مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1395، دوره 16، شماره 7، ص‌ص 51-60

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه روش المان محدود طیفی تصادفی مرتبه بالا برای تحلیل عدم‌قطعیت‌های محیط‌های پیوسته دوبعدی

پویا زکیان[1]، ناصر خاجی[2*]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد، مهندسی زلزله، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق‌پستی 14115-397، nkhaji@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 29 اسفند 1394
پذیرش: 01 خرداد 1395
ارائه در سایت: 23 تیر 1395

کلید واژگان:
المان محدود طیفی
مکانیک تصادفی
چندجمله‌ای‌های آشوبی
بسط کارهیونن‌لو
تابع درون‌یابی لوباتو

چکیده

وجود عدم قطعیت مشخصات کمی یک سامانه (مانند بارگذاری یا ضریب ارتجاعی یک سازه)، امری اجتناب‌ناپذیر بوده و اثرات آن همواره موردتوجه مهندسین بوده است. در این میان، روش‌های عددی نقش به‌سزایی در مکانیک محاسباتی تصادفی دارند، به‌خصوص برای مسائل کاربردی که حل تحلیلی ندارند. در این مقاله به توسعه المان‌های طیفی مرتبه بالای خانواده لوباتو در روش المان محدود طیفی تصادفی برای تحلیل اتفاقی محیط‌های پیوسته دوبعدی و بررسی عدم قطعیت مصالح پرداخته شده است. اثر شبکه و مرتبه توابع درون‌یابی در پاسخ این سازه‌ها مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. علاوه‌بر این معادله انتگرالی فردهولم ناشی از بسط کارهیونن‌لو توسط روش یادشده حل و اثر مرتبه المان و شبکه در آن‌ها نیز دیده شده است. روش یادشده نیازمند تعداد المان کمتری نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد بوده و به‌ویژه در مسائل دینامیکی دارای دقت مناسب و ماتریس جرم قطری است، همچنین به‌کارگیری این المان‌های طیفی به همراه بسط کارهیونن‌لو و چندجمله‌ای‌های آشوبی، منجربه تسریع فرایند محاسبه‌شده که این امر مشمول حل عددی معادله انتگرالی فردهولم نیز می‌شود. در این پژوهش نمونه‌های مبنای الاستواستاتیکی و الاستودینامیکی تحلیل‌شده که به بررسی دقت این روش و تأثیر پارامترهای مورد بررسی می‌پردازد. نتایج حاکی از نقش المان‌های مرتبه بالا در سرعت، دقت و کارایی تحلیل دینامیکی و استاتیکی محیط‌های پیوسته است.

Development of higher-order stochastic spectral finite element method for uncertainty analysis of 2D continua

Pooya Zakian, Naser Khaji*

Faculty of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
* P.O.B. 14115-397 Tehran, Iran, nkhaji@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 March 2016
Accepted 21 May 2016
Available Online 13 July 2016

Keywords:
Spectral finite element
Stochastic mechanics
Polynomial chaos
Karhunen Loève expansion
Lobatto interpolation function

ABSTRACT

Uncertainty inherently exists in quantity of a system's parameters (e.g., loading or elastic modulus of a structure), and thus its effects have always been considered as an important issue for engineers. Meanwhile, numerical methods play a significant role in stochastic computational mechanics, particularly for the problems without analytical solutions. In this article, spectral finite element method is utilized for stochastic spectral finite element analysis of 2D continua considering material uncertainties. Here, Lobatto family of higher order spectral elements is extended, and then influence of mesh configuration and order of interpolation functions are evaluated. Furthermore, Fredholm integral equation due to Karhunen Loève expansion is numerically solved through spectral finite element method such that different meshes and interpolation functions' orders are also chosen for comparison and assessment of numerical solutions are solved for this equation. This method needs fewer elements compared to the classic finite element method, and it is specifically useful in dynamic analysis as it supplies desirable accuracy by having diagonal mass matrix. Also, these spectral elements accelerate the computation process along with Karhunen Loève and polynomial chaos expansions involving numerical solution of Fredholm integral equation. This research examines elastostatic and elastodynamic benchmark problems to demonstrate the effects of the undertaken parameters on accuracy of the stochastic analysis. Moreover, results demonstrate the effects of higher-order spectral elements on speed, accuracy and efficiency of static and dynamic analysis of continua.

1- مقدمه

با توجه به تأثیر عدم قطعیت در سامانه‌های مهندسی، اهمیت تحلیل قابلیت اعتماد و کمی‌سازی عدم قطعیت بر کسی پوشیده نیست. پیشرفت قابل‌توجه رایانه‌ها در دهه اخیر منجربه مدل‌سازی‌های نزدیک به واقعیت و بزرگ مقیاس شده است. روش‌های عددی در مکانیک محاسباتی تصادفی جایگاه وسیع‌تری پیداکرده‌اند. روش المان محدود تصادفی از میان روش‌های عددی موجود یکی از روش‌های قوی و پرکاربرد است که امروزه توانسته مخاطبان بسیاری پیدا کند. این روش برای کمی‌سازی عدم قطعیت یک مسئله به‌کار می‌رود، که شامل مشخصاتی چون مصالح تصادفی، بارگذاری تصادفی و غیره

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
P. Zakian, N. Khaji, Development of higher-order stochastic spectral finite element method for uncertainty analysis of 2D continua, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 51-60, 2016 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

بوده؛ و خروجی را پس از انجام تحلیل به‌صورت شاخص‌های آماری چون مقدار متوسط، انحراف معیار و توزیع احتمالاتی پاسخ بیان می‌کند. روش‌های المان محدود تصادفی بیشتر به چهار دسته کلی روش مونت کارلو[1] [1]، روش اختلالی[2] [2]، روش انتگرال وزنی[3] [1]، و روش تجزیه طیفی[4] [3] تقسیم می‌شود. در روش مونت کارلو ابتدا تحقق میدان تصادفی به تعداد نمونه مورد نظر صورت گرفته و سپس مسئله برای هر تحقق به‌صورت تعینی حل می‌شود، در پایان پاسخ به‌صورت شاخص‌های آماری محاسبه می گردد. روش اختلالی از سری تیلور برای تجزیه ماتریس‌های تصادفی معادله تعادل (مانند ماتریس سختی) بهره می‌جوید. در روش انتگرال وزنی از بسط انتگرالی ماتریس سختی برای تعریف اثرات تصادفی آن استفاده می‌شود و این امر از طریق انتگرال‌گیری با تابع وزنی رخ می‌دهد. از سوی دیگر روش تجزیه طیفی از دو بسط متفاوت به ترتیب برای ماتریس سختی و پاسخ استفاده می‌کند که در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. توسعه روش‌های سریع و کارآمد با وجود پیشرفت ابزارهای محاسباتی همواره مورد توجه محققین بوده است تا بتوانند از امکانات موجود بهره‌گیری بهینه کنند. برای چند نمونه، چادهوری و ادهیکاری [4] یک مدل با ابعاد بالا برای تحلیل المان محدود تصادفی ارائه کردند. چوریل و نوی [5] مرتبه مدل را با استفاده از یک تجزیه تعمیم‌یافته در تحلیل عدم قطعیت دینامیک سازه‌ها کاهش دادند. خاجی و زکیان [6] روش المان محدود طیفی تصادفی را برای مسائل الاستودینامیک ارائه کردند. دو و همکاران [7] تحلیل المان محدود تصادفی سازه‌ها را با تحت میدان تصادفی غیردقیق چندگانه انجام دادند. اصنافی [8] تحلیل دوشاخگی پوسته استوانه‌ای را تحت نیروی تصادفی جانبی انجام داد. تحلیل تیر با مقطع متغیر تحت تحریک تصادفی توسط ایرانی و سازش [9] انجام شد.

