



ملاقات زمان-بهینه زباله فضایی با بهره گیری از سامانه تدر الکترودینامیک

حمید گازرپور¹، محمدعلی امیری آتشگاه^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 143951374، atashgah@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 آذر 1393

پذیرش: 12 فروردین 1394

ارائه در سایت: 14 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

تدر الکترودینامیک

ملاقات مداری

زباله فضایی

کنترل بهینه

چکیده

در این پژوهش، شبیه‌سازی و کنترل بهینه سامانه تدر الکترودینامیک به عنوان یک سامانه نیروی محرکه‌ی فضایی جدید و ارزان بررسی شده است. این سامانه بدون نیاز به سوخت با استفاده از برهمکنش جریان الکتریکی درون تدر با میدان مغناطیسی زمین، شتاب مورد نیاز برای انجام مانورهای مداری را می‌تواند تامین کند. به همین دلیل تدر الکترودینامیک گزینه‌ی بسیار مناسبی جهت انجام ماموریت‌های پاکسازی فضا از زباله‌های فضایی است. در این راستا، ابتدا دینامیک سامانه تدر و میدان مغناطیسی زمین در نرم‌افزار سیمولینک متلب شبیه‌سازی شده و تغییرات عناصر مداری کلاسیک و امکان‌سنجی انجام مانورهای مداری مورد بررسی واقع شده است. همچنین به بررسی حرکت نسبی و ملاقات به وسیله تدر، دستگاه مختصات مناسب، شرایط مسئله و روش حل پرداخته شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد این سامانه جهت انجام انواع مانورهای مداری در صفحه و خارج از صفحه با بازه زمانی بزرگ در مدارهای کم ارتفاع زمین قابل استفاده است. مسئله ملاقات دو بعدی با زباله فضایی نیز با استفاده از روش مرتب‌سازی مستقیم در نرم‌افزار متلب و توسعه یک برنامه حل‌کننده متناسب با مسئله موجود و رفع محدودیت‌های آن، حل شده و کنترل بهینه جهت انجام ماموریت ملاقات در زمان کمینه به دست آمده و مسیر بهینه مشخص شده است.

Time-Optimal Rendezvous with the Space Debris USING Electrodynamic Tether System (EDT)

Hamid Gazerpour, Mohammad Ali Amiri Atashgah*

Department of Aerospace Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 143951374, Tehran, Iran, atashgah@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 December 2014
Accepted 01 April 2015
Available Online 04 May 2015

Keywords:

Electrodynamic Tether System
Space Rendezvous
Space Debris
Optimal Control

ABSTRACT

In this paper, simulation and time-optimal control of an electro-dynamic tether system as a new and inexpensive form of space propulsion system are investigated. The EDT, can provide desired acceleration by interaction between a current in the tether wire and earth's magnetic field, without any fuel consumption, for any orbital maneuver. For this reason, it is an appropriate choice for space debris mitigation missions. In this work, firstly, dynamics of the EDT, together with the earth's magnetic field are simulated. Secondly, exploiting the developed simulation tool-set, variations of classical orbital elements are observed and then feasibility studies of non-impulsive orbital maneuvers are conducted. In this manuscript, distinctly, relative motion and rendezvous by means of the EDT, adoption of appropriate coordinate system, problem conditions and also the method of solution are discussed. Simulation results demonstrate that the EDT can perform a wide range of in-plane and out-of-plane orbital maneuvers in low-earth-orbits (LEO). Eventually, an in-plane rendezvous problem with space debris, is solved by implementation of Direct Collocation method in Matlab by developing a solver program and resolving its limitations with respect to optimal rendezvous problem using electrodynamic tether, and then optimal control in a minimum-time condition, and also optimal trajectory are obtained.

1- مقدمه

توسعه روز افزون ماموریت‌های فضایی و ضرورت تامین ایمنی و اعتمادپذیری ایجاب می‌نماید که در برخی ماموریت‌های فضایی حساس، قبل از قرارگیری ماهواره در مدار نامی، محیط عملیات ماهواره توسط یک سامانه کاوشگر پاکسازی شود [1]. برای این منظور ضروری است که زباله‌های فضایی مدار مورد نظر شناسایی و امحا شود. توانایی ملاقات یکی از تکنولوژی‌های کلیدی برای بسیاری از برنامه‌های فضایی از جمله پاکسازی محیط فضا از زباله‌های

فضایی است. به منظور یک ملاقات ایمن با یک ماهواره که تعادل خود را از دست داده و کنترل‌پذیر نیست، نیاز به یک طراحی مسیر و یا قانون هدایت و کنترل مناسب داریم.

