



Derivation of the Effective Volume of a Ceramic Component with a Truncated Cone Shape under Internal Pressure by Analytical and Numerical Methods

ARTICLE INFO

Article Type

Original Research

Authors

Shahani.A.R.¹

Tavakoli S.M.H.^{1*}

How to cite this article

Shahani.A.R., Tavakoli S.M.H.,
Derivation of the Effective Volume of
a Ceramic Component with a
Truncated Cone Shape under
Internal Pressure by Analytical and
Numerical Methods. Modares
Mechanical Engineering;
2023;23(11):597-606.

¹Faculty of Mechanical Engineering,
K. N. Toosi University of
Technology, Tehran, Iran.

*Correspondence

Address: Faculty of Mechanical
Engineering, K. N. Toosi University
of Technology, Tehran, Iran.

tavakkoli.313@gmail.com

Article History

Received: February 25, 2023

Accepted: October 29, 2023

ePublished: November 25, 2023

ABSTRACT

Ceramic materials are desirable in structural applications because of their strength at high temperatures, low thermal expansion, and excellent wear resistance. However, ceramic structures are generally brittle and will fail due to inherent flaws that can be introduced into the material through processing, handling, or while in service. In the strength test samples of ceramic materials, the observed strength depends on the sample volume and the test method, and the results have significant scattering. On the other hand, it is important to recognize the variability of the strength of ceramic materials for structural design, and in the design process, this variability usually requires a probability-based failure criterion, which, due to the brittle fracture of ceramics, usually uses the Weibull distribution to represent their strength. With the help of Weibull distribution, the concept of effective volume is defined and by using it, the strength of a test sample with a specific geometry and loading is predicted from another sample that has a different geometry and loading. In this research, the effective volume for a truncated cone under internal pressure has been derived analytically. With the effective volume for this configuration and a sufficient number of flexural strength tests with the help of small and low-cost flexural specimens, it is possible to predict the tensile strength of the ceramic truncated cone without conducting expensive tests. For a problem with a specific material property and dimensions, the effective volume was calculated numerically and it had a 3% error compared to the analytical value.

Keywords Effective Volume, Ceramics, Truncated Cone, Weibull Distribution, Strength.

CITATION LINKS

1- Modern ceramic engineering: properties, processing, and use in design... 2- Mechanical properties of ceramics... 3- Characteristic strength, Weibull modulus, and failure probability of fused silica glass. Optical Engineering. ... 4- ARMY MATERIALS AND MECHANICS RESEARCH CENTER WATERTOWN MA. Proof Test Procedures for Ceramic. 5- ASTM. Standard Test Method for Tensile Strength of Monolithic Advanced Ceramics at Ambient Temperatures. West Conshohocken, PA: American Society for... 6- ASTM C1161-18. Standard test method for flexural strength of advanced ceramics at ambient temperature. 7- A statistical distribution function of wide applicability... 8- ASTM C. 1239-07: Standard practice for reporting uniaxial strength data and estimating Weibull distribution parameters for advanced ceramics. West Conshohocken: ASTM International. ... 9- Prediction of the strength of ceramic tubular components: Part I—Analysis. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 1991... 10- THEORY AND STRUCTURAL DESIGN APPLICATIONS OF WEIBULL STATISTICS. Westinghouse Electric Corp., Pittsburgh, Pa. Astronuclear Lab... 11- Fracture strength characterization of tubular ceramic materials using a simple c-ring geometry. Journal of materials science... 12- Materials for infrared windows and domes: properties and performance. SPIE press... 13- Weibull effective volumes and surfaces for cylindrical rods loaded in flexure... 14- Weibull analysis effective volume and effective area for a ceramic C-ring test specimen... 15- Stresses in thick-walled conical shells.

استخراج حجم موثر قطعه‌ی سرامیکی با هندسه‌ی مخروط ناقص تحت فشار داخلی به روش تحلیلی و عددی

امیررضا شاهانی^۱، سید محمدحسین توکلی^{۱*}

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

مواد سرامیکی به دلیل حفظ استحکام در دمای بالا، انبساط حرارتی کم و مقاومت عالی در برابر فرسایش برای کاربردهای سازه‌ای، مناسب هستند. با این حال، سازه‌های سرامیکی عموماً ترد هستند و به دلیل عیوب ذاتی که می‌توانند از طریق ساخت، جابجایی یا در حین سرویس وارد آن‌ها شوند، بشکنند. در نمونه‌های آزمایش استحکام مواد سرامیکی، استحکام مشاهده شده به حجم نمونه و روش آزمایش بستگی دارد و نتایج دارای پراکندگی قابل توجهی هستند. از طرفی تشخیص تغییرپذیری استحکام مواد سرامیکی برای طراحی سازه‌ای، مهم است و در فرایند طراحی این تغییرپذیری معمولاً نیاز به یک معیار واماندگی با مبنای احتمالاتی دارد که با توجه به شکست ترد سرامیک‌ها، معمولاً از توزیع ویبول برای بیان استحکام آن‌ها استفاده می‌شود. به کمک توزیع ویبول، مفهوم حجم موثر تعریف می‌شود و با استفاده از آن استحکام یک نمونه‌ی آزمایش با هندسه و بارگذاری مشخص از نمونه‌ی دیگری که هندسه و بارگذاری متفاوتی دارد پیش‌بینی می‌گردد. در این پژوهش معادله‌ی حجم موثر برای یک قطعه‌ی سرامیکی با هندسه‌ی مخروط ناقص تحت فشار داخلی به روش تحلیلی به دست آمده است. با داشتن حجم موثر برای این پیکربندی و با تعداد کافی آزمایش استحکام به کمک نمونه‌های کوچک و کم‌هزینه‌ی خمشی، می‌توان استحکام کششی قطعه‌ی سرامیکی مخروطی را بدون انجام آزمایش‌های متعدد و پرهزینه پیش‌بینی نمود. همچنین برای مخروط ناقصی با جنس و ابعاد مشخص، حجم موثر به صورت عددی نیز محاسبه گردید و نسبت به مقدار تحلیلی ۳٪ خطا داشت.

کلیدواژه‌ها: حجم موثر، سرامیک، مخروط ناقص، توزیع احتمالاتی ویبول، استحکام

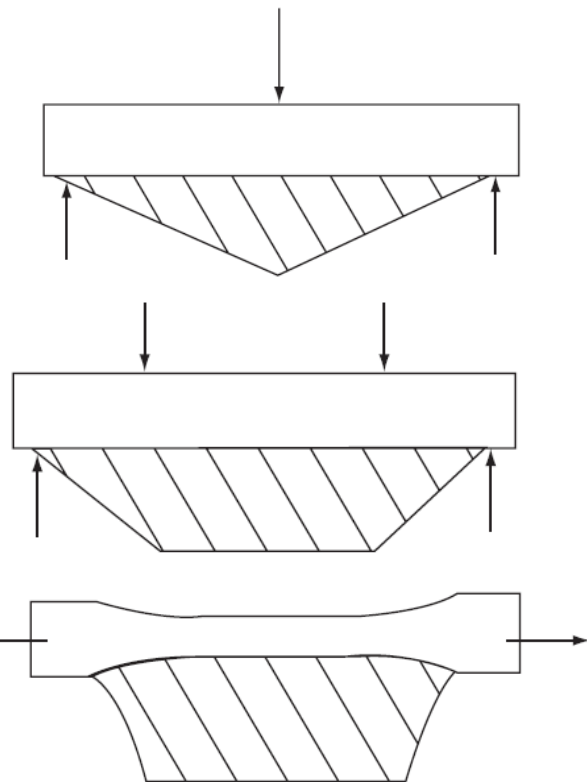
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۰۷