این پژوهش به توسعه روش المان محدود طیفی تصادفی[5] با به‌کارگیری المان‌های مرتبه بالا می‌پردازد؛ و سپس اثر مرتبه المان و نوع شبکه[6] (منظم یا نامنظم) را در روش پیشنهادی بررسی می‌کند. به‌بیان‌دیگر روش پیشنهادی یک روش المان محدود طیفی غنی‌سازی‌شده با روش تجزیه طیفی [3] است. دقت شود که کلمه «طیفی» اولی با دومی معنای متفاوتی دارد. اولی مربوط به المان‌های طیفی و دومی مربوط به نوع تجزیه تصادفی است که از مقادیر ویژه و توابع ویژه بهره می‌جوید. بدیهی است که روش جدید المان محدود طیفی تصادفی تنها با یک نوع مرتبه المان و برای شبکه‌های منظم در مرجع [6] ارائه شده، و نمونه‌های مبنا را برای صحت‌سنجی مورد بررسی قرار می‌دهد. در این پژوهش مثال‌های مبنایی با شبکه‌های منظم و نامنظم، گسسته‌سازی مکانی متفاوت برای حل بسط کارهیونن‌لو، تحلیل تصادفی و مرتبه‌های مختلف المان طیفی مورد بررسی قرار گرفته و اثرهای مختلف آن‌ها در دقت و کارایی حل مسئله‌های الاستواستاتیکی و الاستودینامیکی محیط‌های پیوسته دوبعدی نقد شده است، همچنین تابع‌های چگالی طیفی[7] و توزیع تجمعی احتمال[8] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برنامه‌ی رایانه‌ای جدیدی که برای تولید شبکه‌های منظم و نامنظم المان محدود طیفی مرتبه بالا برای این تحقیق نگاشته شده در این مقاله به‌کار گرفته شده است.

[1] Monte Carlo method
[2] Perturbation method
[3] Weighted integral method
[4] Spectral decomposition method
[5] Stochastic spectral finite element method
[6] Mesh
[7] Probability density function
[8] Cumulative density function

2- روش المان محدود طیفی تصادفی

2-1- تعاریف اولیه

روش طیفی ابتدا در دینامیک سیالات محاسباتی[9] توسط پترا [10] ارائه شد و پیشرفت‌های بسیاری در ترکیب با المان محدود استاندارد داشته که منجر به روش المان محدود طیفی [11-13] شده است. المان‌های محدود طیفی اساسا برای مسائل دینامیکی پیشنهاد شده و دارای همگرایی و دقت مناسب در این مسائل است.

این المان‌ها نوعی المان مرتبه بالا هستند که توزیع متقارن نقاط در فواصل غیریکسان شکل می‌گیرد. شکل 1 یک المان طیفی لوباتو[10] مرتبه 4 را نشان می‌دهد که دارای 25 گره است. المان‌های محدود طیفی بر پایه چندجمله‌ای‌های لوباتو منجر به قطری‌شدن ماتریس جرم می‌شوند.

روش المان محدود تصادفی نیز رویکردهای مختلفی دارد که پایه روش توسعه‌یافته توسط نگارنده‌های این پژوهش، روش معروف قانم و اسپانوس [3] بوده که از دو بسط کارهیونن‌لو[11] و چندجمله‌ای‌های آشوبی[12] به‌ترتیب برای تجزیه ورودی و پاسخ تصادفی استفاده می‌کند. روش المان محدود طیفی تصادفی اولیه [6]، توسعه المان محدود طیفی به فضای تصادفی بوده که ضمن حفظ ویژگی‌های روش‌های المان محدود طیفی و تصادفی، قابلیت‌های جدیدی نیز اضافه می‌کند. این قابلیت‌ها شامل موارد زیر است:

- ✓ نیاز به گسسته‌سازی درشت‌تری (المان‌های درشت‌تر) نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد داشته و در مقابل دقت مناسبی دارد.
- ✓ حل عددی معادله انتگرالی فردهولم[13] با المان محدود طیفی صورت می‌گیرد که به سبب عدم نیاز به تشکیل توابع ویژه می‌شود.
- ✓ در مسائل دینامیکی، ماتریس جرم در فضای تصادفی قطری است و این امر موجب کاهش پراکندگی عددی و استفاده از روش‌های صریح[14] تفاضل محدود برای انتگرال‌گیری زمانی می‌شود.
- ✓ صورت غیراستاندارد گسسته مسئله مقدار ویژه ناشی از معادله انتگرالی فردهولم به آسانی قابل‌تبدیل به حالت استاندارد است، چرا که یکی از ماتریس‌های این مسئله قطری می‌شود.
- ✓ درنهایت روش‌های یادشده موجب کاهش زمان و حجم محاسباتی شده و همچنین دقت قابل‌توجهی دارند.

2-2- پیاده‌سازی

این بخش به توسعه روش پیشنهادی المان محدود طیفی تصادفی برای حل مسائل الاستودینامیکی می‌پردازد. برای رعایت اختصار، در این جا تنها

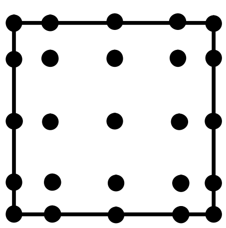


Fig. 1 A typical Lobatto spectral element of fourth order

شکل 1 نمونه یک المان طیفی لوباتو از مرتبه 4

[9] Computational fluid dynamics (CFD)
[10] Lobatto polynomial
[11] Karhunen Loève expansion
[12] Polynomial chaos expansion
[13] Fredholm integral equation
[14] Explicit

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

استخراج معادله تعادل دینامیکی آورده شده است.

یک فضای احتمالاتی کامل هیلبرت $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ با فضای نمونه‌ای Ω، جبر سیگمای $\mathcal{A}$ روی Ω، و اندازه احتمالاتی $\mathcal{P}$ تعریف شده است، به‌بیان‌دیگر هر نگاشت $w{:}D\times\Omega\rightarrow R$ یک میدان تصادفی حقیقی را تعریف می‌کند [14] به‌طوری‌که $x\in D$ بوده و $w(x, \theta)$ یک عدد حقیقی به‌ازای هر تحقق $\theta\in\Omega$ است. هر میدان تصادفی $w{:}D\times\Omega\rightarrow R$ با تابع هم‌بستگی پیوسته را می‌توان به‌صورت بسط کارهیونن‌لو به صورت رابطه (1) نوشت.

$$w(x,\theta) = \bar{w}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\,\phi_i(x)\xi_i(\theta) \tag{1}$$

این سری در فضای هیلبرت همگرا می‌شود. λ_i مقدار ویژه و ϕ_i تابع ویژه ناشی از تابع هم‌بستگی بوده و ξ_i مجموعه متغیرهای تصادفی غیرهم‌بسته است، بر اساس اصل کار مجازی رابطه (2) را به صورت زیر داریم.

$$\int_V \bar{\epsilon}^{\mathrm{T}}\,\tau\, dV = \int_V \bar{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{f_B}\, dV + \int_S \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{f_S}\, dS + \sum_i \mathrm{u}_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}_{\mathrm{c}}^{i} \tag{2}$$

$\bar{\mathrm{u}}$ نشان‌دهنده جابه‌جایی مجازی و $\bar{\epsilon}$ کرنش مجازی متناظر است، $\mathrm{f_B}$، $\mathrm{f_S}$ و $\mathrm{R}_{\mathrm{c}}^{i}$ نیروهای کالبدی، سطحی و نیروهای متمرکز گره‌ای را نشان می‌دهد، پس از بسط دادن و ضرب طرفین در $\bar{\mathrm{U}}^{T}$، می‌توان رابطه (3) را نوشت.

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{V^{(e)}}\bar{\epsilon}^{\mathrm{T}}\,\tau\, dV &= \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{V^{(e)}}\bar{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{f_B}\, dV\\ &+ \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{S^{(e)}}\bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{f_S}\, dS\\ &+ \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_i \mathrm{u}_i^{\mathrm{T}}\,\mathrm{R}_{\mathrm{C}}^{i}\end{aligned} \tag{3}$$

با استفاده از رابطه کرنش- جابه‌جایی و توابع درون‌یابی در فضای تصادفی می‌توان روابط (4-6) را نوشت.

$$\tau = \mathrm{C}(\theta)\varepsilon \tag{4}$$

$$\bar{\varepsilon}(x,y,\theta,t) = \mathrm{B}\bar{\mathrm{U}}(\theta,t) \tag{5}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(x,y,\theta,t) = \mathrm{H}\bar{\mathrm{U}}(\theta,t) \tag{6}$$

که H ماتریس توابع درون‌یابی طیفی است، با اعمال روابط بالا، اگر نیروهای اینرسی و میرایی به‌عنوان مشارکت در نیروی حجمی درنظر گرفته شوند، رابطه (7) قابل نوشتن است.