یکی از جدیدترین سامانه‌هایی که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته، سامانه تدر الکترودینامیک است که به خصوص استفاده‌ی آن در ربات‌های فضایی و ماهواره‌های زباله‌روب رو به گسترش است. تدر الکترودینامیک (EDT) سیم اتصال بلندی است که از ماهواره دارای تدر

Please cite this article using:

H. Gazerpour, M. A. Amiri Atashgah, Time-Optimal Rendezvous with the Space Debris USING Electrodynamic Tether System (EDT), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 309-317, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

همزمان در جهت مورد نیاز قرار گرفته و هدف را دنبال کند. تامیتا و همکارش [8] یک الگوریتم برای محاسبه مسیر بهینه برای مانورهای ماهواره‌ای با استفاده از ارائه یک برنامه نویسی غیر خطی برای یک مسئله کنترل بهینه پیشنهاد دادند. لو و همکارانش [9] یک رویکرد جهانی جدید برای طراحی کنترلر درجه دوم خطی ملاقات در این مقاله ارائه دادند که به جای حل معادله جبری ریکاتی، یک الگوریتم SA⁴ پیوسته برای طراحی الگوریتم ملاقات استفاده شده است. تانگ و همکارانش [10] بهینه‌سازی ملاقات ضربه‌ای خطی زمان ثابت با کنترل عدم قطعیت را مورد بررسی قرار دادند. یازونگ و همکارانش [11] نیز به بررسی مطالعات انجام شده بر روی دینامیک و کنترل ملاقات دو فضاپیما پرداختند و خلاصه‌ای از نتایج بدست آمده توسط محققان دیگر را جمع آوری کردند.

مرور گسترده منابع نشان می‌دهد که بسیاری از مطالعات بهینه‌سازی ملاقات در گذشته انجام شده است اما پژوهشی در رابطه ملاقات در زمان بهینه به وسیله‌ی سامانه تدر انتشار نیافته است. در این پژوهش، پس از بررسی نحوه اثرگذاری سامانه تدر بر دینامیک ماهواره، معادلات دینامیکی ماهواره برحسب عناصر مداری کلاسیک، میدان مغناطیسی زمین و شتاب وارده شده به سیستم در محیط سیمولینک شبیه‌سازی شده و تغییرات عناصر مداری بررسی می‌شود. پس از بررسی معادلات دینامیک نسبی، معادلات و شرایط مسئله در محیط متلب پیاده‌سازی شده و مسئله ملاقات بهینه با زباله فضایی، با توسعه حل‌کننده بهینه ایمپریال کالج لندن⁵ و رفع محدودیت‌های آن، حل می‌شود.

2- کاربرد تدر در مانورهای فضایی

تدر الکترو دینامیک وسایل کم هزینه‌تری برای انجام مانورهای فضایی ارائه می‌کند. سامانه تدر الکترو دینامیک شامل هدایت‌کننده، گسترش‌دهنده، ساطع‌کننده الکترون و ابزارهای الکترونیکی مرتبط خواهد بود. به عنوان مثال هنگامی که یک ماهواره در مدار کم ارتفاع زمین به پایان عمر عملیاتی خود می‌رسد، تدر پایان‌دهنده که حدود 2٪ از جرم ماهواره را شامل می‌شود، از ماهواره خارج شده و گسترش می‌یابد. تدر می‌تواند تماس الکتریکی با محیط پلاسما در هر دو سر خود داشته باشد. این امر اجازه می‌دهد تا جریان الکتریکی به و از پلاسما یونسفر موجود منتقل شود.

از آنجا که تدر در میدان مغناطیسی زمین حرکت می‌کند، جریان از الکترون‌های جمع‌آوری شده از یونسفر، ایجاد شده و از تدر به ساطع‌کننده الکترونی انتقال می‌یابد. در حالتی که تدر به سمت زمین گسترش یافته، برای ایجاد نیروی درگ (جهت کاهش سرعت)، جریان القا شده، که به عنوان جریان بار مثبت تعریف شده، باید در جهت ماهواره باشد. تعامل بین جریان القا شده و میدان مغناطیسی زمین نیروی لورنتس⁶ در خلاف جهت بردار سرعت ماهواره را تولید می‌کند. این نیروی پسا⁷، انرژی مداری ماهواره را کاهش داده و در نتیجه ارتفاع مداری سریعتر کاهش می‌یابد.

در بالا استفاده از تدر الکترو دینامیک برای کاهش سرعت ماهواره توصیف شد. در مورد کاهش سرعت، جریان تدر منجر به یک نیروی درگ در مقابل بردار سرعت ماهواره می‌شود. اگر ممکن باشد جریان به خلاف جهت جریان مورد نظر تغییر کند، نتیجه می‌تواند اعمال نیرو در جهت مسیر پرواز باشد که افزایش انرژی مداری و بالا رفتن ماهواره را در پی دارد.