*نویسنده مسئول: tavakkoli.313@gmail.com

۱- مقدمه

در سرامیک‌ها مقدار استحکام مشاهده شده بستگی به اندازه‌ی نمونه و نوع آزمایش دارد. به بیان دقیق‌تر این مقدار همزمان بستگی به توزیع عیوب و توزیع تنش در نمونه دارد^[۱]. نوع آزمایش می‌تواند به صورت کشش تک محوره، خمش سه نقطه‌ای و یا خمش چهار نقطه‌ای باشد که هر کدام توزیع تنش متفاوتی را روی نمونه ایجاد می‌کند^[۲]. این موضوع در شکل ۱ نشان داده شده است. مطابق شکل ۱، حجم قرار گرفته تحت تنش بیشینه در آزمایش کشش بزرگ‌تر از خمش چهارنقطه‌ای و همچنین در آزمایش خمش چهارنقطه‌ای بسیار بزرگ‌تر از خمش سه نقطه‌ای است.



شکل ۱: توزیع تنش در آزمایش کشش، خمش سه و چهار نقطه‌ای^[۱]

بنابراین احتمال این که یک عیب بزرگ از ماده در خمش چهار نقطه تحت تنش بیشینه قرارگیرد نسبت به سه نقطه بیشتر است. به همین دلیل معمولاً مقادیر استحکام خمشی که توسط آزمایش خمش چهار نقطه بیان می‌شود نسبت به سه نقطه، واقعی‌تر و کم‌تر است. زیرا دامنه‌ی بیشتری از ماده را تحت تنش بیشینه قرار داده‌است^[۱]. همچنین این موضوع در رابطه با استحکام کششی نسبت به استحکام خمشی صادق است و غالباً به همان دلیلی که بیان شد، مقدار استحکام کششی در سرامیک‌ها کمتر از استحکام خمشی است^[۲].

بنابراین این استحکام یک معیار عینی از مقاومت ذاتی ماده نیست؛ زیرا به روش آزمایش علاوه بر اندازه حجم یا ناحیه تحت تنش خمشی یا کششی بستگی دارد و نتایج دارای پراکندگی قابل توجهی هستند^[۳].

لذا تشخیص تغییرپذیری (variability) استحکام مواد سرامیکی برای طراحی سازه‌ای، مهم است. این تغییرپذیری معمولاً نیاز به یک معیار واماندگی با مبنای احتمالاتی دارد^[۴].

برای تعیین استحکام سرامیک‌ها از آزمایش کشش کمتر استفاده می‌شود؛ زیرا هزینه‌ی نمونه‌سازی برای آزمایش بالاست و انجام آزمون نیاز به همراستایی فوق العاده دقیق فک‌های بارگذاری در هنگام آزمون دارد. هرگونه ناهمراستایی نمونه در فک‌های دستگاه، تنش خمشی را ایجاد می‌کند و در نتیجه تمرکز تنش بر عیوب سطحی را افزایش داده و موجب عدم اطمینان به داده‌های

و اگر حجم را واحد در نظر بگیریم و فرض کنیم تمام حجم ماده تحت کشش یکنواخت است، پارامتر استحکام مشخصه‌ی ویبول با پارامتر مقیاس برابر خواهد شد. واحد پارامتر مقیاس ویبول، تنش $\sigma \times V^{\frac{1}{m}}$ (حجم) و یا به بیان دیگر مگاپاسکال در متر به توان سه بر مدول ویبول است [8].

معادله‌ی (۲) را می‌توان به شکل ساده‌تری نوشت. ابتدا عبارت $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ را به σ_{max} که بیشینه‌ی تنش در تمام نقاط نمونه است ضرب و تقسیم می‌کنیم و سپس عدد بدون بعد k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = \frac{1}{V} \int_v \left(\frac{\sigma}{\sigma_{max}} \right)^m dV \quad (3)$$

با ترکیب روابط (۲) و (۳) داریم:

$$P_f(\sigma) = \begin{cases} 1 - \exp \left[-kV \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma} \right)^m \right] & \sigma > \sigma_0 \\ 0 & \sigma \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (4)$$

به عبارت kV ، حجم موثر گفته می‌شود. اگر نمونه‌ای را آزمایش کنیم که تحت تنش یکنواخت باشد، $k=1$ و V (حجم مورد آزمایش نمونه) همان حجم موثر است. حجم موثر تابعی از مدول ویبول، جنس و پارامترهای هندسی نمونه‌ی آزمایش مورد مطالعه است. عبارت حجم موثر می‌تواند به صورت تحلیلی برای هر نوع نمونه‌ی آزمایش (خمش سه نقطه، چهار نقطه و...) توصیف شود. حجم موثر، kV ، برای پیش‌بینی نتایج استحکام حاصل از یک نوع آزمایش استفاده می‌شود. بدین منظور رابطه‌ی تئوری برای تخمین نتایج استحکام از یک نوع آزمایش با توزیع بار و هندسه‌ی مشخص، به کمک داده‌های به دست آمده از آزمایش دیگری که پیکربندی متفاوتی دارد ارائه شده است [4]. در یک احتمال شکست، برای دو دسته داده‌ی آماری جدا داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{k_1 V_1}{k_2 V_2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

در رابطه‌ی (۵) σ_1 و σ_2 تنش‌های متناظر با یک احتمال شکست و V_1 و V_2 حجم دو نمونه هستند. m مدول ویبول و k_1 و k_2 اعداد مثبت بدون بعدی هستند که ماکزیمم مقدار آن‌ها یک است و نوع بارگذاری را تعریف می‌کنند.

رابطه‌ی (۵) پیش‌بینی می‌کند که در صورت تغییر اندازه‌ی نمونه‌ی آزمایش و نوع آن چه اتفاقی خواهد افتاد. همچنین این رابطه گویای این مطلب است که با افزایش حجم نمونه، استحکام آن کاهش می‌یابد. به طور مثال اگر مدول ویبول ۵ باشد و ابعاد نمونه‌ی کششی دو برابر شود، حجم آن ۸ برابر شده و پیش‌بینی می‌شود میانگین استحکام به ۶۶٪ استحکام نمونه‌های کوچک‌تر، کاهش یابد.