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{V^{(e)}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{C}\,\mathrm{B}\, dV &= \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{V^{(e)}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\,[\mathrm{f_B}\\ &- \rho\mathrm{H}\ddot{\mathrm{U}} - \kappa\mathrm{H}\dot{\mathrm{U}}]\, dV\\ &+ \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\sum_e\int_{S^{(e)}}\mathrm{H}^{\mathrm{S^T}}\,\mathrm{f_S}\, dS\\ &+ \bar{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}\mathrm{R_C}\end{aligned} \tag{7}$$

κ و ρ به‌ترتیب پارامترهای میرایی و چگالی هستند، ماتریس‌های المانی ناشی از رابطه بالا به‌صورت رابطه (8) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\mathrm{K}^{\mathrm{e}} &= \int_{V^{(\mathrm{e})}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{C}\,\mathrm{B}\, dV\\ \mathrm{C}^{\mathrm{e}} &= \int_{V^{(\mathrm{e})}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\,\kappa\mathrm{H}\, dV\\ \mathrm{M}^{\mathrm{e}} &= \int_{V^{(\mathrm{e})}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\,\rho\mathrm{H}\, dV\\ \mathrm{R_B}^{\mathrm{e}} &= \int_{V^{(\mathrm{e})}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{f_B}\, dV\\ \mathrm{R_S}^{\mathrm{e}} &= \int_{S^{(\mathrm{e})}}\mathrm{H}^{\mathrm{S^T}}\,\mathrm{f_S}\, dS\end{aligned} \tag{8}$$

بدیهی است که نیروی اعمالی می‌تواند تابعی از زمان باشد (مانند پاسخ)، که به اختصار در فرمول بیان نشده است، پس از تجمیع ماتریس‌های المانی، اعمال بسط کارهیونن‌لو با M جمله و انجام عملیات جبری رابطه (9) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\ddot{\mathrm{U}}(\theta,t) + \mathrm{C}\dot{\mathrm{U}}(\theta,t) + \left(\sum_{i=0}^{M}\mathrm{K}_i\xi_i(\theta)\right)\mathrm{U}(\theta,t)\\ = \mathrm{R_B}(t) + \mathrm{R_S}(t) + \mathrm{R_C}(t)\end{aligned} \tag{9}$$

که در آن، M، C و K به‌ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی هستند، $\mathrm{R_B}$، $\mathrm{R_S}$ و $\mathrm{R_C}$ به‌ترتیب نیروهای کالبدی، سطحی و متمرکز هستند. چندجمله‌ای آشوبی به‌صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$\mathrm{U}(\theta,\mathrm{t}) = \sum_{j=0}^{P}\mathrm{U}_j(t)\psi_j(\theta) \tag{10}$$

از سویی با پوشاندن پاسخ بر جملات آشوبی با P جمله می‌توان رابطه (11) را نوشت.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\sum_{j=0}^{P}\ddot{\mathrm{U}}_j(t)\psi_j(\theta) + \mathrm{C}\sum_{j=0}^{P}\dot{\mathrm{U}}_j(t)\psi_j(\theta)\\ + \left(\sum_{i=0}^{M}\mathrm{K}_i\xi_i(\theta)\right)\sum_{j=0}^{P}\mathrm{U}_j(t)\psi_j(\theta)\\ = \mathrm{R_B}(t) + \mathrm{R_S}(t) + \mathrm{R_C}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

برای رسیدن به یک تقریب بهینه از حل دقیق روی فضای پوشا توسط بسط جملات آشوبی، مانده حاصل‌ضرب طرفین در $\psi_k(\theta)$ باید صفر درنظر گرفته شود؛ بنابراین $\psi_k(\theta)$ در طرفین رابطه اخیر ضرب شده و از آن متوسط ریاضی گرفته می‌شود و رابطه (12) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\langle\psi_k(\theta)\mathrm{M}\sum_{j=0}^{P}\ddot{\mathrm{U}}_j(t)\psi_j(\theta)\rangle + \langle\psi_k(\theta)\mathrm{C}\sum_{j=0}^{P}\dot{\mathrm{U}}_j(t)\psi_j(\theta)\rangle\\ &+ \langle\psi_k(\theta)\left(\sum_{i=0}^{M}\mathrm{K}_i\xi_i(\theta)\right)\sum_{j=0}^{P}\mathrm{U}_j(t)\psi_j(\theta)\rangle\\ &= \langle\psi_k(\theta)\mathrm{R_B}(t)\rangle + \langle\psi_k(\theta)\mathrm{R_S}(t)\rangle + \langle\psi_k(\theta)\mathrm{R_C}(t)\rangle\\ &= \langle\psi_k(\theta)\mathrm{R}(t)\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

درنهایت معادله تعادلی دینامیکی تصادفی به صورت رابطه (13) خواهد بود.

$$\mathrm{M_{st}}\ddot{\mathrm{U}} + \mathrm{C_{st}}\dot{\mathrm{U}} + \mathrm{K_{st}}\mathrm{U} = \mathrm{F_{st}} \tag{13}$$

به‌طوری‌که رابطه (14) را نیز خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{\mathrm{st}}^{k} &= \langle\psi_k(\theta)\psi_k(\theta)\rangle\mathrm{M}\\ \mathrm{C}_{\mathrm{st}}^{k} &= \langle\psi_k(\theta)\psi_k(\theta)\rangle\mathrm{C}\\ \mathrm{K}_{\mathrm{st}}^{k} &= \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{P}\langle\xi_i(\theta)\psi_j(\theta)\psi_k(\theta)\rangle\,\mathrm{K}_i\\ \mathrm{F}_{\mathrm{st}}^{k} &= \langle\psi_k(\theta)\mathrm{R}\rangle\end{aligned} \tag{14}$$

ابعاد ماتریس‌های تصادفی به‌صورت $N(P+1)\times N(P+1)$ است که N تعداد درجات آزادی در فضای تعینی است و به‌صورت رابطه (15)، P به شکل زیر است.

$$P + 1 = \frac{(M+n)!}{M!\,n!} \tag{15}$$

در آن n مرتبه چندجمله‌ای آشوبی است. ابعاد ماتریس در فضای تصادفی بسیار بزرگ‌تر از فضای تعینی همتای خود است و این نیاز محاسباتی، یکی از چالش‌های بزرگ روش‌های المان محدود تصادفی است. در تشکیل توابع

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

درون‌یابی و انتگرال‌گیری عددی، در این المان‌های طیفی، از مقادیر مختصاتی x و وزنی w لوباتوی زیر استفاده می‌شود.

مرتبه 3 به صورت رابطه (16) است.

$$x=[-1.0000, -0.4472, 0.4472, 1.0000] \quad w=[0.1667, 0.8333, 0.8333, 0.1667] \tag{16}$$

مرتبه 4 به صورت رابطه (17) است.

$$x=[-1.0000, -0.6547, 0.0000, 0.6547, 1.0000] \quad w=[0.1000, 0.5444, 0.7111, 0.5444, 0.1000] \tag{17}$$

مرتبه5 به صورت رابطه (18) است.

$$x=[-1.0000, -0.7651, -0.2852, 0.2852, 0.7651, 1.0000] \quad w=[0.0667, 0.3785, 0.5549, 0.5549, 0.3785, 0.0667] \tag{18}$$

همچنین H یک ماتریس به ابعاد $2\times 2nn$ بوده که nn تعداد گره‌های هر المان است، یک نمونه از تابع درون‌یابی برای هر المان در زیر آمده است.

