



تحلیل سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی با استفاده از روش فضای حالت

شیرکو فاروقی^{1*}، مهدی بامداد²، سیدحامد حسینی¹

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

*ارومیه، صندوق پستی 57155-419، shirko@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 دی 1393

پذیرش: 25 اسفند 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلیدواژگان:

سازه تنسگریتی

میله فشاری و کششی

پاسخ دینامیکی

فضای حالت

چکیده

تنسگریتی به سازه‌های دو یا سه بعدی سبک گفته می‌شود که از نخ به عنوان جزء کششی و میله به عنوان عضو فشاری تشکیل شده است. پایداری آن‌ها بوسیله حالت خود تنش بین اعضای کششی و فشاری ارائه می‌شود. در حالت کلی این سازه‌ها هنگامی که تحت بار خارجی دینامیکی قرار می‌گیرند به علت داشتن مقدار میرایی سازه‌ای پایینی، دچار مشکل خواهند شد. در این جا میرایی سازه‌ای از نوع متناسب برای سازه در نظر گرفته شده است. در این مقاله معادلات دینامیکی سازه تنسگریتی حول شکل تعادلی بدست آورده می‌شود و همچنین جرم المان نخ نیز در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر، معادلات دینامیکی خطی شده حول شکل تعادلی با دقت مطلوبی رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی را بیان می‌کند. در نتیجه می‌توان از روش فضای حالت برای بررسی و تحلیل پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی استفاده نمود. دو مثال متنوع با استفاده از این روش، بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که تحلیل دینامیکی سازه تنسگریتی به‌علت پایین بودن میرایی سازه لازم است زیرا زمانی که در سازه رزونانس رخ بدهد اعضای فشاری و اعضای کششی به ترتیب ممکن است دچار کماتش دینامیکی و شل شدن شوند.

Analysis of tensegrity structure subjected to dynamic loading using state space

Shirko Faroughi^{1*}, Mahdi Bamdad², Seyed Hamed Hoseini¹

1- Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

*P.O.B. 57155419Urmia, Iran, shirko@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 January 2015
Accepted 16 March 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:

Tensegrity structures
Tension and compression members
dynamic response
state space

ABSTRACT

Tensegrity is a kind of spatial structural system composed of cable (in tension) and strut (in compression). Stability is provided by the self-stress state between tensioned and compressed elements. When this structure is subjected to external dynamic loading, it may become unstable due to low structural damping. In this study, the proportional damping is considered and dynamical equations of the tensegrity structure are derived based on the equilibrium configuration. In addition, the mass of cable element is taken into account. Generally, linearized dynamic model provides a good approximation for analyzing the nonlinear behavior of tensegrity structures around an equilibrium configuration. Therefore, the state space method is implemented to obtain the dynamic response of the tensegrity system. Using this approach, two different tensegrity structures are numerically evaluated in order to show its efficiency. Results reveal how the dynamic analysis of a tensegrity structure is essential. The compressive and intension members of a tensegrity system may dynamically buckle and slack, respectively, in resonance condition.

1- مقدمه

وزن بالا گزینه مناسبی برای سازه‌های عمرانی، مهندسی مکانیک و هوا فضا شناخته می‌شود. این سازه‌ها برخلاف عناصر خرپا در هر حالتی پایدار نیستند، یعنی پایداری آن‌ها بوسیله حالت خود تنش بین اعضای کششی و فشاری ایجاد می‌شود. ابتدا باید حالت تعادل آنها را بدست آورد که در ادبیات موضوع به مرحله شکل یابی¹ معروف است. یکی از اصلی ترین مثال این سازه‌ها، پل‌های معلق است که اعضای کششی آن اغلب کابل هستند. علاوه بر این، در سال‌های اخیر از سازه تنسگریتی مشبک در ساخت سقف‌ها استفاده شده است [3,2]. سازه‌های تنسگریتی در ربات‌ها به علت پایین بودن جرم‌شان

تنسگریتی نوعی سازه است که ماهیت آن مبتنی بر تعادل تنش بین اعضای کششی و فشاری است. اعضای فشاری (میله) سازه تنسگریتی بوسیله اعضای کششی (کابل) به هم وصل شده‌اند. تعاریف متعددی از تنسگریتی بسته به نوع کاربرد آن در ادبیات موضوع وجود دارد که بهترین نوع تعریف این سازه بوسیله موترو [1] انجام شده است. موترو سازه تنسگریتی را این‌چنین تعریف کرده است که: سازه تنسگریتی به سیستمی خود بالانس پایدار گفته می‌شود که از مجموعه اعضای فشاری منفصل از هم، درون مجموعه به هم پیوسته عضو کششی تشکیل شده است. این سازه‌ها به علت داشتن نسبت سفتی به

1- Form finding

Please cite this article using:

Sh. Faroughi, M. Bamdad, S. H. Hoseini, Analysis of tensegrity structure subjected to dynamic loading using state space, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 261-268, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

شیرکو فاروقی، مهدی بامداد، س. ه. حسینی، تحلیل سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی با استفاده از روش فضای حالت، *مادارس مهندسی مکانیک*، جلد 15، شماره 5، صص 261-268، 1394 (به فارسی)

محدودیت روبرو است که سازه باید متقارن و کوچک باشد [11] پس از این روش برای سازه تنسگریتی بزرگ و غیر متقارن استفاده نمی‌شود. در ادبیات موضوع، اکثر تحقیقات شکل‌یابی به یافتن بردار محاسبه چگالی نیرو برای یک توپولوژی مشخص است. تیبرت و پلگرینو [10] این روش‌ها را جمع‌آوری نموده‌اند که عبارتند از: 1- برنامه‌ریزی غیرخطی [12] 2- روش‌هایی پویا¹ [13] 3- چگالی نیرو [14] 4- روش اماری [15] 5- تحلیل عددی [16-18] 6- روش اجزای محدود [19].

قسمت دوم، بررسی رفتار سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی خارجی است، زیرا این سازه‌ها همانند سایر سازه‌ها مهندسی ممکن است به علت بارگذاری دینامیکی ناپایدار شوند. هنگامی که رزونانس رخ می‌دهد ممکن است اعضای فشاری سازه بصورت دینامیکی دچار کمناش شود و یا بعضی از اعضای کششی شل² شوند. در نتیجه تحلیل و بررسی سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی برای طراحی سازه مذکور، یک الزام است.