گسترش می‌یابد و بر اساس اصول الکترومغناطیسی می‌تواند با تبدیل انرژی جنبشی به انرژی الکتریکی، به عنوان ژنراتور عمل کند، و یا با تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی جنبشی به عنوان موتور عمل کند. پتانسیل الکتریکی در سراسر تدر رسانا با حرکت در میدان مغناطیسی زمین ایجاد می‌شود.

تدر به عنوان بخشی از سیستم نیروی محرکه فضاپیما از کابل‌های طولانی و هادی قوی برای تغییر مدار فضاپیما استفاده می‌کند. همین پتانسیل است که سفر در فضا را ارزانتر می‌کند. به زبان ساده تدر بادبان مغناطیسی کم هزینه‌ای است که می‌توان آن را برای سرعت بخشیدن و یا ترمز فضاپیما مورد استفاده قرار داد. هنگامی که تدر به سمت زمین گسترش یافته است، با ایجاد جریان مستقیم به سمت زمین در تدر، نیرویی توسط میدان مغناطیسی به تدر اعمال شده و در نتیجه تدر به فضاپیما شتاب می‌دهد. با کنترل مقدار و جهت نیروی وارد بر تدر از طریق تغییر جریان می‌توان حرکت فضاپیما را کنترل کرد.

تدر الکترو دینامیک می‌تواند برای اثرگذاری روی مانورهای مداری فضاپیما، خارج از حرکت کپلری و بدون از دست دادن سوخت سیستم پیشرانس سنتی به کار گرفته شود. اخیراً، مطالعات مختلفی برای ایجاد یک چارچوب برای هدایت و کنترل مانورهای مداری، از جمله بهینه‌سازی یک مانور خاص و انتقال مداری توسط تدر الکترو دینامیک انجام شده و هنوز از جمله مباحثی است که در مراکز تحقیقاتی مختلف در دنیا در حال گسترش است.

سابقه‌ی تحقیقات در زمینه‌ی تدر شاید به سی سال نرسد و در این مدت مقالاتی منتشر شده‌اند. اسمیرنوف و همکاران به بررسی خصوصیات رفتار دینامیکی تدر در زمان استقرار و گسترش آن در مدار کم ارتفاع زمین¹ در آزمایش یس² در ماموریت فوتون-ام³، و تجزیه و تحلیل داده‌های آن پرداختند [2]. کومار و همکاران، طراحی کنترل بهینه غیرخطی با استفاده از روش بهینه معکوس جهت کنترل وضعیت ماهواره دارای تدر را انجام دادند. آنها همچنین موارد مختلفی را در مورد زمانی که گسترش تدر تمام می‌شود و شکست اتفاق می‌افتد بررسی کردند [3]. کارتمل و همکاران به بررسی تحقیقات انجام شده در مورد تدر تا سال 2008 پرداختند و در مقاله‌ی خود خلاصه‌ای شامل اصول عملکرد، ماموریت‌ها، محدودیت‌ها و ریسک‌ها، استراتژیهای مدل‌سازی و کنترل، طراحی کاربردی و سناریو گسترش و آماده‌سازی جهت شروع ماموریت را آوردند [4]. اسلانف و همکاران نیز یک سیستم پاکسازی زباله‌های فضایی بزرگ را با استفاده از تدر مورد بررسی قرار دادند [5].

هدف این پژوهش، استفاده از سامانه تدر جهت انجام فاز ملاقات ماهواره زباله‌روب با زباله فضایی است که یکی از مهمترین و حساسترین فازهای این ماموریت است. مطالعات انجام شده در زمینه ملاقات را می‌توان به دو گروه، بسته به این که مانورها ضربه‌ای و یا غیرضربه‌ای (با محدوده زمانی) باشند، تقسیم کرد. میله و همکاران [6] تدوین و بررسی عددی تابع تراست مورد نیاز برای به حداقل رساندن زمان و یا سوخت مورد نیاز برای فاز ترمینال ملاقات دو فضاپیما را انجام دادند. ساهو و همکاران [7] یک قانون کنترلی برای دستیابی به ملاقات با وسیله‌ی متحرک مستقل در فضای سه بعدی با استفاده از حداقل حس اطلاعات پیشنهاد کردند. ایشان یک قانون کنترل بهینه پیشنهاد دادند که اجازه می‌دهد زوایای پیچ و یاو وسیله نقلیه به طور

