq j$$

$$n = 2, 3, \dots, M-1, \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

در روابط بالا هیچ محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه وجود ندارد و استفاده از این رابطه باعث صرفه جویی در زمان محاسبه می شود. گزینه های مختلفی برای انتخاب موقعیت نقاط شبکه وجود دارد که ساده ترین روش برای انتخاب نقاط شبکه در دامنه محاسباتی، انتخاب با فاصله برابر در راستای مختصات دامنه محاسباتی است. البته نشان داده شده است که توزیع غیر یکنواخت نقاط شبکه نتایج بهتری را نسبت به نقاط شبکه با فاصله مساوی به دست می دهد. شو و ریچارد [۲۰] روشی را برای انتخاب نقاط نمونه پیشنهاد کردند که نقاط انتهایی را نیز

(۶) و سپس با جایگذاری نتیجه آن در رابطه (۵)، به شکل زیر توصیف می شود [۱۰]:

$$[L]\{\Delta\} = \{0\} \quad (10)$$

که  $\{\Delta\}$  با رابطه زیر داده شده و ماتریس  $L$  در پیوست آورده شده است:

$$\{\Delta\} = \{u, v, \phi_1, \phi_2, w\}^T \quad (11)$$

#### ۴- روش DQM

در روش DQ تابع  $f=f(x)$  در دامنه  $a \leq x \leq b$  در نظر گرفته شده و مشتق مرتبه  $n$  تابع  $f(x)$  در نقطه  $x_i$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^M c_{ij}^{(n)} f(x_j), \quad i=1, 2, \dots, M \quad (12)$$

که در آن  $c_{ij}^{(n)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه  $n$ ،  $M$  تعداد نقاط شبکه<sup>۱</sup> و  $x_i$  مختصات نقطه  $i$  ام است. جزئیات مباحث مربوط به DQ و GDQ در کتابهای کوان و چانگ [۱۹]، شو و ریچارد [۲۰] آورده شده است. در این روشها از توابع درون یابی لاگرانژ<sup>۲</sup> برای ضرایب وزنی و به دست آوردن رابطه بازگشتی، که از نقاط شبکه و محل قرارگیری نقاط نمونه مستقل است، استفاده می شود. با به کارگیری چند جمله ای لاگرانژ به عنوان چند جمله ای پایه داریم:

$$P_j(x) = \frac{L(x)}{(x-x_j)L^{(1)}(x_j)}, \quad j=1, 2, \dots, M \quad (13)$$

که در آن:

$$L(x) = \prod_{i=1}^M (x-x_i), \quad L^{(1)}(x_j) = \prod_{i=1, i \neq j}^M (x_j-x_i) \quad (14)$$

1. Grid Points
2. Quan and Chang
3. Lagrange Interpolation

### ۵-۱- گسسته‌سازی معادلات حرکت

با استفاده از روش DQM، به صورت تبدیل هر مشتق به مجموع وزنی مقادیر گرهی از متغیرهای وابسته، می‌توان معادلات حرکت را به شکل گسسته نوشت. هر یک از معادلات تقریبی، در یک نقطه از شبکه معتبر است. معادلات حاکم به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M (A_{11}c_{ik}^{(2)}) U_k - (A_{66}\beta_m^2) U_i + \sum_{k=1}^M (B_{11}c_{ik}^{(2)}) \Phi_{1k} \\ & + \sum_{k=1}^M ((A_{12}+A_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) V_k - (B_{66}\beta_m^2) \Phi_{1i} + \\ & \sum_{k=1}^M ((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) \Phi_{2k} + \sum_{k=1}^M \left(\frac{A_{12}}{R} c_{ik}^{(1)}\right) W_k \\ & = -\omega_m^2 (I_1 U_i + I_2 \Phi_{1i}) \\ & - \sum_{k=1}^M ((A_{12}+A_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) U_k + \sum_{k=1}^M (A_{66}c_{ik}^{(2)}) V_k \\ & - (A_{22}\beta_m^2) V_i - \sum_{k=1}^M ((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) \Phi_{1k} + \\ & \sum_{k=1}^M (B_{66}c_{ik}^{(2)}) \Phi_{2k} - (B_{22}\beta_m^2) \Phi_{2i} - \left(\frac{A_{22}}{R} \beta_m\right) W_i = \\ & -\omega_m^2 (I_1 V_i + I_2 \Phi_{2i}) \\ & \sum_{k=1}^M (B_{11}c_{ik}^{(2)}) U_k - (B_{66}\beta_m^2) U_i + \sum_{k=1}^M (D_{11}c_{ik}^{(2)}) \Phi_{1k} \\ & + \sum_{k=1}^M ((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) V_k + \\ & \sum_{k=1}^M ((D_{12}+D_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) \Phi_{2k} + \\ & \sum_{k=1}^M \left(\left(\frac{B_{12}}{R} - K_{55}^2 A_{55}\right) c_{ik}^{(1)}\right) W_k + \\ & (-K_{55}^2 A_{55} - D_{66}\beta_m^2) \Phi_{1i} = -\omega_m^2 (I_2 U_i + I_3 \Phi_{1i}) \\ & - \sum_{k=1}^M ((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) U_k + \sum_{k=1}^M (B_{66}c_{ik}^{(2)}) V_k \\ & - (B_{22}\beta_m^2) V_i - \sum_{k=1}^M ((D_{12}+D_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}) \Phi_{1k} + \end{aligned} \quad (21)$$

شامل می‌شود؛ این نقاط چبیشف-گوس-لوباتو نامیده می‌شود. برای این انتخاب داریم:

نقاط شبکه با فواصل مساوی یا توزیع یکنواخت:

$$r_i = \frac{i-1}{M-1}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (18)$$

نقاط نمونه چبیشف-گوس-لوباتو<sup>۱</sup>:

$$r_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi}{2}, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (19)$$

برت و ملک نشان دادند که انتخاب نقاط شبکه به نوع مسأله بستگی دارد و لذا پیشنهاد کردند که برای محاسبات مکانیک ساختاری از شبکه چبیشف-گوس-لوباتو استفاده شود. در این مقاله توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو انتخاب شده و اثر آن بر شبکه، سرعت و پایداری روش DQM مطالعه شده است.