اگر بخواهیم رابطه‌ی بین پارامتر مقیاس و استحکام مشخصه‌ی ویبول به دست آوریم، به کمک رابطه‌ی (۵) و همچنین تعریف پارامتر مقیاس ویبول که برای حجم واحد و کشش یکنواخت لحاظ می‌شود داریم:

اندازه‌گیری شده‌ی استحکام کششی می‌شود [1]. در استانداردهای ASTM C1۲۷۳ و ASTM C۱۱۶۱ به ترتیب نحوه‌ی تعیین استحکام خمشی و استحکام کششی مواد سرامیکی پیشرفته شرح داده شده است [5,6] و با توجه به سهولت آزمایش استحکام خمشی به نسبت سایر آزمایش‌ها، در پژوهش‌ها معمولاً از استاندارد استحکام خمشی استفاده شده است و به کمک روابطی که ارائه خواهد شد می‌توان استحکام بدست آمده‌ی سایر آزمایش‌ها را پیش‌بینی نمود.

۲- تحلیل آماری و اماندگی سرامیک‌ها

با توجه به شکست ترد سرامیک‌ها، معمولاً از توزیع ویبول (Weibull) برای بیان استحکام آن‌ها استفاده می‌شود. مدل ویبول برای شکست سرامیک‌ها مبتنی بر این ایده است که زمانی یک سرامیک می‌شکند که ضعیف‌ترین جز آن بشکند و به عبارت دیگر بر اساس تئوری ضعیف‌ترین پیوند است [7] و رابطه‌ی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$P_f(\sigma) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] & \sigma > \sigma_0 \\ 0 & \sigma \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (1)$$

در رابطه‌ی (۱)، P_f احتمال تجمعی شکست به عنوان تابعی از تنش اعمال شده است. این عبارت با دو پارامتر استحکام مشخصه σ_0 و m پارامتر شکل بیان شده است که هر دو را می‌توان از مجموعه‌ای از داده‌های تجربی استخراج کرد. m مدول ویبول نیز نامیده می‌شود و یک مشخصه‌ی مهم از ماده‌ی سرامیکی است. مقادیر بزرگ m نشان دهنده‌ی توزیع یکنواخت عیوب و پراکندگی کم در استحکام ماده است. در استاندارد ASTM C1۲۷۳ نحوه‌ی استخراج پارامترهای توزیع ویبول شرح داده شده است و بر اساس آن برای بدست آوردن مدول ویبول با عدم قطعیت کم حداقل ۳۰ داده‌ی استحکام نیاز است [8].

همچنین رابطه‌ی (۱) این موضوع را بیان می‌کند که احتمال شکست برای تنش‌های فشاری، برابر صفر است و به عبارت دیگر تنش فشاری موجب اماندگی ماده‌ی سرامیکی نمی‌شود [3,7].

لازم به ذکر است که استحکام مشخصه‌ی ویبول، σ_0 به نمونه‌ی آزمایش (کششی یا خمشی) وابسته است و با هندسه و اندازه‌ی نمونه تغییر می‌کند. همچنین واحد آن همان واحد استحکام است.

یک بیان دیگر برای احتمال شکست در معادله‌ی (۲) آمده است [6].

$$P_f(\sigma) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \int_v \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right] & \sigma > \sigma_0 \\ 0 & \sigma \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲)، V حجم ناحیه‌ی تحت تنش کششی است. σ_0 نیز پارامتر مقیاس ویبول (Weibull scale parameter) است که خاصیت ماده بوده (اگر از توزیع ویبول دو پارامتری استفاده شود)

حلقه‌ای به شکل 0 تحت فشار در راستای قطر حجم موثر را استخراج نموده‌اند که با توجه به پیچیدگی روابط از ارائه‌ی آن در اینجا اجتناب شد.

با توجه به مطالبی که بیان شد برای پیکربندی‌های مختلف آزمایش استحکام سرامیک، معادلات حجم موثر به صورت تحلیلی ارائه شده است و در برخی موارد حل عددی نیز انجام و با نتایج تحلیلی صحت‌گذاری شده است. در این مطالعه، حجم موثر برای یک قطعه‌ی سرامیکی با هندسه‌ی مخروط ناقص تحت فشار داخلی به صورت تحلیلی استخراج می‌شود و برای یک ابعاد مشخص حل عددی نیز انجام و نتایج آن با حل تحلیلی مقایسه می‌گردد. با داشتن حجم موثر برای این پیکربندی آزمایش، با تعداد کافی آزمایش استحکام به کمک نمونه‌های کوچک و کم‌هزینه‌ی خمشی، می‌توان استحکام کششی قطعه‌ی سرامیکی مخروطی را بدون انجام آزمایش‌های متعدد و پرهزینه پیش‌بینی نمود.

۳- توزیع تنش در مخروط ناقص تحت فشار داخلی

هاوزن باوئر و همکاران^[15] توزیع تنش الاستیک را در مخروط ناقص جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی به دست آورده‌اند. در مطالعه‌ی آن‌ها فرضیات زیر لحاظ شده است:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = \left(\frac{kV}{1 \times 1}\right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \sigma_r = (kV)^{\frac{1}{m}} \times \sigma_\theta \quad (6)$$

لازم به ذکر است در مواردی که برای توزیع تنش نتوان حل تحلیلی انجام داد، حجم موثر را می‌توان به کمک روش اجزا محدود به دست آورد. با این توضیح که رابطه‌ی (۳) برای هر المان محاسبه می‌گردد و سپس روی کل حجم جمع زده می‌شود تا مقدار نهایی حجم موثر حاصل شود^[9].

۲-۱- معادلات ویبول برای انواع مختلف نمونه‌های آزمایش

معادلات حجم موثر برای نمونه‌های آزمایش مختلف از جمله خمش سه و چهار نقطه برای نمونه با سطح مقطع مستطیل، خمش سه و چهار نقطه برای نمونه‌ی استوانه‌ای، استوانه‌ی طویل تحت فشار داخلی و نمونه‌ی حلقه‌ای به شکل C تحت کشش در مراجع^[9-13] بررسی و در جدول ۱ ارائه شده است.

دافی و همکاران^[14] برای نمونه‌ی حلقه‌ای به شکل C تحت فشار در راستای قطر، حجم موثر را به صورت عددی استخراج نموده و با حل تحلیلی آن مقایسه کرده‌اند. جادان و همکاران^[9] برای نمونه‌ی

جدول ۱: معادلات حجم موثر برای نمونه‌های مختلف آزمایش استحکام سرامیک‌ها (m مدول ویبول است)