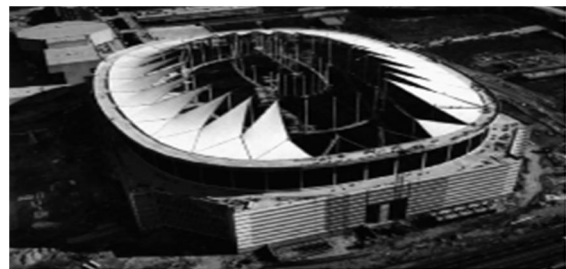
علی‌رغم کارهای متنوعی که در ادبیات موضوع روی شکل‌یابی انجام گرفته، حجم بسیار کمی از آن روی تحلیل رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی متمرکز است. اولین بار موترو به کار در این زمینه پرداخت [20]. وی نشان داد که مدل دینامیکی خطی شده دارای دقت بسیار بالایی برای تحلیل غیرخطی رفتار سازه تنسگریتی در نزدیکی شکل تعادلی است. فیویا، مفهوم سازه تنسگریتی باز شونده برای کاربرد فضایی را ارائه نمود [6]. وی خصوصیات ارتعاشی سازه تنسگریتی را بررسی نمود و نشان داد که فرکانس‌های طبیعی سازه با افزایش نیروی پیش تنش زیاد می‌شود. کونو و همکارانش یک سازه تنسگریتی دو لایه³ مشبک تحت تاثیر بارگذاری دینامیکی بصورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند [21]. بین و همکارانش نیز یک مدل غیرخطی برای تحلیل رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی ارائه نمودند [22]. اوپنهایم و ویلیامز رفتار دینامیکی یک تنسگریتی ساده را بررسی نمودند [23]. سولتان با استفاده از مدل دینامیکی خطی شده نشان داد که مدهای دینامیکی با افزایش پیش تنش افزایش می‌یابد [24]. علی و اسمیت بصورت عددی و آزمایشگاهی نشان دادند که نیروی پیش تنش روی رفتار دینامیکی سازه تاثیر دارد [25].

در موضوع تحلیل سازه تنسگریتی تحت اثر بار استاتیکی، می‌توان به تحقیقات متعددی اشاره داشت. ونگ برای تحلیل استاتیکی سازه تنسگریتی، سازه مذکور را به دو قسمت اعضای کششی و فشاری تقسیم نمود [26]. وی اثرات سختی هندسی و رابطه نیرو-جابجایی غیرخطی را بوسیله مینیمم نمودن تابع انرژی مربوط به سازه را هنگامی که سیستم تحت اثر بار خارجی باشد مطالعه کرده است. موراگامی، معادلات اساسی برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه تنسگریتی براساس فرمولاسیون لاگرانژ را ارائه نمود [27]. نوگلو و همکارانش برای تحلیل غیراستاتیکی سازه تنسگریتی از روش تکرار استفاده نمودند [28]. اخیراً لی و تران یک روش عددی برای تحلیل تغییر فرم‌های بزرگ الاستیکی سازه تنسگریتی که شامل خواص غیرخطی برای ماده و هندسه بود ارائه نمودند [29]. ولی در ادبیات موضوع تحلیل رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی ارائه نشده است.

البته کلیه کارهایی که در ادبیات موضوع روی تحلیل دینامیک انجام شده به نحوی است که معادلات حرکت دینامیکی سازه تنسگریتی را بوسیله روش‌های مختلف همانند روش نیوتن، اولیبر، لاگرانژ و یا همپلتون بدست

استفاده می‌شوند [5,4]. اما یکی از مزیت‌های اصلی سازه تنسگریتی علاوه بر پایین بودن جرم آن، امکان تا شدن به دلیل داشتن تاندون است. این ویژگی سبب می‌شود که حجم سازه کوچک شود و به سادگی قابل حمل و انتقال باشد که این مزیت برای سازه‌های هوافضا بسیار مطلوب است [6]. شکل‌های 1-الف-ج، نشان دهنده بعضی از کاربردهای سازه تنسگریتی در سازه‌های عمرانی و فضایی است. مراحل طراحی سازه تنسگریتی به بطور کلی به دو قسمت اصلی تقسیم می‌شود.

قسمت اول شکل‌یابی است، که این مرحله در اصل همان تحلیل استاتیکی است. در واقع قسمت اصلی طراحی تنسگریتی مرحله شکل‌یابی است. بر این اساس مرحله شکل‌یابی تنسگریتی فرایندی است که در آن یکهندس پایدار بر پایه یک توپولوژی مشخص، برای سازه ایجاد می‌گردد. الگوریتم‌هایی که برای شکل‌یابی سازه تنسگریتی مورد استفاده قرار می‌گیرد به دو دسته کلی سینماتیکی و استاتیکی تقسیم می‌شود [10]. روش‌های تحلیلی که برای شکل‌یابی سازه تنسگریتی به‌کار گرفته می‌شود با این



الف. نمایش گنبد جورجیا [7]



ب. نمایش سازه تنسگریتی اسنلسون ایکس [8]



ج. ماهواره HALCA همراه با میله‌های کششی [9]

شکل 1 نمونه‌هایی از سازه‌های تنسگریتی

1- Dynamic relaxation
2- Slacking
3- Double layer

حول شکل تعادلی به کار گرفته می‌شود. معادله حرکت خطی شده در حالت پیش تنش³ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M^g \ddot{u} + C^g \dot{u} + K_T^g u = F \quad (1)$$

که M^g ، C^g و K_T^g به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی مماسی⁴ هستند. F بردار نیروی خارجی اعمالی بر سازه است. u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب بردارهای جابجایی، سرعت و شتاب گره‌ای در سیستم مختصات کلی دلالت دارند. ماتریس سفتی مماسی به ماتریس سفتی خطی و ماتریس سفتی هندسی⁵ طبق رابطه (2) تجزیه می‌شود [33].

$$K_T^g = K_E^g + K_G^g \quad (2)$$

ماتریس سفتی خطی عموماً برای تحلیل تغییر شکل‌های کوچک خرپا استفاده می‌شود و ماتریس سفتی هندسی با پیش تنش یا تنش داخلی ایجاد و محاسبه می‌شود.

برای توسعه مدل اجزای محدود سازه تنسگریتی، هر کدام از اعضای سازه مذکور به وسیله ماتریس‌های جرم و سفتی در مختصات محلی به فرم رابطه (3) ارائه می‌شوند [34]:

$$K_T = \frac{E_i A_i}{l_{oi}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{F_i}{l_{oi}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\rho_i A_i l_{oi}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,b$$

$$C = a_1 M + a_2 K_T^g \quad (3)$$

که E_i ، A_i ، l_{oi} و F_i به ترتیب مدول الاستیسیته، سطح مقطع اعضا، طول اولیه اعضای تشکیل دهنده سازه مذکور، و نیروی محوری اعضا است. همچنین ρ_i و b به ترتیب چگالی اعضای سیستم و تعداد اعضای تشکیل دهنده تنسگریتی هستند، و ضرایب a_1 و a_2 به ترتیب ضرایب دمپینگ رایلی. طول اولیه اعضای تشکیل دهنده سازه تنسگریتی را با استفاده از رابطه هوک به صورت (4) بدست می‌آورند:

$$l_{oi} = \frac{E_i A_i l_i}{F_i + E_i A_i} \quad (4)$$

در واقع با استفاده از این رابطه طول اولیه اعضای تشکیل دهنده سازه تنسگریتی قبل از اعمال پیش تنش بدست آورده می‌شود. نیروی داخلی به فرم رابطه (5) محاسبه می‌شود:

$$F_i = P q_i l_i \quad (5)$$

که P ضریب پیش تنش است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد مقادیر q_i و l_i قبلاً در مرحله شکل‌یابی تنسگریتی بدست آمده‌اند. ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی مماسی، در مختصات کلی، با استفاده از ماتریس تبدیل از ماتریس‌های جرم و میرایی و سفتی مماسی در مختصات محلی تعیین می‌شوند. ماتریس تبدیل به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$T = \begin{bmatrix} r & s & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & s & n \end{bmatrix} \quad (6)$$