### ۵- پیاده‌سازی عددی

در ادامه ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای مطالعه می‌شود. به منظور تحلیل معادلات پوسته از روش DQM استفاده شده که دقت عددی بالایی داشته و کدنویسی آن آسان است. برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی مختلف در  $x_1 = \pm L/2$ ، می‌توان مؤلفه‌های کلی جابه‌جایی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m(x_1)\cos\beta_m x_2 \\ V_m(x_1)\sin\beta_m x_2 \\ \Phi_{1m}(x_1)\cos\beta_m x_2 \\ \Phi_{2m}(x_1)\sin\beta_m x_2 \\ W_m(x_1)\cos\beta_m x_2 \end{Bmatrix} T_m(t) \quad (20)$$

اگر تحلیل فرکانسی مد نظر باشد،  $T_m = e^{i\omega_m t}$  است و در حالتی که تحلیل پایداری<sup>۲</sup> مد نظر باشد،  $T = 1$ .  $\omega_m$  فرکانس طبیعی مود شماره  $m$  است (برای هر مقدار  $m$ ، بینهایت فرکانس طبیعی وجود دارد)، در آن  $i = \sqrt{-1}$  و  $\beta_m = \frac{m}{R}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ )

1. Chebyshev-Gauss-Lobatto  
2. Stability Analysis

### ۵-۳- روند حل

با استفاده از روش DQM می‌توان معادلات حرکت را با تبدیل هر مشتق به مجموع وزنی مقادیر گرهی از متغیرهای وابسته به شکل گسسته نوشت. به این ترتیب کل سیستم معادلات دیفرانسیل گسسته شده و در حالت کلی به مجموعه معادلات جبری خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} [S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_b \\ \Delta_d \end{Bmatrix} = \omega_m^2 \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\Delta_d\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$\Delta$  بردار مؤلفه‌های جابه‌جایی بوده و زیرنویس  $b$  نشان دهنده نقاط شبکه در مرز و نقاط مجاور است که شرایط مرزی در آنها اعمال شده. زیر نویس  $d$  سایر نقاط شبکه را مشخص می‌کند. برای حل این دستگاه می‌توان آنرا به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(S_{dd} - S_{db}(S_{bb})^{-1}S_{bd})\Delta_d = \omega_m^2 \Delta_d \quad (25)$$

فرکانس‌های طبیعی ساختار مورد نظر با حل مسأله مقادیر ویژه استاندارد رابطه (۲۵) به دست می‌آیند. در این پژوهش، روند حل با استفاده از روش DQM در نرم‌افزار (MATLAB) برنامه‌نویسی شده و نتایج بر حسب فرکانس محاسبه شده است.

### ۶- نتایج و بحث

در این قسمت برخی از نتایج و ملاحظات در مورد مسأله ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای همگن و FGM ارائه می‌شود. نتایج با استفاده از روش عددی DQM به دست آمده است.

#### ۶-۱- پوسته استوانه‌ای همگن

در این پژوهش از فولاد ضد زنگ<sup>۱</sup> و نیکل<sup>۲</sup> به عنوان مواد تشکیل دهنده پوسته استوانه‌ای FGM استفاده شده است. خواص مکانیکی این مواد در جدول ۱ آورده شده است. برای بررسی و تأیید نتایج عددی، مقایسه‌هایی انجام شده است.

1. Stainless Steel  
2. Nickel

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M (D_{66}c_{ik}^{(2)}) \Phi_{2k} + (-K_{44}A_{44} - D_{22}\beta_m^2) \Phi_{2i} + \\ & \left( -\frac{B_{22}}{R} + K_{44}A_{44} \right) \beta_m W_i = -\omega_m^2 (I_2 V_i + I_3 \Phi_{2i}) \\ & - \left( \frac{A_{22}}{R} \beta_m \right) V_i + \sum_{k=1}^M \left( \left( -\frac{B_{12}}{R} + K_{55}A_{55} \right) c_{ik}^{(1)} \right) \Phi_{1k} \\ & - \sum_{k=1}^M \left( \frac{A_{12}}{R} c_{ik}^{(1)} \right) U_k + \left( -\frac{A_{22}}{R^2} - K_{44}A_{44}\beta_m^2 \right) W_i + \\ & \left( \left( -\frac{B_{22}}{R} + K_{44}A_{44} \right) \beta_m \right) \Phi_{2i} + \\ & \sum_{k=1}^M \left( K_{55}A_{55}c_{ik}^{(2)} \right) W_k = -\omega_m^2 (I_1 W_i) \end{aligned}$$

که در آن  $c_{ik}^{(1)}$  و  $c_{ik}^{(2)}$ ،  $i, k=1, 2, \dots, M$  به ترتیب ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه اول و دوم در راستای  $x_1$  و  $M$  تعداد کل نقاط شبکه در راستای  $x_1$  است.

