ISSN: 2476-6909; Modares Mechanical Engineering. 2024;24(03):177-188.

Tarbiat Modares University

Numerical Stability Enhancement of Lattice Boltzmann Method in The Simulation of Incompressible Flows with Higher Reynolds Numbers

ARTICLE INFO

Article Type
Original Research

Authors
Saremi Tehrani M.R.[1],
Ghadyani M.[1*],
Enjilela V.[2],

How to cite this article
Saremi Tehrani M R, Ghadyani M, Enjilela V, Numerical Stability Enhancement of Lattice Boltzmann Method in The Simulation of Incompressible Flows With Higher Reynolds Numbers. Modares Mechanical Engineering; *2024;24(03):177-188.*

[1] Department of Mechanics, Yadegar-e-Imam Khomeini (RAH) Shahre Rey Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.
[2] Department of Mechanics, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Iran.

***Correspondence**
Address: Department of Mechanics, Yadegar-e-Imam Khomeini (RAH) Shahre Rey Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

m.ghadyani@srbiau.ac.ir

Article History
Received: September 12, 2023
Accepted: June 9, 2024
ePublished: July 14, 2024

ABSTRACT

In this study, a new upwind scheme has been used to solve the continuous Boltzmann equation and to develop its application in the effective solution of incompressible flows. Time derivative in the Boltzmann equation has been discretized using the first-order forward finite difference scheme. The spatial derivatives in the Boltzmann equation have been discretized using this new scheme. Further, the combined effects of the upwind differential mechanism along with the finite difference method are presented to enhancement the stability of the standard lattice Boltzmann method in solving problems with high Reynolds numbers. To confirm the validation of the proposed method, one unsteady problem, this has an analytical solution, and two incompressible steady problems which have not analytical solutions, have been solved numerically. The first benchmark problem is the conductive heat transfer on a slab and two last problems are flow over a flat plate and flow in a lid-driven cavity. In order to check the numerical accuracy and stability of the proposed method, the results have been compared with the standard lattice Boltzmann method and the finite difference lattice Boltzmann method. The proposed method guarantees that without applying the filtering method, more stable and accurate results are obtained compared with the finite difference lattice Boltzmann method. The simulation results show the effectiveness of the present method and its appropriate compatibility with analytical solutions and other numerical methods.

Keywords Incompressible Flow, Standard Lattice Boltzmann Method, Finite Difference Lattice Boltzmann Method, Numerical Stability, Upwind Scheme.

CITATION LINKS

1- A lattice Boltzmann model for the compressible Euler .... 2- A new method to reach high-density ratios and .... 3- Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann .... 4- Accuracy of discrete-velocity BGK models for .... 5- On the stability of the finite difference based .... 6- Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models. 7- Numerical stability analysis of FDLBM. 8- Development of an Implicit Physical Influence Upwind Scheme for .... 9- A hybrid algorithm of lattice Boltzmann method and .... 10- The standard upwind compact .... 11- Parametric schemes for the simulation of .... 12- High-order weighted essentially nonoscillatory .... 13- Simulation of high-Mach-number inviscid flows using .... 14- A high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method for .... 15- Implementation of a high-order compact finite-difference ... 16- Simulation of three-dimensional incompressible flows in .... 17- Preconditioned WENO finite-difference .... 18- High order spectral difference .... 19- High-order upwind compact finite-difference .... 20- A finite-difference lattice Boltzmann model with .... 21- An differential quadrature finite element and .... 22- Differential quadrature and .... 23- Differential quadrature method in .... 24- Efficient high-order radial basis-function-based .... 25- Upwind local differential quadrature method for .... 26- A high-order generalized differential .... 27- An implicit high-order radial basis function-based .... 28- Incompressible MRT lattice Boltzmann model .... 29- Finite-difference lattice Boltzmann model for .... 30- The study of heating a cavity with .... 31- Solution of inverse heat conduction .... 32- Error localization in .... 33- Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and .... 34- Boundary layer theory. 35- A novel median dual finite volume .... 36- High-Re solutions for incompressible flow using the .... 37- Explicit finite-difference lattice Boltzmann method for .... 38- Numerical solutions of .... 39- On pressure and velocity boundary conditions for .... 40- A Non-Equilibrium Interpolation Scheme for ...

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

افزایش پایداری عددی روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم ناپذیر با اعداد رینولدز بالاتر

محمد رضا صارمی طهرانی[1]، محسن قدیانی[1*]، ولی انجیل الی[2]
[1] گروه مکانیک، واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
[2] گروه مکانیک، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران.

چکیده
در این مطالعه، از یك طرح جدید پادبادسو برای حل معادله پیوسته بولتزمن و توسعه کاربرد آن در حل موثر جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده شده است. مشتق زمانی در معادله بولتزمن با استفاده از طرح تفاضلات محدود پیشرو مرتبه اول و مشتق‌های مکانی آن بوسیله این طرح جدید گسسته‌سازی شده‌اند. علاوه بر این، اثرات ترکیبی مکانیزم تفاضل پادبادسو به همراه روش تفاضلات محدود برای بهبود پایداری روش شبکه بولتزمن استاندارد در حل مسائل با اعداد رینولدز بالا ارائه شده است. برای تایید اعتبار روش شبکه بولتزمن مبتنی بر طرح جدید پادبادسو، یک مساله ناپایا که حل تحلیلی دارد و دو مساله تراکم‌ناپذیر پایا که حل تحلیلی ندارند به صورت عددی حل شده‌اند. مساله معیار اول، مساله انتقال حرارت هدایتی روی یك میله و دو مساله دیگر شامل جریان سیال روی یك صفحه تخت و جریان حفره با درپوش متحرک است. به منظور بررسی دقت و پایداری عددی روش شبکه بولتزمن مبتنی بر طرح جدید پادبادسو نتایج حاصل با روش شبکه بولتزمن استاندارد و روش شبکه بولتزمن تفاضلات محدود مقایسه شده است. روش حاضر تضمین می‌کند که بدون اعمال روش فیلترینگ، نتایج پایدارتر و دقیق‌تری نسبت به روش شبکه بولتزمن تفاضلات محدود به‌دست می‌آید. نتایج شبیه‌سازی، کارایی روش شبکه بولتزمن مبتنی بر طرح جدید پادبادسو و تطابق مناسب آن را با حل‌های تحلیلی و سایر روش‌های عددی نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: جریان تراکم‌ناپذیر، روش شبکه بولتزمن استاندارد، روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود، پایداری عددی، طرح پادبادسو.

تاریخ دریافت: ۱٤۰۲/۰٦/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۰
*نویسنده مسئول: m.ghadyani@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه
روش شبکه بولتزمن یکی از روش‌های مطرح در دینامیك سیالات محاسباتی می‌باشد که در سه دهه گذشته به تکامل رسیده است و در حال حاضر با توجه به مزایای آن از جمله خطی بودن معادلات حاکم، سادگی الگوریتم و سهولت در اعمال شرایط مرزی، یکی از روش‌های مطرح و موفق برای حل مسائل مختلف جریان سیال به حساب می‌آید. در روش شبکه بولتزمن به جای بررسی رفتار یک ذره به تنهایی، رفتار مجموعه‌ای از ذرات به عنوان یک واحد بررسی می‌شود. در این روش توابع توزیع ذرات به عنوان مبنای تحلیل جریان سیال به کار گرفته می‌شوند[1]. روش شبکه بولتزمن توانایی خودش را برای شبیه‌سازی جریان‌های سیال مانند جریان‌های چندفاز، جریان‌های متخلخل و جریان‌های تراکم‌پذیر اثبات کرده است.

از محدودیت‌های روش شبکه بولتزمن استاندارد (روش استاندارد)، بحث ناپایداری این روش در شبیه‌سازی جریان‌های با رینولدز بالا می‌باشد. از این پس در تمامی نمودارها و جداول، روش شبکه بولتزمن استاندارد با نام روش استاندارد معرفی می‌شود. از آنجا که در کاربردهای صنعتی اکثر پدیده‌ها با جریان‌های سرعت بالا روبرو هستند. ایجاد توافق بین دقت و پایداری روش شبکه بولتزمن استاندارد از اهمیت و جذابیت بالایی برخوردار است[2] . یکی دیگر از محدودیت‌های روش شبکه بولتزمن استاندارد با فرآیند (برخورد- جریان) مقید بودن این روش به شبکه‌های یکنواخت با گام‌های فضایی برابر می‌باشد. به طور کلی برای حل معادله بولتزمن دو رویکرد وجود دارد. رویکرد اول، تعدیل مدل‌های سرعت گسسته شبکه بولتزمن است و رویکرد دوم یافتن روش‌های عملی برای حل عددی معادله بولتزمن است. در اینجا با توجه به رویکرد دوم، روش شبکه بولتزمن استاندارد را می‌توان به عنوان یک شکل گسسته خاص از معادله بولتزمن پیوسته در نظر گرفت و پس از گسسته سازی مکانی، معادله بولتزمن سرعت گسسته را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی مرسوم حل کرد. ویژگی اصلی این طرح‌ها گسسته‌سازی مستقل متغیرهای زمانی و مکانی است. چندین طرح خارج از شبکه با روش شبکه بولتزمن ترکیب شده‌اند که شامل روش‌های تفاضلات محدود، حجم محدود و المان محدود می‌باشد[3] .