که r ، s و n به ترتیب بیان‌کننده جهت کسینوس‌های هادی محور x ، در مختصات محلی، با جهت مختصات کلی است. در نتیجه ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی مماسی در مختصات کلی به صورت رابطه (7) محاسبه می‌شود:

$$K_T^g = T^T K_T T$$

$$M^g = T^T M T$$

$$C^g = T^T C T \quad (7)$$

فرکانس‌های طبیعی سازه تنسگریتی می‌تواند با حذف ماتریس میرایی سازه‌ای و بردار نیروی خارجی، از معادله (1) حاصل شود. با در نظر گرفتن

آورده‌اند. اکثر آن‌ها اشاره نموده‌اند که برای تحلیل دینامیکی این نوع سازه‌ها می‌توان معادلات حرکت غیرخطی دینامیکی را حول شکل تعادلی خطی سازی کرده و از این طریق فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های تنسگریتی را تعیین نمود و همچنین جابجایی گره‌های مختلف سازه تحت بار استاتیکی را به دست آورد.

همان‌طور که اشاره شد، این سازه‌ها به علت پایین بودن میرایی سازه‌ای هنگامی که تحت اثر بار دینامیکی قرار می‌گیرند دچار ناپایداری دینامیکی خواهند شد در حالی که می‌توانند از نظر استاتیکی پایدار باشند. در نتیجه در این مقاله، به بررسی رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی تحت اثر بار دینامیکی (هارمونیک) پرداخته خواهد شد. به عبارت دیگر هدف محاسبه جابجایی گره‌های سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی است. بی تردید برای تحلیل پاسخ دینامیکی از روش‌های متنوع انتگرال زمانی صریح و غیرصریح استفاده می‌شود، به این ترتیب می‌توان به روش تفاضل مرکزی و روش نیومارک¹ اشاره نمود. باگی و گراچ روش‌های مفیدی برای تحلیل سازه‌های خطی و غیرخطی پیشنهاد نموده‌اند ولی اکثر مطالعات آن‌ها برای سیستم‌های یک درجه آزادی بوده است [30]. کلیه این روش‌ها فرضیه تغییرات خطی پاسخ شتاب را در بازه زمانی گسسته سازی شده برای حل معادله دینامیکی در نظر می‌گیرند. این روش‌ها به نمو زمانی حساس هستند. نمو زمانی کوچک برای بدست آوردن پاسخ صحیح و پایدار مورد نیاز است. یکی دیگر از روش‌های حل معادلات دینامیکی استفاده از روش حوزه فرکانسی است که این روش برای بارگذاری هارمونیک مفید است. این دو روش کلی برای تحلیل احتیاج به محاسبات قابل توجهی دارد. در این مقاله از روش فضای حالت برای تحلیل پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی تحت بار دینامیکی استفاده می‌شود. در این روش هیچ نوع فرضیه‌ای درباره تغییرات پاسخ شتاب بین دو نمو زمانی در نظر گرفته نمی‌شود. روش فضای حالت، معادله دینامیکی حاکم بر مساله را گسسته نمی‌کند بلکه پاسخ تحلیلی در فضای حالت منجر به مدل زمانی گسسته دقیق خواهد شد [31].

در ادامه مقاله، در بخش دوم معادلات دینامیکی حاکم بر سازه تنسگریتی ارائه خواهد شد و در بخش سوم تئوری مربوط به روش فضای حالت توضیح داده خواهد شد. در بخش چهارم دو مساله عددی حل و نهایتاً در بخش پنجم نتیجه گیری ارائه خواهد شد.

2- فرمولاسیون تحلیلی

سازه تنسگریتی در دسته‌ای ویژه از سازه‌های سبک فضایی قرار می‌گیرد. پایداری سازه تنسگریتی به تعادل تنش داخلی² بین اعضای فشاری و کششی بستگی دارد. در این کار فرض بر آن است که مرحله شکل‌یابی تنسگریتی کامل انجام شده است. در نتیجه مختصات گره‌ها، طول اعضای پیش تنش (l_i) و بردار ضریب چگالی نیرو (q) مشخص شده‌اند.

در سال‌های اخیر مدل‌های خطی و غیرخطی متعددی برای توصیف رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی ارائه شده است [32]. موتور نشان داد که معادله حرکت خطی شده حول شکل تعادلی، به صورت بسیار موثری می‌تواند به جای مدل غیرخطی کامل استفاده شود [20]. این ایده ابتدا برای مدل‌سازی دینامیکی سازه‌های تنسگریتی ساده استفاده شد و بعدها این ایده برای مدل‌های پیچیده نیز به کار گرفته شد [27]. همچنین در این مقاله، برای توصیف رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی مدل دینامیکی خطی شده

3- Pre-stressed
4- Tangential stiffness
5- Geometrical stiffness

1- Newmark method
2- Internal stress

هدف این مقاله، بدست آوردن پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی تحت اثر بارهای دینامیکی است. برای انجام این کار، ابتدا باید ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی مماسی بدست آمده از معادله (7) را در معادلات (11-16) جای گذاری کرد، تا پاسخ دینامیکی در گام‌های زمانی تعیین شده بدست آید. اما یکی از مشکلات سازه تنسگریتی این است که در اثر اعمال نیرو خارجی امکان دارد یکی یا بیشتر اعضای کششی، سازنده سازه تنسگریتی شل شوند. مفهوم شل شدن اعضای کششی به صورت ریاضی این طور خواهد شد که طول نهایی سازه تحت اثر بار خارجی از طول اولیه محاسبه شده از معادله (4) کمتر باشد. اگر این شرط برقرار باشد در عضو مورد نظر پدیده شل شدن اتفاق افتاده و باید سفتی عضو مورد نظر را در محاسبات صفر در نظر گرفت. پس باید در هر گام زمانی، اعضای که دچار این پدیده می‌شوند تعیین شود و سفتی این اعضا برابر صفر در نظر گرفت.