#### ۵-۲- جایگذاری و سازگاری شرایط مرزی

با به‌کارگیری روش DQM، شکل گسسته شرایط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود:

- شرایط مرزی گیردار (C):

$$U=V=\Phi_1=\Phi_2=W=0 \Rightarrow \quad (22)$$

$$U_i=V_i=\Phi_{1i}=\Phi_{2i}=W_i=0 \quad \text{برای } i=1, N$$

• شرایط مرزی ساده (S):

$$\begin{aligned} & V=\Phi_2=W=N_1=M_1=0 \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} & V_i=\Phi_{2i}=W_i=0 \\ & \sum_{k=1}^M (A_{11}c_{ik}^{(1)}) U_k + A_{12}\beta_m V_i + \sum_{k=1}^M (B_{11}c_{ik}^{(1)}) \Phi_{1k} \\ & B_{12}\beta_m \Phi_{2i} + \frac{A_{12}}{R} W_i = 0 \quad \text{برای } i=1, M \\ & \sum_{k=1}^M (B_{11}c_{ik}^{(1)}) U_k + B_{12}\beta_m V_i + \sum_{k=1}^M (D_{11}c_{ik}^{(1)}) \Phi_{1k} \\ & D_{12}\beta_m \Phi_{2i} + \frac{B_{12}}{R} W_i = 0 \quad \text{برای } i=1, M \end{aligned} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

جدول ۲ مقایسه پارامتر فرکانسی  $\Omega_{mn}$  به دست آمده از DQM با نتایج ABAQUS برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مختلف مرزی

$\Omega_{mn}$		n	R/h	شرایط مرزی
ABAQUS	DQM			
۰.۱۴۰۷	۰.۱۴۰۹	۱۲	۵۰۰	S-S
۰.۱۴۱۸	۰.۱۴۲۰	۱۳		
۰.۱۴۶۳	۰.۱۴۶۷	۱۴		
۰.۲۸۴۵	۰.۲۸۶۰	۷	۱۰۰	S-C
۰.۳۱۰۰	۰.۳۱۲۲	۹		
۰.۳۴۳۸	۰.۳۴۴۲	۵		
۰.۶۱۱۴	۰.۶۱۹۱	۴	۲۰	C-C
۰.۶۵۴۹	۰.۶۶۱۹	۵		
۰.۷۴۰۴	۰.۷۴۱۶	۲		

با تغییر کسر حجمی فولاد و نیکل، اثر کسر حجمی تشکیل دهنده مشخص می‌شود. برای این منظور با تغییر توان نمایی  $N$ ، می‌توان کسر حجمی را تغییر داد.

ساختار FGM در این پژوهش به شکلی است که نیکل در سطح داخلی استوانه و فولاد در سطح بیرونی استوانه قرار می‌گیرد و خواص پوسته از لایه داخلی به لایه بیرونی تغییر می‌کند. شکل ۲ تغییرات کسر حجمی را برای فولاد و نیکل به طور جداگانه نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است، برای نیکل، کسر حجمی از مقدار ۱ در  $\xi = -0.5h$  تا ۰ در  $\xi = 0.5h$  کاهش می‌یابد؛ یعنی هرچه بیشتر به سطح داخلی نزدیک می‌شویم، خواص ماده به نیکل نزدیکتر است و هر چه به سطح خارجی پوسته نزدیک می‌شویم، خواص ماده به فولاد نزدیکتر می‌شود. در شکل سمت چپ (تغییرات کسر حجمی برای نیکل) در فواصل (در جهت  $\xi$ ) دور از  $\xi = 0.5h$ ، نرخ کاهش کسر حجمی برای  $N < 1$  بزرگتر از  $N > 1$  و در فواصل نزدیک به  $\xi = 0.5h$ ، نرخ کاهش کسر حجمی برای  $N > 1$  بزرگتر از  $N < 1$  است. تغییرات فولاد عکس تغییرات نیکل است. در فواصل نزدیک به  $\xi = -0.5h$  (در جهت  $\xi$ )، نرخ افزایش کسر حجمی برای  $N < 1$  بزرگتر از  $N > 1$  و در فواصل نزدیک به  $\xi = 0.5h$ ، نرخ افزایش کسر حجمی برای  $N > 1$  بزرگتر از  $N < 1$  است. رفتار فرکانسی مربوط به پوسته FGM بسیار شبیه به پوسته همگن است.

در جدول ۲ پارامتر فرکانسی  $\Omega_{mn} = \omega R \sqrt{[(1-\nu^2)\rho]/E}$  برای پوسته استوانه‌ای همگن با شرایط مختلف مرزی بررسی شده است. نتایج عددی با نتایج حاصل از نرم‌افزار ABAQUS برای پوسته استوانه‌ای با تعداد موج محوری برابر ۱ ( $m=1$ )، نسبت طول به شعاع برابر ۱ ( $L/R=1$ ) و مقادیر مختلف نسبت شعاع به ضخامت استوانه ( $R/h$ )، مقایسه شده و همان‌طور که در جدول ۲ مشخص است نتایج دقت بالایی را نشان می‌دهد.

در جدول ۳ پارامتر فرکانسی برای پوسته استوانه‌ای همگن آورده شده است. نتایج عددی با نتایج مقاله برت و مالیک [۲۱] و همچنین با نتایج نرم‌افزار ABAQUS، برای پوسته‌ای با مقادیر مختلف  $m$ ،  $n$ ، نسبت طول به شعاع و نسبت شعاع به ضخامت پوسته، مقایسه شده که نتایج هر سه روش همخوانی دارند و این نشان‌دهنده دقت بسیار بالای روش DQM است.

## ۶-۲- پوسته استوانه‌ای FGM

در این بخش ارتعاش پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مختلف مرزی بررسی می‌شود. در این جا همچنین نتایج مشخصات فرکانسی و تأثیر کسر حجمی  $V$  بر پوسته استوانه‌ای بررسی شده است.