مرتبه 3 به صورت رابطه (19) است.

$$H_1 = 0.3906\,(r+0.4472)(s+0.4472)(r-0.4472)(s-0.4472)(r-1.0)(s-1.0) \tag{19}$$

مرتبه 4 به صورت رابطه (20) است.

$$H_1 = 0.7656 r s\,(r+0.6547)(s+0.6547)(r-0.6547)(s-0.6547)(r-1.0)(s-1.0) \tag{20}$$

مرتبه5 به صورت رابطه (21) است.

$$H_1 = 1.723\,(r+0.2852)(s+0.2852)(r+0.7651)(s+0.7651)(r-0.7651)(s-0.7651)(r-0.2852)(s-0.2852)(r-1.0)(s-1.0) \tag{21}$$

در روابط بالا r و s جهت مختصه‌های ایزوپارامتریک هستند، پس از انجام تحلیل برای به‌دست‌آوردن آمار پاسخ، مقدار میانگین و انحراف معیار از روابط (23,22) می‌توان بهره جست.

$$\langle u \rangle = u_0 \tag{22}$$

$$\mathrm{cov}[u,u] = \sum_{j=1}^{P} \langle \Psi_j^2 \rangle u_j u_j^{T} \tag{23}$$

در روابط بالا $\langle u \rangle$ و cov به‌ترتیب مقدار متوسط و هم‌بستگی[1] پاسخ هستند، از سوی دیگر، تنها برای برخی از توابع هم‌بستگی و برای تعداد اندکی از هندسه‌های ساده حل تحلیلی وجود دارد، معادله انتگرالی فردهولم در حالت دوبعدی به‌صورت رابطه (24) بیان می‌شود.

$$\iint_D c(x_1,y_1;\, x_2,y_2)\varphi_n(x_2,y_2)\,dx_1 dy_1 = \lambda_n \varphi_n(x_1,y_1) \tag{24}$$

همچنین تابع هم‌بستگی نمایی آن به‌صورت رابطه (25) تعریف می‌شود.

$$c(x_1,y_1;\, x_2,y_2) = \sigma_E^2 \exp\left(-\frac{|x_2-x_1|}{b_x} - \frac{|y_2-y_1|}{b_y}\right) \tag{25}$$

حل عددی انتگرال فردهولم توسط روش المان محدود در مرجع [3] آمده است، در حل به روش المان طیفی از توابع درون‌یابی طیفی و سپس از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس-لوباتو-لژاندر استفاده می‌شود. پس از تقسیم دامنه مسئله به N_s المان محدود طیفی می‌توان رابطه (26) را نوشت.

$$\sum_{e_1=1}^{N_s} \iint_{D^{e1}} c(x_1,y_1;\, x_2,y_2)\varphi_n(x_2,y_2)\,dD^{e1} = \lambda_n \varphi_n(x_1,y_1) \tag{26}$$

درنهایت به فرم مسئله مقدار ویژه گسسته ماتریسی رابطه (27) می‌توان دست یافت.

$$\hat{C}D = \Lambda \hat{B} D \tag{27}$$

در آن Λ و D به‌ترتیب ماتریس‌های مقادیر و بردارهای ویژه هستند، ماتریس‌های $\hat{C}$و $\hat{B}$ از تجمیع ماتریس‌های (29,28) به‌دست می‌آیند.

$$C_{e1e2} = \iint_{D^{e1}} \iint_{D^{e2}} c(x_1,y_1;\, x_2,y_2) H^{e1^T} H^{e2}\, dD^{e1} dD^{e2} \tag{28}$$

و

$$B_{e1e2} = \iint_{D^{e1}} H^{e1^T} H^{e2}\, dD^{e1} \tag{29}$$

با به‌کارگیری روش المان محدود طیفی برای حل انتگرال فردهولم ماتریس $\hat{B}$ قطری می‌شود که این امر به سهولت حل مسئله مقادیر ویژه می‌انجامد، چرا که به‌آسانی قابل‌تبدیل به شکل استاندارد مسئله مقدار ویژه است.

3- مثال‌های عددی

در این بخش چهار مثال عددی برای ارزیابی اثر المان‌های طیفی مرتبه بالا و شبکه آن‌ها روی پاسخ‌های تصادفی سازه و حل عددی معادله انتگرالی فردهولم مورد بررسی قرار گرفته است، این مثال‌ها دقت روش المان محدود طیفی تصادفی را نیز در حل مسائل مختلف مبنا نشان می‌دهند، مثال اول، دوم و سوم به‌صورت دینامیکی و مثال چهارم تحت بار استاتیکی است که خروجی‌های تابع چگالی طیفی و تابع تجمعی احتمال آن‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفته است، تابع همبستگی در تمامی مثال‌ها به‌صورت نمایی بوده و توزیع میدان تصادفی گاوسی است. برنامه‌هایی برای تولید شبکه‌های منظم و نامنظم المان طیفی مرتبه بالا برای این تحقیق در تمام مثال‌ها نوشته‌شده است.

3-1- میله مستطیلی تحت بار دینامیکی مثلثی

یک میله مستطیلی مطابق شکل 2 در حالت تنش مسطح تحت بار دینامیکی مثلثی قرار گرفته است، این مثال در مرجع [15] به‌صورت تعینی حل شده که در این‌جا تحلیل تصادفی آن انجام شده است، ضریب ارتجاعی با مقدار متوسط 1 و انحراف معیار 0.1 لحاظ شده است، مقادیر چگالی، ضریب پواسن و ضخامت میله به‌ترتیب 1، 1 و 0.3 لحاظ شده‌اند، 4 مود از بسط کارهیونن‌لو درنظر گرفته شده و طول هم‌بستگی در راستای x و y به‌ترتیب 1 و 0.5 است.

مطابق جدول 1، چهار نوع شبکه با دو نوع مرتبه المان تعریف شده است، این جدول مقادیر ویژه بسط کارهیونن‌لو را مقایسه می‌کند، تفاوت مقادیر در مودهای بالاتر مشهودتر است، بدیهی است که شبکه‌های ریزتر منجربه پاسخ بهتری شده‌اند، اما نکته قابل‌توجه دقت قابل رقابت المان مرتبه 4 با شبکه درشت‌تر نسبت به مرتبه 3 است، مقدار متوسط و انحراف معیار پاسخ جابه‌جایی قائم میله در گره A توسط شکل‌های 2 و 3 نشان داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود تفاوت پاسخ در مقادیر انحراف معیار مشهودتر است، جدول 2 تعداد درجه‌های آزادی هر شبکه را در فضای تصادفی نشان می‌دهد و بیشترین جابه‌جایی در تاریخچه زمانی پاسخ در گره A را با هم مقایسه می‌کند، این جدول نشان می‌دهد که شبکه ریزتر برای هر مرتبه المان

[1] Covariance function

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

جدول 1 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیونن‌لو با المان‌های طیفی برای مثال اول

Table 1 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the first example

نوع شبکه / مقدار ویژه	شبکه 12×6 با مرتبه 3	شبکه 16×8 با مرتبه 3	شبکه 8×4 با مرتبه 4	شبکه 12×6 با مرتبه 4
1	0.00273245	0.00273103	0.00273343	0.00273108
2	0.00051253	0.00051133	0.00051336	0.00051137
3	0.00051093	0.00051043	0.00051127	0.00051045
4	0.00016924	0.00016805	0.00017007	0.00016810

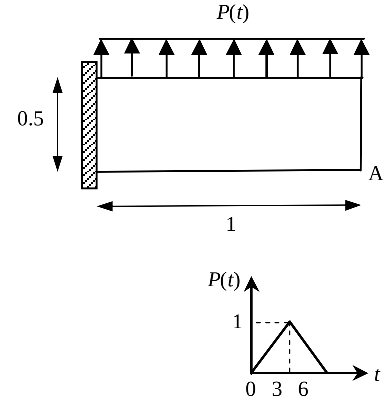


Fig. 2 A rod under triangular dynamic load

شکل 2 یک میله تحت بار مثلثی دینامیکی

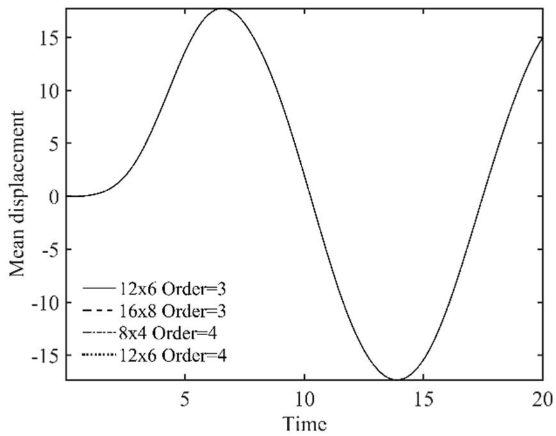


Fig. 3 Mean vertical displacement history of the rod at node A

شکل 3 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم میله در نقطه A

جدول 2 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال اول

Table 2 Maxima of vertical displacements of node A for the first example

نوع شبکه	12×6 مرتبه 3	16×8 مرتبه 3	8×4 مرتبه 4	12×6 مرتبه 4
درجه آزادی	47880	84000	38080	84000
مقدار متوسط	17.73033	17.73346	17.73233	17.73549
انحراف معیار	4.154585	4.146154	4.175747	4.154355

منجربه انحراف معیار کوچک‌تر و مقدار متوسط بزرگ‌تر می‌شود. با تعداد درجه‌های آزادی یکسان برای دو مرتبه متفاوت المانی، پاسخ‌های متفاوتی نیز به‌دست می‌آید که در مورد انحراف معیار مشهودتر است.