4- Simulated Annealing

5- Imperial College London Optimal Control Software

6- Lorentz

7- Drag Force

1- Low Earth Orbit

2- YES2

3- FOTON-M3

جدول 1 متغیرهای حالت سیستم، شش عنصر مداری کلاسیک

متغیر	نماد
نیم قطر اصلی	a
خروج از مرکزی	e
شیب مداری	i
زاویه بعد	Ω
آرگومان حضیض	ω
آنومالی حقیقی	v

$$V_{emf} = \int_0^L (\vec{v}_{orb} \times \vec{B}) d\vec{L} \quad (4)$$

فرض بر این است سیستم تدر در مدار زمین است و نسبت به میدان مغناطیسی زمین حرکت می‌کند. به طور مشابه، اگر جریان در تدر ایجاد شود، مطابق با معادله (5)، نیرو به تدر وارد می‌شود:

$$\vec{F} = \int_0^L I(L) m d\vec{L} \times \vec{B} \quad (5)$$

در حالت کاهش مداری⁵، این نیروی الکتروموتیو حرکتی را می‌توان توسط سیستم تدر برای به حرکت درآوردن جریان، ساطع کردن الکترون در انتها و جمع کردن الکترون در جهت مخالف استفاده کرد. در حالت افزایش مداری، منابع توان باید با ایجاد جریان در جهت مخالف، بر این نیرو غلبه کنند، که در نتیجه باعث ایجاد یک نیرو در جهت مخالف و افزایش سرعت می‌شود.

روابط پارامتری مهمی برای سایر متغیرها در معادلات حالت در این قسمت آمده است، به طور خاص نیمه پارامتر P که مطابق معادله (6) تعریف می‌شود، اندازه حرکت زاویه‌ای مداری h (معادله 7) و شعاع مدار r (معادله 8). از این روابط برای تغییر این بردار حالت از عناصر کلاسیک مداری به مجموعه عناصر وابسته به زمان شب و روز، استفاده می‌شود.

$$p = a(1 - e^2) \quad (6)$$

$$h = \sqrt{\mu p} \quad (7)$$

$$r = \frac{p}{(1 + e \cos(v))} \quad (8)$$

متغیر کنترلی همان جریان تدر، i ، در واحد آمپر⁶ است و طبق معادله (9) مقدار آن به 2Amp محدود شده است. در قسمت شبیه‌سازی جریان 1Amp- ثابت در نظر گرفته شده است.

$$\vec{u} = [I] = \{(u) : u \leq |2|\} \quad (9)$$

3-2- معادلات حرکت مداری

با استفاده از برهمکنش جریان کنترلی با میدان مغناطیسی زمین، شتاب حاصل از نیروی لورنتس، محرک اصلی برای تغییر دینامیک متغیرهای حالت است. در توصیف میدان مغناطیسی زمین زیرنویس‌های i ، J و K جهت هر یک از مؤلفه‌های میدان B است. ثابت μ_m حاصل ضرب گشتاور میدان دو قطبی مغناطیسی زمین⁷ و ثابت نفوذپذیری⁸ و واحد آن Tesla.m^3 است. در نتیجه واحد هر جزء میدان B برحسب تسلا⁹ است.

هنگامی که مؤلفه‌های میدان B تعیین شد، شتاب اغتشاشی که بر

نیروی وارده باید بر نیروی محرکه¹ و نیروی پسا جریان هوا، به طور مثال $0/5-1/1N$ نیروی پسا که توسط اتمسفر به ایستگاه بین المللی فضایی در مدار کم ارتفاع زمین وارد می‌شود، غلبه کند. رانش² به طور متوسط از $0/5 N$ تا $0/8 N$ می‌تواند توسط تدر بطول 10 کیلومتر و جرم 200 کیلوگرم (بدون عایق) جمع‌آوری شود. انرژی‌ای که باید جهت مخالفت با جریان طبیعی اعمال شود بین 5 تا 10 کیلو وات است و می‌تواند از طریق آرایه‌های خورشیدی تامین شود. آرایه‌های خورشیدی که لازم است این انرژی مورد نیاز را تامین کنند، مقرون به صرفه‌تر هستند از پروژه‌های حال حاضر که هزینه‌ی سوخت زیادی دارند [12].

یکی از مزایای این سامانه نامحدود بودن زمان استفاده از آن است. با توجه به عدم نیاز به سوخت و در دسترس بودن و رایگان بودن میدان مغناطیسی زمین می‌توان چندین ماموریت را با استفاده از این سامانه انجام داد. همین قابلیت باعث شده تا ایده جمع‌آوری زباله‌های فضایی با استفاده از تدر در سال‌های اخیر گسترش یابد. ماهواره زباله‌روب با استفاده از تدر می‌تواند پس از ملاقات با زباله و گرفتن آن، به ارتفاع پایین‌تر رفته و آن را رها کند و سپس به سراغ زباله‌ی دیگر رفته و ماموریت را تکرار کند.