4- مثال عددی

در این قسمت سه مثال عددی برای سازه تنسگریتی تحت اثر بار دینامیکی ارائه خواهد شد. در تحلیل سازه تنسگریتی تحت اثر بار دینامیکی فرضیه زیر در نظر گرفته می‌شود:

مرحله شکل‌یابی انجام گرفته است و مقادیر مختصات گره‌ها، طول اعضای پیش تنش (l_i) و بردار ضریب چگالی نیرو (q) و همچنین ضریب نیرو P در معادله (5) مشخص شده‌اند.

4-1- تنسگریتی دو بعدی اسنلسون ایکس¹

تنسگریتی دو بعدی اسنلسون ایکس مطابق شکل 2 در نظر گرفته می‌شود. این سازه از 4 گره، 4 عضو نخ و 2 عضو میله تشکیل شده است. با انجام مرحله شکل‌یابی، طول پیش تنش اعضا کششی و فشاری به ترتیب برابر با 1 متر و $\sqrt{2}$ متر است. بردار چگالی نیرو $T = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ است [10]. در این تحلیل مقدار ضریب پیش تنش $P=10000N$ در نظر گرفته شده است. خصوصیات مکانیکی و هندسی سازه مذکور در جدول 1 داده شده است. سه فرکانس طبیعی غیرصفر سیستم برابر با $\omega_1 = 228.3\text{Hz}$; $\omega_2 = 573.2\text{Hz}$; $\omega_3 = 833.4\text{Hz}$ است. برای نشان دادن اثرات پیش تنش روی مقادیر فرکانس طبیعی در سازه مذکور، مقدار ضریب پیش تنش $P=15000N$ در نظر گرفته می‌شود. سه فرکانس طبیعی غیرصفر سیستم برابر با $\omega_1 = 229.6\text{Hz}$; $\omega_2 = 574.5\text{Hz}$; $\omega_3 = 834.4\text{Hz}$ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار ضریب پیش تنش، فرکانس‌های طبیعی سازه نیز افزایش پیدا می‌کند.

اکنون سازه فوق در گره‌های 3 و 4 به ترتیب تحت نیروی دینامیکی هارمونیک به فرم $F_3 = -200\sin(t)$ و $F_4 = -200\sin(t)$ در جهت محور Y قرار گرفته‌اند. پاسخ دینامیکی گره‌های 3 و 4 به دلیل متقارن بودن سازه شبیه هم هستند و در شکل 3 پاسخ دینامیکی سازه در جهت Y ارائه شده است. البته باید ذکر شود که در این مثال مقدار میرایی صفر در نظر گرفته شده است.

برای نشان دادن صحت نتایج، مساله فوق با الگوریتم نیومارک نیز تحلیل شده است. همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می‌شود، نتایج با استفاده از دو روش، یکسان هستند.

حرکت هارمونیک کوچک به فرم $u = \varphi_r e^{i\omega_r t}$ ، معادله مقادیر ویژه سازه تنسگریتی به صورت رابطه (8) بیان می‌شود:

$$K_T^g \varphi_r = \omega_r^2 M^g \varphi_r \quad (8)$$

که φ_r و ω_r به ترتیب بیان کننده فرکانس زاویه‌ای و بردار دامنه نرمالیزه شده بر جرم هستند. در قسمت بعدی، نحوه تبدیل نمودن معادله حرکت دینامیکی خطی شده سازه تنسگریتی، حول شکل تعادلی، به فرم فضای حالت توضیح داده خواهد شد؛ و همچنین نحوه به دست آوردن پاسخ دینامیکی سازه فوق الذکر تحت اثر بار دینامیکی شرح داده می‌شود.

3- نوشتن معادله حرکت در فضای حالت

برای نوشتن معادله حرکت دینامیکی خطی شده در فضای حالت، ابتدا طرفین معادله (1) را در معکوس ماتریس جرم ضرب نموده و به شکل رابطه (9) نوشته می‌شود:

$$\ddot{u} = (M^g)^{-1} F - (M^g)^{-1} C^g \dot{u} - (M^g)^{-1} K_T^g u \quad (9)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر همچون $X = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$ معادله فوق به حالت رابطه (10) بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(M^g)^{-1} K_T^g & -(M^g)^{-1} C^g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -(M^g)^{-1} F \end{Bmatrix} \quad (10)$$

که نماد n معرف تعداد گره‌ها می‌باشد. معادله (10) را به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل رابطه (11) می‌توان نوشت [26]:

$$\dot{X} = K^* X(t) + F^*(t) \quad (11)$$

که بردار X شامل بردار جابجایی و سرعت می‌باشد و K^* و F^* برابر هستند [26]:

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(M^g)^{-1} K_T^g & -(M^g)^{-1} C^g \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$F^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(M^g)^{-1} F \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (12)$$

پاسخ تحلیلی معادله (11) همراه با شرایط اولیه $X(0) = X_0$ به صورت رابطه (13) محاسبه می‌شود [25]:

$$X(t) = \exp[(t - t_0)K^*]X_0 + \int_{t_0}^t \exp[(t - t_0)K^*]F^*(\tau) d\tau \quad (13)$$

با در نظر گرفتن درون‌یابی مرتبه اول برای ترمهای نیرو بین دو نمونه زمانی متوالی، معادله (13) تبدیل به یک معادله گسسته - زمانی همچون رابطه (14) خواهد رسید [25]:

$$X_{n+1} = AX_n + B_1 F_{n+1}^* + B_2 (F_{n+1}^* - F_n^*) \quad (14)$$

که A ، B_1 و B_2 عبارتند از ماتریس‌های $2n \times 2n$ به فرم رابطه (15):

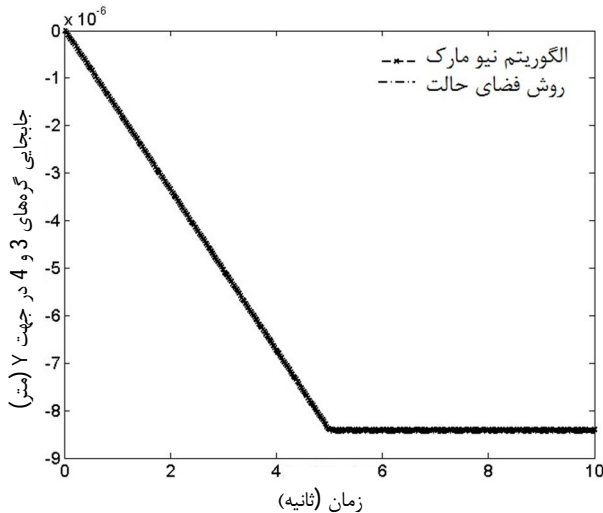
$$A = \exp(hK^*); B_1 = (K^*)^{-1}(A - I)$$

$$B_2 = (K^*)^{-1} \left(\frac{1}{h} B_1 - A \right) \quad (15)$$

در رابطه فوق h گام زمانی است. همچنین برای سیستم‌های ارتعاشی ماتریس K^* همواره غیرمفرد است و معکوس آن برابر با رابطه (16) است [25]:

$$K^* = \begin{bmatrix} -(K_T^g)^{-1} C^g & -(K_T^g)^{-1} M^g \\ I & 0 \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (16)$$

معادله بازگشتی (14) از مقادیر اولیه شروع خواهد شد، و بردار X که شامل جابجایی و سرعت است در کلیه ثوابت زمانی محاسبه خواهد شد. مقادیر شتاب رامی توان از معادله (9) که کلیه مقادیر در لحظه $n+1$ معلوم است، بدست آورد.