3-2- غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی

این مثال از مرجع [6] انتخاب شده که تحلیل تصادفی مثال مبنای معروف کوک است (شکل 5). چگالی و ضریب پواسن به‌ترتیب برابر 0.333 و 0.0001 لحاظ شده و شش مود از بسط کارهیونن‌لو درنظر گرفته شده است. طول هم‌بستگی در راستای x و y به‌ترتیب 48 و 60 است. فرضیات دیگر مانند مثال پیشین است. جدول 3 مقادیر ویژه بسط کار هیونن‌لو را مقایسه می‌کند؛ وهمان‌طور که مشخص است شش نوع شبکه با سه نوع مرتبه المان طیفی تعریف شده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که با تعداد 12 المان مرتبه پنج می‌توان از 130 المان مرتبه سه [6] پاسخ بهتری دریافت کرد. با توجه به تجمیع[1] دوگانه ماتریس **C** که مطابق معادله (27) در حل معادله انتگرالی حاصل از بسط کارهیونن‌لو صورت می‌گیرد، هرچه تعداد المان کمتر باشد، منجربه حل سریع‌تری می‌شود. با توجه به مقادیر ویژه مشاهده می‌شود که دقت حل این معادله انتگرالی بیشتر وابسته به تعداد درجه‌های آزادی است تا مرتبه المان. مقدار متوسط و انحراف معیار تاریخچه زمانی جابه‌جایی نوک سازه در نقطه A در شکل‌های 6 و 7 ترسیم‌شده‌اند. این

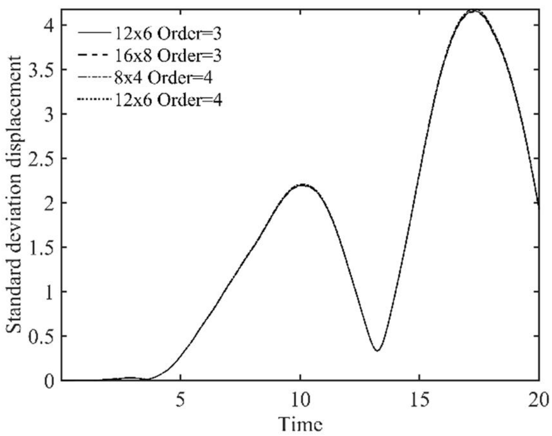


Fig. 4 Standard deviation vertical displacement history of the rod at node A

شکل 4 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم میله در نقطه A

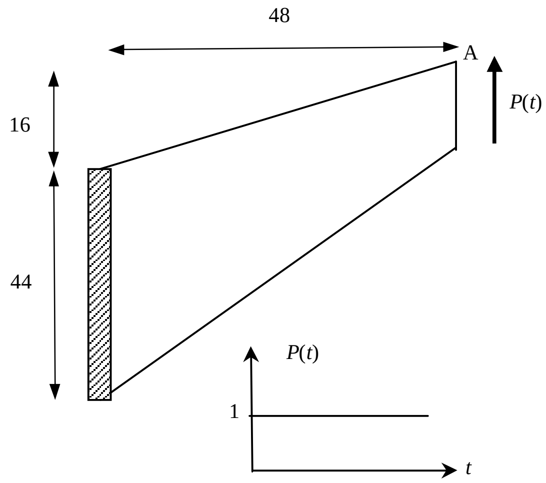


Fig. 5 Cook’s membrane under rectangular dynamic loading

شکل 5 غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی

[1] Assembly

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

جدول 3 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیونن‌لو با المان‌های طیفی برای مثال دوم

Table 1 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the second example

8×6 مرتبه 5	4×3 مرتبه 5	16×12 مرتبه 4	8×6 مرتبه 4	20×15 مرتبه 3	16×12 مرتبه 3	نوع شبکه / مقدار ویژه
8.7536	8.7598	8.7524	8.7547	8.7525	8.7530	1
2.0225	2.0278	2.0214	2.0234	2.0215	2.0219	2
0.6685	0.6724	0.6677	0.6691	0.6677	0.6680	3
0.5896	0.5923	0.5891	0.5901	0.5891	0.5893	4
0.3179	0.3206	0.3174	0.3183	0.3174	0.3176	5
0.2819	0.2858	0.2811	0.2826	0.2811	0.2814	6

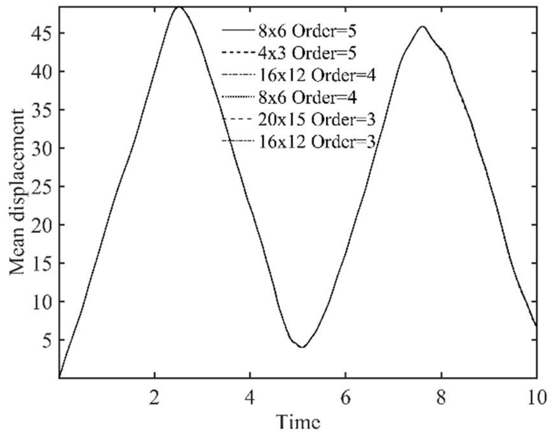


Fig. 6 Mean vertical displacement history of Cook's membrane under rectangular dynamic loading at node A

شکل 6 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی در نقطه A

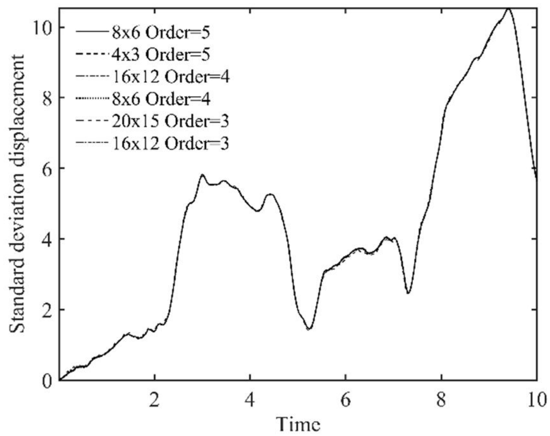


Fig. 7 Standard deviation vertical displacement history of Cook's membrane under rectangular dynamic loading at node A

شکل 7 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مستطیلی در نقطه A

شکل‌ها و جدول 4 نشان می‌دهند که وابستگی انحراف معیار به شبکه و مرتبه المان بیشتر است. در این مثال برخلاف مثال پیشین، برای یک مرتبه مشخص المان، هرچه شبکه ریزتر می‌شود مقدار متوسط بیشینه کمتر شده، و انحراف معیار بیشتر می‌شود. اگر تعداد درجات آزادی را درنظر آوریم، روند تغییر قابل پیش‌بینی نیست. در خصوص مرتبه المان می‌توان دریافت که المان مرتبه پنج با 208320 درجه آزادی می‌تواند به‌خوبی با المان مرتبه چهار با 526848 درجه آزادی رقابت کند. این امر در مقایسه المان‌های مرتبه چهار و سه نیز صادق است، و نشان از توانایی المان‌های طیفی مرتبه بالا در مسائل دینامیکی با تلاش محاسباتی مطلوب دارد.