برای بر طرف نمودن محدودیت روش شبکه بولتزمن استاندارد، طرح‌های پیشنهادی با استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان و تقریب-های مرتبه بالا در متغیرهای زمان و مکان برای حل مسائل مختلف استفاده شده‌اند. ریدر و استرلینک [4] اولین کسانی بودند که روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود (بولتزمن تفاضلی) را برای شبیه‌سازی معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر پیشنهاد کردند. در این پژوهش روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود را در تمامی نمودارها و جداول با عنوان بولتزمن تفاضلی بیان می‌کنیم. الامین و همکاران[5] شرایط پایداری طرح شبکه بولتزمن تفاضلات محدود را بر اساس طرح تفاضلات پادبادسو مرتبه دوم بررسی کردند. سافونه و سکرکا[6] نشان دادند که طرح‌های گسسته‌سازی مکانی مرکزی و مرتبه دوم پادباسو، لزجت عددی وارد مسأله نخواهند کرد و به افزایش پایداری عددی کمک می‌کند. ستا و تاکاکاشی[7] نشان دادند که طرح‌های تفاضلات پادبادسو برای شبیه‌سازی مسائل با عدد رینولدز بالا مناسب هستند[8]. بنابراین، طرح‌های پادبادسو به دلیل خواص پراکندگی و حذف لزجت عددی و افزایش پایداری در حل مسائل مختلف به شهرت رسیده‌اند[9-11]. در زمینه کاربرد روش‌های شبکه بولتزمن تفاضلات محدود مرتبه بالا، در سال‌های اخیر بیشتر از طرح‌های ذاتاً غیر نوسانی وزن‌دار مرتبه پنجم[12,13] یا طرح‌های تفاضلات

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

محدود فشرده[14-16] برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی استفاده می‌شود. هجران‌فر و سادات[17] برای حل دقیق جریان آشفته دوبعدی روی صفحه تخت روش تفاضل محدود ونو مرتبه پنجم در رینولدز ۱۰،۰۰۰،۰۰۰ با شبکه‌های غیریکنواخت را پیشنهاد کردند. لی[18] از روش شبکه بولتزمن اختلاف طیفی بر روی شبکه‌های غیریکنواخت استفاده کرد و جریان لایه مرزی بلازیوس را مدل‌سازی کرد. شبیه سازی او برای جریان با رینولدز ۱۰۰،۰۰۰ به شبکه‌های بسیار ریز نیاز داشت. سون و تیان[19] از طرح‌های فشرده مرتبه بالای پادبادسو برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده کردند و نشان دادند که ماهیت پراکندگی طرح‌های پادبادسو باعث می‌شود که دیگر نیازی به فیلترینگ برای حفظ پایداری عددی نباشد. طرح‌های مرتبه بالا برای بهبود دقت و عملکرد محاسباتی مناسب می‌باشند، اما مشکل اصلی این روش‌ها استفاده از یک روش فیلترینگ اضافی به جهت حفظ پایداری حل عددی می‌باشد، که به صورت عمومی بهینه کردن روش فیلترینگ و یافتن ضرایب بهینه، کاری بس دشوار است. اگرچه ادعا می‌شود که روش‌های تفاضلات محدود ضمنی بدون قید و شرط پایدار هستند اما در عمل، این روش دارای مشکلات پایداری بوده و نسبت به گام زمانی بسیار حساس می‌باشد[20].

روش مربعات تفاضلی یکی دیگر از روش‌های عددی نسبتا جدید است که در بسیاری از زمینه‌های علمی، روشی با کارایی بالا شناخته می‌شود[21]. اگرچه مشکلات عددی مانند ناپایداری، نوسان و ناپیوستگی در نزدیکی نقاط بحرانی را می‌توان در دیگر روش‌های مرسوم عددی مشاهده کرد اما حل روش مربعات تفاضلی در این مورد هموار و دقیق است. روش مربعات تفاضلی اولین بار توسط بلمن و همکاران[22] ارائه شده است. برت و مالک[23] به تفصیل سیر تکاملی روش را مورد بحث قرار دادند. روش مربعات تفاضلی در گسسته‌سازی مشتق جزئی تابع، از کلیه نقاط جانبی شبکه بهره می‌گیرد[22] و بر خلاف روش تفاضلات محدود که نسبت به مرتبه دقت از دو، سه یا چهار و یا تعداد بیشتری نقاط شبکه برای گسسته‌سازی استفاده می‌کند از دقت و وضوح بالاتری برخوردار است. از دیگر ویژگی‌های جذاب این روش الگوریتم ساده، انعطاف‌پذیری در شبکه‌های یکنواخت و پایداری عددی بیشتر نسبت به روش تفاضلات محدود می‌باشد. همچنین می‌توان شرایط مرزی را به راحتی روی آن اعمال کرد[24]. سون و ژو[25] روش مربعات تفاضلی پادبادسو موضعی را برای حل مسائل تراکم ناپذیر پایا در نواحی نامنظم پیشنهاد کردند، آنها با روش مربعات تفاضلی پادبادسوی موضعی جواب‌های عددی کاملا دقیقی در مقایسه با روش تفاضلات محدود برای جریان‌های با رینولدز بالا به‌دست آوردند. این روش به وسیله طرفدارانش به عنوان یک گزینه بالقوه برای روش‌های مرسوم عددی مانند روش تفاضلات محدود و اجزای محدود مطرح است[23]. تا کنون به اثرات ترکیب طرح مربعات تفاضلی و روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر به صورت گسترده پرداخته نشده است. روش جدید ارائه شده روش شبکه بولتزمن مبتنی بر مربعات تفاضلی ((روش حاضر) Differential quadrature lattice Boltzmann method) نامیده می‌شود و از این پس در تمامی نمودارها و جداول با نام روش حاضر عنوان می‌شود. یکی از معدود کارهای عددی مربوط به این حوزه محاسباتی، کار مربوط به لیو و همکاران[26] است که در آن از حلگر شار (LBFS) استفاده شده است. فرمول‌بندی طرح حلگر شار، مبتنی بر روش حجم محدود، پر چالش و نسبتاً پیچیده است. علاوه بر این در پژوهش مذکور از شبکه‌های غیریکنواخت و خوشه‌بندی شده استفاده شده است که بر دشواری الگوریتم افزوده شده و سادگی روش شبکه بولتزمن استاندارد نقض شده است. تمرکز اصلی کار حاضر، توسعه روش شبکه بولتزمن استاندارد و ارائه یک روش کاربردی عددی است که مزایای طرح‌های قبلی را حفظ و بر محدودیت‌ها غلبه کند. به منظور بررسی دقت حل روش حاضر نتایج سه مساله معیار حاصل با روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم و روش گسسته‌سازی

معادله زیر که به معادله پیوسته بولتزمن موسوم است بدون نیروهای خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + e_\alpha . \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = \Omega(f_\alpha), \qquad \alpha = 0,1,\dots,8 \qquad (۱)$$

که در آن f_α تابع توزیع چگالی ذرات است، $(\alpha = 0,1,\dots,8)$ و e_α بیانگر سرعت ذرات در جهات مختلف شبکه می‌باشد و $\Omega(f_\alpha)$عملگر برخورد است. معمولاً برای تقریب زدن عملگر برخورد از تقریب بی جی کی (Bhatnagar–Gross–Krook(BGK)) استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود[27]:

$$\Omega(f_\alpha) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \qquad (۲)$$

جایی که τ زمان آرامش و f^{eq} تابع توزیع تعادلی است. با ترکیب معادلات (۱) و (۲)، معادله شبکه بولتزمن بی جی کی موسوم به معادله شبکه بولتزمن استاندارد به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + e_{\alpha j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha{}^{eq}) \ , \qquad \alpha = 0,1,\dots,8 \qquad (۳)$$

زمان آرامش τ بیانگر نرخی است که در آن، توزیع محلی ذرات به موقعیت محلی تعادل می‌رسند و طبق رابطه زیر با ویسکوزیته ارتباط دارد.

$$\nu = c_s^2 \Delta t(\tau - \frac{1}{2}) \qquad (۴)$$

که در اینجا ν ویسکوزیته سینماتیکی و c_s سرعت صوت می‌باشند. سرعت صوت برای شبکه D_2Q_9 برابر با $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ است[3]. (که c بزرگی سرعت حرکت ذرات است).