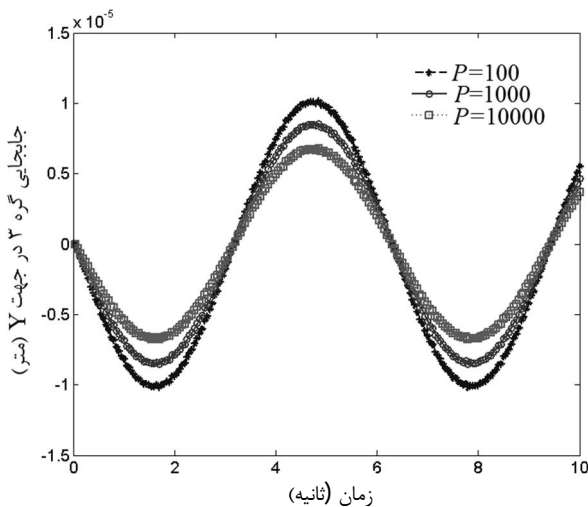
شکل 5 پاسخ دینامیکی گره‌های 3 و 4 در جهت Y

از شکل 5 می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ دینامیکی سیستم، تحت تأثیر تابع توزیع نیرو شکل 4 با استفاده از دو روش یکسان است. مدت زمان لازم برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی براساس الگوریتم نیومارک 7 میلی‌ثانیه و براساس روش فضای حالت 4/5 میلی‌ثانیه است.

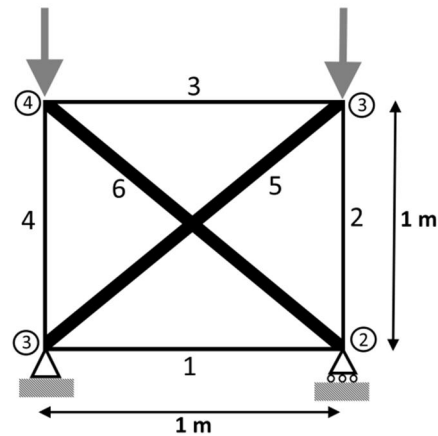
در این مثال، تأثیرات پیش تنش بر رفتار دینامیکی سازه تنسگریتی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. سازه فوق در گره‌های 3 و 4 به ترتیب تحت نیروی دینامیکی هارمونیک به فرم $F_3 = -200\sin(t)$ و $F_4 = -200\sin(t)$ در جهت محور Y قرار گرفته است. به‌طور نمونه، پاسخ دینامیکی گره شماره 3 در جهت Y بر مبنای سه مقدار ضریب مختلف P در شکل 6 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل 6 مشاهده می‌شود پاسخ دینامیکی سازه به مقدار پیش تنش سازه بستگی دارد و هرچه این پیش تنش کمتر باشد پاسخ دینامیکی سازه بزرگتر می‌شود. به عبارت دیگر اگر نیروی دینامیکی خارجی ثابت در نظر گرفته شود و مقدار پیش تنش کوچک‌تر شود، پاسخ دینامیکی سازه بزرگتر می‌شود.

4-2- تنسگریتی سه بعدی مشبک

در این مثال، سازه تنسگریتی سه بعدی مشبک از 20 سازه کوادریوپلکس تشکیل شده است. ارتفاع سازه تنسگریتی سه بعدی مشبک 40 سانتی‌متر



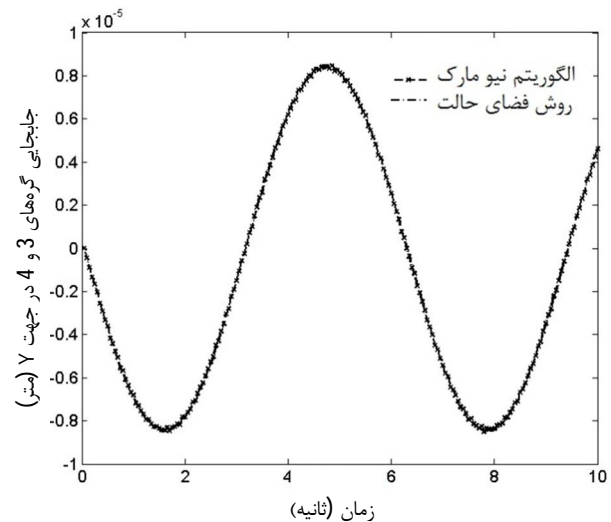
شکل 6 پاسخ دینامیکی گره 3 در جهت Y بر اساس مقادیر مختلف پیش تنش



شکل 2 نمایش تنسگریتی دو بعدی اسنلسون ایکس

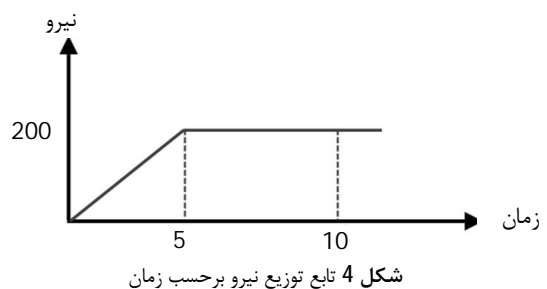
جدول 1 مشخصات هندسی و مکانیکی سازه تنسگریتی اسنلسون ایکس

مدول الاستیسیته (گیگا پاسکال)	چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	قطر (میلی‌متر)	
28	2420	14	المان نخ
115	7800	22	المان میله