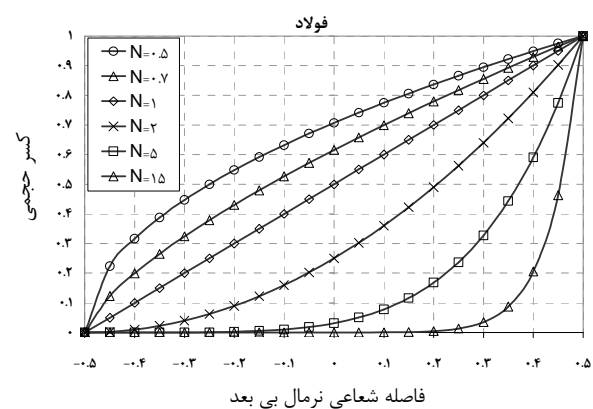
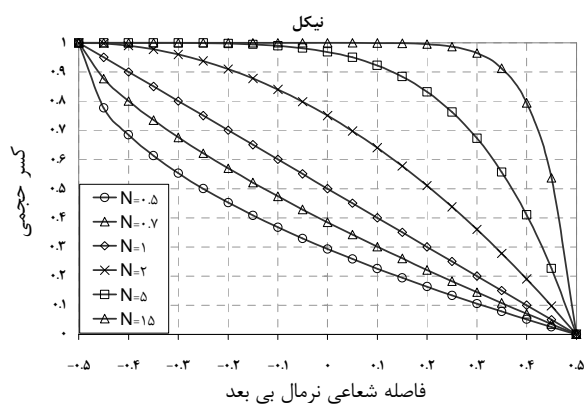
جدول ۱ خواص مواد در دمای ۳۰۰ درجه کلوین [۱۴]

نیکل			فولاد ضد زنگ			ضرایب
$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\nu$	E (Pa)	$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	$\nu$	E (Pa)	
۸۹۰۰	۰.۳۱۰۰	$223.95 \times 10^9$	۸۱۶۶	۰.۳۲۶۲	$201.04 \times 10^9$	$P_0$
.	.	.	.	.	.	$P_{-1}$
.	.	$-2.794/10^4$	.	$-2/10^4$	$3.079/10^4$	$P_1$
.	.	$-3.998/10^9$	.	$-3.797/10^7$	$-6.524/10^7$	$P_2$
.	.	.	.	.	.	$P_3$
۸۹۰۰	۰.۳۱۰۰	$2.05098 \times 10^{11}$	۸۱۶۶	۰.۳۱۷۷۵۶	$2.077888 \times 10^{11}$	



جدول ۳ مقایسه پارامتر فرکانسی  $\Omega_{mn}$  به دست آمده برای پوسته استوانه‌ای همگن با شرایط مرزی دو سر گیردار

$\Omega_{mn}$			M	n	m	R/h	L/R
ABAQUS	نتایج ما	برت و مالیک [۲۱]					
۰.۷۷۹۶۲۷	۰.۷۸۳۶۷۲	۰.۷۸۵۵۳۵	۱۳	۲	۶	۲۰	۵
	۰.۷۷۹۸۶۰	۰.۷۵۹۳۵۳	۱۷				
	۰.۷۷۹۸۵۶	۰.۷۷۹۴۸۰	۲۱				
	۰.۷۷۹۸۵۶	۰.۷۷۹۴۷۸	۲۵				
۰.۹۸۰۰۱۲	۰.۹۸۰۱۷۶	۰.۹۸۱۰۴۷	۱۷	۴	۷	۵۰۰	۱
	۰.۹۸۰۱۵۴	۰.۹۸۰۲۴۱	۲۱				
	۰.۹۸۰۱۵۵	۰.۹۸۰۲۳۰	۲۵				



شکل ۲ تغییرات کسر حجمی برای فولاد و نیکل با فاصله شعاعی نرمال بی بعد و در راستای ضخامت پوسته

جدول ۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی اصلی را بر حسب نسبت  $L/R$  برای پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی ساده نشان می‌دهد. همچنین در این جدول نتایج به دست آمده از روش DQM با نتایج مقاله لوی و همکاران [۱۴] مقایسه شده است. اعداد داخل پرانتز نشان‌دهنده تعداد موج پیرامونی  $n$  هستند که در آن فرکانس اصلی رخ می‌دهد. برای ساختار FGM این مقاله، با افزایش  $N$ ، فرکانس اصلی کاهش می‌یابد؛ در واقع فرکانس‌های طبیعی به ازای مقادیر بزرگ  $N$ ، به مقادیر مربوط به  $N^{SS}$ ، و به ازای مقادیر کوچک  $N$ ، فرکانس‌ها به مقادیر  $N^N$  نزدیک هستند. البته برای تمامی مقادیر  $N$ ، فرکانس‌های اصلی در شماره موج پیرامونی یکسانی اتفاق می‌افتد که مقدار آن بین مقادیر فرکانسی  $N^N$  و  $N^{SS}$  است.

فرکانس‌های مربوط به مودهای طولی ( $m$ ) بیشتر نسبت به مودهای طولی کوچکتر، بزرگتر است؛ بنابراین فرکانس‌های اصلی در مود طولی شماره یک ( $m=1$ ) اتفاق می‌افتد. نکته قابل توجه این است که مقدار توان نمایی  $N$ ، تأثیری بر شماره موج پیرامونی ( $n$ ) که در آن فرکانس اصلی رخ می‌دهد، ندارد. به عنوان مثال در جدول ۴ به ازای  $L/R=0.5$ ، فرکانس‌های اصلی مربوط به مقادیر مختلف  $N$  در شماره موج پیرامونی پانزدهم اتفاق می‌افتد. فرکانس‌های طبیعی مربوط به پوسته استوانه‌ای کوتاه (یعنی نسبت  $L/R$  کوچکتر)، بزرگتر از فرکانس‌های پوسته بلندتر است. همچنین فرکانس‌های طبیعی پوسته ضخیم‌تر (یعنی نسبت  $h/R$  بزرگ) بزرگتر از فرکانس‌های پوسته نازکتر است.