در اینجا از مدل شبکه D_2Q_9 استفاده شده است. سرعت ذرات در جهات مختلف شبکه به شکل زیر بیان می‌شوند:

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ c\left[cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right)\right] & \alpha = 1,2,3,4 \\ c\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right), sin\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right] & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۵)$$

وقتی که توابع توزیع مشخص شدند خواص ماکروسکوپیک از قبیل چگالی و سرعت به سادگی از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha \qquad (۶)$$

$$\rho u_j = \sum_\alpha e_{\alpha j} f_\alpha \qquad (۷)$$

f^{eq} تابع توزیع تعادلی تنها به مقادیر خواص ماکروسکوپیک جریان در مکان x_j و زمان t وابسته است و طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha p\left\{1 + 3\frac{e_\alpha . u_j}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(e_\alpha . u_j)^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{{u_j}^2}{c^2}\right\} \qquad (۸)$$

که در آن ضرایب وزنی ω_α به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۹)$$

در شبیه‌سازی جریان‌های غیرحرارتی، مدل توزیع سرعت D_2Q_9 جواب‌های قابل قبولی می‌دهد. از آنجایی که در این مطالعه مسأله حرارتي نیز مورد بررسی قرار گرفته است، به دلیل نارسايي مدل D_2Q_9 در مسائل حرارتی از مدل توزیع سرعت D_2Q_8 استفاده می‌گردد و بردار سرعت ذرات e_α در جهت‌های هشت گانه مدل D_2Q_8 به صورت زیر تعریف می‌شود[28]:

$$e_\alpha = \begin{cases} c\left[cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right)\right] & \alpha = 1,2,3,4 \\ c\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{2\alpha-9}{4}\pi\right), sin\left(\frac{2\alpha-9}{4}\pi\right)\right] & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن ضرایب وزنی ω_α برای سرعت‌های گسسته در مدل D_2Q_8 به صورت زیر است:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} & \alpha = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12} & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

۲-۱- معرفی مدل شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود

از آنجایی که طرح‌های پادبادسو می‌توانند پایداری را بهبود ببخشند، به همین جهت گسسته‌سازی جمله مکانی در معادله (۳) با استفاده از طرح مرتبه اول پادبادسو در نزدیکی مرزها انجام می‌شود[29]:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{f_\alpha(x_j, \mathrm{t}) - f_\alpha(x_j - \Delta x_j, \mathrm{t})}{\Delta x_j}, & \mathrm{e}_{\alpha\mathrm{j}} \geq 0 \\ \frac{f_\alpha(x_j + \Delta x_j, \mathrm{t}) - f_\alpha(x_j, \mathrm{t})}{\Delta x_j}, & \mathrm{e}_{\alpha\mathrm{j}} < 0 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

برای سایر نقاط شبکه در دامنه محاسباتی از طرح مرتبه سوم پادبادسو استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{f_\alpha(x_j - 2\Delta x_j, t) - 6f_\alpha(x_j - \Delta x_j, t) + 3f_\alpha(x_j, t) + 2f_\alpha(x_j + \Delta x_j, t)}{6\Delta x_i} & \mathrm{e}_{\alpha\mathrm{j}} \geq 0 \\ \frac{-f_\alpha(x_j + 2\Delta x_j, t) + 6f_\alpha(x_j + \Delta x_j, t) - 3f_\alpha(x_j, t) - 2f_\alpha(x_j - \Delta x_j, t)}{6\Delta x_j} & \mathrm{e}_{\alpha\mathrm{j}} < 0 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

گسسته سازی جمله زمانی با استفاده از روش چهار مرحله‌ای رانج-کوتا با آرایه بوچر زیر انجام می‌شود[16] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} &= R(f_\alpha) \\ {f_\alpha}^{(0)} &= {f_\alpha}^n \\ {f_\alpha}^{(1)} &= {f_\alpha}^n + \beta_2 \Delta t R({f_\alpha}^n) \\ {f_\alpha}^{(2)} &= {f_\alpha}^n + \beta_3 \Delta t R({f_\alpha}^{(1)}) \\ {f_\alpha}^{(3)} &= {f_\alpha}^n + \beta_4 \Delta t R({f_\alpha}^{(2)}) \\ {f_\alpha}^{(n+1)} &= {f_\alpha}^n + \sum_{k=1}^{4} \xi_k ({f_\alpha}^{(k-1)}) \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

که در آن ضرایب معادلات به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \xi_4 = \frac{1}{6} \quad , \quad \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{3} \\ &\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_4 = 1 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

۲-۲- معرفی مدل شبکه بولتزمن مبتنی بر مربعات تفاضلی

روش شبکه بولتزمن مربعات تفاضلی (روش حاضر) ترکیبی از طرح نیمه گسسته برای ایجاد یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی و طرح گسسته‌سازی با روش مربعات تفاضلی می‌باشد. اگر برای گسسته‌سازی جمله مشتق زمانی در معادله (۳) از تقریب مرتبه اول تفاضلات محدود استفاده کنیم، با کمی محاسبه داریم:

$$f_\alpha^{new} = f_\alpha - \frac{\Delta t}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) - \Delta t \quad e_{\alpha j}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \qquad (۱۶)$$

در معادله (۱٦) مشتق‌های مکانی $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}$ با روش مربعات تفاضلی به شکل معادلات (۱۷) و (۱۸) گسسته می‌شوند که در آنها N برابر با تعداد نقاط دامنه محاسباتی در هر جهت x_j می‌باشد.

$$\frac{\partial(f_\alpha)}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{6} & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (f_\alpha)_1 \\ (f_\alpha)_2 \\ (f_\alpha)_3 \\ (f_\alpha)_4 \\ (f_\alpha)_5 \\ (f_\alpha)_6 \\ \vdots \\ (f_\alpha)_{N-2} \\ (f_\alpha)_{N-1} \\ (f_\alpha)_N \end{Bmatrix} \qquad (۱۷)$$

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

$$\frac{\partial (f_\alpha)}{\partial x_j}=\begin{bmatrix} \frac{-11}{6} & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{11}{6} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} (f_\alpha)_1 \\ (f_\alpha)_2 \\ (f_\alpha)_3 \\ (f_\alpha)_4 \\ (f_\alpha)_5 \\ (f_\alpha)_6 \\ \vdots \\ (f_\alpha)_{N-2} \\ (f_\alpha)_{N-1} \\ (f_\alpha)_N \end{Bmatrix} \quad (۱۸)$$

که معادلات (۱۷) و (۱۸) به ترتیب مربوط به حالات $\boldsymbol{e_{\alpha j}} \geq \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{e_{\alpha j}} < \mathbf{0}$ می‌باشد

۳- نتایج عددی و بحث

در این قسمت، سه مساله معیار برای نشان دادن و ارزیابی عملکرد روش شبکه بولتزمن مبتنی بر مربعات تفاضلی (روش حاضر) مورد استفاده قرار می‌گیرد و نتایج حاصل با روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود (بولتزمن تفاضلی) مقایسه می‌شوند.

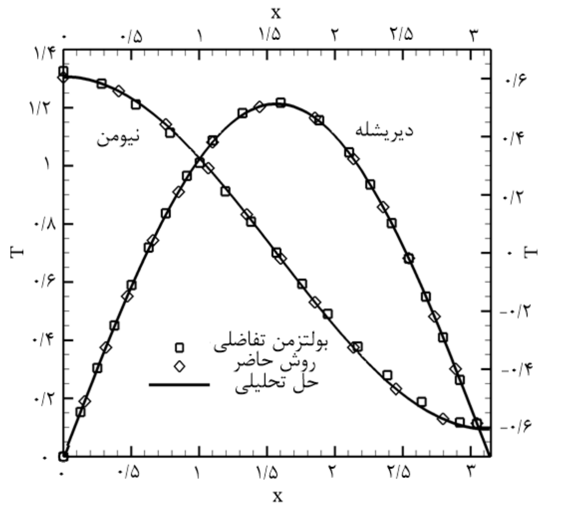
۳-۱- توزیع دما بر روی میله

در بسیاری از موارد، حل تحلیلی مساله انتقال حرارت هدایتی بسیار سودمند است. بسیاری از محققان این مسأله را با استفاده از روش‌های مبتنی بر روش شبکه بولتزمن تجزیه و تحلیل کرده اند[30,31]. در این شبیه‌سازی هدایت حرارتی گذرا در یک میله افقی عایق به طول π و محدود به دامنه $0 \leq x \leq \pi$ که توسط یک شبکه‌ی $N_x \times N_y =$ ۱۰۱ × ۲۱ شبکه‌بندی شده در نظر گرفته می‌شود. هدف این مسأله محاسبه توزیع دما در میله پس از گذشت یک زمان معین $t > 0$ با استفاده از دو شرط مرزی دیریشله و نیومن و مقایسه با حل تحلیلی و دیگر روش‌های عددی تعریف شده می‌باشد.

