



آنالیز ناپایداری پولین برای نمزهای تیرشکل تحت نیروهای ملکولی با استفاده از تئوری گرادیان کرنش

یعقوب طادی بنی^{۱*}، ایمان کریمی پور^۲

۱- استادیار دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

۲- دانشجوی کارشناسی دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

* شهرکرد، صندوق پستی ۱۱۵، tadi@eng.sku.ac.ir

چکیده- در این مطالعه، ناپایداری استاتیکی پولین^۱ (PI) یک نانو تیر یک سر درگیر^۲ و اثر اندازه^۳ تحت اثر نیروی الکترواستاتیک و نیروهای بین مولکولی^۴ (نیروی کازمیر^۵ و واندروالس^۶) با استفاده از تئوری گرادیان کرنش^۷ (SGT) مورد مطالعه قرار گرفته است. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم از روش کارآمد تبدیل دیفرانسیل^۸ (DTM) و روش عددی استفاده شده است. پارامترهای پایه برای طراحی مهندسی در مقیاس نانو همانند خیز بحرانی انتهای تیر و ولتاژ پولین در این مطالعه محاسبه شده است. با توجه به یافته‌های این تحقیق می‌توان نتیجه گرفت که نیروهای بین ملکولی ولتاژ پولین را کاهش می‌دهد و اثر اندازه در مقیاس نانو باعث افزایش پارامترهای کشش می‌شود و می‌توان روش DTM را به‌عنوان روش کارآمد برای تحلیل سازه‌های نانویی تیر شکل در مقیاس کمتر از میکرون بکار برد. **کلیدواژگان:** نیروی بین ملکولی، روش تبدیل دیفرانسیل، اثرات اندازه، تئوری گرادیان کرنش خطی و ناپایداری پولین.

Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory

Y. Tadi Beni^{1*}, I. Karimipour⁴

1- Assist. Prof., Faculty of Eng., Shahrekord Univ., Shahrekoed, Iran

2- B.Sc. Student, Faculty of Eng., Shahrekord Univ., Shahrekord, Iran

* P.O.B. 115, Shahrekord, Iran. tadi@eng.sku.ac.ir

Abstract- In this paper, stress gradient theory is used to model the static pull-in instability and size effect of electrostatic nanocantilevers in the presence of electrostatic and dispersion (Casimir/van der Waals) forces. The Differential transformation method (DTM) is employed to solve the nonlinear constitutive equation of the nanostructure as well as numerical methods. The basic engineering design parameters such as critical tip deflection and pull-in voltage of the nanostructure are computed. It is found that in the presence of dispersion forces, both pull-in voltage and deflection of the nanobeam increase with increasing the size effect. Compared to the pull-in voltage, the pullin deflection of the beam is less sensitive to the size effect at sub-micrometer scales. On the other hand, the size effect can increase the pull-in parameters of the nano-actuators only in sub-micrometer scales. The results indicate that the proposed analytical solutions are reliable for simulating nanostructures at sub-micrometer ranges.

Keywords: Dispersion Force, Differential Transformation Method, Size Effect, Strain Gradient Theory, Pull-In Instability.

1. Pull-in Instability
2. Nanocantilever Beam
3. Size Effect
4. Dispersion Force
5. Casimir Force
6. Van Der Waals Force
7. Strain Gradient Theory(Sgt)
8. Differential Transformation Method

۱- مقدمه

در سالهای اخیر سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیک (ممز/نمز^۲) به‌عنوان یک فناوری جدید در شاخه‌های مختلف مانند مکانیک، حرارت، شیمیایی، نورانی، مغناطیس، الکتریکی و غیره کاربردهای بسیار متنوعی پیدا کرده است. امروزه سیستم‌های نانو الکترو مکانیک بطور گسترده‌ای برای توسعه ابزارهای نانویی همانند گیره‌ها، سوئیچها و غیره استفاده می‌شود [۱]. سیستم‌های نانو الکترومکانیک تیر شکل از دو الکتروود رسانا تشکیل شده است که یکی از این الکتروودها متحرک بوده و الکتروود دیگر ثابت می‌باشد. اعمال اختلاف ولتاژ بین این الکتروودها باعث تغییر شکل الکتروود متحرک به سمت الکتروود ثابت می‌شود که این عمل به علت وجود نیروی الکترواستاتیک می‌باشد. هنگامی که نیروی الکترواستاتیک بیشتر از ممان خمشی الاستیک قابل تحمل در تیر شود، ناپایداری در این سیستم اتفاق افتاده و تماس بین دو الکتروود بوجود می‌آید. مطالعه مشخصات ناپایداری در سیستم‌های میکرو الکترواستاتیک در دو دهه اخیر توسط محققان مختلفی بررسی شده است اما این مطالعات در مقیاس نانو انجام نگرفته است [۳،۲]. با کاهش ابعاد از میکرو به نانو، پدیده‌های مختلفی ظاهر می‌شود که در این مقاله دو اثر از این پدیده‌ها بررسی شده است. اولین پدیده‌ای که در مقیاس نانو ظاهر می‌شود نیروهای بین ملکولی همانند نیروی کازمیر و واندروالس می‌باشد. در فاصله‌های کمتر از چند میکرومتر، نیروی کازمیر بطور معناداری بر پایداری نانو-تیرها تأثیر می‌گذارد. بر طبق کارهای لیفشیتز^۳ [۴]، نیروی کازمیر توسط نوسان نیروی الکترومغناطیس در خلاء که بین دو صفحه وجود دارد ایجاد می‌شود و فوتون‌های مجازی در طول زمان عمر خود از یک اتم بر روی یک سطح جدا شده و به سطح دیگر می‌رسد. در سالهای اخیر، محققان مختلفی اثر نیروی کازمیر را بر روی پایداری سیستم‌های الکترومکانیک با روشهای مختلفی مانند روش اجزای محدود [۵-۸]، مشاهدات آزمایشگاهی [۹،۱۰]، مدل پارامتر متمرکز [۱۱،۱۲]، توابع گرین [۱۳،۱۴]، دینامیک ملکولی [۱۵،۱۶] و MAD^۴ [۱۷،۱۸] را انجام دادند. نیروی

واندروالس در صورتی که فاصله بین اجزای یک نانو عملگر^۵ کمتر از ده نانومتر باشد، دارای اهمیت خواهد بود [۲]. در این حالت نیروی جاذبه ایجاد شده بین دو المان مورد نظر متناسب با عکس توان سوم فاصله جدایی دو المان می‌باشد [۱۹]. بترا^۶ و همکاران رفتار پولین را در ورقهای میکرو با فرض اثر واندروالس بررسی کردند [۲۰]. دکوانسس^۷ و همکاران اثر نیروی واندروالس را بر روی ولتاژ پایداری در نانوتیوب کربن را انجام دادند [۲۱]. رفتار دینامیکی اثر نیروی واندروالس توسط محققان دیگری مورد بررسی قرار گرفته است [۱۲،۱۴].

دومین پدیده ایجاد شده در مقیاس نانو وابستگی به اندازه مشخصات مادی می‌باشد. با اعمال معادلات کوپل تنش بر هر ذره مواد نانو ساختار، معادلات گشتاور کوپل را می‌توان به معادلات المان ماده اضافه کرد، همچنین معادلات تعادل گشتاور را می‌توان به عنوان قید به معادلات نیرویی اعمال کرد و این امر با اعمال یک ضریب به معادلات نیرویی که پارامتر اثر طول^۸ نامیده می‌شود، حاصل می‌گردد. با توجه به اینکه پارامتر اثر طول ماهیت آماری دارد، این ضریب باید در معادلات غیر خطی و تغییر شکل‌های بزرگ ماده ظاهر شود. به طور کلی مواد نانو چون ساختار آنها در ابعاد نانو متر است و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که رفتار مواد در ابعاد میکرومتر و نانو متر به ابعاد بستگی دارد لذا پارامتر اثر ابعاد (که به آن اثر طول نیز گفته می‌شود) در معادلات تغییر شکل الاستیک مواد در ابعاد نانو متر باید لحاظ شود. در کاربردهای مهندسی اثر ابعاد ماده اهمیت به خصوصی دارد. تئوری کلاسیک محیط پیوسته^۹ (CCT) قابلیت توصیف رفتار وابستگی به اندازه را در سازه‌های بسیار کوچک ندارد بنابراین تئوریهای غیر کلاسیک همانند الاستیک غیر موضعی [۲۲]، تنش کوپل [۲۳]، تئوری گرادیان کرنش [۲۴] و تئوری تنش کوپل اصلاح شده^{۱۰} (MCST) [۲۵] در سالهای اخیر برای در نظر گرفتن اثر اندازه پیشنهاد شده است. برای حضور پارامتر اثر طول در معادلات معمولاً از تئوری کوسرات^{۱۱} [۲۶] استفاده می‌شود. در این تئوری بیان می‌شود که بر اثر اعمال نیرو به ماده علاوه بر تنش، ممان نیز

5. Nanoactuator
6. Batra
7. Dequesnes
8. Size Effect
9. Classic Continuum Theory (CCT)
10. Modified Couple Stress Theory (MCST)
11. Cosserat

1. Micro Electro Mechanical System (MEMS)
2. Nano Electro Mechanical System (NEMS)
3. Lifshitz
4. Modified Adomian Decomposition (MAD)

سیستم‌های نانو الکترومکانیک تیر شکل در مقیاس نانو بررسی شود. در ضمن برای حل از روش تبدیل دیفرانسیل استفاده شده و نتایج با روش عددی و مراجع مقایسه شده که نتایج قابل قبولی بدست آمده است.