مرجع	توضیحات	عبارت حجم موثر (kV)	هندسه و پیکربندی نمونه
[10]	L فاصله‌ی بین دو پین نگهدارنده و b و h ابعاد سطح مقطع نمونه هستند	$\frac{1}{2(m+1)^2} \times Lbh$	خمش سه نقطه برای نمونه با سطح مقطع مستطیل
[12]	در این پیکربندی فاصله‌ی دو پین نگهدارنده‌ی نمونه، دو برابر فاصله‌ی بین پین‌های اعمال بار است. بقیه‌ی نکات همان توضیحات خمش سه نقطه است	$\frac{m+2}{4(m+1)^2} \times Lbh$	خمش چهار نقطه برای نمونه با سطح مقطع مستطیل
[13]	L فاصله‌ی بین دو پین نگهدارنده، r شعاع سطح مقطع نمونه و Γ تابع گاما است.	$G = \frac{\left[\frac{Lr^2}{(m+1)}\right] G; \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}$	خمش سه نقطه برای نمونه‌ی استوانه‌ای توپر
[13]	در این پیکربندی فاصله‌ی دو پین نگهدارنده‌ی نمونه، دو برابر فاصله‌ی بین پین‌های اعمال بار است. بقیه‌ی نکات همان توضیحات خمش سه نقطه است	$\left[\frac{(m+2)Lr^2}{2(m+1)}\right] G;$	خمش چهار نقطه برای نمونه‌ی استوانه‌ای توپر
[9]	l طول، r_i شعاع داخلی و r_o شعاع خارجی استوانه‌ی جدار ضخیم است.	$2\pi l \left(\frac{r_i^2}{r_i^2 + r_o^2}\right)^m \int_{r_i}^{r_o} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right)^m r dr$	استوانه طویل جدار ضخیم تحت فشار داخلی
[11]	b ضخامت، r_i شعاع داخلی و r_o شعاع خارجی نمونه‌ی حلقه‌ای به شکل C است. θ نیز زاویه نسبت به خط افقی است.	$f_\theta = 2 \int_0^\pi (\cos\theta)^m d\theta;$ $f_r = \int_{r_i}^{r_a} \left(\frac{r_a - r}{r_a - r_i}\right)^m r^{1-m} dr; r_a = \frac{r_i + r_o}{2}$	نمونه‌ی حلقه‌ای به شکل C تحت کشش

قابل توجه ضخامت به طول مولد مخروط نیست؛ زیرا چنانچه این نسبت زیاد شود، دیگر مخروط بلند تلقی نخواهد شد و اثرات تکیه‌گاهی در دو انتهای مخروط تاثیر قابل توجهی بر توزیع تنش محیطی در راستای مولد خواهد گذاشت که این را معادله‌ی (۷) نشان نمی‌دهد و در نتیجه همان طور که در مرجع [15] تاکید شده است این معادله برای مخروط های بلند اعتبار دارد.

۴- استخراج حجم موثر به صورت تحلیلی

در بخش قبلی برای مخروط ناقص تحت فشار داخلی، معادلات تنش در راستای شعاعی و محیطی ارائه شد. با توجه به این که جسم سرامیکی مورد نظر در اثر کشش می‌شکند و از طرفی σ_t توزیع کاملاً کششی غیر یکنواخت دارد، لذا برای بدست آوردن حجم موثر، صرفاً تنش محیطی را وارد محاسبات می‌نماییم.

مطابق شکل ۳ با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی - که مولفه‌ی x آن در راستای ضخامت و مولفه‌ی y آن در راستای مولد مخروط است - برای محاسبه‌ی dV داریم:

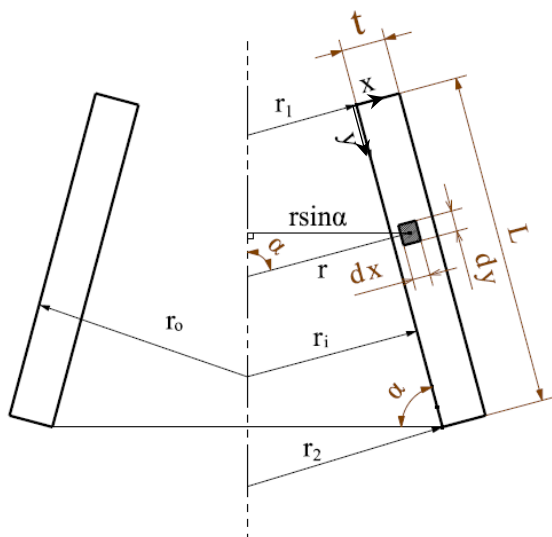
$$r = r_r + (y - L) \cot \alpha + x \quad (11)$$

$$\begin{aligned} dV &= dx dy \times \Psi \pi r \sin \alpha \\ &= \Psi \pi (r_r + (y - L) \cot \alpha \\ &\quad + x) \sin \alpha dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

برای محاسبه‌ی حجم داریم:

$$\begin{aligned} V &= \int_V dV = \int_0^L \int_0^t \Psi \pi (r_r + (y - L) \cot \alpha \\ &\quad + x) \sin \alpha dx dy \\ &= L t \pi (\Psi r_r \sin \alpha - L \cos \alpha \\ &\quad + t \sin \alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

با ترکیب معادله‌ی (۷) و (۱۱) تنش محیطی را به صورت زیر می‌توان نوشت:



شکل ۳: جزئیات هندسی محاسبات حجم موثر

(۱) تنها بارگذاری روی مخروط ناقص مطابق شکل ۲ فشار است که به صورت عرضی روی دو طرف آن اعمال می‌شود.

(۲) زاویه‌ی مخروط ناقص با صفحه‌ی افقی، α ، (شکل ۲) از ۶۰ درجه بیشتر است. بنابراین نیروهای برشی در دو انتها قابل اغماض است.

(۳) شرایط مرزی در دو انتهای مخروط ناقص از نوع تکیه‌گاه ساده است.

(۴) ماده الاستیک و همسانگرد است.

(۵) معادلات تنش محیطی و شعاعی برای حالت تنش صفحه‌ای استخراج شده است.

با توجه به فرضیات مذکور تنش محیطی برای مخروط ناقص جدار ضخیم تحت فشار داخلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= P \left[\left(\frac{r}{r_i} \right)^{m_1-1} \times \left(\frac{1 + v m_1}{m_1 + v} \right) \times \frac{1}{\left(\frac{r_o}{r_i} \right)^{m_1 - m_2} - 1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r}{r_i} \right)^{m_2-1} \times \left(\frac{1 + v m_2}{m_2 + v} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\left(\frac{r_o}{r_i} \right)^{m_2 - m_1} - 1} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

در معادله (۷)، P ، فشار داخلی، v ، ضریب پواسون ماده و m_1 و m_2 ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر هستند که به صورت زیر حاصل می‌شوند:

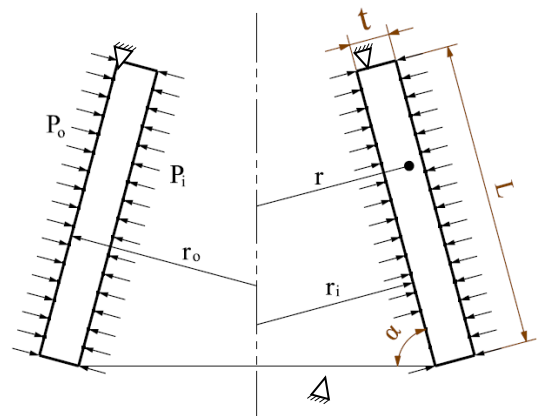
$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1 - F + \sqrt{(F - 1)^2 - \xi G}}{2} \\ m_2 &= \frac{1 - F - \sqrt{(F - 1)^2 - \xi G}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

در معادله (۸) مقادیر F و G عبارتند از:

$$F = 1 + v - \frac{v}{\sin^2 \alpha} \quad (9)$$

$$G = -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (10)$$

لازم به ذکر است که این معادله برای مخروط‌های بلند با زاویه‌ی باریک شدن (tapering angle) بزرگ - که اثرات برش کم است - اعتبار دارند [15]. بنابراین در اینجا منظور از جدار ضخیم، نسبت