2- مدل‌سازی سامانه تدر

بردار حالت انتخاب شده جهت بررسی اثر سامانه تدر بر حرکت فضایی (موقعیت و سرعت)، شامل شش عنصر مداری کلاسیک است (معادله 1)، که به طور کامل یک مدار منحصر به فرد را توصیف می‌کنند در جدول شماره 1 متغیرهای حالت سیستم توضیح داده شده است.

$$x^T = [a, e, i, \Omega, \omega, v] \quad (1)$$

3-1- مدل میدان مغناطیسی زمین

میدان مغناطیسی زمین، زمینه تعامل با تدر ماهواره را فراهم می‌کند. مدل دو قطبی میدان B بر اساس خطوط شار مغناطیسی، هر چند متغیر است، اما بطور محسوسی با توجه به جهت بردار میدان B تغییر نمی‌کند.

مهمترین مسئله در مطالعه تدر الکترودینامیک تاثیر میدان مغناطیسی زمین بر روی ماهواره‌های دارای تدر است. معادلات شماره (2) توصیف ساده‌ای از میدان مغناطیسی دو قطبی زمین را نشان می‌دهد [13].

$$\begin{aligned} B_r &= -2 \frac{\mu_m}{R^3} \sin(\omega + v) \sin(i) \\ B_\theta &= \frac{\mu_m}{R^3} \cos(\omega + v) \sin(i) \\ B_\phi &= \frac{\mu_m}{R^3} \sin(i) \end{aligned} \quad (2)$$

نکته اساسی در عملکرد تدر الکترودینامیک، نیروی وارد بر یک ذره باردار در میدان مغناطیسی، به نام لورنتس فیزیکدان هلندی است.

معادله نیروی لورنتس مطابق معادله (3) است، که در آن F نیروی لورنتس، L طول تدر و B میدان مغناطیسی زمین است. I جریان درون تدر است و با تغییر جریان تدر و طول آن می‌توان سیستم را کنترل کرد.

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad (3)$$

با حرکت تدر در میدان مغناطیسی نیروی الکتروموتیو حرکتی³ (EMF) در تدر ایجاد می‌شود. این نیرو توسط قانون القای فارادی⁴ داده شده است:

5- Deorbit
6- Ampere
7- Earth's Dipole Magnetic Field
8- Permeability Constant
9- Tesla

1- Electromotive Force
2- Thrust
3- Electromotive Force
4- Faraday

فضایپیمای هدف، محور x آن در راستای بردار موقعیت مرکز جرم هدف، بردار y در راستای بردار سرعت هدف و محور z کامل کننده‌ی دستگاه راستگرد می‌باشد.

براساس معادلات C-W، دینامیک حرکت نسبی تعقیب کننده و هدف به صورت معادله (13) قابل نمایش است:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = a_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = a_y \\ \ddot{z} + n^2z = a_z \end{cases} \quad (13)$$

در معادله فوق x, y و z مولفه‌های بردار موقعیت نسبی، n سرعت زاویه‌ای ثابت هدف در چرخش حول زمین و a_x, a_y و a_z نیز شتاب‌های اعمال شده بر فضایپیمای تعقیب کننده می‌باشند.

براساس معادلات فوق، با در نظر گرفتن هم‌صفحه بودن مدارهای اولیه تعقیب کننده و هدف ($x \neq 0, y \neq 0, z = 0$)، متغیرهای حالت را می‌توان به صورت معادله (14) تعریف کرد:

$$x_s(t) = [x \quad y \quad \dot{x} \quad \dot{y}]^T \quad (14)$$

در نتیجه کل عملیات ملاقات را می‌توان به صورت انتقال بردار حالت از مقدار اولیه غیر صفر $x_s(t)$ به حالت نهایی $x_s(t_m) = 0$ توصیف کرد. هر چند که در عمل، قبل از این که متغیرها به صفر برسند سامانه کنترل داکینگ¹ فعال شده که علاوه بر موقعیت و سرعت نسبی، وضعیت نسبی را هم به صفر رسانده و مرحله‌ی نهایی که متصل شدن به زبانه فضایی است را انجام می‌دهد. همچنین بردار ورودی کنترلی نیز به صورت معادله (15) تعریف می‌شود که شامل شتاب‌های وارد بر ماهواره زباله‌روب توسط سامانه تدر در دو راستای x و y می‌باشد.