۲- اصول تئوری گرادیان کرنش

در تئوری گرادیان کرنش بر خلاف آنچه در مکانیک کلاسیک بیان می‌شد تنش علاوه بر کرنش به گرادیان کرنش نیز وابسته است. روابط جدید در تئوری گرادیان کرنش با استفاده از اصل می‌نیم انرژی پتانسیل کل استخراج شده است. در تئوری گرادیان کرنش پارامتری به نام پارامتر اثر طول معرفی می‌شود که ماهیتی آماری داشته و نشان می‌دهد که رفتار ماده در مقیاس میکرومتر به ابعاد ماده بستگی دارد. این موضوع در تئوری الاستیسیته کلاسیک به دلیل نبود این پارامتر در معادلات قابل بیان نبوده است. در تئوری گرادیان کرنش تانسور تنش جدیدی به نام تانسور تنش کل معرفی می‌شود که با تانسور تنش کوشی متفاوت بوده و می‌توان آن را به عنوان تانسور تنش کل در معادله مومنتوم استفاده کرد. باید توجه داشت در غیاب پارامتر اثر طول معادلات بدست آمده در تئوری گرادیان کرنش به همان معادلات ارائه شده در مکانیک کلاسیک تبدیل می‌شود. با توجه به نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده و پیشنهاد شده توسط لام^۳ و همکاران [۴۰]، انرژی کرنش ذخیره شده U در محیط تشکیل شده از مواد الاستیک خطی و ایزوتروپیک بر روی ناحیه Ω به همراه تغییر شکل کوچک به صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dV \quad (1)$$

که در آن:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (3)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15} \delta_{ij} (\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) - \frac{1}{15} [\delta_{jk} (\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki} (\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{nj,m})] \quad (4)$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2} e_{ijkl} u_{l,ki} \quad (5)$$

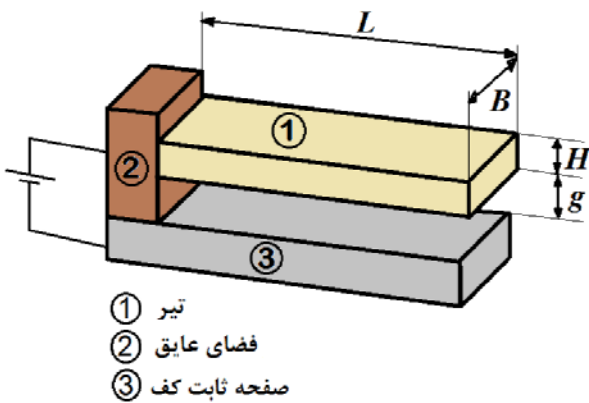
در ماده به وجود می‌آید و می‌بایست در معادلات تعادل ذرات یا المان‌ها مدنظر قرار گیرد. مطالعات بر روی نتایج پارامتر اثر طول ماده در عمل بر روی فلزات در ابعاد میکرومتر (با ساختار نانو متری) توسط فلک^۱ و همکاران در سال ۱۹۹۴ [۲۴] شروع شروع شد و از آن پس توسط محققان دیگر استفاده شده است [۳۸-۲۷، ۱۸]. اثرات وابستگی به اندازه به صورت قابل توجهی خود را در آزمایش‌های تغییر شکل میکروسازه‌ها نشان می‌دهند. با توجه به رفتار آماری پارامترهای اثر طول، قابل پیش‌بینی است که در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها به صورت تغییر شکل‌های بزرگ و متعاقباً معادلات غیرخطی جواب‌های مناسب‌تری را برای میکروسازه‌ها حاصل می‌کند. در سالهای اخیر پیشرفتهای زیادی برای حل عددی مسائل، به عنوان نمونه معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و مکان، که منجر به حل دستگاه‌های معادلات خطی با بعد بالا می‌شوند انجام گرفته است. با وجود کامپیوترهای مدرن و پیشرفته هنوز هم نیاز به روش‌های عددی جدید با همگرایی بالا احساس می‌شود. یکی از مهمترین روش‌های عددی که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است روش تبدیل دیفرانسیل است. مفهوم این روش برای اولین بار توسط ژو^۲ برای حل معادلات خطی و غیرخطی ارائه شد [۳۹]. با توجه به کارایی این روش از آن در مسائل نمز و ممز استفاده‌ای نشده است و می‌توان گفت این تحقیق برای اولین بار این روش را برای مسایل نانو بکار می‌گیرد. به هر حال از مزایای این روش این است که محاسبات مشکل و طولانی روش‌های قدیمی را کاهش می‌دهد و نشان می‌دهد که همه محاسبات آن به‌سادگی قابل انجام می‌باشد و اینها نشان‌دهنده کارایی این روش می‌باشد. برای نشان دادن توانایی و قابلیت اطمینان این روش در ادامه این روش، با روش‌های دیگر حل موجود در مراجع و روش عددی مقایسه شده است؛ نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش تبدیل دیفرانسیل دقت بیشتری نسبت به دیگر روش‌ها دارد.

همانطور که مشاهده می‌شود بررسی پدیده‌های مختلف مانند اثر اندازه با تئوری گرادیان کرنش و نیروی بین ملکولی به‌صورت توأمان در تحقیقات قبلی انجام نشده است، لذا در این مقاله، تئوری گرادیان کرنش بکار گرفته شده است تا اثرات اندازه و نیروی کازمیر و واندروالس بر روی ناپایداری

1. Fleck

2. Zhou

3. Lam



شکل ۱ طرحواره نانوعملگر

با جایگذاری رابطه (۱۰) در روابط (۲)، (۳)، (۴) و (۵) مقادیر ε_{ij} ، γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^s بر اساس جابجایی در راستای محور Z محاسبه می‌شود.

در ادامه با جایگذاری روابط حاصله در معادلات (۶)، (۷)، (۸) و (۹) و ترکیب نتایج حاصل از این روابط و معادلات حاصله قبل در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(EI + 2\mu A l_0^2 + \frac{8}{15} \mu A l_1^2 + \mu A l_2^2 \right) (w'')^2 + I \left(2\mu l_0^2 + \frac{4}{5} \mu l_1^2 \right) (w''')^2 \right] dX \quad (11)$$

در رابطه بالا، E ، I و A به ترتیب مدول یانگ، ممان دوم سطح مقطع حول محور Y و سطح مقطع نانو تیر می‌باشد. اگر به نانو تیر نیروهای خارجی همانند الکترواستاتیک و نیروی بین ملکولی وارد شود، کار انجام شده توسط این نیروهای گسترده که با $q(X)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر می‌باشد:

$$V = \int_0^L q(X) w(X) dX \quad (12)$$

حال با بکار بردن اصل همیلتون توسعه داده شده^۹، به صورت $\delta(U - V) = 0$ که در آن δ نشانگر نماد تغییرات^{۱۰} می‌باشد، می‌توان معادله حاکم بر تیر یکسردرگیر به همراه شرایط مرزی مربوطه را به صورت زیر استخراج کرد:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial X^4} - D_2 \frac{\partial^6 w}{\partial X^6} = q(X) \quad (13)$$

شرایط مرزی هندسی در انتهای ثابت تیر به صورت رابطه (۱۴) است:

در معادلات فوق u_i ، γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ ، χ_{ij}^s ، δ_{ij} و e_{ijk} به ترتیب نشان‌دهنده بردار جابجایی، بردار گرادیان اتساع^۱، تانسور گرادیان کشش انحرافی^۲، تانسور گرادیان چرخش متقارن^۳، دلتای کرونکر^۴ و نماد پرموتیشن^۵ می‌باشد. همچنین σ_{ij} ، p_i ، $\tau_{ijk}^{(1)}$ و m_{ij}^s به ترتیب تانسور تنش کوشی و تانسورهای تنش با مرتبه بالا می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۰]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (7)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (8)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (9)$$

در روابط بالا ν و μ به ترتیب نسبت پواسون^۶ و مدول برش^۷ می‌باشد و l_0 ، l_1 و l_2 به ترتیب پارامترهای اندازه طول طول مادی اضافی وابسته به گرادیان اتساع، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش می‌باشد.