3-3- غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی

مثال پیشین در این بخش تحت بار دینامیکی متفاوتی به‌صورت بار مثلثی قرار گرفته است. تمامی مشخصات مسئله مانند مثال پیشین بوده و تابع بار مثلثی نیز مشابه بار مثال اول تعریف شده است. با توجه به این‌که تمامی موارد یادنشده در این‌جا مشابه قبل است، این مثال برای بررسی دقت و همگرایی المان‌های مرتبه بالا، وقتی‌که تابع بارگذاری عوض می‌شود، به‌کار رفته است. شکل‌های 8 و 9 به‌ترتیب مقدار متوسط و انحراف معیار تاریخچه زمانی جابه‌جایی قائم را در گره A مقایسه می‌کنند. همان‌طوری که مشاهده می‌شود، بازهم تفاوت‌ها در مقدار انحراف معیار مشهودتر است. جدول 5 مقادیر بیشینه پاسخ‌ها را مقایسه می‌کند، که حاکی از دقت خوب المان مرتبه پنج در مقابل المان مرتبه چهار است؛ به‌طوری‌که توانسته با تعداد درجه‌های آزادی تقریبا نصف تعداد درجه‌های آزادی المان مرتبه چهار، به همان دقت، به‌ویژه در انحراف معیار برسد. از جنبه دیگر، دیده می‌شود که المان مرتبه پنج با 208320 درجه آزادی به‌خوبی توانسته با المان مرتبه سه با 463680 درجه آزادی رقابت کند، و از نظر مقدار متوسط و انحراف معیار دقت قابل‌توجهی داشته باشد. پس می‌توان دریافت که تابع بارگذاری تأثیر به‌سزایی در تفاوت نتایج المان‌های مرتبه بالا و پایین دارد، به‌گونه‌ایی‌که هر چه تابع بارگذاری پیچیده‌تر باشد، این تفاوت بیشتر مشهود می‌شود. این امر در مطالعات پیشین نیز البته برای تحلیل تعینی (غیرتصادفی) مسائل بزرگ‌مقیاس انتشار موج نشان داده شده بود [12].

4-3- صفحه مستطیلی حفره‌دار تحت تنش‌های کششی

این مثال مبنا حل استاتیکی المان محدود یک صفحه تنش مسطح تحت بارهای گسترده کششی بوده که جزئیات بارگذاری آن در مرجع [16] آمده است. مبدأ مختصات مرکز حفره بوده و جابه‌جایی قائم گره A در حاشیه حفره به مختصات (2، 0) مورد نظر است. مقدار متوسط این جابه‌جایی و انحراف استاندارد آن با روش المان محدود تصادفی به‌ترتیب 0.004891 و0.00078 گزارش شده‌اند [16]. مقدار متوسط و انحراف معیار ضریب ارتجاعی به‌ترتیب 10^4 و 2×10^3 تعریف شده‌اند. صفحه با ضخامت واحد

جدول 4 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال دوم

Table 4 Maxima of vertical displacements of node A for the second example

8×6 مرتبه 5	4×3 مرتبه 5	16×12 مرتبه 4	8×6 مرتبه 4	20×15 مرتبه 3	16×12 مرتبه 3	نوع شبکه / مقدار ویژه
208320	53760	526848	134400	463680	298368	درجه آزادی
48.3956	48.3325	48.38029	48.39749	48.37609	48.4031	مقدار متوسط
10.53052	10.51442	10.54229	10.52067	10.53185	10.52686	انحراف معیار

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

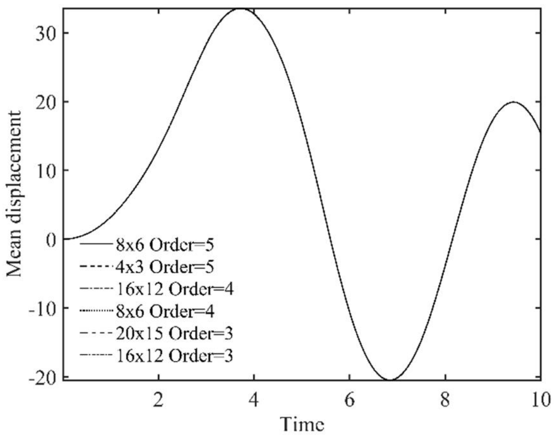


Fig. 8 Mean vertical displacement history of Cook's membrane under triangular dynamic loading at node A

شکل 8 مقدار متوسط تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی در نقطه A

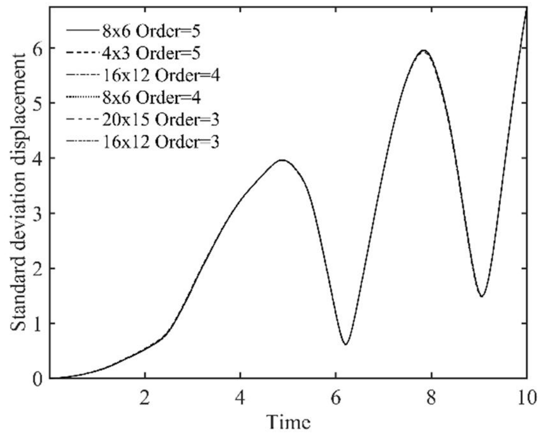


Fig. 9 Standard deviation vertical displacement history of Cook's membrane under triangular dynamic loading at node A

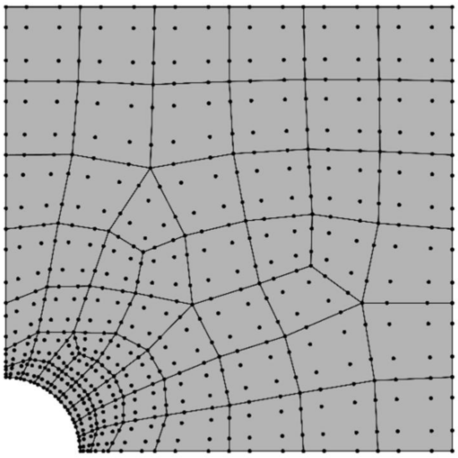
شکل 9 انحراف معیار تاریخچه جابه‌جایی قائم غشای کوک تحت بار دینامیکی مثلثی در نقطه A

جدول 5 مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌های قائم نقطه A برای مثال سوم

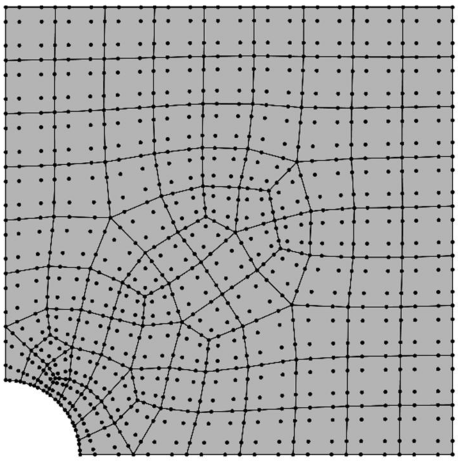
Table 5 Maxima of vertical displacements of node A for the third example

نوع شبکه / مقدار ویژه	16×12 مرتبه 3	20×15 مرتبه 3	8×6 مرتبه 4	16×12 مرتبه 4	4×3 مرتبه 5	8×6 مرتبه 5
درجه آزادی	298368	463680	134400	526848	53760	208320
مقدار متوسط	33.52184	33.53466	33.51118	33.54829	33.48739	33.53695
انحراف معیار	6.75453	6.752354	6.751284	6.748722	6.752354	6.744723

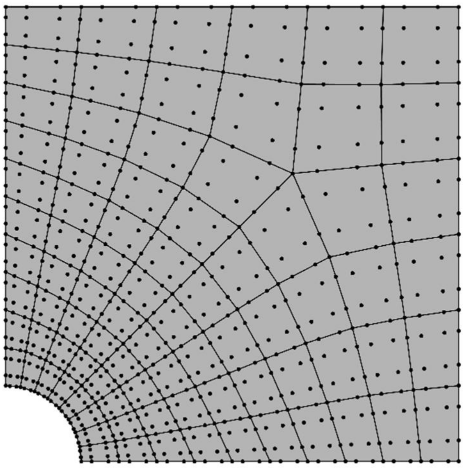
درنظر گرفته شده و طول هم‌بستگی در هر دو راستای اصلی 12 واحد است، چهار مود برای بسط کارهیونن‌لو درنظر گرفته شده که در جدول 6 به‌دست آمده‌اند. در این‌جا دو شبکه نامنظم 63 و 103 المانی و یک شبکه منظم 84 المانی مطابق شکل 10 درنظر گرفته شده و المان طیفی از نوع مرتبه سه است. مقدار متوسط جابه‌جایی قائم نقطه A در شبکه‌های 63، 103 و 84 المانی به‌ترتیب 0.0048، 0.0049 و 0.0049 بوده و انحراف معیار آن به‌ترتیب 0.0008735، 0.0009146 و 0.0008948 هستند. میدان‌های جابه‌جایی متوسط و انحراف معیار در شکل‌های 11 و 12 آمده و مقایسه



(الف)



(ب)



(پ)

Fig. 10 Configuration of three various meshes for the plate with a hole

شکل 10 شبکه برای صفحه حفره‌دار: الف- نامنظم 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی، و پ- منظم 84 المانی