$$u(t) = [a_x \quad a_y]^T \quad (15)$$

معادلات حالت سیستم نیز به معادلات (16) تا (18) است:

$$\dot{x}_s(t) = Ax_s(t) + Bu(t) \quad (16)$$

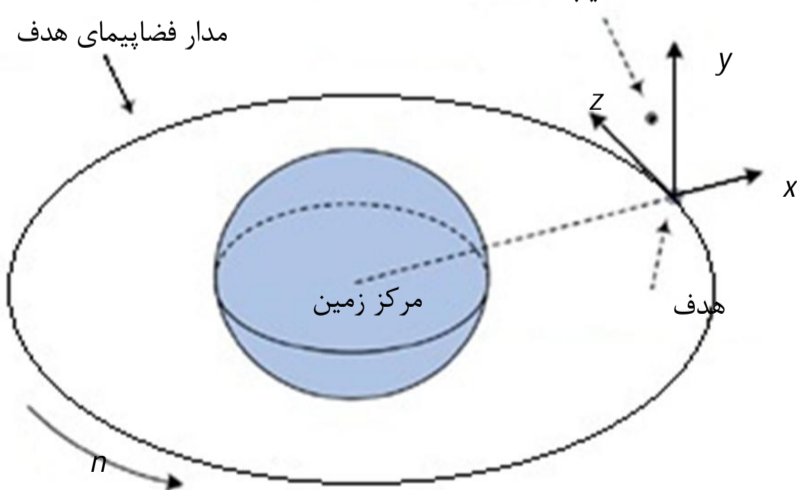
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{Target}}^3}} \quad (18)$$

که در رابطه‌ی فوق μ پارامتر جاذبه² است [16].

5- برنامه شبیه سازی و نتایج

با در نظر گرفتن فرض‌های فوق برای تدر می‌توان رفتار سیستم را به ازای تعقیب کننده



شکل 1 دستگاه مختصات ملاقات [16]

حرکت ماهواره تاثیر می‌گذارد را می‌توان طبق معادلات شماره 10 محاسبه کرد. ترم اول در سمت راست معادلات I جریان تدر است. واحدهای میدان B بر حسب تسلا است. تجزیه و تحلیل واحدها نشان می‌دهد واحد سمت راست معادله m/s^2 همان واحد شتاب است. شتاب r و θ ، و h همان شتاب در جهت‌های شعاعی، مماسی و نرمال مدار است. شتاب‌های وارد شده به ماهواره توسط تدر الکترو دینامیک، به صورت معادلات شماره (10) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{IL(B_z \sin(\theta) \cos(\varphi) - B_y \sin(\varphi))}{m} \\ f_\theta &= \frac{IL(B_x \sin(\varphi) - B_z \cos(\theta) \cos(\varphi))}{m} \\ f_h &= \frac{IL(B_y \cos(\theta) \cos(\varphi) - B_x \sin(\theta) \cos(\varphi))}{m} \end{aligned} \quad (10)$$

θ و φ زوایایی هستند که راستای تدر به ترتیب با بردار موقعیت ماهواره (\vec{r}) و صفحه‌ی مدار ماهواره می‌سازد. در این جا فرض بر این است که این زوایا صفر بوده و صفر باقی می‌ماند. در پژوهش‌های بعدی می‌توان تعمیم دقیقتری از این مسئله را بررسی کرد.

در واقع، برای تدر غیرنوسان کننده مولفه‌های شتاب اغتشاشی بالا به صورت معادلات شماره (11) کاهش می‌یابند:

$$\begin{aligned} f_r &= 0 \\ f_\theta &= -\frac{IL(B_z)}{m} \\ f_h &= \frac{IL(B_y)}{m} \end{aligned} \quad (11)$$

مولفه‌های شتاب اغتشاش یافته در فرم گوس معادلات تغییرات یا به عبارتی معادلات حالت در معادلات شماره (12) آمده است:

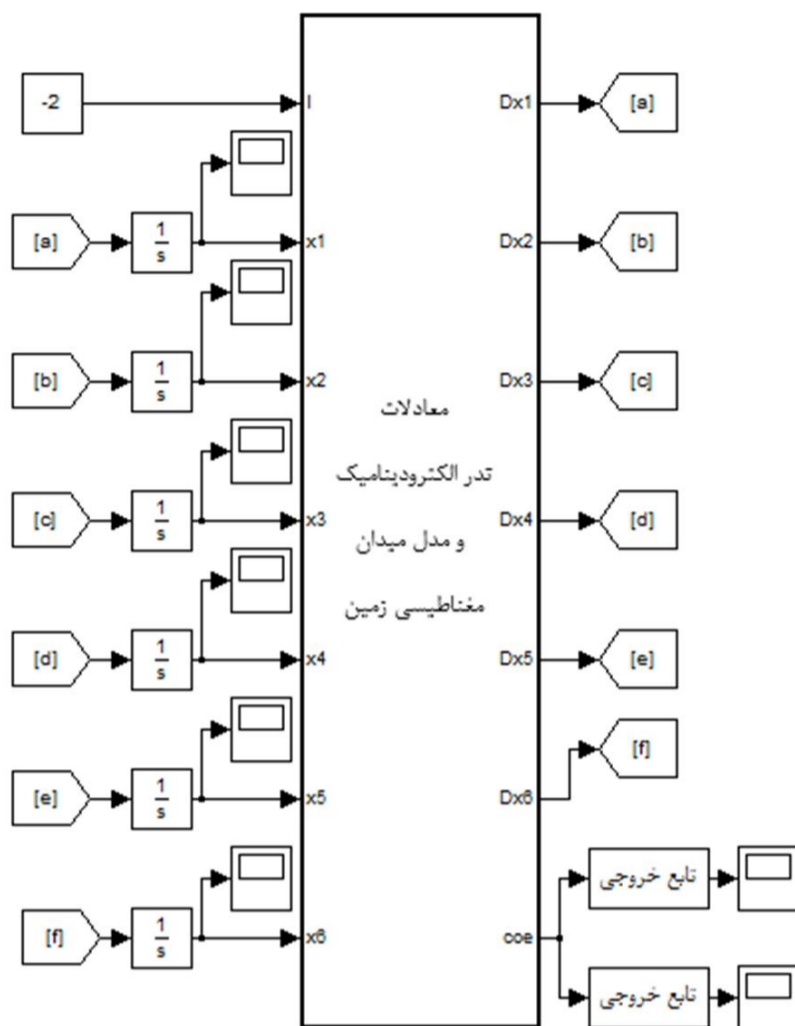
$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{2a^2}{h} \right) \left[e \sin(v) f_r + \left(\frac{p}{r} \right) f_\theta \right] \\ \dot{e} &= \left(\frac{1}{h} \right) \left[p \sin(v) f_r + \left[\left(\frac{p}{r} \right) \cos(v) + re \right] f_\theta \right] \\ i &= \frac{r \cos(\omega + v)}{h} f_h \\ \dot{\Omega} &= \frac{r \sin(\omega + v)}{h \sin(i)} f_h \\ \dot{\omega} &= \left(\frac{1}{he} \right) \left[-p \cos(v) f_r + (p+r) \sin(v) f_\theta \right] \\ &\quad - \frac{r \sin(\omega + v) \cos(i)}{h \sin(i)} f_h \\ \dot{v} &= \frac{h}{r^2} + \frac{1}{he} \left[p \cos(v) f_r - (p+r) \sin(v) f_\theta \right] \end{aligned} \quad (12)$$

4- حرکت نسبی و ملاقات در فضا

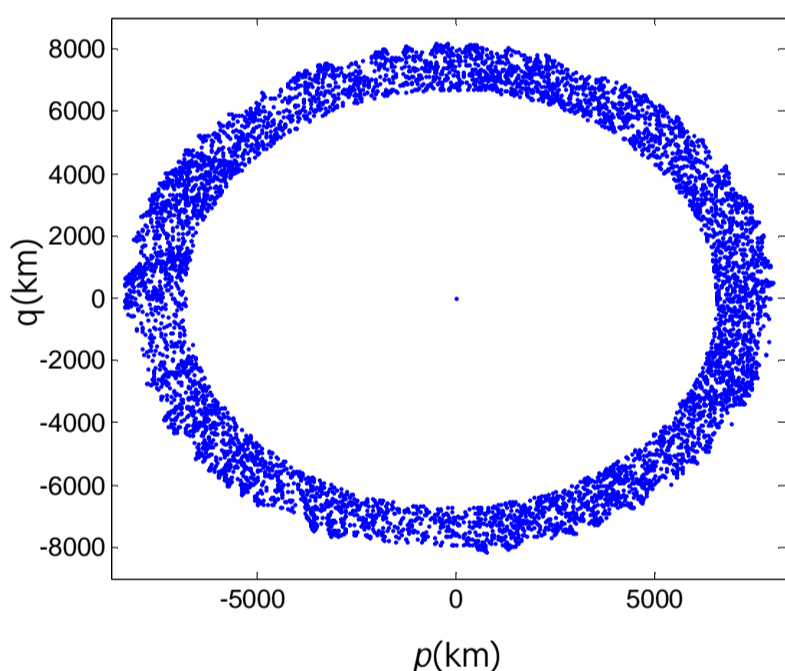
یک مدل بنیادی جهت مطالعه حرکت نسبی به وسیله معادلات C-W توسط کلوهرسی و ویلتشایر در سال 1960 ارائه شده است [14]. این مدل تا بحال به طور گسترده در مطالعه حرکت نسبی دو فضایپیمای نزدیک به هم زمانی که مدار فضایپیمای هدف تقریباً دایروی و فاصله بین آنها بسیار کمتر از شعاع مداری است، استفاده شده است [15].