۳- معادلات حاکم

شکل ۱ تیر یک سردرگیر را نشان می‌دهد که در سازه‌های الکترومکانیکال همانند عملگرها بکار می‌رود. این تیر بر روی سطح الکتروود با شرایط مرزی ثابت در یک طرف می‌باشد ($X=0$).

در اینجا عملگر با تیر یک سردرگیر به طول L با سطح مقطع مستطیل شکل با عرض B و ضخامت H مدل شده است. در اینجا فقط تغییر شکل استاتیک نانوعملگر مدل شده است. برای بسط معادلات حاکم بر تیر از روش حساب تغییرات استفاده می‌شود. در این مقاله از تئوری تیر اوپلر-برنولی^۸ استفاده می‌گردد. مطابق این تئوری میدان جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u \cong -z \frac{\partial w}{\partial X} \quad v=0 \quad w=w(X) \quad (10)$$

که در آن، u ، v و w به ترتیب نشانگر جابجایی در راستای محورهای X ، Y و Z می‌باشد.

1. Dilatation Gradient Vector
2. Deviatoric Stretch Gradient Tensor
3. Symmetric Rotation Gradient Tensor
4. Kronocker Delta
5. Permutation Symbol
6. Poisson's Ratio
7. Shear Module
8. Euler-Bernoulli

9. Modify Hamilton Principle

10. Variation Symbol

که در آن، A ثابت هماکر^۵ نامیده می‌شود. ناحیه دوم، برای برای فواصل بزرگتر نیروی کازمیر مهمتر می‌باشد (فواصل بالای چند ده نانومتر [۴۲-۴۵]). برای حالت ایده آل، نیروی کازمیر وابسته به معکوس درجه چهارم فاصله جدایی صفحات می‌باشد [۴۶]:

$$f_{disp} = \frac{\pi^2 \hbar c B}{240 (g - w(X))^4} \quad (19)$$

که در آن، $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ Js ثابت پلانک کاهش یافته بوده و $c = 2.998 \times 10^8$ ms⁻¹ سرعت نور می‌باشد. هنگامی که عرض نانوتیر به اندازه کافی از فاصله آن تا الکتروود ثابت بیشتر باشد معادله (۱۹) دارای پاسخ صحیح می‌باشد [۴۶]. لذا در این تحقیق فقط نانوتیرهای با شرایط ($g/B \leq 1$) مدنظر می‌باشد. لازم به ذکر است که ناحیه‌ای در گذر از نیروی واندروالس به کازمیر وجود دارد که در مباحث مربوط به این مقاله قرار نمی‌گیرد و لذا مورد بررسی قرار نگرفته است.

با جایگذاری روابط (۱۷-۱۹) در رابطه (۱۳) و بکار گرفتن ∂ با علامت دیفرانسیل d به علت تک متغیره بودن متغیرهای معادله دیفرانسیل، معادله حاکم بر نانوتیر با شرایط مشخص زیر حاصل می‌شود:

$$\delta_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} - \delta_2 \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial x^6} = \frac{\alpha_n}{(1 - \bar{w}(x))^n} + \frac{\beta}{(1 - \bar{w}(x))^2} + \frac{\gamma \beta}{(1 - \bar{w}(x))} \quad (20)$$

$$\bar{w}(0) = 0 \quad \bar{w}'(0) = 0 \quad \bar{w}''(0) = 0 \quad (21)$$

$$\delta_1 \bar{w}'''(1) - \delta_2 \bar{w}''''(1) = 0$$

$$\delta_1 \bar{w}''(1) - \delta_2 \bar{w}'''(1) = 0$$

$$\delta_2 \bar{w}''(1) = 0 \quad (22)$$

در معادلات بالا، پارامترهای بدون بعد α_n ، β ، γ و پارامترهای اثر اندازه δ_1 و δ_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{ABL^4}{6\pi g^4 EI} & \text{برای نیروی واندروالس (n=3)} \\ \frac{\pi^2 \hbar c BL^4}{240 g^5 EI} & \text{برای نیروی گازمیر (n=4)} \end{cases} \quad (23)$$

$$\beta = \frac{\epsilon_0 B V^2 L^4}{2 g^3 EI} \quad (24)$$

$$w(0) = 0 \quad \frac{\partial w(0)}{\partial X} = 0 \quad \frac{\partial^2 w(0)}{\partial X^2} = 0 \quad (14)$$

شرایط مرزی طبیعی در انتهای آزاد تیر به صورت زیر است:

$$D_1 \frac{\partial^3 w(L)}{\partial X^3} - D_2 \frac{\partial^5 w(L)}{\partial X^5} = 0$$

$$D_1 \frac{\partial^2 w(L)}{\partial X^2} - D_2 \frac{\partial^4 w(L)}{\partial X^4} = 0$$

$$D_2 \frac{\partial^3 w(L)}{\partial X^3} = 0 \quad (15)$$

مقادیر D_1 و D_2 در روابط بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_1 = EI + \mu A \left(2I_0^2 + \frac{8}{15} I_1^2 + I_2^2 \right)$$

$$D_2 = \mu I \left(2I_0^2 + \frac{4}{5} I_1^2 \right) \quad (16)$$

لازم به ذکر است که در استخراج معادله بالا به علت اینکه نانو تیر به صورت تیر باریک مدل شده است، ضریب پواسون تأثیر کمی خواهد داشت و لذا مقدار آن $\nu = 0$ در نظر گرفته شده است تا معادلات حاصله ساده تر شود. در معادلات بالا $q(X)$ برابر جمع نیروی الکترواستاتیک (f_{elec}) و نیروهای انتشار^۱ (f_{disp}) بر واحد طول تیر می‌باشد. با در نظر گرفتن تصحیح اثر مرتبه اول میدان لبه^۲ بخاطر مدل باریک تیر نیروی نیروی الکترواستاتیک به صورت زیر نوشته می‌شود [۴۱]:

$$f_{elec} = \frac{\epsilon_0 B V^2}{2 (g - w(X))^2} \left(1 + 0.65 \frac{(g - w(X))}{B} \right) \quad (17)$$

در رابطه بالا، $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C² N⁻¹ m⁻² ضریب عبور از خلاء^۳ نامیده می‌شود. V ولتاژ اعمالی به نانو عملگر بوده و g فاصله اولیه بین الکتروودهای ثابت و متحرک می‌باشد. نیروی انتشار بر واحد طول تیر ($q(X)$) به صورت نیروهای کازمیر و واندروالس تعریف می‌گردد. با توجه به مطالب گفته شده در مقدمه، دو ناحیه برای اثر متقابل^۴ قابل تعریف می‌باشد. می‌باشد. ناحیه اول، برای ناحیه‌ای با فواصل کمتر (معمولاً کمتر از چند ده نانومتر [۴۲-۴۴])، که در آن نیروی واندروالس دارای اثر قویتری می‌باشد. در این حالت جاذبه بین دو صفحه ایده آل وابسته به معکوس توان سوم فاصله جدایی صفحات می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_{disp} = \frac{AB}{6\pi (g - w(X))^3} \quad (18)$$