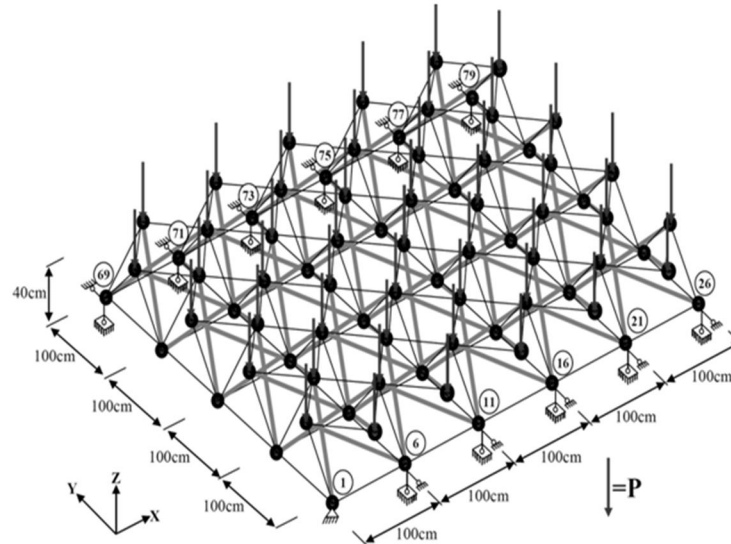


شکل 3 پاسخ دینامیکی گره‌های 3 و 4 در جهت Y

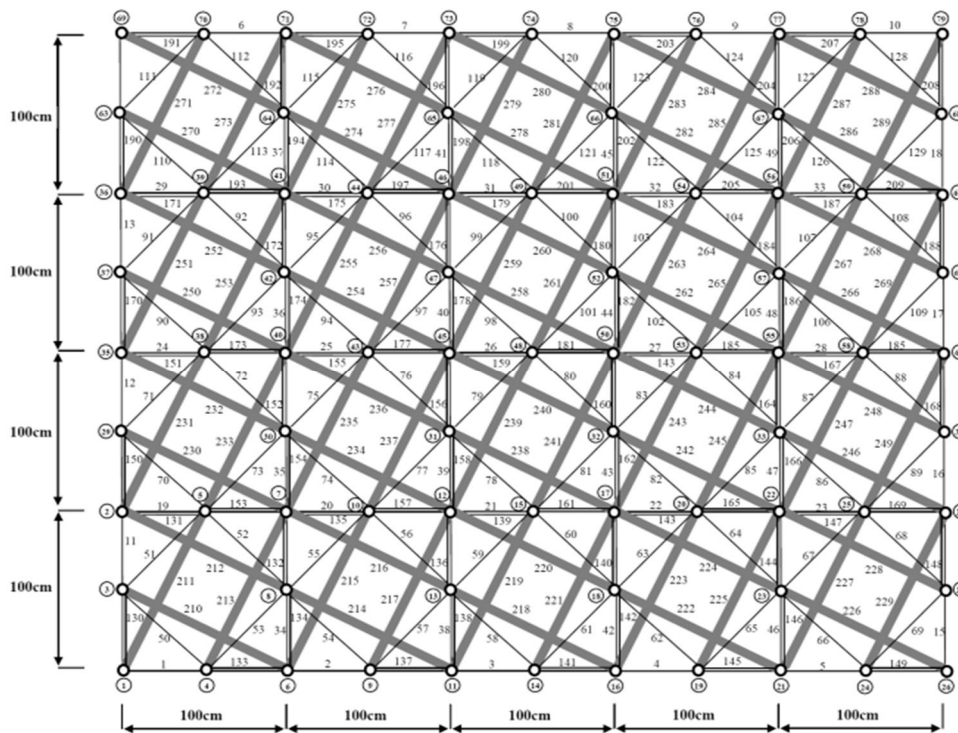
سازه نمایش داده شده در شکل 2 تحت بار دینامیکی شکل 4 قرار گرفته است و پاسخ دینامیکی سازه به‌وسیله دو روش بررسی می‌شود. شکل 5 پاسخ دینامیکی، گره‌های 3 و 4 در جهت Y را نشان می‌دهد.



شکل 4 تابع توزیع نیرو بر حسب زمان



الف: نمایش پرسپکتیو سازه تنسگریتی سه بعدی مشبکه

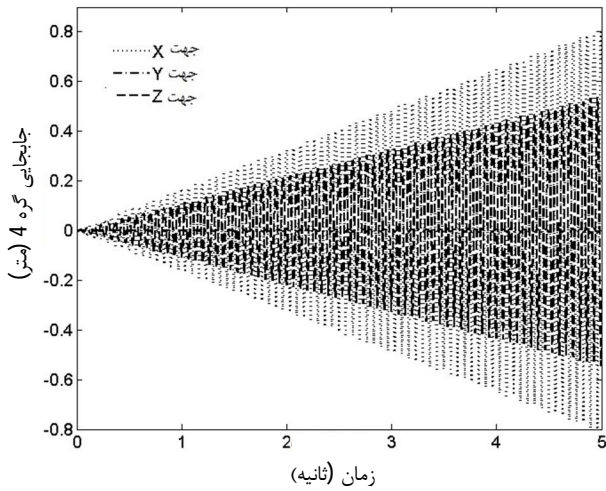


ب- نمایش دید از بالا سازه تنسگریتی سه بعدی مشبکه

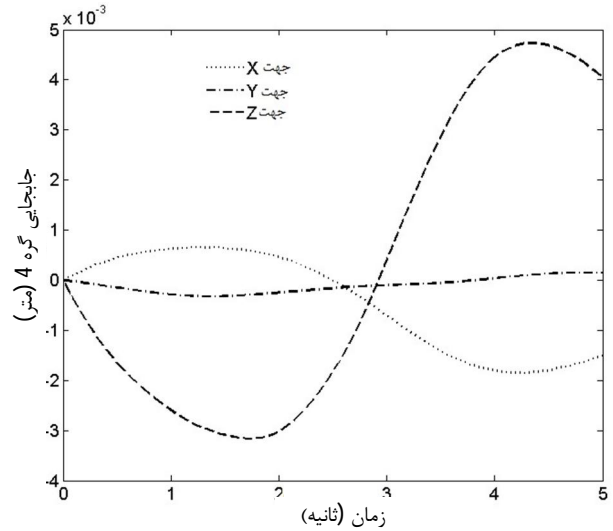
شکل 7 نمایش سازه تنسگریتی سه بعدی مشبک

است. سازه مذکور از 79 گره، 209 المان نخ و 80 المان میله همچون شکل 7-الف و 7-ب نشان داده شده تشکیل شده است. بردار چگالی نیرو، مقدار ضریب P و خصوصیات مکانیکی سازه در جدول 2 داده شده است: $\omega_1 = 15.02\text{Hz}$; $\omega_2 = 25.53\text{Hz}$; $\omega_3 = 35.07\text{Hz}$ است. اکنون سازه مطابق شکل 7 الف در کلیه گره‌های فوقانی تحت نیروی دینامیکی هارمونیک به فرم $F = -1000\sin(t)$ در جهت محور Z قرار گرفته است. پاسخ دینامیکی گره‌های 4 و 48 در تمام جهت در شکل‌های 8 و 9 با استفاده از روش فضای حالت می‌شود. اکنون سازه فوق تحت اثر بار خارجی دینامیکی هارمونیک برابر

در واقع سازه تحت تأثیر نیروی هارمونیک با فرکانس تحریک برابر با فرکانس اول سازه قرار گرفته است. در این‌جا مقدار میرایی سازه به علت پایین بودن صفر در نظر گرفته می‌شود. پاسخ دینامیکی سازه برای گره‌های 4 و 48 در جهت‌های مختلف در شکل‌های 10 و 11 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشاهده می‌شود به علت عدم میرایی سازه، دامنه با افزایش زمان زیاد می‌شود، و سبب می‌شود سازه از بین برود. به عبارت دیگر کلیه اعضای کششی سازه از حالت کششی خارج شده و دچار حالت شل شدن شده و اعضای فشاری دچار کمانش شده‌اند.