شده‌اند. شکل‌های 13 و 14 به‌ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع تجمعی احتمال را مورد بررسی قرار می‌دهند. با توجه به شکل‌های اخیر مشاهده می‌شود که شبکه نامنظم علاوه‌بر دقت تأثیرهای محلی نیز دارد، به‌عبارت‌دیگر نوسانات جابه‌جایی به‌طور محلی در مورد پاسخ‌های شبکه 103 المانی دیده

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

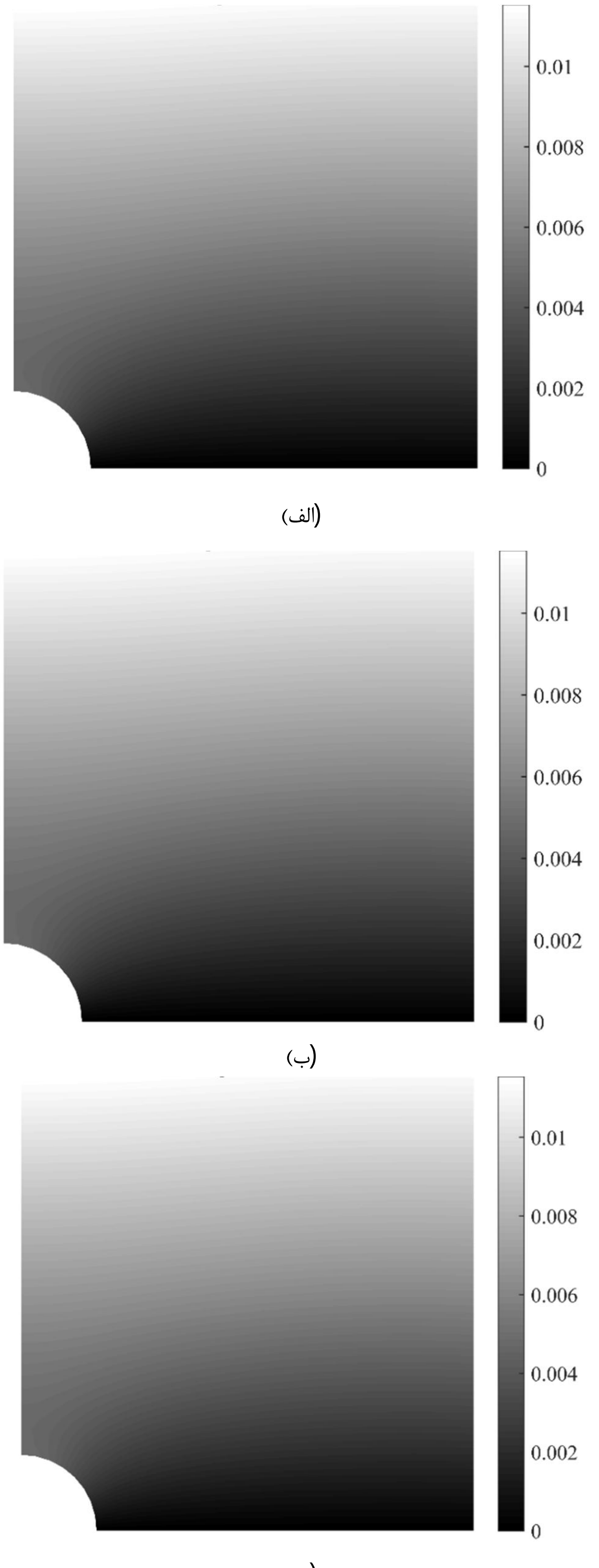


Fig. 11 Mean values of vertical displacement field for three various meshes

شکل 11 میدان جابه‌جایی قائم متوسط: الف- شبکه 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی، و پ- منظم 84 المانی

جدول 6 مقادیر ویژه حاصل از حل عددی بسط کارهیونن‌لو با المان‌های طیفی برای مثال چهارم

Table 6 Eigenvalues obtained from numerical solution of the KLE using spectral elements for the fourth example

نوع شبکه / مقدار ویژه	شبکه اول با 63 المان	شبکه دوم با 103 المان	شبکه سوم با 84 المان
1	310061340.0658	309982203.6372	309956779.3013
2	58888064.9255	58823033.6186	58754160.1487
3	55471477.7220	55401583.7593	55429788.1184
4	19307969.0376	19242619.8190	19213038.2428

می‌شود که در مورد شبکه 63 المانی این‌گونه نیست که می‌توان یکی از دلایل را اعوجاج موجود در شبکه نامنظم دانست. با توجه به این‌که از همان شبکه در حل معادله انتگرالی بسط فردهولم استفاده می‌شود، تأثیر روی پاسخ‌ها را بر گشتاورهای تصادفی (به‌خصوص گشتاورهای بالاتر) دوچندان می‌کند. همان‌طور که مقایسه تابع‌های چگالی طیفی و تجمعی احتمال نشان می‌دهند، هنگامی که از تعداد المان بیشتری استفاده می‌شود، حساسیت مزبور زیادتر است. شکل 13 نشان می‌دهد که مساحت زیر نمودار مربوط به شبکه 103 المانی از شبکه 63 المانی در بازه 0.004 تا 0.005 بیشتر است، و این نشان می‌دهد که شبکه ریزتر منجر به همگرا شدن مقدار حداکثری تابع چگالی احتمال در محل مقدار متوسط جابه‌جایی می‌شود؛ و تابع چگالی احتمال با پهنای نوار کمتری را در اطراف مقدار میانگین به‌دست می‌دهد. از سوی دیگر از این پدیده برداشت می‌شود که نوسانات ناشی از خطای روش المان محدود طیفی با شبکه درشت پراکندگی بیشتری دارد. از آن‌جایی‌که انحراف معیار یک شاخص پراکندگی است، مقدار کمتری به خود گرفته است، چرا که حساسیت پاسخ در شبکه‌های ریز بیشتر است و درنتیجه مقدار میانگین و انحراف معیار برای شبکه ریزتر کمی بیشتر شده است. در مورد شبکه منظم می‌توان مشاهده کرد که مقادیر ویژه حاصل از حل معادله فردهولم توسط این شبکه قابل رقابت با شبکه نامنظم 103 المانی است. این نشان می‌دهد که شبکه منظم حل دقیق‌تری از این معادله به‌دست می‌دهد و این تأثیر در جابه‌جایی یادشده هم دیده می‌شود.

4- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا روش المان محدود طیفی تصادفی به المان‌های طیفی مرتبه بالا توسعه داده شده و سپس برای تحلیل الاستواستاتیکی و الاستودینامیکی محیط‌های پیوسته به‌کار گرفته شده، و دقت آن نسبت به نوع شبکه و مرتبه المان مورد ارزیابی قرار گرفته است. روش یادشده دارای مزیت‌های قابل‌توجهی نسبت به روش المان محدود تصادفی استاندارد است که از آن جمله می‌توان ماتریس جرم قطری، بهره‌گیری از تعداد المان کمتر، حل عددی و اعمال مؤثر و سریع بسط کارهیونن‌لو، دقت خوب، و همگرایی مناسب در مسائل الاستواستاتیکی و الاستودینامیکی را نام برد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که اعوجاج شبکه در حل عددی معادله انتگرالی ناشی از بسط کارهیونن‌لو تأثیرگذار بوده و نه‌تنها از جهت حل تعینی، بلکه در پاسخ تصادفی نیز مؤثر است، به‌طوری‌که در گشتاورهای آماری مرتبه بالا (نظیر انحراف معیار و تابع چگالی احتمال) خود را نشان می‌دهد. محاسبات نشان می‌دهد که حل عددی معادله انتگرالی وابستگی چندانی به مرتبه المان نداشته و بیشتر به تعداد درجات آزادی بستگی دارد؛ هرچند المان‌های مرتبه