براي تاييد محاسبات اندازه گام مکانی و زمانی به ترتیب $\Delta y = \Delta x = \frac{\pi}{(N_x-1)}$، $\Delta t =$ ۰/۰۰۰۲ در نظر گرفته می‌شود. سرعت ذرات در روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود $c =$ ۱۲/۱۰ و $c =$ ۲۷/۳۴ و برای روش حاضر $c =$ ۰/۳۴ انتخاب شده است. علاوه بر این، مقدار ضریب پخش حرارتی $\alpha = 2C_S^2(\tau - \frac{\Delta t}{2}) = 2.5$ در نظر گرفته شده است. در این شبیه سازی، نتایج در یک زمان معین $t =$ ۰/۲ و تعداد گام زمانی ۱۰۰۰ رسم شده است.

در ابتدا برای محاسبه توزیع دما با شرط مرزی دیریشله دمای دو انتهای سمت چپ و راست میله $T_L = T_R =$ ۰ را ثابت فرض می‌کنیم و همچنین مرز بالا و پایین میله را عایق در نظر می‌گیریم. شرط اولیه و شرایط مرزی این مسأله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} T(x,0) = 2sinx \\ T(0,t) = 0 \\ T(\pi,t) = 0 \end{cases} \quad (۱۹)$$



شکل ۱) مقایسه حل‌های عددی و تحلیلی در مسئله انتقال حرارت بر روی میله افقی با شرایط مرزی دیریشله و نیومن

همچنین حل تحلیلی مسأله با شرایط مرزی دیریشله عبارت است از:

$$T(x,t) = 2e^{-\alpha t}sinx \quad (۲۰)$$

در این مسأله حرارتی به دلیل نارسایی اعمال مدل D_2Q_9 در شرط مرزی دیریشله، در روش شبکه بولتزمن مبتنی بر تفاضلات محدود از مدل توزیع سرعت D_2Q_8 استفاده می‌شود. در ادامه برای محاسبه توزیع دما با شرط مرزی نیومن، دو انتهای سمت چپ و راست میله، عایق در نظر گرفته می‌شوند. شرط اولیه و شرایط مرزی این مسأله به صورت زیر تغییر داده می‌شوند:

$$\begin{cases} T(x,0) = cosx \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\pi,t) = 0 \end{cases} \quad (۲۱)$$

در شبیه‌سازی این حالت، با اعمال شرایط مرزي در همه مرزها از شرط نیومن استفاده می‌کنیم. حل تحلیلی این مسأله با شرایط مرزی نیومن عبارت است از:

$$T(x,t) = e^{-\alpha t}cosx \quad (۲۲)$$

مقایسه حل‌های عددی مسأله انتقال حرارت روی میله افقی در شرایط مرزی انتهایی دیریشله و نیومن با حل تحلیلی در شکل (۱) انجام شده است. شکل (۱) نشان می‌دهد که روش حاضر تطابق بهتری با حل تحلیلی در قیاس با روش مربعات تفاضلی دارد. برای نشان دادن میزان دقت، مقایسه خطای حاصل توسط معادلات (۲۳)-(۲۵) بررسی می‌شوند [32,33].

جدول ۱) مقایسه شاخص خطای L_1 ، L_2 و L_∞ با حل تحلیلی مسأله انتقال حرارت روی میله در $t=$ ۰/۲ و شبکه (۱۰۱×۲۱)

شاخص خطا	L_1	L_2	L_∞
شرط مرزی دیریشله			
روش بولتزمن تفاضلی	۰/۰۰۳۲۴۱	۰/۰۰۳۹۵۹	۰/۰۰۶۴۰۰
روش حاضر	۰/۰۰۰۵۶۷	۰/۰۰۲۹۹۵	۰/۰۰۲۱۲۵۴
شرط مرزی نیومن			
شاخص خطا	L_1	L_2	L_∞
روش بولتزمن تفاضلی	۰/۰۱۱۸۷۳	۰/۰۰۱۳۴۵۵	۰/۰۲۱۷۵۲
روش حاضر	۰/۰۰۰۲۰۵	۰/۰۰۰۵۷۸	۰/۰۰۲۷۳۶

$$L_1\ Norm=\frac{\sum_{i,j}\left|\left(T_{i,j}^{numerical}-T_{i,j}^{analytical}\right)\right|}{N} \quad (۲۳)$$

$$L_2\ Norm=\sqrt{\frac{\sum_{i,j}\left(T_{i,j}^{numerical}-T_{i,j}^{analytical}\right)^2}{N}} \quad (۲۴)$$

$$L_\infty\ Norm=Max\left|T_{i,j}^{numerical}-T_{i,j}^{analytical}\right| \quad (۲۵)$$

مقایسه شاخص خطای L_1 ، L_2 و L_∞ برای شرایط مرزی دیریشله و نیومن در جدول (۱) نشان داده شده است. نتایج به دست آمده از روش حاضر نسبت به روش بولتزمن تفاضلی خطای محاسباتی کمتری را نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده از روش حاضر نسبت به روش بولتزمن تفاضلی خطای محاسباتی کمتری را نشان می‌دهد.

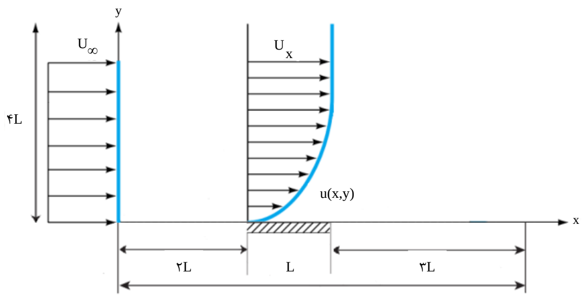
۳-۲- جریان در اطراف صفحه تخت

جریان لایه مرزی موجود در شکل (۲) را می‌توان به عنوان ساده‌ترین جریان که دارای یک مرز جامد به همراه شرایط ورودی و خروجی است معرفی کرد. در این جریان به دلیل وجود حل تشابهی بلازیوس[34] به راحتی می‌توان دقت روش حاضر را مورد بررسی قرار داد.

حل ضریب اصطکاک سطحی (C_f) بوسیله جایگزینی مشتقات با تقریب تفاضلات محدود انجام می‌شود. در این مسأله از تقریب تفاضلات محدود مرتبه اول برای مشتق جزئی u نسبت به y استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_f=\frac{2\upsilon}{u_0^2}\frac{(u_{i,1}-u_{i,0})}{\Delta y} \quad (۲۶)$$

در اینجا یک لایه مرزی بسیار نازک در نزدیکی صفحه وجود دارد، که در آن سرعت مماس u دارای تغییرات زیادی در امتداد جهت عمود بر دیوار می‌باشد، یعنی از صفر در روی دیوار به ۰/۹۹ U_∞ لبه بیرونی لایه مرزی می‌رسد. برای حل چنین گرادیان بزرگی نیاز به وضوح بسیار بالای شبکه در لایه مرزی بسیار نازک می‌باشد.



شکل ۲) نمای شماتیک هندسه جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت

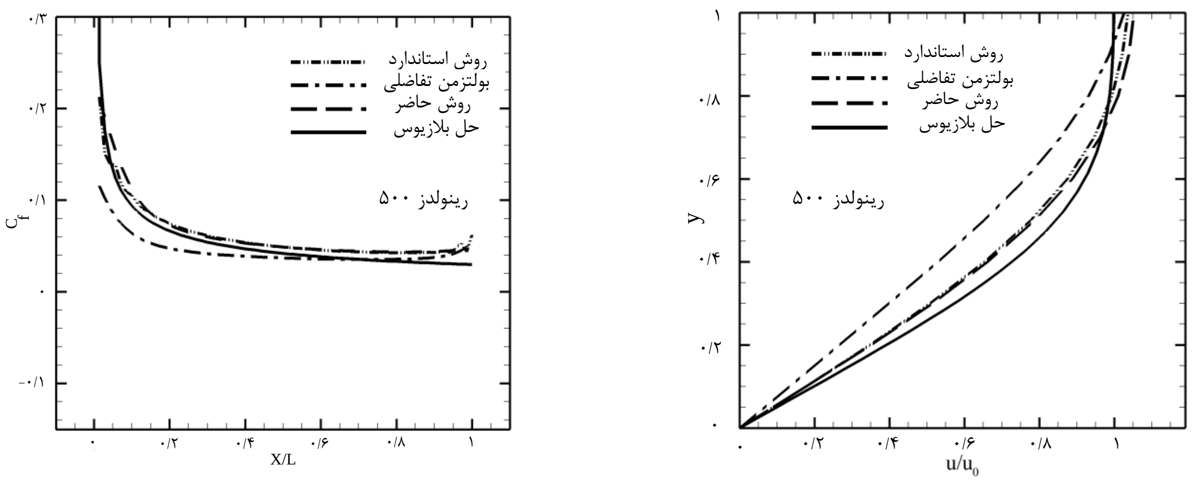
جدول ۲) مقادیر متغیرهای فیزیکی مسأله جریان در اطراف صفحه تخت با اعداد رینولدز مختلف.