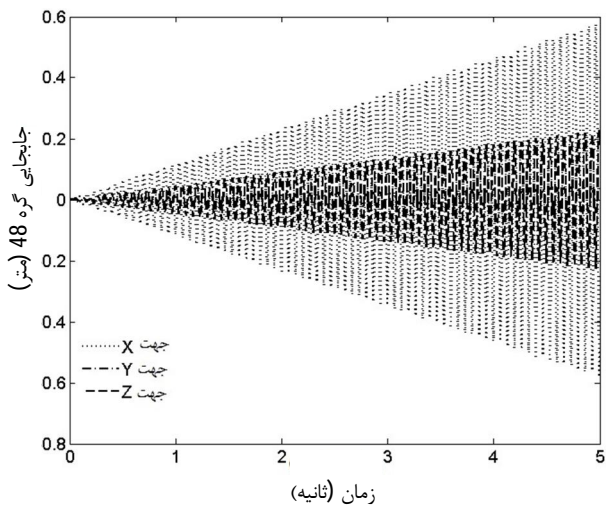


شکل 10 پاسخ دینامیکی گره 4 در هر سه جهت

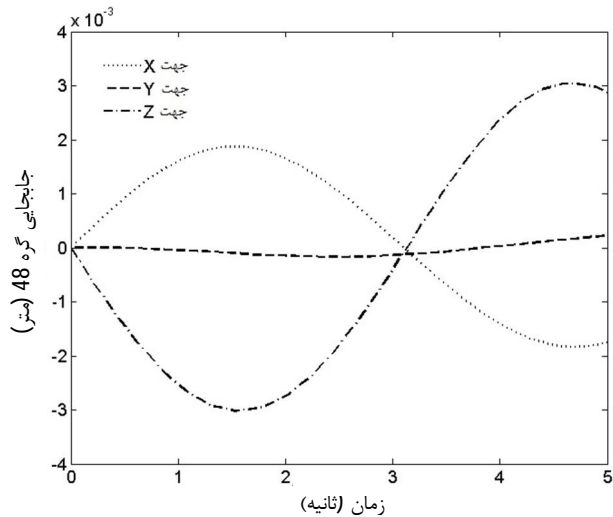


شکل 8 پاسخ دینامیکی گره 4 در هر سه جهت

با در نظر گرفتن دمپینگ سازه‌ای همچون $C = \beta_1 M + \beta_2 K$ برای سازه مورد نظر، ضرایب میرای سازه تنسگریتی براساس روش چوودهار و همکارانش [35] به ترتیب برابر $\beta_1 = 0.00064$ و $\beta_2 = 0.00169$ بدست می‌آید. پاسخ



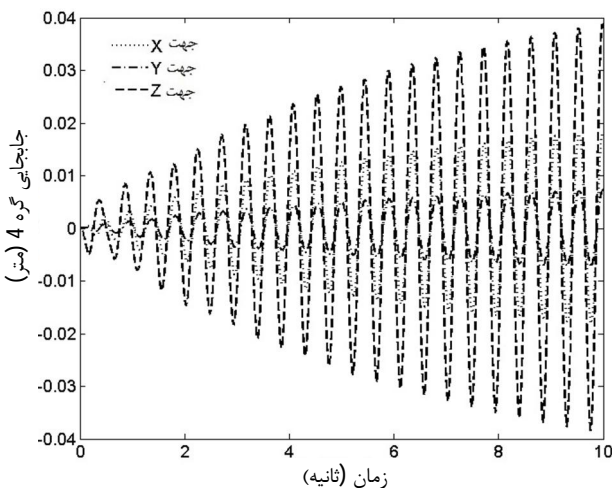
شکل 11 پاسخ دینامیکی گره 48 در هر سه جهت



شکل 9 پاسخ دینامیکی گره 48 در هر سه جهت

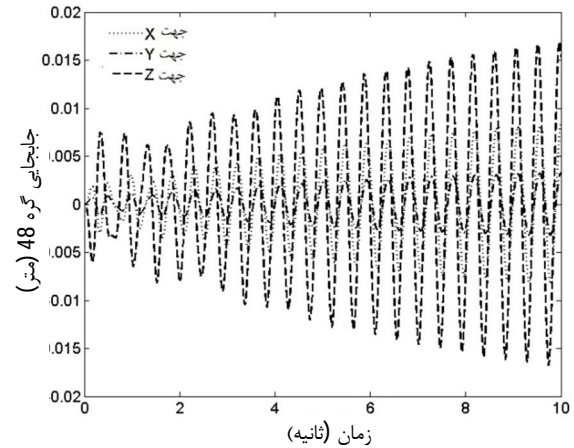
جدول 2 مشخصات هندسی و مکانیکی سازه تنسگریتی سه بعدی مشبکه

مقدار ضریب P	مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب)	قطر (میلی‌متر)	چگالی نیرو q	
5500	28	2420	10	1	المان نخ 10-1
5500	28	2420	10	17	المان نخ 18-11
5500	28	2420	10	2	المان نخ 33-19
5500	28	2420	10	18	المان نخ 49-34
5500	28	2420	10	2	المان نخ 129-50
5500	28	2420	10	2	المان نخ 209-130
5500	115	7800	50	-2	المان میله 289-210