شکل ۲: بارگذاری و هندسه‌ی مخروط ناقص

$$kV = \gamma \pi \sin \alpha \tan \alpha \times \left(\frac{\left(1 + \frac{t}{r_\gamma}\right)^{m_1 - m_\gamma} - 1}{\left[A - B \left(1 + \frac{t}{r_\gamma}\right)^{m_1 - m_\gamma}\right]} \right)^m \quad (20)$$

$\times f(x, z)$

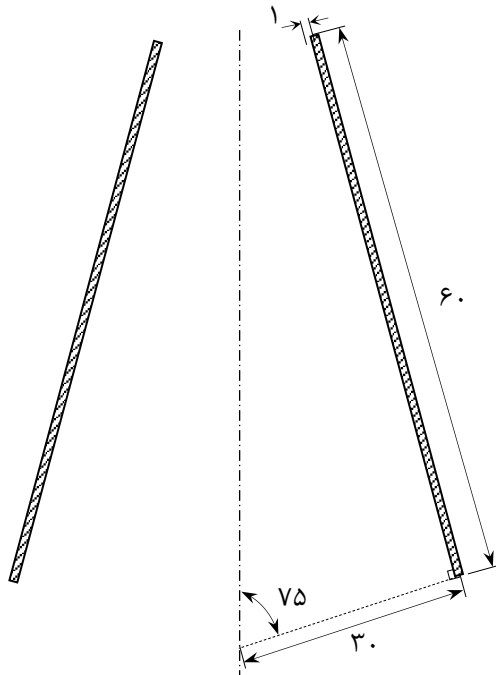
$$f(x, z) = \int_{r_\gamma}^{r_\gamma - L \cot \alpha} \int_t \left\{ \frac{A \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_1 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_1 - m_\gamma} - 1} \left[1 - \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_\gamma - m_1} \times \frac{B}{A} \times \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_1 - m_\gamma} \right] \right\}^m (z + x) dx dz \quad (21)$$

بدین ترتیب با حل انتگرال دوگانه‌ی معادله‌ی (۲۱) و جایگذاری آن در معادله‌ی (۲۰) می‌توان حجم موثر یک مخروط ناقص تحت فشار داخلی را به صورت تحلیلی به دست آورد.

۵- محاسبه‌ی حجم موثر به روش عددی

در این بخش برای یک مخروط ناقص با جنس و هندسه‌ی مشخص، به کمک روش اجزا محدود حجم موثر محاسبه شده و نتیجه‌ی به دست آمده با حل تحلیلی مقایسه می‌گردد.

شکل ۴ ابعاد هندسی یک مخروط ناقص را نشان می‌دهد که از ماده‌ای سرامیکی با ضریب پواسون ۰/۱۵ و مدول ویبول، $m=12$ ساخته شده است.



شکل ۴: ابعاد هندسی مخروط ناقص مورد مطالعه (ابعاد به میلی‌متر هستند)

$$\sigma_t = P \left[\frac{(r_\gamma + (y-L) \cot \alpha + x)^{m_1 - 1}}{r_\gamma + (y-L) \cot \alpha} \times \left(\frac{1 + vm_1}{m_1 + v}\right) \times \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{r_\gamma + (y-L) \cot \alpha}\right)^{m_1 - m_2} - 1} + \frac{(r_\gamma + (y-L) \cot \alpha + x)^{m_\gamma - 1}}{r_\gamma + (y-L) \cot \alpha} \times \left(\frac{1 + vm_\gamma}{m_\gamma + v}\right) \times \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{r_\gamma + (y-L) \cot \alpha}\right)^{m_\gamma - m_1} - 1} \right] \quad (14)$$

اگر $A = \left(\frac{1 + vm_1}{m_1 + v}\right)$ ، $B = \left(\frac{1 + vm_\gamma}{m_\gamma + v}\right)$ و $z = r_\gamma + (y-L) \cot \alpha$ را می‌توان به صورت زیر خلاصه‌تر نوشت:

$$\sigma_t = P \left[\frac{A \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_1 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_1 - m_\gamma} - 1} + \frac{B \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_\gamma - 1}}{\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_\gamma - m_1} - 1} \right] \quad (15)$$

معادله‌ی (۱۵) را به شکل زیر هم می‌توان نوشت:

$$\sigma_t = \frac{PA \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_1 - 1}}{\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_1 - m_\gamma} - 1} \left[1 - \left(\frac{z+x}{z}\right)^{m_\gamma - m_1} \times \frac{B}{A} \times \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{m_1 - m_\gamma} \right] \quad (16)$$

با توجه به معادله‌ی (۱۶)، تنش محیطی بیشینه، σ_{tmax} روی دیواره‌ی داخلی مخروط و در انتهای زیرین آن اتفاق می‌افتد؛ یعنی در موقعیت $\dot{x} = L$ و یا به عبارت دیگر $\dot{x} = r_\gamma$ بنابراین معادله‌ی تنش محیطی بیشینه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sigma_{tmax} = \frac{PA}{\left(1 + \frac{t}{r_\gamma}\right)^{m_1 - m_\gamma} - 1} \left[1 - \frac{B}{A} \times \left(1 + \frac{t}{r_\gamma}\right)^{m_1 - m_\gamma} \right] \quad (17)$$

اکنون می‌توان به محاسبه‌ی حجم موثر اقدام نمود:

$$kV = \int \left(\frac{\sigma}{\sigma_{tmax}}\right)^m dV = \left(\frac{1}{\sigma_{tmax}}\right)^m \int_{r_\gamma}^L \int_t \sigma_t^m \times \gamma \pi (r_\gamma + (y-L) \cot \alpha + x) \sin \alpha dx dy \quad (18)$$

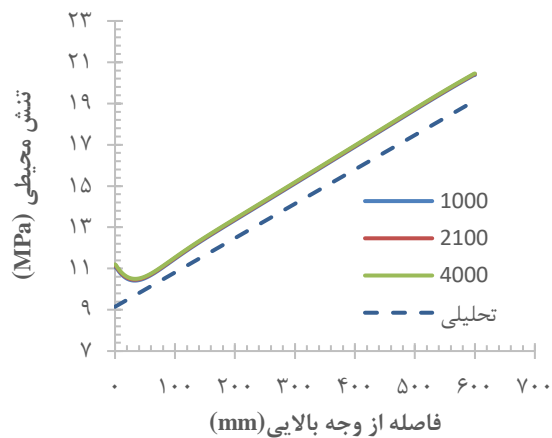
$$z = r_\gamma + (y-L) \cot \alpha \Rightarrow dy = \tan \alpha \cdot dz \Rightarrow kV = \gamma \pi$$

$$\times \left(\frac{1}{\sigma_{tmax}}\right)^m \sin \alpha \tan \alpha \int_{r_\gamma}^{r_\gamma - L \cot \alpha} \int_t \sigma_t^m \times (z+x) dx dz \quad (19)$$

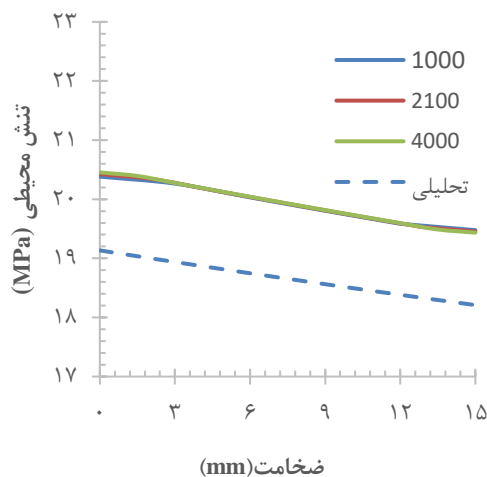
یکسانی دارند) در دو راستای ضخامت و دیواره (مولد) داخلی مخروط به عنوان خروجی در نظر گرفته شد.