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

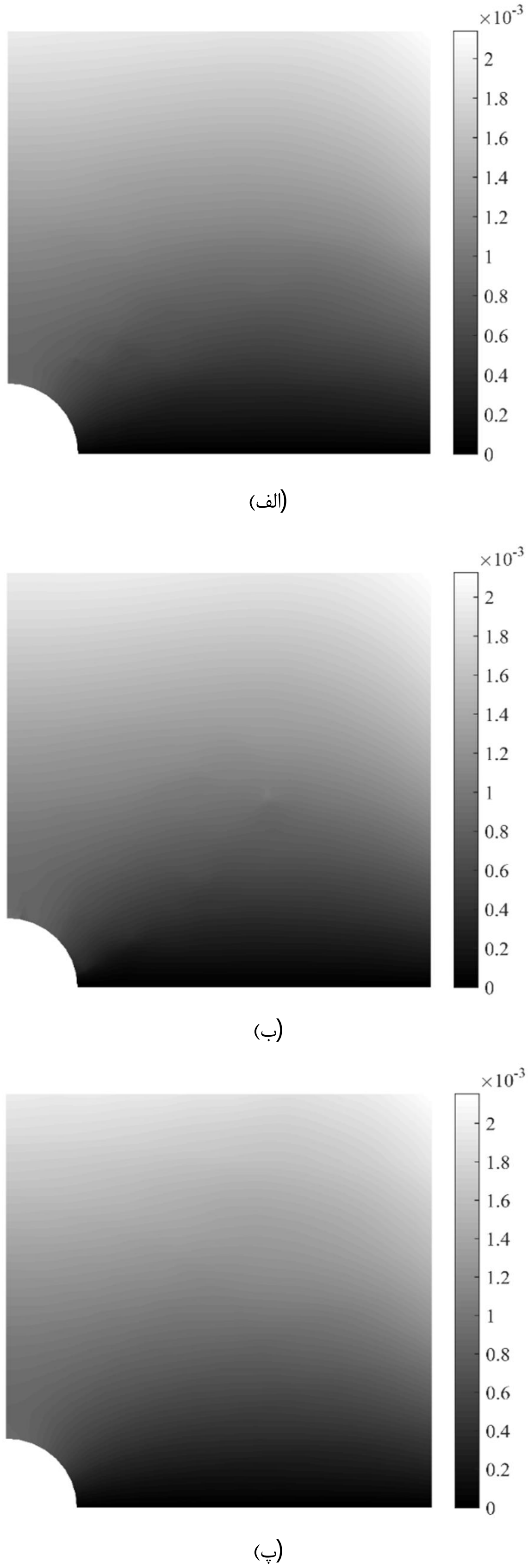


Fig. 12 Standard deviation values of vertical displacement field for three various meshes

شکل 12 انحراف معیار میدان جابه‌جایی قائم: الف- شبکه 63 المانی، ب- نامنظم 103 المانی، و پ- منظم 84 المانی

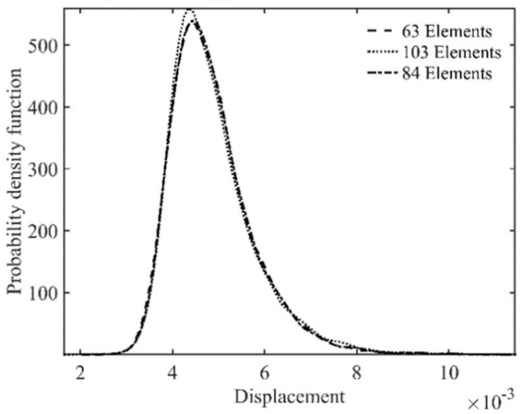


Fig. 13 Probability density function of displacement at node A for the plate with a hole

شکل 13 تابع چگالی احتمال جابه‌جایی گره A برای صفحه حفره‌دار

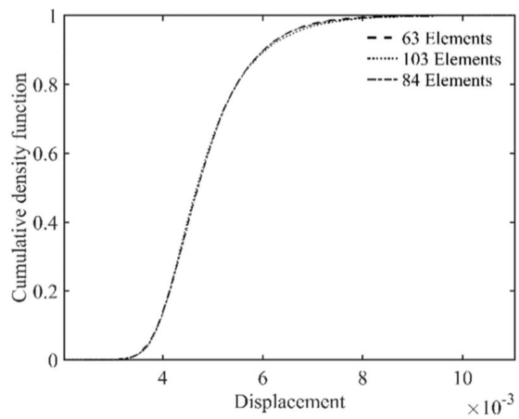


Fig. 14 Cumulative density function of displacement at node A for the plate with a hole

شکل 14 تابع تجمعی احتمال جابه‌جایی گره A برای صفحه حفره‌دار

بالاتر با تعداد المان کم، مقادیر ویژه دقیق‌تری را می‌توانند تقریب بزنند. در بررسی پاسخ دینامیکی می‌توان بیان کرد المان‌های مرتبه بالا با داشتن تعداد درجه آزادی کمتری می‌توانند پاسخ دینامیکی خوبی نسبت به المان‌های مرتبه پایین‌تر با تعداد درجات آزادی بیشتر به دست دهند. در ضمن، در شبکه‌های منظم روند تغییر انحراف معیار و مقدار متوسط با ریز کردن شبکه قابل پیش‌بینی‌تر است. از سوی دیگر با انتخاب یک شبکه به حد کافی ریز (به‌طوری‌که به همگرایی لازم در وضعیت غیرتصادفی (حل متعین) برسیم)، می‌توان گفت همان شبکه برای تحلیل تصادفی المان محدود طیفی مناسب است و نتایج نیز بیانگر همین امر است؛ چرا که موجب نوسان خطای کمتری شده و با پهنای نواری کمتری در تابع چگالی احتمال به مقادیر متوسط همگرا می‌شود. براساس نتایج، شبکه منظم با تعداد المان کمتر می‌تواند پاسخ قابل رقابتی را نسبت به شبکه نامنظم (حتی با تعداد المان بیشتر) تولید کند. در ارتباط با تأثیر نوع بارگذاری، هرچه تابع بارگذاری دینامیکی سادگی کمتری داشته باشد، تأثیر دقت و کارایی المان‌های طیفی مرتبه بالا بیشتر هویدا می‌شود، که حاکی از کارایی مؤثر المان‌های طیفی مرتبه بالا در تحلیل تصادفی شبیه‌سازی‌های المان محدود تصادفی دارد. در پایان با درنظر گرفتن نکات اشاره‌شده در این مقاله روش المان محدود طیفی تصادفی می‌تواند دقت و کارایی مناسب را در عین داشتن سرعت و همگرایی برای محققین به

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]

ارمغان آورد.

5- مراجع

[1] G. Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 9–12, pp. 1031-1051, 2009.

[2] M. Kaminski, *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*, pp. 20-30, Chichester: Wiley, 2013.

[3] R. G. Ghanem, P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, pp. 56-152, New York: Courier Dover Publications, 2003.

[4] R. Chowdhury, S. Adhikari, High dimensional model representation for stochastic finite element analysis, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 12, pp. 3917-3932, 2010.

[5] M. Chevreuil, A. Nouy, Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 89, No. 2, pp. 241-268, 2012.

[6] P. Zakian, N. Khaji, A novel stochastic-spectral finite element method for analysis of elastodynamic problems in the time domain, *Meccanica*, Vol. 51, No. 4, pp. 893-920, 2016.

[7] D. M. Do, W. Gao, C. Song, Stochastic finite element analysis of structures in the presence of multiple imprecise random field parameters, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 300, pp. 657-688, 2016.

[8] A. Asnafi, Analytic bifurcation investigation of cylindrical shallow shells under lateral stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 77-84, 2014. (in Persian فارسی)

[9] S. Irani, S. Sazesh, Random vibration of cantilever tapered beam under stochastic excitation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 138-145, 2013. (in Persian فارسی)

[10] A. T. Patera, A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *Computational Physics*, Vol. 54, No. 3, pp. 468-488, 1984.

[11] B. Hennings, R. Lammering, U. Gabbert, Numerical simulation of wave propagation using spectral finite elements, *CEAS Aeronautical Journal*, Vol. 4, No. 1, pp. 3-10, 2013.

[12] D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, The spectral element method for elastic wave equations—application to 2-D and 3-D seismic problems, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 9, pp. 1139-1164, 1999.

[13] W. Witkowski, M. Rucka, J. Chróścielewski, K. Wilde, On some properties of 2D spectral finite elements in problems of wave propagation, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 55, No. 0, pp. 31-41, 2012.

[14] A. Bobrowski, *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction*, pp. 4-42, Cambridge Cambridge University Press, 2005.

[15] M. I. Khodakarami, N. Khaji, M. T. Ahmadi, Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 213–216, No. 1, pp. 183-195, 2012.

[16] S. Huang, S. Mahadevan, R. Rebba, Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 194-205, 2007.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-09-22]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.7.24.9]