عدد رینولدز	گام مکانی	ویسکوزیته سینماتیک	نقاط شبکه برای Lها	سرعت جریان آزاد	گام زمانی
روش استاندارد					
۵۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۳۵	۷۰	۰/۲۵	۰/۱۰۰
۱۰۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
۱۵۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
۲۰۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
۳۰۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
روش بولتزمن تفاضلی و روش حاضر					
عدد رینولدز	گام مکانی	ویسکوزیته سینماتیک	نقاط شبکه برای Lها	سرعت جریان آزاد	گام زمانی
۵۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۰۳۵۰۰۰	۷۰	۰/۲۵	۰/۱۰۰
۱۰۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۰۲۵۰۰۰	۵۰	۰/۵۰	۰/۰۰۲
۱۵۰۰	۰/۱۲۵	۰/۰۰۱۸۷۵۰	۵۰	۰/۴۵	۰/۰۰۲
۲۰۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۰۱۲۵۰۰	۵۰	۰/۵۰	۰/۰۰۲
۳۰۰۰	۰/۱۲۵	۰/۰۰۰۹۳۷۵	۵۰	۰/۴۵	۰/۰۰۲

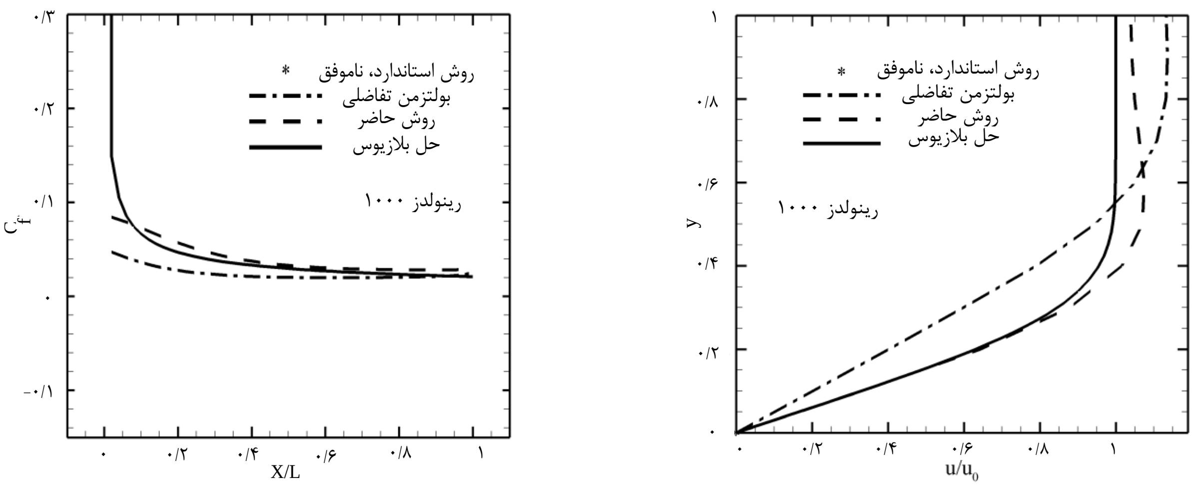
هدف این مسأله محاسبه پروفیل سرعت و ضریب اصطکاک سطحی در اعداد رینولدز مختلف توسط روش حاضر و مقایسه آن با حل تشابهی بلازیوس و دیگر روش‌های معرفی شده می‌باشد. برای اعمال شرایط مرزی این مسأله در روش شبکه بولتزمن استاندارد، مرز سمت چپ از شرط مرزی زو و هی[39] استفاده شده است. در مرز بالا و سمت راست، شرایط مرزی نیومن وجود دارد و در مرز پایین، شرط مرزی عدم لغزش برای صفحه تخت اعمال می‌شود و در روش حاضر شرایط مرزی برون‌یابی غیرتعادلی در تمام مرزها اعمال می‌شود.

در این شبیه سازی طول صفحه تخت برابر L و عدد رینولدز نیز به صورت $Re=\frac{u_0\times N_x\times\Delta x}{\upsilon}$ تعریف می‌شود. به منظور انجام محاسبات در جدول (۲) مقادیر اندازه گام‌های زمانی و مکانی و همچنین متغیرهای فیزیکی که برای رینولدزهای مختلف و روش‌های مورد مطالعه در نظر گرفته شده‌اند، نمایش داده شده است.

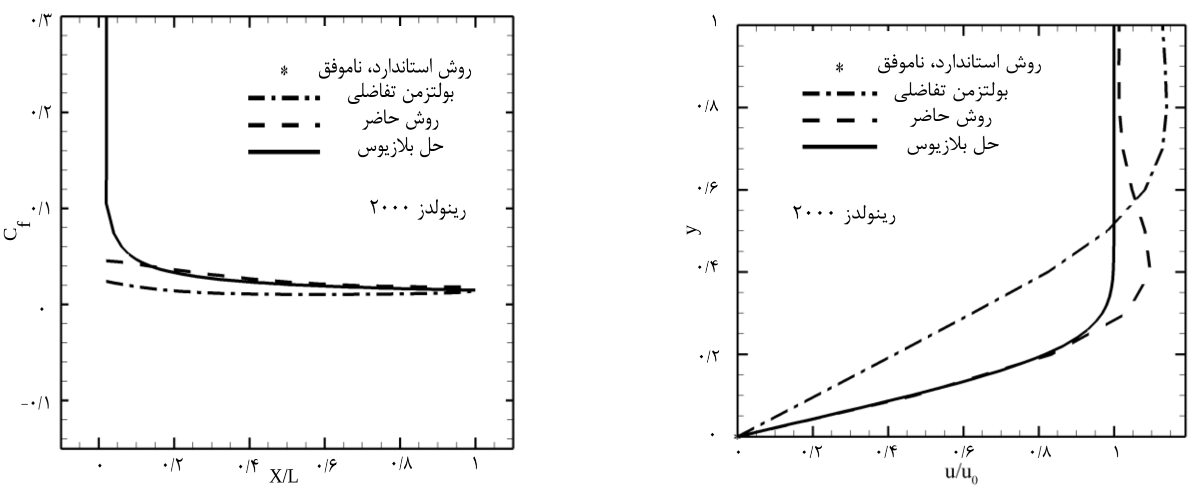
[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳) مقایسه پروفیل های سرعت جریان لایه مرزی بلازیوس و ضریب اصطکاک سطحی روی صفحه تخت در **(الف)** رینولدز ۵۰۰، **(ب)** رینولدز ۱۰۰۰، و **(ج)** رینولدز ۲۰۰۰

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

جدول ۳) مقایسه شاخص خطای L_1 ، L_2 و L_∞ با حل بلازیوس در ضریب اصطکاک محلی مسأله جریان در اطراف صفحه تخت.

عدد رینولدز	۵۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰
		خطای L_1			
روش استاندارد	۰/۰۰۹۷۳۲	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
روش بولتزمن تفاضلی	۰/۰۱۳۵۵۹	۰/۰۱۳۸۹۱	۰/۰۱۵۳۲۹	۰/۰۱۴۰۰۲	۰/۰۱۳۸۳۳
روش حاضر	۰/۰۱۰۵۹۰	۰/۰۰۷۱۱۳	۰/۰۰۴۶۱۹	۰/۰۰۴۷۷۶	۰/۰۰۴۴۸۵
		خطای L_2			
روش استاندارد	۰/۰۱۱۱۲۴	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
روش بولتزمن تفاضلی	۰/۰۲۳۶۱۸	۰/۰۲۱۹۵۷	۰/۰۲۱۱۹۸	۰/۰۱۹۵۲۵	۰/۰۱۷۸۴۱
روش حاضر	۰/۰۱۲۳۵۵	۰/۰۱۱۳۲۰	۰/۰۱۰۰۶۸	۰/۰۱۰۱۱۷	۰/۰۰۹۵۵۶
		خطای L_∞			
روش استاندارد	۰/۰۳۵۸۶۳	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
روش بولتزمن تفاضلی	۰/۱۳۲۸۲۲	۰/۱۰۱۴۱۱	۰/۰۸۸۶۱۳	۰/۰۸۰۹۷۹	۰/۰۶۹۱۳۵
روش حاضر	۰/۰۳۸۷۹۸	۰/۰۶۴۱۹۸	۰/۰۶۰۹۶۲	۰/۰۵۹۳۹۲	۰/۰۵۳۷۸۲

نتایج حاصل از مقایسه پروفیل‌های سرعت بدون بعد و ضریب اصطکاک سطحی با حل تشابهی بلازیوس برای برخی اعداد رینولدز در شکل (۳) نشان داده شده است.