1. Dispersion Force
2. First-Order Fringing Filed
3. Permittivity of Vacuum
4. Interaction Regime

با بکار گرفتن روش تبدیل دیفرانسیل مطابق جداول ۱ و ۲ معادله حاکم بر تیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta_1 \sum_{\lambda=0}^k \left[\sum_{m=0}^{\lambda} (\delta(k-0) - \bar{W}(\lambda-m)) \sum_{P=0}^m (\delta(k-0) - \bar{W}(m-P)) \right. \\ \left. \sum_{q=0}^P (\delta(k-0) - \bar{W}(q)) (\delta(k-0) - \bar{W}(P-q)) \right] \\ \left[(k-\lambda+4)(k-\lambda+3)(k-\lambda+2)(k-\lambda+1) \bar{W}(k-\lambda+4) \right] = \delta_2 \\ \sum_{\lambda=0}^k \left[\sum_{m=0}^{\lambda} (\delta(k-0) - \bar{W}(\lambda-m)) \sum_{P=0}^m (\delta(k-0) - \bar{W}(m-P)) \right. \\ \left. \sum_{q=0}^P (\delta(k-0) - \bar{W}(q)) (\delta(k-0) - \bar{W}(p-q)) \right] \\ \left[(k-\lambda+6)(k-\lambda+5)(k-\lambda+4)(k-\lambda+3) \right. \\ \left. (k-\lambda+2)(k-\lambda+1) \bar{W}(k-\lambda+6) \right] + \\ \alpha_n (\delta(k-0) - (\delta(n-3)) \bar{W}(k)) + \\ \beta \left(\sum_{\lambda=0}^k (\delta(k-0) - \bar{W}(\lambda)) (\delta(k-0) - \bar{W}(k-\lambda)) \right) + \\ \gamma \beta \left[\sum_{\lambda=0}^k (\delta(k-0) - \bar{W}(k-\lambda)) \sum_{m=0}^{\lambda} (\delta(k-0) - \bar{W}(m)) \right. \\ \left. \sum_{m=0}^{\lambda} (\delta(k-0) - \bar{W}(\lambda-m)) \right] \\ (n=3) \text{ برای نیروی واندروالس ، } (n=4) \text{ برای نیروی کازمیر} \\ (30)$$

جدول ۲ قضایای مورد استفاده در تبدیل شرایط اولیه

شرایط مرزی اولیه	شرایط مرزی تبدیل یافته
$f(0) = 0$	$F(0) = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F(1) = 0$
$\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 0$	$F(2) = 0$
$\frac{d^3f}{dx^3}(0) = 0$	$F(3) = 0$
$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) = 0$
$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k) = 0$
	(n=4) برای نیروی کازمیر
$\frac{d^2f}{dx^2}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k) = 0$
$\frac{d^3f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k) = 0$

$$\gamma = 0.65 \frac{g}{B} \quad (25)$$

$$\delta_1 = \frac{D_1}{EI} = 1 + \frac{\mu A}{EI} \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \quad (26)$$

$$\delta_2 = \frac{D_2}{EIL^2} = \frac{\mu}{EL^2} \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \quad (27)$$

در این مقاله برای حل معادله حاکم بر تیر (۲۰) به همراه شرایط مرزی مربوطه (۲۱ و ۲۲)، از دو روش عددی و روش نیمه تحلیلی و کارآمد DTM استفاده شده است. در ادامه به بررسی روش حل DTM پرداخته می‌شود. در اینجا لازم به ذکر است که تئوری گرادیان کرنش در حالت خاص به تئوری تنش کوپل اصلاح شده کاهش می‌یابد. برای نیل به این هدف کافیسیت در معادلات (۲۰) الی (۲۲) مقادیر $l_0 = l_1 = 0$ و $l_2 = l$ جایگذاری شود که در نهایت معادلات مربوط به تئوری تنش کوپل اصلاح شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(1 + \frac{\mu A}{EI} l^2 \right) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} = \frac{\alpha_n}{(1-\bar{w}(x))^n} + \frac{\beta}{(1-\bar{w}(x))^2} + \frac{\gamma \beta}{(1-\bar{w}(x))} \quad (28)$$

$$\bar{w}^-(0) = 0 \quad \bar{w}'^-(0) = 0 \\ \bar{w}^-''(1) = 0 \quad \bar{w}^-'''(1) = 0 \quad (29)$$

در بخش پنجم، نتایج حاصل از این مقاله برای تئوری تنش کوپل اصلاح شده معادلات (۲۸) و (۲۹) با نتایج موجود در مراجع مقایسه خواهد شد.

۴- روش تبدیل دیفرانسیل (DTM)

کلیات روش تبدیل دیفرانسیل بر اساس جدول‌های ۱ و ۲ می‌باشد. در جدول ۱ تبدیل دیفرانسیل توابع و مشتقات آن به همراه حاصلضرب یا جمع و تفریق توابع مختلف تعریف شده است و در جدول ۲ تبدیل دیفرانسیل شرایط مرزی بیان شده است.

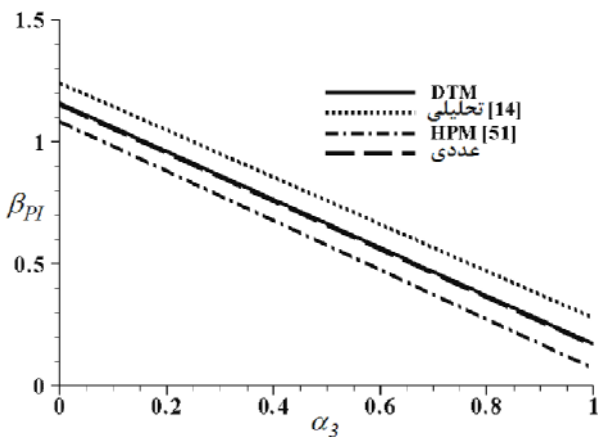
جدول ۱ قضایای مورد استفاده در تبدیل معادلات

تابع اولیه	تابع تبدیل یافته
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F(k) = G(k) \pm H(k)$
$f(x) = \lambda g(x)$	$F(k) = \lambda G(k)$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n \\ 1 & \text{if } k = n \end{cases}$

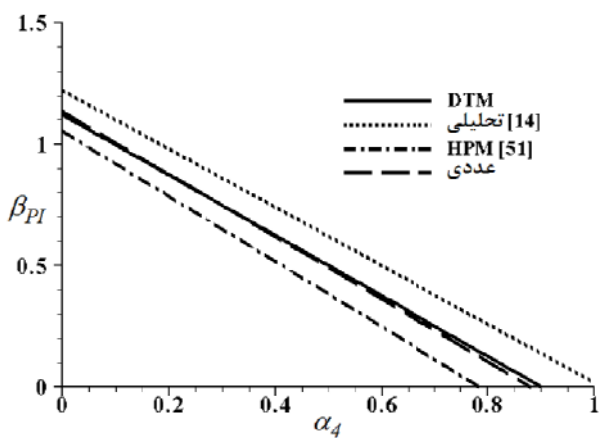
۵-۱- اثر نیروهای واندروالس/کازمیر بدون اثر اندازه

در این قسمت ابتدا از اثر اندازه صرف نظر می‌شود، لذا از تئوری محیط پیوسته کلاسیک استفاده می‌شود ($\delta_1 = 1$ و $\delta_2 = 0$). در شکل‌های ۲ و ۳ اثر نیروهای واندروالس و کازمیر به ترتیب بر روی ولتاژ پولین در یک تیر نانو یکسرگیردار با $g/W=1$ نشان داده شده است. همانطور که از این شکلها مشخص است با افزایش نیروهای واندروالس/کازمیر تا مقدار بحرانی خود (α_{CP})، مقدار β_{PI} کاهش می‌یابد.

معنی فیزیکی این پدیده این است که در مقیاس کوچک کلاً نیروهای واندروالس/کازمیر باعث کاهش ولتاژ پولین می‌گردد. لازم به ذکر است هنگامیکه مقدار نیروی واندروالس/کازمیر به مقدار بحرانی خود (α_{CP}) برسد، تیر دچار ناپایداری شده و مقدار β_{PI} صفر خواهد شد.