شکل 12 پاسخ دینامیکی گره 4 در هر سه جهت

- International Journal Space Structure*, Vol. 7, pp.143–152, 1992.
- [7] Georgia Dome. Reproduced from/www.gadome.com. 9/10/2014
- [8] Snelson artworks of tensegrity structures. www.kennethsnelson.net. 9/10/2014.
- [9] H.Hirosawa, H.Hirabayashi, H.Kobayashi, Y. Murata, T.Kii, P. Edwards, Y.Asaki, Space VLBI satellite HALCA and its engineering accomplishments. *ActaAstronautica*, Vol. 50, pp. 301-309.2002.
- [10] A.G.Tibert, S. Pellegrino, Review of form finding methods for tensegrity structures. *International Journal Solid and structures*, Vol. 18, pp. 209–223, 2003.
- [11] R.Connelly, M.Terrell, Globally rigid symmetric tensegrities, *Journal of Structure Topology*, Vol.21, pp. 59–78, 1995.
- [12] S.Pellegrino, *Mechanics of kinematically indeterminate structures*, PhD thesis, UK: University of Cambridge, 1986.
- [13] M.Barnes, Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation, *International Journal Space Structure*, Vol. 14, pp. 89-104, 1999.
- [14] N.Vassart, R.Motro Multi-parameter form finding method: Application to tensegrity systems, *International Journal Space Structure*, Vol. 14, pp.147-154. 1999.
- [15] C. Paul, H. Lipson, F. Cuevas, Evolutionary form-finding of tensegrity structures", In: *Genetic and evolutionary computation conference*, Washington (DC), 2005.
- [16] G.Strada, H.J.Bungartz, C.Mohrdeck, Numerical form finding of tensegrity structures, *International Journal Solid and structures*, Vol. 43, pp.6855-6868. 2006.
- [17] H.C.Tran, J.Lee, Advanced form finding of tensegrity structures, *Computer Structure*, Vol. 88, pp. 237-246, 2010.
- [18] H.C.Tran, J.Lee, "Initial self- stress design of tensegrity grid structures". *Computer Structure*, Vol. 88, 2010, pp. 558-566.
- [19] M.Pagitz, M.J.J Tur "Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures" *International Journal Solid and structures*, Vol.46, pp. 3235–3240. 2009.
- [20] R.Motro, S.Najari, P.Jouanna, "Static and dynamic analysis of tensegrity systems", In: *ASCE Int. Symposium Shells and Spatial Structure Computer USA*, pp. 270–279, 1986.
- [21] Y.Kono, K.K.Choong, T.Shimada, H.Kunieda, "An experimental investigation of a type of double-layer tensegrity grids" *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol.40, pp. 103–111. 1999.
- [22] N.Ben Kahla, B.Moussa, J.C.Pons, "Nonlinear dynamic analysis of tensegrity systems" *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol.41, pp. 49–58. 2000.
- [23] U.Oppenheim, W.O.Williams, "Vibration of an elastic tensegrity structure", *European Journal of Mechanics Solids*, Vol. 20, pp. 1023–1031. 2001.
- [24] C.Sultan, M.Corless, R.E.Skelton, "Linear dynamics of tensegrity structures", *Engineering Structure*, Vol.24, pp. 671–685, 2002.
- [25] NBH Ali, LR.Barbarigos, A.Alberto, P.Albi, IFC.Smith, "Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge", *Engineering Structures*, Vol. 32, pp. 3650–3659.2010.
- [26] B.Wang, "Cable-strut systems: Part I—tensegrity", *Journal Construct Steel Researchers*, Vol. 45, pp. 281–289. 1998.
- [27] H.Murakami, "Static and dynamic analyses of tensegrity structures, part 2, Quasi static analysis", *International Journal Solid and structures*, Vol. 38, pp. 3615-3629. 2001.
- [28] A.Nuhoglu, K.A.Korkmaz, "A practical approach for nonlinear analysis of tensegrity systems", *Engineering Computer*, Vol. 34, pp. 11-18.2010.
- [29] Ch.Tran, J.Lee, "Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures", *Acta Mechanica Since*, Vol.27, pp. 938–949.2011.
- [30] I.M.M.Baig, Th.Grätsch, "Recommendations for practical use of numerical methods in linear and nonlinear dynamics" Berliner Tor 21, Hamburg, Germany, 2009.
- [31] F.L.Almansa, A.H.Barbat, J.Rodellar, "SSP algorithm for linear and nonlinear dynamic response simulation", *International Journal Numerical Method Engineering*, Vol. 26, pp. 2687-2706. 1989.
- [32] J.M.Mirats-Tur, S.Hernández, "Tensegrity frameworks: dynamic analysis review and open problems", *International Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, pp. 1–18. 2009.
- [33] S.Guest, "The stiffness of prestressed frameworks: a unifying approach", *International Journal Solid and Structure* Vol. 43, pp. 842–854., 2006.
- [34] H.Ali, I.F.C.Smith, "Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure" *International Journal Solid and structures*, Vol. 47, pp. 1285-1296, 2010.
- [35] I. Chowdhury and S. Dasgupta, "Computation of Rayleigh Damping Coefficients for Large Systems", *International Journal Space Structure*, Vol. 43, pp.6855-6868, 2003.



شکل 13 پاسخ دینامیکی گره 48 در هر سه جهت

دینامیکی سازه تحت اثر بار خارجی دینامیکی هارمونیک برابر $F = -1000\sin(15.02t)$ ، برای گره‌های 4 و 48 در جهت‌های مختلف در شکل‌های 12 و 13 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشاهده می‌شود به علت میرایی سازه پایین، دامنه با افزایش زمان زیاد می‌شود.

5- نتیجه گیری

هدف از این مقاله، ارائه پاسخ دینامیکی سازه تنسگریتی تحت تأثیر بارهای دینامیکی است. معادلات غیرخطی دینامیکی، با دقتی بالا، حول شکل تعادلی، خطی‌سازی شده؛ و با روش فضای حالت، پاسخ دینامیکی حاصل شده است. در روش حل، اثرات شل شدن نخ روی ماتریس سفتی مماسی در سازه تنسگریتی در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر، اگر طول نخ از مقدار اولیه کمتر شود باید در هنگام تحلیل، سفتی آن صفر در نظر گرفته شود. همچنین می‌توان از روش فضای حالت برای سازه‌های تنسگریتی که رفتار غیرخطی بالایی ندارند استفاده نمود. در استفاده از روش فضای حالت هیچ نوع فرضیه‌ای درباره تغییرات پاسخ شتاب بین دو نمو زمانی در نظر گرفته نمی‌شود ضمن این‌که زمان لازم برای تحلیل نسبت به روش الگوریتم نیومارک کمتر است. از تحلیل موارد شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که تحلیل دینامیکی سازه تنسگریتی مخصوصاً زمانی که تحت تأثیر بار دینامیکی خارجی قرار گرفته باشد، در طراحی سازه بسیار موثر است. زیرا زمانی که در سازه رزونانس رخ بدهد، اعضای فشاری سازه تنسگریتی دچار کمانش شده و همچنین اعضای کششی دچار پدیده شل شدن می‌شوند و صلبیت سازه از بین می‌رود.

6- مراجع

- [1] R.Motro, Tensegrity: Structural Systems for the Future, First Ed., London, Kogan Page Science, 2003.
- [2] S.Adriaenssen, M.Barnes, Tensegrity spline beam and grid shell structures, *Engineering Structure*, Vol. 23, 2001, pp. 29–36.
- [3] J.Quirant, M.Kazi-Aoual, R.Motro, *Designing tensegrity systems: the case of a double layer grid*, *Engineering Structure*, Vol. 25, pp. 1121–1130, 2003.
- [4] J.Aldrich, *Control synthesis for a class of light and agile robotic tensegrity structures*, PhD thesis, University of California, 2004.
- [5] M. Masic, R. Skelton, Open-loop control of class-2 tensegrity towers, *Proc. SPIE 5383*, pp.298–308, 2004.
- [6] H.Furuya, Concepts of deployable structures in space applications,