شایان ذکر است که آزمایش‌های عددی نشان داده‌اند که حل عددی روش استاندارد در اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۱۵۰۰، ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ به دلیل ناپایداری، واگرا می‌گردند. از طرفی روش حاضر نسبت به روش استاندارد تقریباً تا چهار برابر در افزایش عدد رینولدز جریان موفق‌تر بوده است. با در نظر گرفتن شکل (۳) به راحتی می‌توان دریافت که نتایج شبیه سازی شده از نظر کیفی با حل‌های بلازیوس به خوبی مطابقت دارد و با افزایش عدد رینولدز، حل روش حاضر به حل بلازیوس نزدیکتر می‌شود[35]. از نظر کمی، مقایسه دقت ضرایب اصطکاک سطحی به روش حاضر با تقریب تفاضلات محدود مرتبه اول با حل بلازیوس بوسیله شاخص خطای L_1 ، L_2 و L_∞ در جدول (۳) نشان داده شده است.

همانطور که نتایج جدول (۳) نشان می‌دهند، حل عددی به روش حاضر در اعداد رینولدز بالا عملکرد بهتری دارد و خطای محاسباتی آن به طور قابل توجهی در مقایسه با روش بولتزمن تفاضلی کمتر است.

۳-۳- جریان در حفره با درپوش متحرک

این مسأله اغلب به منظور بررسی دقت روش‌های عددی برای جریان‌های تراکم ناپذیر پایا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مسأله جریان سیال داخل یک حفره مربعی به ابعاد $H = 1$ که درب بالایی آن با سرعت ثابت $u_0 = ۰/۱$ از چپ به راست حرکت می‌کند

جدول ۴) متغیرهای فیزیکی جریان در یک حفره درب متحرک برای روش‌های مختلف با اعداد رینولدز مختلف.

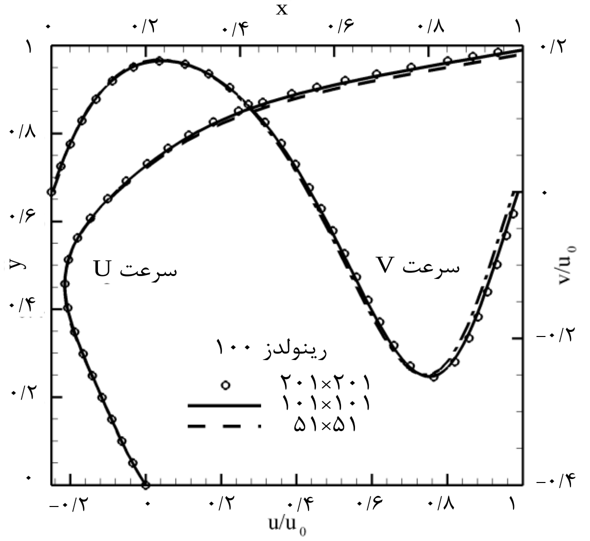
		روش استاندارد		
رینولدز	سرعت درب متحرک	ویسکوزیته	گام مکانی	گام زمانی
۱۰۰	۰/۱	۰/۱۰۰	۱	۱
۴۰۰	۰/۱	۰/۰۲۵	۱	۱
۱۰۰۰	۰/۱	۰/۰۱۰	۱	۱
۳۲۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
۵۰۰۰	ناموفق	ناموفق	ناموفق	ناموفق
		روش بولتزمن تفاضلی و روش حاضر		
رینولدز	سرعت درب متحرک	ویسکوزیته	گام مکانی	گام زمانی
۱۰۰	۰/۱	۰/۰۰۱۰۰۰	۰/۰۱	۰/۰۰۰۵
۴۰۰	۰/۱	۰/۰۰۰۲۵۰	۰/۰۱	۰/۰۰۰۵
۱۰۰۰	۰/۱	۰/۰۰۰۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۰۰۵
۳۲۰۰	۰/۴	۰/۰۰۰۱۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۰۵
۵۰۰۰	۰/۵	۰/۰۰۰۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۰۰۵

و سه دیواره دیگر ثابت هستند در نظر گرفته می‌شود. در این شبیه‌سازی یک شبکه‌بندی یکنواخت $\boldsymbol{N_x} \times \boldsymbol{N_y} =$ ۱۰۱ × ۱۰۱ درنظر گرفته شده است و عدد رینولدز به صورت $\boldsymbol{Re} = \frac{u_0 \times N_x \times \Delta x}{v}$ تعریف می‌گردد. در این شبیه سازی قصد داریم اعتبار سنجی پروفیل سرعت با روش حاضر و مقایسه دقت آن با دیگر روش‌های عددی را بررسی کنیم. علاوه بر این، خطوط جریان را در اعداد رینولدز مختلف با روش حاضر به‌دست آوریم. در جدول (٤) مقادیر اندازه گام‌های زمانی و مکانی و همچنین متغیرهای فیزیکی که برای محاسبه رینولدزهای مختلف استفاده شده‌اند نمایش داده شده است. برای اعمال شرایط مرزی در این مسأله در روش شبکه بولتزمن استاندارد، مرز بالایی از شرط مرزی زو و هی[39] و در سایر مرزها شرایط مرزی بازگشت به عقب استفاده شده است. در روش بولتزمن تفاضلی و روش حاضر شرایط مرزی برون‌یابی تابع توزیع غیرتعادلی[40] در تمام مرزها اعمال می‌شود.

در این مسأله، یک مطالعه پالایش شبکه به منظور بررسی حساسیت نتایج به‌دست آمده با اعمال روش استاندارد به اندازه شبکه در رینولدز ۱۰۰ انجام شده است.

محاسبات با استفاده از روش استاندارد، برای شبکه‌های محاسباتی بر روی (۲۰۱×۲۰۱) و (۱۰۱×۱۰۱)، (۵۱×۵۱)× N_x $N_y =$ انجام می‌شود و پروفیل سرعت u در امتداد خط مرکزی عمودی و همچنین پروفیل سرعت v در امتداد خط مرکزی افقی در شکل (۴) برای این شبکه‌ها ترسیم شده است[12].

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]



شکل ۴) مطالعه پالایش شبکه با روش استاندارد بر روی پروفیل‌های سرعت در امتداد صفحه میانی افقی و عمودی جریان حفره با درب محرک در رینولدز ۱۰۰

در شکل (۵) مقایسه پروفیل‌های سرعت با روش‌های مختلف در امتداد صفحات میانی نشان داده شده است و همچنین خطوط جریان که با روش حاضر بدست آمده است برای اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده است. در این شکل‌ها می‌توان به وضوح دید که عدد رینولدز تاثیر قابل توجهی بر پروفایل‌های سرعت و الگوی جریان دارد[15].

نتایج نشان می‌دهد که حل عددی روش استاندارد در رینولدزهای ۳۲۰۰ و ۵۰۰۰ به دلیل ناپایداری، واگرا می‌شود و از کار می‌افتد. در شکل (۵) مشاهده می‌شود که پروفیل‌های سرعت حل حاضر با نتایج گیا و همکاران[36] تطابق بسیار خوبی دارد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود خطوط جریان در $Re \leq$ ۱۰۰۰ تنها دارای سه گردابه شامل یک گرداب اولیه در مرکز و یک جفت گرداب ثانویه در گوشه های پایین است. در رینولدز ۳۲۰۰ و بالاتر در گوشه سمت چپ بالای حفره یک گردابه ثانویه ایجاد می‌شود. در نتیجه با افزایش عدد رینولدز، مرکز گردابه اولیه به سمت مرکز حفره حرکت می‌کند[37]. نتایج حاصل از این مطالعه تطابق خوبی با نتایج پیشنهاد شده توسط ارترک و همکاران[38] دارد.