شکل ۶ نمودارهای توزیع تنش محیطی را در راستای دیواره‌ی داخلی مخروط (از قاعده‌ی کوچک به سمت قاعده‌ی بزرگ) برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تنش محیطی در این راستا با تعداد المان کم نیز همگرا شده است. همچنین در شکل ۶ نمودار تحلیلی توزیع تنش محیطی در این راستا قابل مشاهده است.

شکل ۷ نیز نمودارهای توزیع تنش محیطی را در راستای ضخامت (در قاعده‌ی بزرگ از سمت داخل به خارج) برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۷ نمودار تحلیلی توزیع تنش محیطی قابل مشاهده است.



شکل ۶: نمودار بررسی همگرایی تنش محیطی در راستای دیواره (مولد) داخلی مخروط با تعداد المان‌های مختلف و مقایسه‌ی آن با نمودار تحلیلی



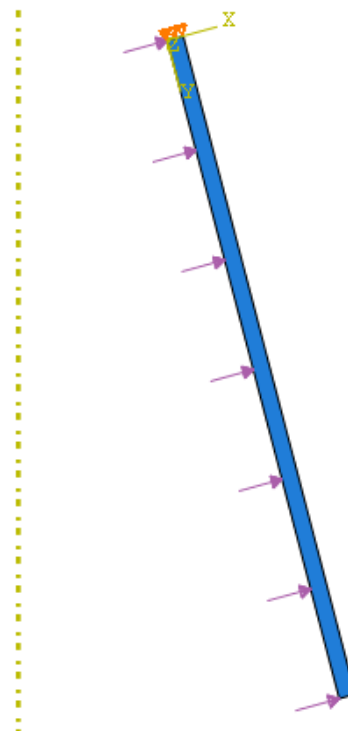
شکل ۷: نمودار بررسی همگرایی تنش محیطی در راستای ضخامت با تعداد المان‌های مختلف و مقایسه‌ی آن با نمودار تحلیلی

۱-۵ شبیه‌سازی اجزا محدود

شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار آباکوس (ABAQUS)، انجام شد. با توجه به این‌که هندسه و بارگذاری مخروط ناقص نسبت به یک محور تقارن دارند، لذا شبیه‌سازی با فرض تقارن محوری صورت گرفت. ماده‌ی سرامیکی به صورت الاستیک خطی و با مدول یانگ ۳۲ گیگاپاسکال تعریف شده است.

برای بارگذاری، فشار یکنواخت یک مگاپاسکال روی سطح داخلی مخروط ناقص اعمال شده است (شکل ۵). لازم به ذکر است که مقدار حجم موثر به اندازه‌ی بار بستگی ندارد و فقط به شکل توزیع بار، حجم و جنس قطعه وابسته است. لذا این‌که فشار چه مقداری باشد تاثیری در به دست آوردن حجم موثر ندارد. همچنین برای اعمال شرایط مرزی، جابجایی وجه بالایی مخروط ناقص در راستای مولد مخروط (محور Y) مقید شده است (شکل ۵). وجه پایینی مخروط در راستای مولد مقید نشده است؛ زیرا با این قید، تنش محیطی بیشینه دیگر در انتهای سطح داخلی مخروط به دلیل اثرات تکیه گاهی اتفاق نمی‌افتد و این موضوع با حل تحلیلی سازگار نیست. همچنین در مرجع [15] این شرط مرزی برای استخراج معادلات توزیع تنش مورد استفاده قرار نگرفته و برای بدست آوردن ثوابت معادلات صرفاً از اعمال فشار روی سطح داخلی و خارجی مخروط استفاده شده است. بنابراین در نرم افزار آباکوس به منظور تعادل استاتیکی، فقط جابجایی وجه بالایی مخروط ناقص بسته شده است.

برای مش‌زنی مخروط ناقص از المان‌های مستطیلی با اندازه‌ی $1/5$ میلی‌متر استفاده شد. به منظور بررسی همگرایی نتایج، تنش محیطی (یا تنش اصلی بیشینه که در این هندسه و بارگذاری مقدار



شکل ۵: اعمال بار و شرایط مرزی در مخروط ناقص

با توجه به نمودارهای شکل‌های ۶ و ۷ می‌توان گفت که تنش محیطی با ۴۰۰۰ المان یا همان اندازه‌ی المان ۱/۵ میلی‌متر، همگرا شده است.

۲-۵ محاسبه حجم موثر با استفاده از نتایج شبیه‌سازی اجزا محدود

انتگرال رابطه‌ی (۳) را بعد از شبیه‌سازی می‌توان به صورت عددی محاسبه کرد. با این توضیح که می‌توان برای هر المان تنش محیطی و حجم آن را فراخوانی کرد و حجم موثر را به صورت زیر بدست آورد:

$$kV \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^m \Delta V_i \quad (22)$$

در رابطه‌ی (۲۲) ΔV_i و σ_i به ترتیب حجم و تنش محیطی هر المان هستند. σ_{max} بیشترین تنش محیطی است که قطعه متحمل می‌شود و n نیز تعداد کل المان‌ها می‌باشد.

پس از اتمام شبیه‌سازی حجم و تنش محیطی هر المان فراخوانی شد. جدولی شامل ۴۰۰۰ سطر (به تعداد المان‌ها) تشکیل و در هر سطر مقدار $\Delta V_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^m$ هر المان محاسبه گردید. در این مسئله قطعه تنش فشاری محیطی را تجربه نکرد اما لازم به ذکر است که مقدار تنش المان‌هایی که تنش فشاری (منفی) را تجربه می‌کنند باید صفر در نظر گرفته شود. زیرا همان‌طور که بیان شد تنش‌های فشاری در ماده‌ی سرامیکی باعث شکست نخواهد شد. جدول ۲ بخشی از جدول اصلی که برای محاسبه‌ی حجم موثر تشکیل شده‌است را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است در این شبیه‌سازی بیشینه‌ی تنش محیطی، ۲۰/۴۵ مگاپاسکال حاصل شد. از طرفی به کمک رابطه‌ی تحلیلی این تنش ۱۹/۱۳ مگاپاسکال بدست آمد. لذا می‌توان گفت نتیجه‌ی حل عددی نسبت به حل تحلیلی ۶ درصد خطا دارد. این درصد خطا می‌تواند به دلیل فرضیات ساده‌کننده‌ی حل تحلیلی و همچنین استفاده از فرض تقارن محوری در شبیه‌سازی اجزا محدود باشد. پس از اتمام محاسبات مذکور برای هر سطر، حجم موثر مخروط ناقص با جمع مقادیر $\Delta V_i \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^m$ سطرها حاصل گردید:

جدول ۲: بخشی از جدول ۴۰۰۰ سطری جهت محاسبه‌ی حجم موثر

شماره المان	حجم المان (mm ^۳)	تنش محیطی در المان (MPa)	$\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^{12} \Delta V_i$
۴۰۱	۳۸۸۴/۵۷	۱۹/۴۴	۲۱۱۵/۳
۱۵۶۹	۳۳۹۱/۳۳	۱۵/۵۱	۱۲۲/۶۵
۲۷۷۱	۲۵۸۳/۸۱	۱۳/۱۲	۱۲/۵۸
۳۶۷۰	۲۲۳۸/۸	۹/۶۳	۰/۲۶۶

$$kV \approx \sum_{i=1}^{4000} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^{12} \Delta V_i = 17333315 \text{ mm}^3 \quad (23)$$

با توجه به این که حجم مخروط ناقص ۱۲۴۰۵۴۴۸ میلی‌متر مکعب است، داریم:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{4000} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}} \right)^{12} \Delta V_i}{12405448} = 0.1397 \quad (24)$$

بنابراین ضریب k برای این هندسه و بارگذاری ۰/۱۳۹۷ حاصل می‌شود.

۳-۵ مقایسه حل عددی حجم موثر با حل تحلیلی آن

در این جا قصد داریم مقدار حجم موثر این مسئله را به کمک رابطه‌ی تحلیلی (۲۰) بدست آورده و با مقدار حاصل از روش عددی مقایسه نماییم. با توجه به فرضیات مسئله (شکل ۴) داریم:

$$\left. \begin{matrix} \alpha=70^\circ \\ t=10 \text{ mm} \\ r_r=300 \text{ mm} \\ L=700 \text{ mm} \\ v=0.10 \\ m=12 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} m_1=1/0.46 \\ m_r=-1/0.299 \\ A=0.9709 \\ B=-0.9709 \\ z_1=139/23 \text{ mm} \\ z_r=300 \text{ mm} \\ V=12405448/7 \text{ mm}^3 \end{matrix} \right. \quad (25)$$

با جایگذاری مقادیر رابطه‌ی (۲۵)، انتگرال رابطه‌ی (۲۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x,z) = \int_{r_r}^{r_r-L \cot \alpha} \int_0^t \left\{ \frac{A \left(\frac{z+x}{z} \right)^{m_1-1}}{\left(1 + \frac{t}{z} \right)^{m_1-m_r-1}} \left[1 - \left(\frac{z+x}{z} \right)^{m_r-m_1} \times \frac{B}{A} \times \left(1 + \frac{t}{z} \right)^{m_1-m_r} \right] \right\}^m (z+x) dx dz \quad (26)$$

$$= \int_{139/23}^{300} \int_0^{10} \left\{ \frac{0.9709 \left(\frac{z+x}{z} \right)^{-1/0.46}}{\left(1 + \frac{10}{z} \right)^{2/0.705}} \left[1 - \left(\frac{z+x}{z} \right)^{-2/0.705} \times (-0.9709) \times \left(1 + \frac{10}{z} \right)^{2/0.705} \right] \right\}^{12} (z+x) dx dz$$

$$\Rightarrow f(x,z) = 1/78779 \times 10^{20} \text{ mm}^3$$

لازم به ذکر است انتگرال دوگانه‌ی رابطه‌ی (۲۶) به کمک نرم‌افزار متلب (MATLAB) حل گردید. در ادامه برای محاسبه‌ی حجم موثر داریم:

بیشتری ساخته شده است، پراکندگی کمتری در مقادیر استحکامی خود دارد.

همچنین با افزایش مقدار مدول ویبول درصد خطای حل عددی نسبت به حل تحلیلی افزایش می‌یابد. به طور مثال برای مدول ویبول ۵ خطا ۱/۳ درصد و برای ۳۰ خطا ۷/۷ درصد است.

نتیجه‌گیری

به عنوان جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌توان گفت که مواد سرامیکی پراکندگی قابل توجهی در استحکام دارند. از طرفی مقدار استحکام مشاهده شده بستگی به اندازه‌ی نمونه و نوع آزمایش دارد. به بیان دقیق‌تر این مقدار همزمان بستگی به توزیع عیوب و توزیع تنش در نمونه دارد.

به کمک تحلیل‌های آماری به خصوص استفاده از توزیع ویبول می‌توان این پراکندگی را تحلیل و تفسیر نمود. با این توضیح که چنانچه تعداد زیادی نمونه (حداقل ۳۰ عدد) با هندسه‌ی مشابه و تحت شرایط یکسان (محیط آزمایش و نوع بارگذاری) آزمایش شوند، با استخراج ثوابت توزیع ویبول (مدول ویبول و استحکام مشخصه) می‌توان استحکام ماده‌ی سرامیکی را برای آزمایش دیگری با توزیع بار و هندسه‌ی نمونه متفاوت، با دقت مناسبی پیش‌بینی نمود.

در این پژوهش حجم موثر برای یک مخروط ناقص تحت فشار داخلی، به صورت تحلیلی استخراج شد. در نتیجه می‌توان استحکام آن را به کمک مجموعه داده‌هایی از آزمایش استاندارد مواد سرامیکی، پیش‌بینی نمود. بدون آن که نیاز باشد قطعه‌ای سرامیکی با این هندسه به تعداد زیادی آزمایش شود.

همچنین حجم موثر برای یک قطعه‌ی مخروطی سرامیکی با جنس و هندسه‌ی مشخص به صورت عددی و با خطای حدود ۳٪ حاصل شد. لازم به ذکر است رابطه‌ی تحلیلی حجم موثر برای تعدادی از انواع نمونه‌های استحکام مواد سرامیکی از جمله نمونه‌ی حلقه‌ای به شکل 0 تحت فشار در راستای قطر، پیچیدگی نسبتاً زیادی دارد و به طور مثال شامل انتگرال دوگانه‌ای می‌شود که در حالت کلی حل صریح ندارد و در این پژوهش نیز رابطه‌ی تحلیلی حجم موثر مخروط ناقص نیز پیچیدگی داشت و به عنوان نتیجه‌گیری می‌توان گفت در مواردی که رابطه‌ی تحلیلی برای توزیع تنش روی قطعه‌ای با هندسه‌ی دلخواه وجود ندارد و یا استخراج رابطه‌ی تحلیلی حجم موثر پیچیدگی‌های زیادی دارد، می‌توان حجم موثر را به صورت عددی استخراج نمود. با این توضیح که در حل عددی از همگرایی و درستی مقادیر میدان تنش اطمینان حاصل شود و در ادامه برای هر المان تنش و حجم آن را فراخوانی و انتگرال حجم موثر را به صورت عددی حل کرده و استحکام قطعه را با تقریب خوبی پیش‌بینی نمود.