شکل ۲ اثر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ پولین بدون اثر اندازه



شکل ۳ اثر نیروی کازمیر بر روی ولتاژ پولین بدون اثر اندازه

شرایط مرزی نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{W}(0)=0 \quad \bar{W}(1)=0 \quad \bar{W}(2)=0 \\ \delta_1 \left(\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)\bar{W}(k) \right) - \\ \delta_2 \left(\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\bar{W}(k) \right) = 0 \\ \delta_1 \left(\sum_{k=0}^n k(k-1)\bar{W}(k) \right) - \\ \delta_2 \left(\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)(k-3)\bar{W}(k) \right) = 0 \\ \sum_{k=0}^n k(k-1)(k-1)\bar{W}(k) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این قسمت به مقایسه نتایج حاصل از تئوری کلاسیک محیط پیوسته، تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش پرداخته می‌شود. در قسمت اول اثرات نیروهای واندروالس/کازمیر بررسی شده و نتایج حاصل با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده است. سپس در قسمت دوم اثر اندازه مورد بررسی قرار گرفته که در این قسمت از تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده شده است. همچنین در قسمت سوم نتایج به بررسی اثر توام نیروهای واندروالس/کازمیر و اندازه پرداخته می‌شود که برای مقایسه از تئوری کلاسیک محیط پیوسته و تئوری تنش کوپل اصلاح شده استفاده می‌شود. باید دقت کرد که با توجه به هندسه و مشخصه مادی تیر در جدول ۳، دلیل استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده مقدار کوچک δ_2 می‌باشد زیرا مقدار آن با توجه به ابعاد موجود در جدول ۳ تقریباً صفر می‌باشد ($\delta_2 \approx 0$) لذا در قسمت چهارم به صورت یک حالت خاص و با ابعاد دیگری تئوری گرادیان کرنش و اثرات آن مورد بررسی قرار گرفته است. در انتهای این بخش نیز ارزیابی نتایج این مقاله بار دیگر با روشهای موجود در مراجع و نتایج تجربی انجام شده است.

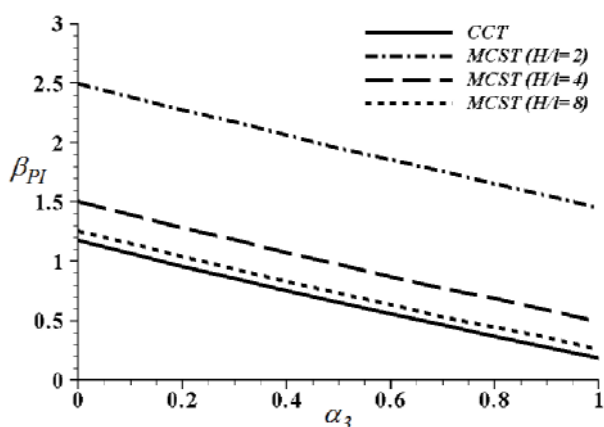
جدول ۳ پارامترهای هندسی و مشخصات مادی نانو-تیر

مقدار	پارامتر
۳۰۰	L (μm)
۰/۵	تیر باریک (B) (μm)
۱	H (μm)
۲/۵	g (μm)
۵۰	تیر عریض (B) (μm)
۲۸/۹۵	μ (GPa)

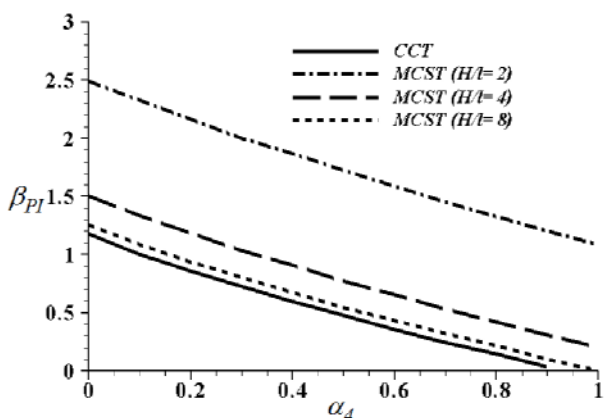
همانطور که از شکل ۴ مشخص است تئوری تنش کوپل اصلاح شده قادر است تا سخت شدن رفتار مکانیکی مواد را در اثر کاهش ابعاد مطابق گزارشات موجود در مراجع مدل نماید [۲۹،۲۸]. همچنین مطابق شکل ۴ مشخص است که روش DTM همگرایی بالاتری نسبت به روش عددی در مقایسه با روش دیگر مانند HPM دارد.

۳-۵- تأثیر توأم نیروهای واندروالس/کازمیر و اثر اندازه

در مقیاس نانو، هر دو عامل نیروهای بین ملکولی (واندروالس/کازمیر) و اثر اندازه بر روی پارامترهای پولین تأثیرگذار است لذا در این قسمت آنها بررسی شده‌اند. همانطور که از شکل‌های ۵ و ۶ مشخص است با افزایش نیروهای واندروالس/کازمیر مقدار β_{PI} کاهش می‌یابد که این اثر مطابق نتایج شکل‌های ۲ و ۳ می‌باشد.



شکل ۵ اثر نیروی واندروالس بر روی ولتاژ پولین همراه اثر اندازه



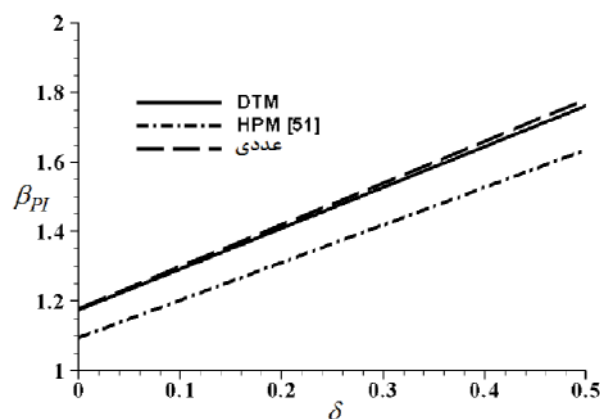
شکل ۶ اثر نیروی کازمیر بر روی ولتاژ پولین همراه اثر اندازه

می‌توان نتیجه گرفت که در فواصل کوچک بین الکتروود ثابت و متحرک، نیروهای واندروالس/کازمیر می‌تواند باعث ول شدگی^۱ تیر بدون اعمال ولتاژ بین دو الکتروود شود. با توجه به شکل‌های ۲ و ۳، در مقایسه با روشهای حل دیگر مانند حل فرم بسته^۲ رمضانی و همکاران [۱۴] و روش HPM توسط ابدی و همکاران [۵۱] می‌توان نتیجه گرفت که روش DTM همگرایی بالاتری با نتایج حل عددی دارد و لذا نسبت به روشهای دیگر مناسب‌تر است.

یکی دیگر از نتایج استخراج شده از مقایسه شکل‌های ۲ و ۳، تأثیر بیشتر نیروی کازمیر نسبت به نیروی واندروالس بر روی ولتاژ پولین می‌باشد، در صورتی که نیروی کازمیر با عکس توان چهارم فاصله جدایی الکتروودها نسبت دارد ولی نیروی واندروالس با عکس توان سوم این فاصله نسبت دارد.

۲-۵- وابستگی به اثر اندازه

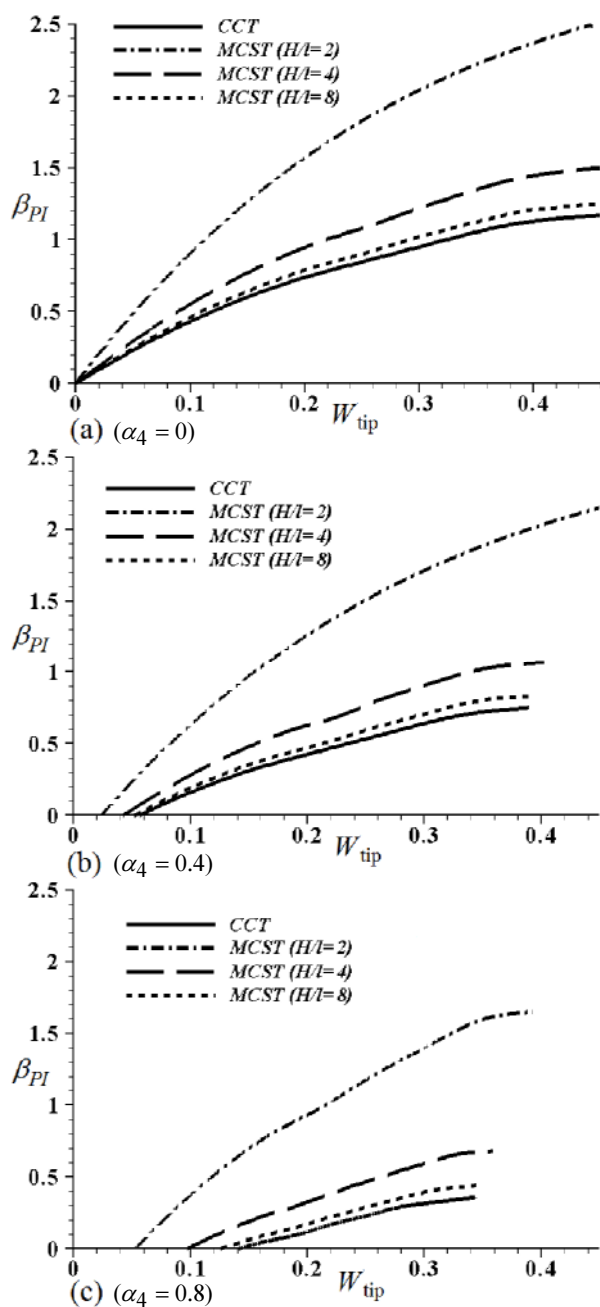
در ابعاد میکرو صرف‌نظر از اثر نیروهای واندروالس/کازمیر معمول می‌باشد. در این قسمت با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به اثر اندازه پرداخته و از اثر نیروهای بین ملکولی صرف‌نظر می‌شود ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$). شکل ۴ وابستگی ولتاژ پولین در یک تیر یکسر درگیر را به اثر اندازه نشان می‌دهد. مطابق این شکل تغییرات ولتاژ پولین بدون بعد با پارامتر اثر اندازه به صورت تقریباً خطی است و افزایش δ باعث افزایش β_{PI} می‌شود.