در مقایسه با روش استاندارد مشخص شد که روش حاضر، میدان جریان را با پایداری بیشتری محاسبه می‌کند و تا اعداد رینولدز تقریبا پنج برابر بزرگتر قادر به حل جریان سیال می‌باشد. همچنین روش حاضر در مقایسه با روش بولتزمن تفاضلی بدون استفاده از روش‌های مرسوم افزایش پایداری که در روش تفاضلات محدود رایج است، پایداری قوی‌تری را از خود نشان می‌دهد. تاریخچه همگرایی حل با توجه به پروفیل سرعت u در میدان جریان برای سه طرح مختلف در شکل (٦) نشان داده شده است تعداد گام‌های زمانی ۱۸۰۰۰ انتخاب شده است و معیار همگرایی برای دستیابی به مقدار خطای کمتر از 10^{-7} تنظیم شده است.

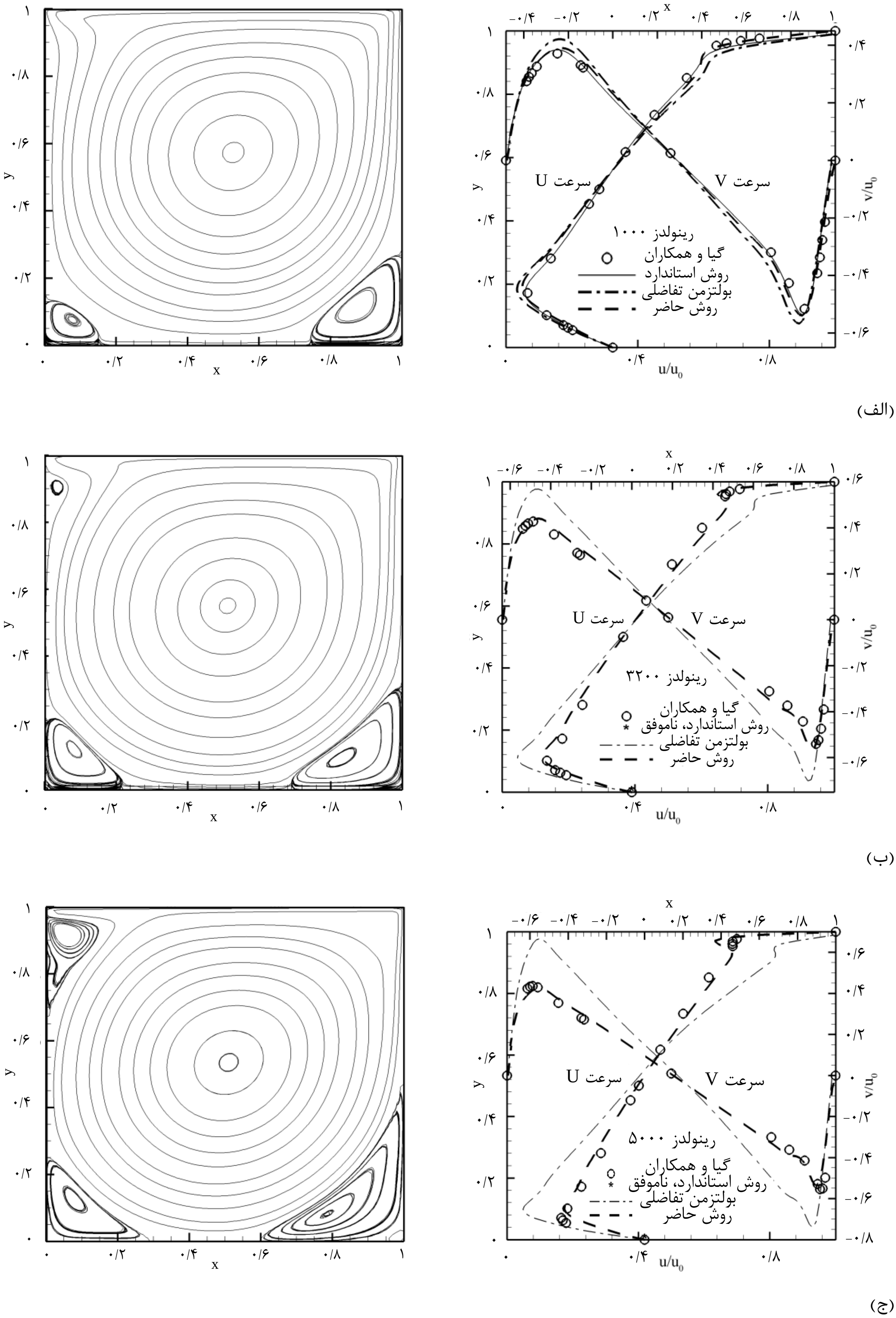
همانطور که مشاهده می شود، با افزایش تکرارها کمترین خطا مربوط به حل روش استاندارد است، اما این روش قادر به حل جریان با اعداد رینولدز بالاتر از ۱۰۰۰ نیست. علاوه بر این روش حاضر در مقایسه با روش بولتزمن تفاضلی سریع‌تر همگرا می‌شود و نوسانات کمتری را از خود نشان می‌دهد. بنابراین روش حاضر می‌تواند حل‌های دقیقی را برای جریان‌های پایا ارائه دهد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک روش جدید به نام روش شبکه بولتزمن مربعات تفاضلی برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم ناپذیر پایا و ناپایا، پیشنهاد شد. روش شبکه بولتزمن ارائه شده متشکل از مدل سرعت گسسته با تقریب باتنکار-گروس- کروک به عنوان معادلات حاکم برای حل مسائل معیار در یک بعد و دو بعد مورد استفاده قرار گرفت. به منظور دستیابی به دقت مرتبه بالاتر و حذف نوسانات عددی از روش مربعات تفاضلی موضعی پادبادسو برای گسسته‌سازی مکانی معادله شبکه بولتزمن استفاده شد. از طرفی با توجه به ماهیت طرح‌های پادبادسو دیگر نیازی به استفاده از روش‌های مرسوم به منظور بهبود پایداری برای شبیه‌سازی جریان‌های با اعداد رینولدز بالا نمی‌باشد. کارایی روش حاضر با شبیه‌سازی سه مساله معیار مورد بررسی قرار گرفت و در مقایسه با دیگر روش‌های عددی و حل‌های تحلیلی و تجربی مورد تایید قرار گرفت و تطابق بسیار خوبی را از خود نشان داد.

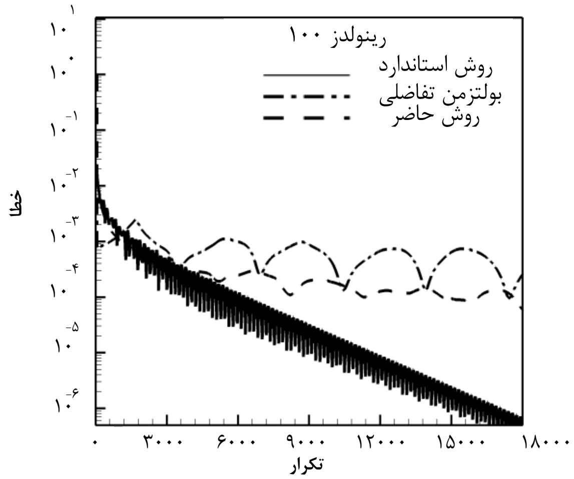
نتایج شبیه‌سازی حاکی از آن است که روش شبکه بولتزمن مبتنی بر مربعات تفاضلی مزایای روش‌های قبلی از جمله سادگی فرمول‌بندی روش شبکه بولتزمن را حفظ نموده و در عین حال محدودیت پایداری روش شبکه بولتزمن استاندارد را بر طرف نموده است. همچنین پایداری حل روش مربعات تفاضلی بر خلاف روش تفاضلات محدود به انتخاب گام زمانی و عدد کورانت یا عدد پکله یا امثالهم وابسته نیست.

روش شبکه بولتزمن مبتنی بر مربعات تفاضلی برای پیاده‌سازی ساده‌تر بوده و از ویژگی دقت و پایداری قوی‌تری نسبت به روش شبکه بولتزمن تفاضلات محدود برخوردار است. برای اثبات این ادعا خطای بین حل‌های عددی و تحلیلی در اندازه شبکه‌های مختلف برای روش حاضر در مقایسه با روش بولتزمن تفاضلی محاسبه شد. با توجه به اینکه روش حاضر در کل ناحیه حل محاسباتی از تعداد نقاط شبکه بیشتری نسبت به روش بولتزمن تفاضلی استفاده می‌کند بنابراین خطای محاسبات به میزان قابل توجهی کاهش یافت. در نهایت می‌توان گفت که این روش راهی رو به جلو در کاربردهای مهندسی ارائه می‌دهد و می‌توان آن را جایگزینی مناسب برای روش بولتزمن تفاضلی دانست.