$$kV = \pi \sin \alpha \tan \alpha \times \left(\frac{\left(1 + \frac{t}{r_v}\right)^{m_1 - m_2} - 1}{\left[A - B \left(1 + \frac{t}{r_v}\right)^{m_1 - m_2}\right]} \right)^m \times f(x, z) = \quad (27)$$

$$\pi \times \sin 75^\circ \times \tan 75^\circ \times \left(\frac{\left(1 + \frac{15}{30}\right)^{2/0.7-0.5} - 1}{\left[0.9709 + 0.9609 \left(1 + \frac{15}{30}\right)^{2/0.7-0.5}\right]} \right)^{12}$$

$$\times 1/788 \times 10^2 = 1681534/4 \text{ mm}^3$$

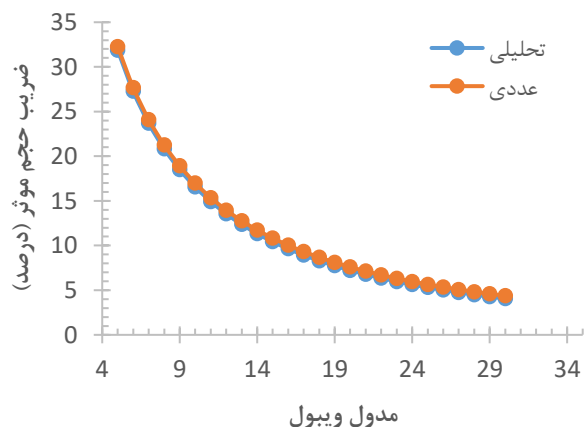
$$kV = 1681534/4 \text{ mm}^3 \xrightarrow{V=124.5448 \text{ mm}^3} k=0/1355 \quad (28)$$

مطابق رابطه‌ی (۲۸) ضریب k به روش تحلیلی برای این هندسه و بارگذاری ۰/۱۳۵۵ حاصل شد. با توجه به این که ضریب k به روش عددی ۰/۱۳۹۷ حاصل شد، بنابراین برای محاسبه‌ی خطای حل عددی داریم:

$$\text{خطای حل عددی نسبت به تحلیلی} = \frac{0/1397 - 0/1355}{0/1355} = 3\% \quad (29)$$

بنابراین در روش حل عددی، حجم موثر با خطای ۳٪ حاصل شد. شکل ۸ تغییرات مقدار ضریب حجم موثر (k) به دست آمده از روش تحلیلی و عددی را برای مقادیر مختلف مدول ویبول ارائه می‌کند.

همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود با افزایش مقدار مدول ویبول ضریب حجم موثر کاهش می‌یابد. تفسیر فیزیکی و مکانیکی این موضوع این است که با افزایش مقدار مدول ویبول و به تبع آن کاهش ضریب حجم موثر، پراکندگی کمتری در استحکام مخروط مشاهده می‌شود و به بیان دیگر در دو مخروط تحت فشار داخلی با هندسه‌ی مشابه، آن که از سرامیکی با مدول ویبول



شکل ۸: نمودار تغییرات ضریب حجم موثر (k) برای مقادیر مختلف مدول ویبول

تاییدیه‌های اخلاقی

این مقاله تاکنون در نشریه دیگری به چاپ نرسیده و همچنین برای بررسی یا چاپ به نشریه دیگری فرستاده نشده است.

تعارض منافع

مقاله حاضر هیچگونه تعارض منافی با سازمان‌ها و اشخاص دیگر ندارد.

فهرست علائم و نشانه‌ها:

b	پهنای نمونه‌ی مستطیلی (m)
h	ارتفاع نمونه‌ی مستطیلی (m)
k	ضریب حجم موثر
l	طول نمونه‌ی استوانه طویل جدار ضخیم تحت فشار داخلی (m)
L	طول مولد مخروط ناقص (m)
m	مدول ویبول
m _{۱,۲}	ریشه‌های معادله مشخصه
P _i	فشار داخلی مخروط ناقص (MPa)
P _o	فشار خارجی مخروط ناقص (MPa)
P _f	احتمال تجمعی شکست
r	شعاع مخروط ناقص (m)
r _i	شعاع داخلی مخروط ناقص (m)
r _o	شعاع خارجی مخروط ناقص (m)
t	ضخامت مخروط ناقص (m)
V	حجم ناحیه‌ی تحت تنش کششی نمونه (m ³)
α	زاویه‌ی مخروط ناقص نسبت به افق
Γ	تابع گاما
v	ضریب پواسون
σ	تنش (MPa)
σ _o	پارامتر مقیاس ویبول (MPa.m ³ /m)
σ _{max}	بیشینه‌ی تنش کششی در تمام نقاط نمونه (MPa)
σ _r	تنش محیطی (MPa)
σ _θ	استحکام مشخصه (MPa)

منابع

- Richerson DW, Lee WE. Modern ceramic engineering: properties, processing, and use in design. CRC press; 2018 .
- Wachtman JB, Cannon WR, Matthewson MJ. Mechanical properties of ceramics. John Wiley & Sons; 2009 .
- Klein CA. Characteristic strength, Weibull modulus, and failure probability of fused silica glass. Optical Engineering. ;48(11):113401-.
- Freese CE, Neal DM, Lenoe EM, ARMY MATERIALS AND MECHANICS RESEARCH CENTER WATERTOWN MA. Proof Test Procedures for Ceramic Missile Radomes. 1978 .
- ASTM. Standard Test Method for Tensile Strength of Monolithic Advanced Ceramics at Ambient Temperatures. West Conshohocken,

PA: American Society for Testing and Materials.

- ASTM C1161-18. Standard test method for flexural strength of advanced ceramics at ambient temperature.
- Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability. Journal of applied mechanics. 1951.
- ASTM C. 1239-07: Standard practice for reporting uniaxial strength data and estimating Weibull distribution parameters for advanced ceramics. West Conshohocken: ASTM International. 2007.
- Jadaan OM, Shelleman DL, Conway Jr JC, Mecholsky Jr JJ, Tressler RE. Prediction of the strength of ceramic tubular components: Part I—Analysis. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference 1991 . (Vol. 7460, pp. 153-163). American Society of Mechanical Engineers.
- DeSalvo GJ. THEORY AND STRUCTURAL DESIGN APPLICATIONS OF WEIBULL STATISTICS. Westinghouse Electric Corp., Pittsburgh, Pa. Astronuclear Lab.; 1970 .
- Ferber MK, Tennery VJ, Waters SB, Ogle J. Fracture strength characterization of tubular ceramic materials using a simple c-ring geometry. Journal of materials science. 1986;21:2628-32.
- Harris DC. Materials for infrared windows and domes: properties and performance. SPIE press; 1999.
- Quinn GD. Weibull effective volumes and surfaces for cylindrical rods loaded in flexure. Journal of the American Ceramic Society. 2003;86(3):475-9.
- Duffy SF, Baker EH, Wereszczak AA, Swab JJ. Weibull analysis effective volume and effective area for a ceramic C-ring test specimen. Journal of Testing and Evaluation. 2005;33(4):233-8.
- Hausenbauer GF, Lee GC. Stresses in thick-walled conical shells. Nuclear Engineering and design. 1966;3(3):394-401.