شکل ۴ اثر وابستگی ولتاژ پولین به اثر اندازه

1. Collapse
2. Closed Form

$\delta_2 = 0$ می‌شود، لذا پاسخ‌های روش گرادبان کرنش و تنش کوپل اصلاح شده یکسان خواهد بود. برای آنکه بتوان نتایج تئوری گرادبان کرنش را با تئوری تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک مقایسه نمود، تیری با مشخصات جدول ۳ و نسبت $H/L=1/15$ در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۹ تأثیر نیروی کازمیر ($\alpha_4 = 0.4$) و پیش‌بینی‌های تئوریهای مختلف دیده می‌شود.



شکل ۷ تغییرات خیز انتهای تیر بر اساس ولتاژ پولین به همراه اثر اندازه برای مقادیر مختلف نیروی کازمیر

اما مطابق این شکلها مشخص است که تئوری کلاسیک در کل دارای پیش‌بینی پایین‌تری برای ولتاژ پولین بدون بعد می‌باشد در حالی که تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای ابعاد کوچک ضخامت (H) در حدود اندازه طول مادی (l)، مقدار β_{PI} را در حدود $2/5$ برابر بزرگتر پیش‌بینی می‌نماید و با بزرگتر شده مقدار H پیش‌بینی تئوری تنش کوپل اصلاح شده به نتیجه تئوری کلاسیک میل می‌نماید.

می‌توان نتیجه گرفت که در سیستم‌های در مقیاس نانو بکار گرفتن تئوریهای مناسب و تحلیل آنها امکان طراحی و ساخت دقیقتر را به سازه خواهد داد که در صورت استفاده از تئوری کلاسیک به اشتباهات فاحشی منجر خواهد شد.

نتیجه فیزیکی دیگر با مقایسه شکل‌های ۵ و ۶، تأثیر بیشتر نیروی کازمیر در مقیاس نانو در قیاس با نیروی واندروالس می‌باشد. برای نتیجه‌گیری بهتر تأثیر نیروهای واندروالس/کازمیر و اثر اندازه، نتایج به‌گونه‌ای دیگر در شکل‌های ۷ و ۸ رسم شده است.

اثر نیروی کازمیر بر ولتاژ پولین بدون بعد و خیز انتهای تیر برای مقادیر مختلف $\alpha_4 = 0$ ، $\alpha_4 = 0.4$ و $\alpha_4 = 0.8$ به ترتیب در شکل ۷ رسم شده است. همانطور که از شکل مشخص است با افزایش نیروی کازمیر، مقدار β_{PI} کاهش یافته و لذا حداکثر خیز انتهای نانو تیر یکسردرگیر نیز کاهش می‌یابد.

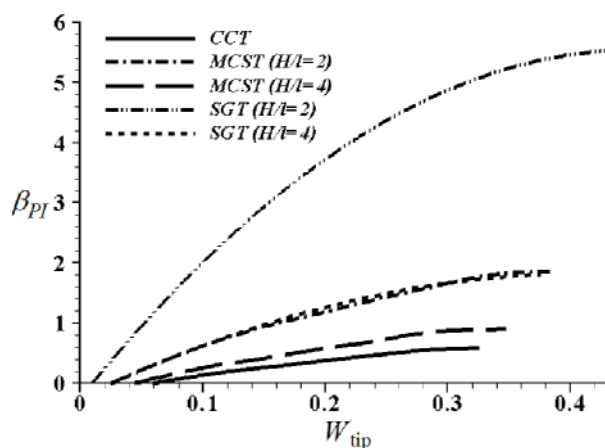
مطابق آنچه گفته شد در ابعاد کوچک خواص مکانیکی بسوی سخت شدن پیش رفته و نکته قابل تأمل در شکل ۷ پیش‌بینی تئوری تنش کوپل اصلاح شده است که مطابق آن، در ابعاد کوچک تیر (نسبت کوچک H/L) مقدار خیز انتهای تیر و β_{PI} بزرگتری نتیجه می‌شود که با نتایج بدست آمده در مراجع همخوانی مناسبی دارد [۲۸ و ۲۹]. مشابه شکل ۷، در شکل ۸ اثر نیروی واندروالس و اثر اندازه با هم بررسی قرار شده‌اند. نتایج بدست آمده از لحاظ کیفی مشابه با نتایج نیروی کازمیر است اما از لحاظ کمی می‌توان گفت که نیروی واندروالس تأثیر کمتری بر روی پارامترهای پولین خواهد داشت.

۴-۵- مطالعه موردی (اثرات تئوری گرادبان کرنش)

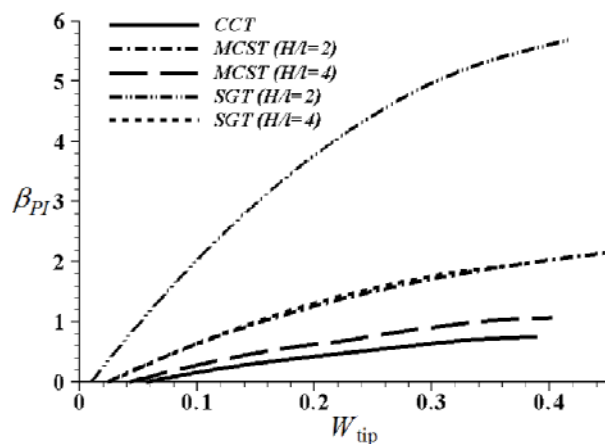
مطابق آنچه در ابتدای این بخش بیان شد به دلیل آنکه در مقادیر کوچک H/L همانند ابعاد هندسی تیر موجود در جدول ۳، مقدار

($\alpha_3 = 0.4$) و پیش‌بینی‌های تئوری‌های مختلف در شکل ۱۰ دیده می‌شود.

در کل می‌توان نتیجه گرفت که اثر اندازه جزء یکی از پارامترهای مهم در تحلیل نمزهای تیر شکل می‌باشد و تئوری گرادیان کرنش دقیق‌تر از دیگر تئوریها خواهد بود. در صورتی که این اثر و نیروهای واندروالس/کازمیر بخصوص در مقیاس نانو صرف‌نظر شود خطای بزرگی در طراحی و در نهایت در ساخت نمزها ایجاد می‌شود.