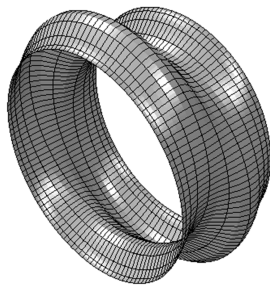
نتایج با مقاله سانتوز و همکاران [۱۶] مقایسه شده است. فرکانس‌ها بر حسب مقادیر مختلف توان نمایی  $N$  و در مود هشتم محاسبه شده است. در این جدول از زیرکونیوم در سطح داخلی پوسته و از فولاد در سطح خارجی پوسته استفاده شده است.

ستون‌های  $N^{SS}$  و  $N^N$  به ترتیب فرکانس طبیعی مربوط به پوسته از جنس فولاد و نیکل را نشان می‌دهد.

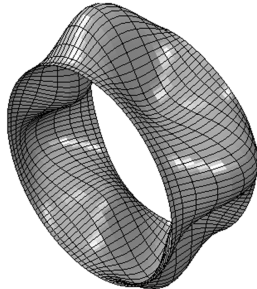
در جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی اصلی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر گیردار مشخص شده است. در این جدول

جدول ۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی (هرتز) بر حسب نسبت  $L/R$  برای پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی ساده در دو طرف ( $m=1$  و  $h/R=0.02$ )

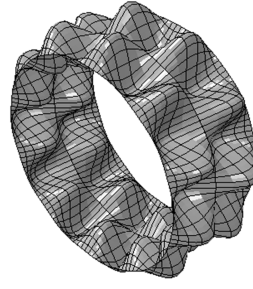
$N=15$	$N=5$	$N=2$	$N=1$	$N=0.7$	$N=0.5$	$N^N=0$	$N^{SS}=0$	$n$	نام روش	$L/R$
۴۱۹.۱۷	۴۲۱.۶۰	۴۲۵.۱۶	۴۲۸.۶۲	۴۳۰.۴۶	۴۳۲.۱۲	۴۱۷.۵۴	۴۳۹.۳۶	(۲۰)	لوی و همکاران	۰.۲
۴۱۹.۳۳	۴۲۱.۷۵	۴۲۵.۳۲	۴۲۸.۷۸	۴۳۰.۶۳	۴۳۲.۲۸	۴۱۷.۷۱	۴۳۹.۵۳		نتایج ما	
۱۶۷.۴۱	۱۶۸.۳۸	۱۶۹.۸۱	۱۷۱.۱۹	۱۷۱.۹۳	۱۷۲.۵۹	۱۶۶.۷۶	۱۷۵.۴۹	(۱۵)	لوی و همکاران	۰.۵
۱۶۷.۷۳	۱۶۸.۷۰	۱۷۰.۱۳	۱۷۱.۵۱	۱۷۲.۲۵	۱۷۲.۹۱	۱۶۷.۰۸	۱۷۵.۸۲		نتایج ما	
۸۳.۳۱۶	۸۳.۷۹۸	۸۴.۵۰۶	۸۵.۱۹۵	۸۵.۵۶۱	۸۵.۸۹۰	۸۲.۹۹۳	۸۷.۳۳۱	(۱۱)	لوی و همکاران	۱
۸۳.۶۵۰	۸۴.۱۳۵	۸۴.۸۴۶	۸۵.۵۳۷	۸۵.۹۰۵	۸۶.۲۳۵	۸۳.۳۲۶	۸۷.۶۸۳		نتایج ما	
۴۱.۳۷۸	۴۱.۶۱۸	۴۱.۹۶۹	۴۲.۳۱۱	۴۲.۴۹۳	۴۲.۶۵۶	۴۱.۲۱۷	۴۳.۳۷۳	(۸)	لوی و همکاران	۲
۴۱.۷۱۸	۴۱.۹۶	۴۲.۳۱۴	۴۲.۶۵۹	۴۲.۸۴۲	۴۳.۰۰۷	۴۱.۵۵۶	۴۳.۷۳۰		نتایج ما	



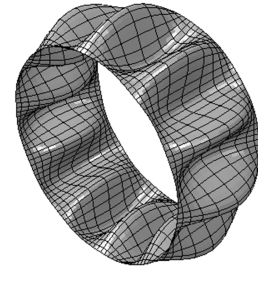
C-C,  $n=1$ ,  $m=2$   
 $L/R=1$ ,  $h/R=0.05$