شکل ۵) خطوط جریان بدست آمده از روش حاضر و مقایسه پروفیل‌های سرعت در صفحات میانی برای جریان حفره با درب متحرک در **(الف)** رینولدز ۱۰۰۰، **(ب)** رینولدز ۳۲۰۰، و **(ج)** رینولدز ۵۰۰۰

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]



شکل ۶) مقایسه خطای پروفیل سرعت u برای سه طرح عددی مختلف در رینولدز ۱۰۰

تشکر و قدردانی: نویسندگان مراتب تشکر و قدردانی خود را از حامیان این پژوهش، به ویژه دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری به عمل می‌آورند.

تاییدیه اخلاقی: محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیر ایرانی منتشر نشده است.

تعارض منافع: در این مقاله هیچ تعارض منافعی برای اظهار وجود ندارد.

فهرست علایم

u	سرعت سیال (m/s)
t	زمان (s)
T	دما (K)
L	طول دامنه
H	ابعاد دامنه
Re	عدد رینولدز
c_s	سرعت صوت
τ	زمان آسایش
α	ضریب پخش حرارتی
υ	لزجت سینماتیکی (m^2/s)
C_f	ضریب اصطکاک سطحی
δ	ضخامت لایه مرزی
N	تعداد نقاط شبکه
Δx	گام مکانی
Δt	گام زمانی (s)
ω_α	ضریب وزنی
e_α	سرعت ذرات
f_α	تابع توزیع

زیر نویس‌ها

α	جهت سرعت‌های گسسته
j	راستای جهت x یا y

بالا نویس‌ها

eq	وضعیت تعادلي
n	مراحل روش رانگ-کوتا

منابع

1- Zhang J, Yan G, Shi X, Dong Y. A lattice Boltzmann model for the compressible Euler equations with second-order accuracy. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2009 May 10;60(1):95-117.

2- Passandideh-Fard M. A new method to reach high-density ratios and low viscosities based on the Shan-Chen multiphase model in lattice Boltzmann method. Modares Mechanical Engineering. 2017 Nov 10;17(9):145-52.

3- Jalali H, Kamali Moghadam R. Lattice Study of the Finite Volume-Lattice Boltzmann Method in Simulation of Laminar Viscous Compressible Flow. Modares Mechanical Engineering. 2018 May 10;18(3):417-28.

4- Reider MB, Sterling JD. Accuracy of discrete-velocity BGK models for the simulation of the incompressible Navier-Stokes equations. Computers & Fluids. 1995 May 1;24(4):459-67.

5- El-Amin MF, Sun S, Salama A. On the stability of the finite difference based lattice Boltzmann method. Procedia Computer Science. 2013 Jan 1;18:2101-8.

6- Sofonea V, Sekerka RF. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models. Journal of Computational Physics. 2003 Jan 20;184(2):422-34.

7- Seta T, Takahashi R. Numerical stability analysis of FDLBM. Journal of Statistical Physics. 2002 Apr;107:557-72.

8- Vakilipour S, Mohammadi M, Riazi R, Ormiston S, Amiri K, Barati S. Development of an Implicit Physical Influence Upwind Scheme for Cell-Centered Finite Volume Method. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. 2017 Apr 1;11(5):1031-9.

9- Shi X, Huang X, Zheng Y, Ji T. A hybrid algorithm of lattice Boltzmann method and finite difference–based lattice Boltzmann method for viscous flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2017 Dec 20;85(11):641-61.

10- Fan P. The standard upwind compact difference schemes for incompressible flow simulations. Journal of Computational Physics. 2016 Oct 1;322:74-112.

11- Krivovichev GV. Parametric schemes for the simulation of the advection process in finite-difference-based single-relaxation-time lattice Boltzmann methods. Journal of Computational Science. 2020 Jul 1;44:101151.

12- Hejranfar K, Saadat MH, Taheri S. High-order weighted essentially nonoscillatory finite-difference formulation of the lattice Boltzmann method in

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]

generalized curvilinear coordinates. Physical Review E. 2017 Feb 24;95(2):023314.
13- Shirsat AU, Nayak SG, Patil DV. Simulation of high-Mach-number inviscid flows using a third-order Runge-Kutta and fifth-order WENO-based finite-difference lattice Boltzmann method. Physical Review E. 2022 Aug 23;106(2):025314.
14- Polasanapalli SR, Anupindi K. A high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method for simulation of natural convection. Computers & Fluids. 2019 Mar 15;181:259-82.
15- Hejranfar K, Ezzatneshan E. Implementation of a high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method in generalized curvilinear coordinates. Journal of Computational Physics. 2014 Jun 15;267:28-49.
16- Ezzatneshan E, Hejranfar K. Simulation of three-dimensional incompressible flows in generalized curvilinear coordinates using a high-order compact finite-difference lattice Boltzmann method. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2019 Mar 10;89(7):235-55.
17- Hejranfar K, Saadat MH. Preconditioned WENO finite-difference lattice Boltzmann method for simulation of incompressible turbulent flows. Computers & Mathematics with Applications. 2018 Sep 15;76(6):1427-46.
18- Li W. High order spectral difference lattice Boltzmann method for incompressible hydrodynamics. Journal of Computational Physics. 2017 Sep 15;345:618-36.
19- Sun YX, Tian ZF. High-order upwind compact finite-difference lattice Boltzmann method for viscous incompressible flows. Computers & Mathematics with Applications. 2020 Oct 1;80(7):1858-72.
20- Chen X, Chai Z, Wang H, Shi B. A finite-difference lattice Boltzmann model with second-order accuracy of time and space for incompressible flow. arXiv preprint arXiv:1911.12913. 2019 Nov 29.
21- Ahmed S, Abdelhamid H, Ismail B, Ahmed F. An differential quadrature finite element and the differential quadrature hierarchical finite element methods for the dynamics analysis of on board shaft. European Journal of Computational Mechanics. 2020:303-44.
22- Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1971 May 1;34(2):235-8.
23- Bert CW, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review.
24- Liu YY, Yang LM, Shu C, Zhang HW. Efficient high-order radial basis-function-based differential quadrature–finite volume method for incompressible flows on unstructured grids. Physical Review E. 2021 Oct 26;104(4):045312.
25- Sun JA, Zhu ZY. Upwind local differential quadrature method for solving incompressible viscous flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000 Jul 21;188(1-3):495-504.
26- Liu Y, Shu C, Yu P, Liu Y, Zhang H, Lu C. A high-order generalized differential quadrature method with lattice Boltzmann flux solver for simulating incompressible flows. Physics of Fluids. 2023 Apr 1;35(4).
27- Liu YY, Yang LM, Shu C, Zhang ZL, Yuan ZY. An implicit high-order radial basis function-based differential quadrature-finite volume method on unstructured grids to simulate incompressible flows with heat transfer. Journal of Computational Physics. 2022 Oct 15;467:111461.
28- Du R, Shi B. Incompressible MRT lattice Boltzmann model with eight velocities in 2D space. International Journal of Modern Physics C. 2009 Jul;20(07):1023-37.
29- Wang H, Shi B, Liang H, Chai Z. Finite-difference lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations. Applied Mathematics and Computation. 2017 Sep 15;309:334-49.
30- Dehghani VN, Talebi S. The study of heating a cavity with moving cylinder using hybrid Lattice Boltzmann-Finite difference–Immersed Boundary method.
31- Kameli H, Kowsary F. Solution of inverse heat conduction problem using the lattice Boltzmann method. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2012 Nov 1;39(9):1410-5.
32- Sun M, Takayama K. Error localization in solution-adaptive grid methods. Journal of Computational Physics. 2003;190(1):346-50.
33- Velivelli AC, Bryden KM. Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burger's equation. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006 Mar 15;362(1):139-45.
34- Schlichting H, Kestin J. Boundary layer theory. New York: McGraw-Hill; 1961 Dec 1.
35- Xu L, Zhang W, Yan Z, Du Z, Chen R. A novel median dual finite volume lattice Boltzmann method for incompressible flows on unstructured grids. International Journal of Modern Physics C. 2020 Dec 8;31(12):2050173.
36- Ghia UK, Ghia KN, Shin CT. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. Journal of Computational Physics. 1982 Dec 1;48(3):387-411.
37- Guo Z, Zhao TS. Explicit finite-difference lattice Boltzmann method for curvilinear coordinates. Physical Review E. 2003 Jun 26;67(6):066709.
38- Erturk E, Corke TC, Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2005 Jul 10;48(7):747-74.
39- Zou Q, He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Physics of fluids. 1997 Jun 1;9(6):1591-8.
40- Liu B, Shi W. A Non-Equilibrium Interpolation Scheme for IB-LBM Optimized by Approximate Force. Axioms. 2023 Mar 14;12(3):298.

[DOI: 10.22034/MME.24.3.177]