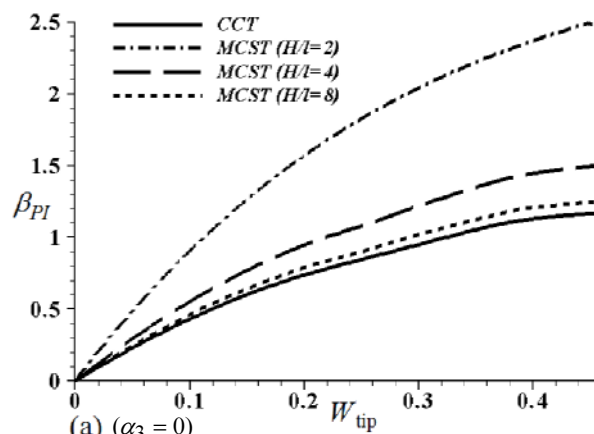
شکل ۹ تغییرات خیز انتهای تیر بر اساس ولتاژ پولین به همراه اثر اندازه برای نیروی کازمیر $\alpha_4 = 0.4$



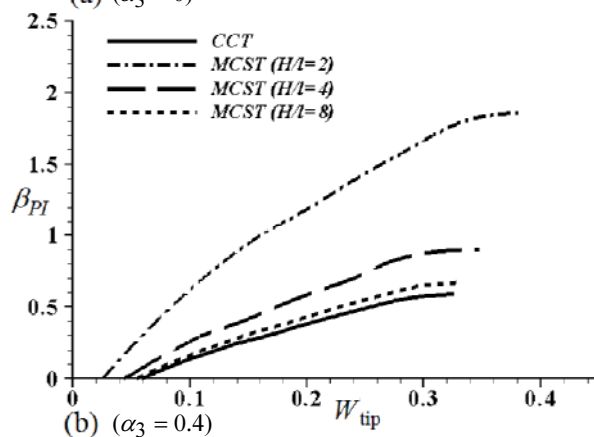
شکل ۱۰ تغییرات خیز انتهای تیر بر اساس ولتاژ پولین به همراه اثر اندازه برای نیروی واندروالس $\alpha_3 = 0.4$

۵-۵- مقایسه با نتایج موجود در مراجع

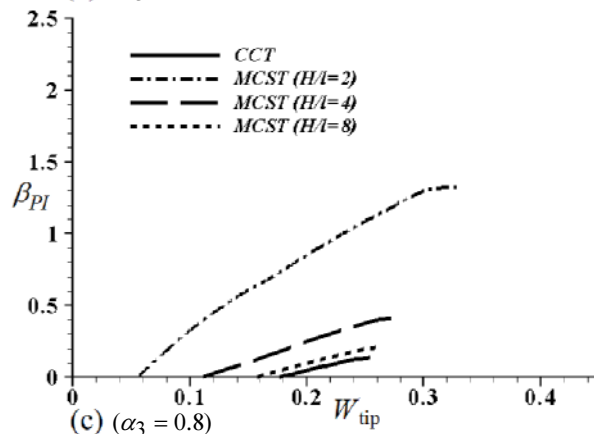
برای بازیابی بهتر نتایج، ولتاژ کشش برای یک میکرو عملگر یک سر درگیر بدون اثر اندازه و نیروهای کازمیر و واندروالس



(a) ($\alpha_3 = 0$)



(b) ($\alpha_3 = 0.4$)



(c) ($\alpha_3 = 0.8$)

شکل ۸ تغییرات خیز انتهای تیر بر اساس ولتاژ پولین به همراه اثر اندازه برای مقادیر مختلف نیروی واندروالس

همانطور که از شکل مشخص است مقدار β_{PI} ، پیش‌بینی شده توسط تئوری گرادیان کرنش بسیار بالاتر از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک محیط پیوسته می‌باشد. مقدار اختلاف در نتایج تئوریهای مختلف برای H/l های کوچک زیاد بوده و در مقادیر بزرگ به سمت نتایج تئوری کلاسیک همگرا می‌شود. مشابه نتایج شکل ۹ تأثیر نیروی واندروالس

در نهایت آزمایشهای بیشتری بر روی نانوعملگرها نیاز است تا محدودیتهای تئوریهای گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح شده را آشکار نماید. به هر حال تئوری گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح شده قابلیت مدل نمودن اثر اندازه را دارد که توسط نتایج آزمایشگاهی مورد تأیید است ولی مدل کلاسیک محیط پیوسته چنین قابلیت ندارد.

۷- مراجع

- [1] Zhang L., Golod S.V., Deckardt E., Prinz V. and Grützmacher D., "Free-Standing Si/SiGe Micro- and Nano-Objects", *Physica E*, Vol. 23, No. 3, 2004, pp. 280-284.
- [2] Ke C-H. and Espinosa H.D., Nano Electro Mechanical Systems (NEMS) and Modeling, in: M. Rieth, W. Schommers and P. D. Gennes (Eds), *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, American Scientific Publishers, Valencia, CA, 2006, Chapter 121.
- [3] Osterberg P.M. and Senturia S.D., "M-TEST: A Test Chip for MEMS Material Property Measurement using Electrostatically Actuated Test Structures", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 6, No. 2, 1997, pp. 107-118.
- [4] Lifshitz E.M., "The Theory of Molecular Attractive Force Between Solids", *Soviet Physics*, Vol. 2, No. 1, 1956, pp. 73-83.
- [5] Batra R.C., Porfiri M. and Spinello D., "Effects of Casimir Force on Pull-In Instability in Micromembranes", *Europhysics Letters*, Vol. 77, 2007, 20010.
- [6] Batra R.C., Porfiri M. and Spinello D., "Vibrations and Pull-In Instabilities of Microelectromechanical Von Ka'Rma'N Elliptic Plates Incorporating the Casimir Force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 315, 2008, pp. 939-960.
- [7] Batra R.C., Porfiri M. and Spinello D., "Reduced-Order Models for Microelectromechanical Rectangular and Circular Plates Incorporating the Casimir Force", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, 2008, pp. 3558-3583.
- [8] Moghimi Zand M., Ahmadian M.T. and Rashidian B., "Dynamic Pull-In Instability of Electrostatically Actuated Beams Incorporating Casimir and Van Der Waals Forces", *Proc. IMechE, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 9, 2010, pp. 2037-2047.
- [9] Buks E. and Roukes M.L., "Stiction, Adhesion Energy, and the Casimir Effect in Micromechanical Systems", *Physical Review B*, Vol. 63, 2001, 033402.
- [10] Buks E. and Roukes M.L., "Metastability and the Casimir Effect in Micromechanical Systems",

($\delta_1 = 1$ و $\alpha_3 = \alpha_4 = \delta_2 = 0$) محاسبه شده است. مقایسه نتایج ولتاژ کشش توسط روشهای حل مختلف در جدول ۴ آورده شده است. همانطور که مشخص است نتایج روش DTM در مقیاس قابل قبولی قرار دارد و این روش می تواند به عنوان روش قابل قبول در محاسبات سیستمهای الکترومکانیک مورد استفاده قرار گیرد.

۶- جمع بندی

در این مقاله تئوریهای گرادیان کرنش به همراه تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای مدل نمودن اثرات نیروهای بین ملکولی و اثر اندازه بر روی پارامترهای پولین استاتیکی نانو عملگر مورد استفاده قرار گرفته است. موارد زیر از نتایج این تحقیق می باشد:

- نیروهای کازمیر/ واندروالس ولتاژ پولین و خیز عملگر یکسردرگیر را کاهش می دهد. نیروی کازمیر در قیاس با نیروی واندروالس بیشتر پارامترهای پولین را تحت تأثیر قرار می دهد.
- در غیاب نیروهای بین ملکولی (کازمیر/ واندروالس)، هر دوی ولتاژ پولین و خیز نانوتیر با افزایش اثر اندازه افزایش می یابند.
- در اندازههای کوچک ابعاد تیر به صورتی که این اندازه قابل مقایسه با اندازه طول مادی باشد با توجه به نتایج تئوریهای گرادیان کرنش و تنش کوپل اصلاح شده می توان نتیجه گرفت که اثر اندازه یکی از پارامترهای مهم در طراحی و ساخت نانوعملگر می باشد.
- روش DTM در قیاس با روشهای موجود در مراجع دارای پاسخهای مناسب تر بوده و به نتایج حل عددی همگرا تر است.