C-S,  $n=4$ ,  $m=1$   
 $L/R=1$ ,  $h/R=0.05$



S-S,  $n=11$ ,  $m=2$   
 $L/R=1$ ,  $h/R=0.02$



S-S,  $n=11$ ,  $m=1$   
 $L/R=1$ ,  $h/R=0.02$

شکل ۳ مود پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مختلف مرزی

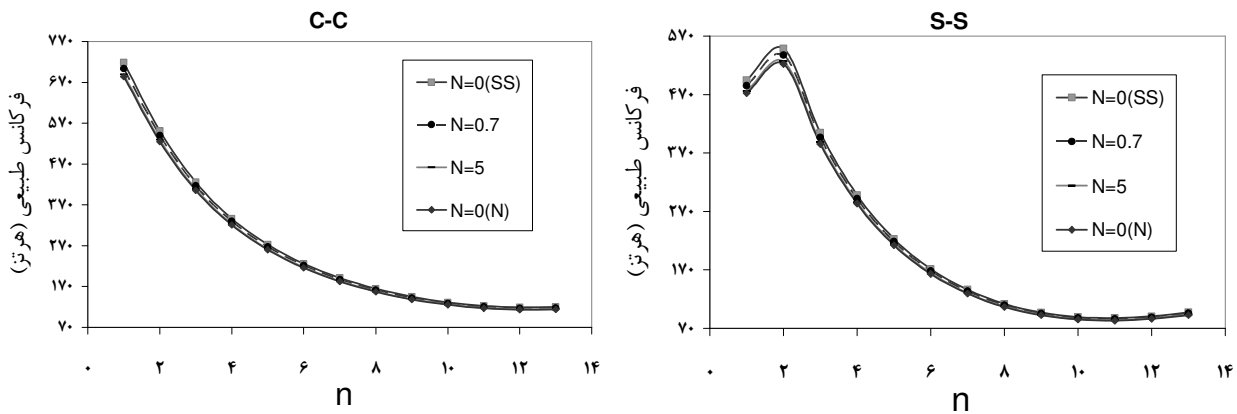
جدول ۵ مقایسه فرکانس‌های اصلی (هرتز) پوسته استوانه‌ای FGM برای شرایط مرزی دو سر گیردار

$R=19/0.5(m)$ , $L=0/381(m)$ , $h=0/0.0501(m)$ , $m=1$ , $n=8$ زیرکونیوم: $E=168/0.6$ GPa, $\nu=0/3$ , $\rho=5700$ $kgm^{-3}$ فولاد: $E=207/79$ GPa, $\nu=0/3178$ , $\rho=8166$ $kgm^{-3}$		
نتایج ما	سانتوز و همکاران [۱۶]	$N$
۴۰۰.۸۷۷	۴۰۰.۰۲۱	۰.۱
۳۹۸.۳۰۰	۳۹۷.۵۹۹	۰.۲
۳۸۷.۰۶۷	۳۸۶.۱۵۰	۱
۳۷۷.۹۹۹	۳۷۶.۷۸۹	۴

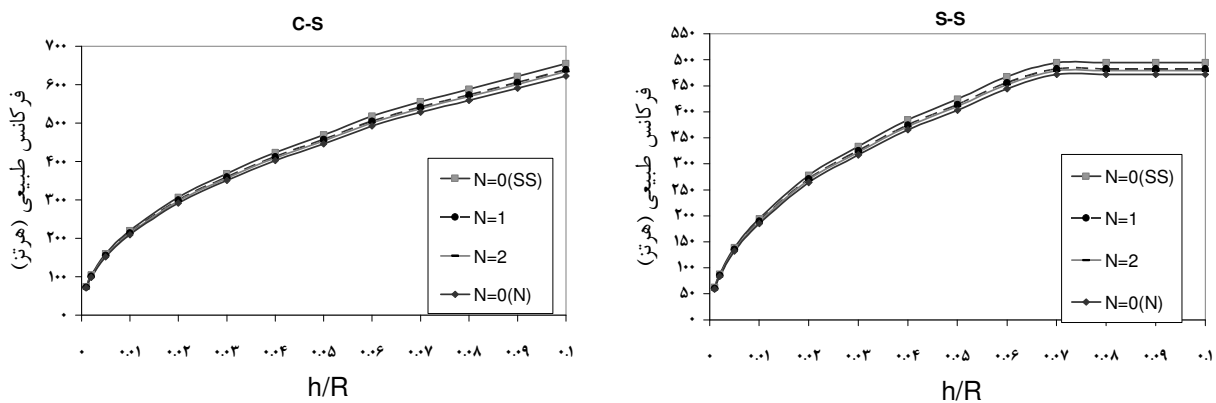
در شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ استوانه‌ای FGM در همان‌طور که در جداول ۴ و ۵ مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده از روش DQM به نتایج سایر مقالات بسیار نزدیک بوده و پوسته FGM نیز مشابه پوسته همگن، سرعت و دقت روش DQ را تأیید می‌کند.

شکل ۳ شکل موده‌های پوسته‌ استوانه‌ای FGM را برای شرایط مرزی و ابعاد مختلف نشان می‌دهد. دو شکل مود سمت راست مربوط به پوسته با شرایط مرزی ساده در دو طرف است که در هر دو، تعداد موج پیرامونی برابر ۱۱ ( $n=11$ ) بوده و در شکل اول (از سمت راست) مود طولی برابر یک ( $m=1$ ) است؛ این شکل مود مربوط به فرکانس اصلی پوسته است. شکل دوم با داشتن مود طولی دو از شکل اول متمایز می‌شود. جزئیات سایر شکل‌ها در شکل (۳) مشخص شده است.

شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ استوانه‌ای FGM ( $L/R=1$  و  $h/R=0.002$ ) برای شرایط مختلف مرزی ترسیم شده است. با افزایش شماره موج پیرامونی، روند کلی فرکانس‌ها در تمامی شرایط مرزی ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است. البته در حالتی که استوانه در دو طرف دارای شرایط مرزی ساده باشد، فرکانس در ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد؛ اما روند کلی در این حالت تقریباً مشابه حالت‌های دیگر است. کوچکترین فرکانس یا همان فرکانس اصلی در حالتی رخ می‌دهد که شماره موج پیرامونی برابر ۱۱ یا ۱۲ باشد. به‌ازای هر مقدار توان نمایی، فرکانس محاسبه شده بین مقادیر فرکانسی به‌دست آمده برای پوسته تشکیل شده از فولاد و نیکل قرار دارد.



شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ استوانه‌ای FGM ( $L/R=1$  و  $h/R=0.002$ ) با مقادیر مختلف توان نمایی برای شرایط مختلف مرزی



شکل ۵ فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ استوانه‌ای FGM ( $L/R=1$ ) بر حسب مقادیر مختلف  $h/R$  با مقادیر مختلف توان نمایی برای شرایط مختلف مرزی

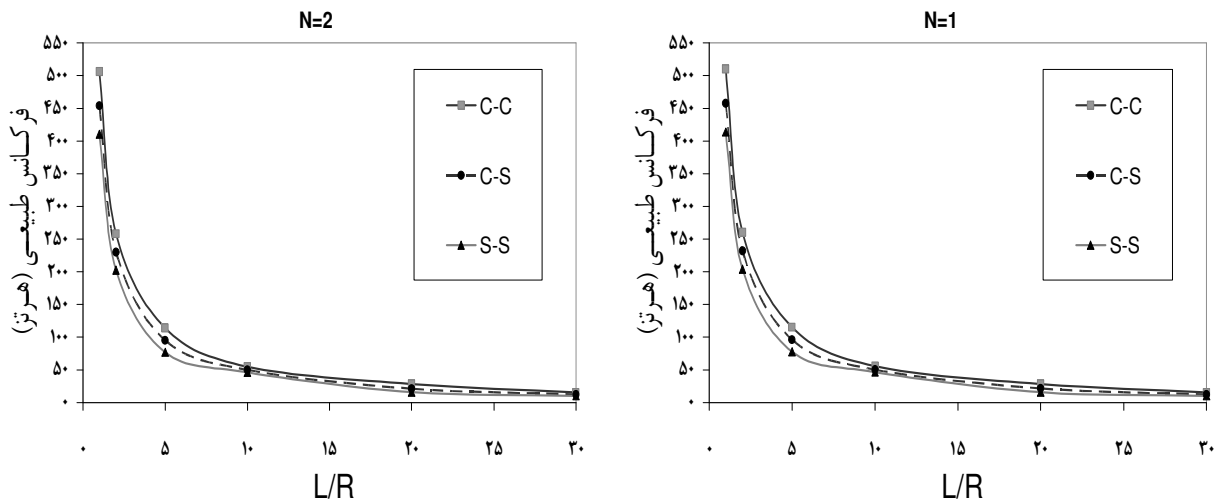
شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM را برای شرایط مختلف مرزی (دو سر ساده (S-S)، دو سر گیردار (C-C) و یک سر گیردار یک سر ساده (C-S)) و مقادیر توان نمایی ۱ و ۲ در برابر تغییرات نسبت طول به شعاع ( $L/R$ )، نشان می‌دهد که در آن نسبت ضخامت به شعاع ( $h/R$ ) مقدار ثابت ۰.۰۵ است. با توجه به شکل (۶) مشخص است که فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای در حالت C-C بزرگتر از دو حالت دیگر است؛ در واقع:

$$C-C > C-S > S-S$$

در ابتدای نمودار (مقادیر کوچک  $L/R$ ) اختلاف فرکانس در شرایط مختلف مرزی، بیشتر از انتهای نمودار (مقادیر بزرگتر  $L/R$ ) است و در واقع می‌توان نتیجه گرفت که اثر شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته در مقادیر کمتر  $L/R$ ، بیشتر و در مقادیر بزرگتر  $L/R$  کمتر است.

علاوه بر این فرکانس پوسته FGM به ازای مقادیر کوچک  $N$  به فرکانس پوسته فولادی، و به ازای مقادیر بزرگ  $N$  به فرکانس پوسته نیکل نزدیک است. این نشان می‌دهد که به راحتی می‌توان فرکانس‌های پوسته FGM را با تغییر توان نمایی تغییر داد.

در شکل ۵ فرکانس‌های طبیعی پوسته FGM ( $L/R=1$ ) بر حسب مقادیر مختلف  $h/R$  و برای شرایط مرزی دو سر ساده و یک سر گیردار یک سر ساده ترسیم شده است. مقادیر فرکانس‌های طبیعی در هر دو شرط مرزی ابتدا روندی افزایشی دارد و پس از آن برای حالتی که شرط مرزی در هر دو طرف ساده است، روندی ثابت را طی می‌کند، اما این روند ثابت در دو حالت دیگر دیده نمی‌شود. برای مقادیر بزرگتر  $h/R$  تغییرات فرکانسی کمتر از مقادیر کوچکتر  $h/R$  است. برای مثال در حالتی که شرط مرزی در دو طرف ساده باشد، تقریباً در مقدار  $h/R=0.07$  نمودار همگرا می‌شود و پس از آن فرکانس تغییر چندانی ندارد.



شکل ۶ فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM ( $h/R=0.05$ ) بر حسب مقادیر مختلف  $L/R$  با توان نمایی ۱ و ۲ ( $N=1, 2$ ) برای شرایط مرزی C-S و S-S، C-C

با افزایش نسبت ضخامت پوسته به شعاع، روند تغییرات فرکانسی در تمامی شرایط مرزی افزایشی است و برای نسبت‌های بزرگتر  $h/R$  تقریباً همگرا می‌شود. با افزایش نسبت طول به شعاع استوانه، فرکانس‌های طبیعی برای تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد و نشان داده شد که اثر شرط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی در مقادیر کوچکتر  $L/R$ ، بیشتر بوده و با افزایش نسبت طول به شعاع، این اثر کاهش می‌یابد.

### ۹- پیوست

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12}=(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$L_{13}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{14}=(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad L_{15}=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$L_{21}=L_{12}, \quad L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23}=(B_{21}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$L_{24}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{25}=\frac{A_{22}}{R}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$L_{31}=L_{13}, \quad L_{32}=L_{23}$$

$$L_{33}=-K_{55}^2A_{55}+D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{34}=(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}, \quad L_{35}=\left(\frac{B_{12}}{R}-K_{55}^2A_{55}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$L_{41}=L_{14}, \quad L_{42}=L_{24}, \quad L_{43}=L_{34}$$

$$L_{44}=-K_{44}^2A_{44}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{45}=\left(\frac{B_{22}}{R}-K_{44}^2A_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad L_{51}=-L_{15}$$

$$L_{55}=-\frac{A_{22}}{R^2}+\left(-\bar{N}+K_{55}^2A_{55}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+$$

$$K_{44}^2A_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

در بخش‌های پیشین، نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS برای تأیید سایر نتایج به‌کار گرفته شده است. نکته قابل توجه نوع و تعداد المان‌های استفاده شده و همچنین اثر آن بر دقت جواب‌ها است. در این مطالعه المان هشت گرهی (S8R) پوسته به‌کار گرفته شده، و درجه آزادی هر گره برابر شش است. برای پوسته استوانه‌ای با نسبت‌های مختلف طول به شعاع، تعداد المان یکسانی در نظر گرفته شده است. نتایج برای تعداد المان حدود ۶۰۰ به جواب‌های واقعی بسیار نزدیک است و با ۸۰۰ المان جواب‌ها کاملاً همگرا می‌شوند. افزایش تعداد المان‌ها در این حالت، اثری بر دقت جواب‌ها ندارد. با این تعداد المان و در زمان بسیار اندکی می‌توان جواب‌های بسیار دقیقی را به‌دست آورد.

### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش مربعات دیفرنسیلی (DQM) به‌عنوان نوعی روش عددی دقیق برای تحلیل ارتعاش پوسته استوانه‌ای FGM ارائه شده است. فرکانس‌های طبیعی استوانه برای مقادیر مختلف توان نمایی و بر حسب تعداد موج پیرامونی ( $n$ )، نسبت طول استوانه به شعاع متوسط آن و همچنین نسبت ضخامت استوانه به شعاع آن، برای شرایط مرزی کلاسیک مطالعه شده است.

مشاهده می‌شود که با افزایش توان نمایی فرکانس‌های طبیعی پوسته FGM مورد نظر کاهش می‌یابد، این روند برای تمامی شرایط مرزی یکسان است. در تمامی شرایط مرزی، فرکانس‌های به‌دست آمده برای پوسته FGM بین مقادیر فرکانسی به‌دست آمده برای پوسته تشکیل شده از فولاد و نیکل قرار می‌گیرد. نتایج به‌دست آمده برای پوسته همگن و FGM این مقاله، با نتایج مقالات پیشین و نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS تطابق خوبی دارد که این، دقت و کارایی روش DQM را تأیید می‌کند.

فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM به تعداد مود پیرامونی وابسته است؛ با افزایش شماره موج پیرامونی، روند کلی تغییرات فرکانسی ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است. در واقع در فرکانس اصلی روند نمودارها از حالت کاهشی به افزایشی تغییر می‌یابد.

## ۸- منابع

- [14] Loy, C. T., Lam, K. Y. and Reddy, J. N., Vibration of functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, 41(1): 309-324.
- [15] Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y. and Reddy, J. N., Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various Boundary Conditions, *Applied Acoustics*, 2000, 61(1): 111-129.
- [16] H. Santos, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, J.N. Reddy, A Semi-Analytical Finite Element Model for the Analysis of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Under Thermal Shock, *Composite Structures*, Vol. 86, pp. 10-21, 2008.
- [17] Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded conical cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Comput Meth Appl Mech Eng* 2009;2.
- [18] Touloukian YS. Thermophysical properties of high temperature solid materials. New York: Macmillan, 1967.
- [19] Quan, J. R. and Chang, C. T., New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I analysis, *Computers and Chemical Engineering*, 1989, (13): 779-788.
- [20] Shu, C. and Richards, B. E., Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, 15 (1): 791-798.
- [21] Bert, C. W.; Malik, M. (1996a), "Free vibration analysis of thin cylindrical shells by the differential quadrature method", *ASME J. Pressure Vessel Tech.* 118, 1-12.
- [1] Bellman, R. E. and Casti, J., Differential quadrature and long term Integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, 34(1): 235-238.
- [2] Shu, C., 1991. Generalized differential integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation, Ph. D. thesis, University of Glasgow Scotland.
- [3] C. Shu and H. Du, Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM, *Compos Technol Part B* 28 (1997), pp. 267-274.
- [4] Bert, C. W. and Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied Mechanics Review*, 1996, 49(1): 1-28.
- [5] L. Zhang, Y. Xiang, G.W. Weib, Local adaptive differential quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions, *Int. J. Mech. Sci.* 48 (2006) 1126-1138.
- [6] Rayleigh, J. W. S., *Theory of sound*, Macmillan, London. 1(1), 1882.
- [7] Love, A. E. H., on the small free vibrations and deformations of thin elastic shells, *Phil. Trans. Royal Society of London*, 1888, 179(A): 125-137.
- [8] J. N. REDDY and C. F. LIU, A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. J. Engng Sci.* 23, 319-330 (1985).
- [9] A. A. KHDEIR, J. N. REDDY and D. FREDERICK 1989 *International Journal of Engineering Science* 27, 1337-1351, A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories.
- [10] Nosier, A. and Reddy, J.N., 1992. Vibration and stability analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells. *J. Sound Vib.* 157, pp. 139-159.
- [11] (a) Fukui Y. Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force. *Int J Jpn Soc Mech Eng* 1991; 34:144-8; (b) Koizumi M. The concept of FGM. *Ceram Trans Funct Grad Mater* 1993; 34:3-10.
- [12] Yamanouchi, M., Koizumi, M. and Hirai, Shiota I., *Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials*, Japan, 1990.
- [13] Koizumi, M., *The concept of FGM, ceramic transactions, functionally gradient materials*, 1993, 3(1): 3-10.