جدول ۴ مقایسه نتیجه روش DTM با روشهای موجود در مراجع

روش	ولتاژ پولین	
	تیر عریض	تیر باریک
مرجع [۴۸] (روش اجزای محدود)	۲/۲۵	۱/۲
مرجع [۴۹] (روش تقریب تحلیلی)	۲/۲۷	۱/۲۱
مرجع [۵۰] (روش تجزیه ادومین (Adomian))	۲/۱۶	۱/۲۱
مرجع [۱۸] (روش اصلاح شده ادومین)	۲/۳۱	۱/۲۷
مرجع [۵۱] (HPM)	۲/۱۶	۱/۲۱
مرجع [۴۷] (مدل دوبعدی)	۲/۲۷	۱/۲۳
روش عددی	۲/۲۷	۱/۲۴
مرجع [۱۴] (روش تابع گرین)	۲/۳۷	۱/۲۹
روش DTM	۲/۲۵	۱/۲۵

- Theory and Experiment”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, 1994, pp. 475–487.
- [25] Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C. and Tong P., “Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, 2002, pp. 2731–2743.
- [26] Cosserat E. and Cosserat F., *Theorie des Corp Deformables*, Herman, Paris, 1909.
- [27] Tadi Beni Y., Abadyan M.R. and Noghrehabadi A., “Investigation of Size Effect on the Pull-In Instability of Beamtype NEMS under Van Der Waals Attraction”, *Procedia Engineering*, Vol. 10, 2011, pp. 1718–1723.
- [28] Stolken J.S. and Evans A.G., “A Microbend Test Method for Measuring the Plasticity Length Scale”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 46 1998, pp. 5109–5115.
- [29] Nix W.D., “Mechanical Properties of Thin Films”, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 206, 1989, pp. 2217–2245.
- [30] Stelmashenko N.A., Walls M.G., Brown L.M. and Milman Y.V., “Microindentations on W and Mo Oriented Single Crystals: an STM Study”, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 41, No. 10, 1993, pp. 2855–2865.
- [31] Clarke D.R. and Ma Q., “Size Dependent Hardness of Silver Single Crystals”, *Journal of Materials Research*, Vol. 10, 1995, pp. 853–863.
- [32] Poole W.J., Ashby M.F. and Fleck N.A., “Micro-Hardness of Annealed and Work-Hardened Copper Polycrystals”, *Scripta Metallurgica et Materialia*, Vol. 34, 1996, pp. 559–564.
- [33] Kong S.L. and Zhou S.J., Nie Z.F., Wang K., “Static and Dynamic Analysis of Micro Beams Based on Strain Gradient Elasticity Theory”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, 2009, pp. 487–498.
- [34] Park S.K. and Gao X.L., “Bernoulli–Euler Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, 2006, pp. 2355–2359.
- [35] Xia W., Wang L. and Yin L., “Nonlinear Non-Classical Microscale Beams: Static Bending, Postbuckling and Free Vibration”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, 2010, pp. 2044–2053.
- [36] Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H. and Rahaeifard M., “On the Size-Dependent Behavior of Functionally Graded Micro-Beams”, *Materials and Design*, Vol. 31, 2010, pp. 2324–2329.
- [37] Kahrobaiyan M.H., Asghari M., Rahaeifard M. and Ahmadian M.T., “Investigation of the Size-Dependent Dynamic Characteristics of Atomic Force Microscope Microcantilevers Based on the Modified Couple Stress Theory”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, 2010, pp. 1985–1994.
- Europhysics Letters*, Vol. 54, No. 2, 2001, pp. 220–226.
- [11] Lin W.H. and Zhao Y.P., “Casimir Effect on the Pull-In Parameters of Nanometer Switches”, *Microsystem Technologies*, Vol. 11, 2005, pp. 80–85.
- [12] Lin W.H. and Zhao Y.P., “Nonlinear Behavior for Nanoscale Electrostatic Actuators with Casimir Force”, *Chaos Solitons & Fractals*, Vol. 23, 2005, pp. 1777–1785.
- [13] Ramezani A., Alasty A. and Akbari J., “Analytical Investigation and Numerical Verification of Casimir Effect on Electrostatic Nano-Cantilevers”, *Microsystem Technologies*, Vol. 14, 2008, pp. 145–157.
- [14] Ramezani A., Alasty A. and Akbari J., “Closed-Form Solutions of the Pull-In Instability in Nano-Cantilevers under Electrostatic and Intermolecular Surface Forces”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, 2007, pp. 4925–4941.
- [15] Jing Y., Menga Q. and Zhao W., “Molecular Dynamics Simulations of the Tensile and Melting Behaviours of Silicon Nanowires”, *Physica E*, Vol. 41, No. 4, 2009, pp. 685–689.
- [16] Wang Z., Zu X., Yang L., Gao F. and Weber W.J., “Molecular Dynamics Simulation on the Buckling Behavior of GaN Nanowires under Uniaxial Compression”, *Physica E*, Vol. 40, No. 3, 2008, pp. 561–566.
- [17] Koochi A., Kazemi A., Tadi Beni Y., Yekrang A. and Abadyani M., “Theoretical Study of the Effect of Casimir Attraction on the Pull-In Behavior of Beam-Type NEMS using Modified Adomian Method”, *Physica E*, Vol. 43, 2010, pp. 625–632.
- [18] Tadi Beni Y., Koochi A. and Abadyan M., “Theoretical Study of the Effect of Casimir Force, Elastic Boundary Conditions and Size Dependency on the Pull-In Instability of Beam-Type NEMS”, *Physica E*, Vol. 43, 2011, pp. 979–988.
- [19] Israelachvili J.N., *Intermolecular and Surface Forces*. Academic Press, London. 1992.
- [20] Batra R.C., Porfiri M. and Spinello D., “Effects of Van Der Waals Force and Thermal Stresses on Pull-In Instability of Clamped Rectangular Microplates”, *Sensors*, Vol.8, 2008, pp. 1048–1069.
- [21] Dequesnes J.M., Rotkin S.V. and Aluru N. R., “Calculation of Pull-In Voltages for Switches”, *Nanotechnology*, Vol. 13, 2002, 120.
- [22] Eringen A.C. and Edelen D.B.G., “On Nonlocal Elasticity”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 1972, pp. 233–248.
- [23] Ejike U.B.C.O., “The plane Circular Crack Problem in the Linearized Couple-Stress Theory”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 7, 1969, pp. 947–961.
- [24] Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F. and Hutchinson J.W., “Strain gradient plasticity:

- [46] Gusso A. and Delben G.J., "Dispersion Force for Materials Relevant for Micro- and Nanodevices Fabrication", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 41, 2008, 175405.
- [47] Osterberg P.M., *Electrostatically Actuated Micromechanical Test Structures for Material Property Measurement*, PhD Dissertation Massachusetts Institute of Technology (MIT), Cambridge. 1995.
- [48] Pamidighantam S., Puers R., Baert K. and Tilmans H.A.C., "Pull-In Voltage Analysis of Electrostatically Actuated Beam Structures with Fixed-Fixed and Fixed-Free End Conditions", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 12, 2002, pp. 458-64.
- [49] Chowdhury S., Ahmadi M. and Miller W.C., "A Closed-Form Model for the pull-In Voltage of Electrostatically Actuated Cantilever Beams", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 15, 2005, pp. 756-63.
- [50] Soroush R., Koochi A., Kazemi A.S., Noghrehabadi A., Haddadpour H. and Abadyan M., "Investigating the Effect of Casimir and Van Der Waals Attractions on the Electrostatic Pull-In Instability of Nanoactuators", *Physica scripta*, Vol. 82, 2010, 045801.
- [51] Abdi J., Koochi A., Kazemi A.S. and Abadyan M., "Modeling the Effects of Size Dependence and Dispersion Forces on the Pull-In Instability of Electrostatic Cantilever NEMS using Modified Couple Stress Theory", *Smart Materials and Structures*, Vol. 20, 2011, 055011.
- [38] Kahrobaiyan M.H., Asghari M., Rahaeifard M. and Ahmadian M.T., "A Nonlinear Strain Gradient Beam Formulation", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, 2011, pp. 1256-1267.
- [39] Zhou J.K., *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits (in Chinese)*, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [40] Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J. and Tong P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, No. 8, 2003, pp. 477-1508.
- [41] Gupta R.K., *Electrostatic Pull-In Test Structure Design for in Situ Mechanical Property Measurements of Microelectromechanical Systems*, PhD Dissertation Massachusetts Institute of Technology (MIT), Cambridge, MA. 1997.
- [42] Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M., "Casimir and Van Der Waals Forces between Two Plates or a Sphere (lens) above a Plate Made of Real Metals", *Physical Review A*, Vol. 61, 2000, 62107.
- [43] Bostrom M. and Sernelius B.E., "Fractional Van Der Waals Interactions", *Physical Review B*, Vol. 61, 2000, 2204.
- [44] Israelachvili J.N. and Tabor D., "Measurement of Van Der Waals Dispersion Forces in the Range 1.5 to 130 nm", *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 331, 1972, pp. 19-38.
- [45] Tadi Beni Y., Abadyani M. and Koochi A., "Effect of the Casimir Attraction on the Torsion/Bending Coupled Instability of Electrostatic Nano-Actuators", *Physica scripta*, Vol. 84, 2011, 065801.