چهارچوب مختصات ملاقات که معادلات C-W نیز در این دستگاه تعریف شده‌اند، در شکل (1) مشخص است. در این پژوهش فرض شده دو فضایپیمای تعقیب کننده و هدف فاصله‌ی زیادی نسبت به شعاع مداری نداشته و دستگاه مختصات مداری یک دستگاه کارترین راستگرد بوده که مبدا آن منطبق بر

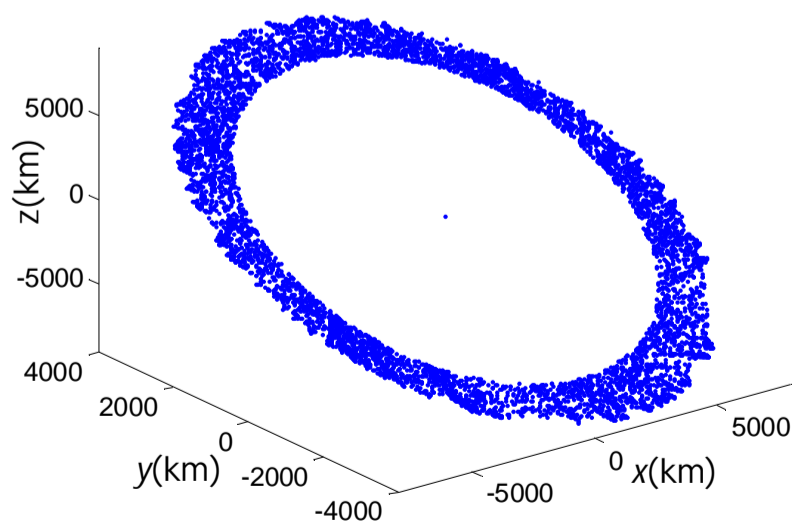
1- Docking
2- Gravitational Parameter



شکل 2 مدل سازی تدر الکتروپنایمیک و محیط در نرم افزار سیمولینک متلب



شکل 3 نمودار تغییرات مدار در صفحه مداری در طول یک ماه



شکل 4 نمودار 3 بعدی تغییرات مدار در طول یک ماه

مقادیر مختلف جریان، طول کابل و ارتفاع مدار اولیه بررسی کرد. در جدول شماره 2 مقادیر اولیه متغیرهای حالت آورده شده است. معادلات حالت سیستم، میدان مغناطیسی زمین و شتابهای وارد بر سیستم در نرم افزار سیمولینک متلب مدل سازی شده و در طول 1 ماه تغییرات متغیرهای حالت سیستم بدست آمده است. مدل سازی انجام شده در نرم افزار سیمولینک در شکل 2 آورده شده است.

در ابتدا شبیه سازی رفتار سیستم با طول کابل 1km و جریان 1Amp- در جهت افزایش سرعت و با جرم 1000kg انجام شده است. شکل 3 تغییرات مدار در صفحه مدار را نشان می دهد که مدار اولیه بیضی داخلی و مدار نهایی پس از یک ماه بیضی خارجی است. شکل 4 نیز به صورت 3 بعدی تغییرات مدار را نشان می دهد.

در شکل 5 تاثیر طول کابل بر سرعت افزایش طول نیم قطر اصلی بررسی شده است. مشاهده می شود که با افزایش طول کابل سرعت افزایش شعاع مداری زیاد می شود که با توجه به رابطه مستقیم طول کابل با شتابهای وارد بر سیستم در معادلات (10) و (11) این نتیجه انتظار می رفت. اما با زیاد شدن شعاع و کاهش مولفه های میدان مغناطیسی زمین، نیروها و همچنین تاثیر افزایش طول کابل نیز کمتر می شود از این رو تقعر منحنی ها در شکل 5 رو به پایین است و شیب نمودار با گذشت زمان و افزایش شعاع مدار کاهش می یابد.

با توجه به معادلات شتابهای وارد شده بر سیستم (معادلات 10 و 11)

تغییر جریان در تدر نیز تاثیر مشابهی بر رفتار سیستم دارد.

در شکل 6 تاثیر مقدار نیم قطر اصلی مدار در لحظه اول بررسی شده است. با توجه به رابطه عکس شدت میدان مغناطیسی زمین با فاصله از زمین مشاهده می شود که با بزرگ شدن نیم قطر اصلی سرعت افزایش مدار کم می شود. در واقع هر چقدر شعاع مدار افزایش یابد شیب نمودار کاهش پیدا می کند. می توان گفت با افزایش فاصله از زمین نیروها کوچک تر شده و سامانه به زمان بیشتری برای انجام ماموریت احتیاج دارد.

اشکال 7 تا 11 نیز تغییرات سایر پارامترهای مداری را در طول 1 ماه با طول کابل 1km و جریان 1Amp- نشان می دهند.

نمودارها نشان می دهند در حالتی که جریان تدر در جهت افزایش سرعت است، خروج از مرکزیت مدار افزایش و شیب مداری کاهش می یابد. زوایای بعد و آرگومان حضيض نیز حول مقادیر اولیه خود نوسانات کوچکی دارند.

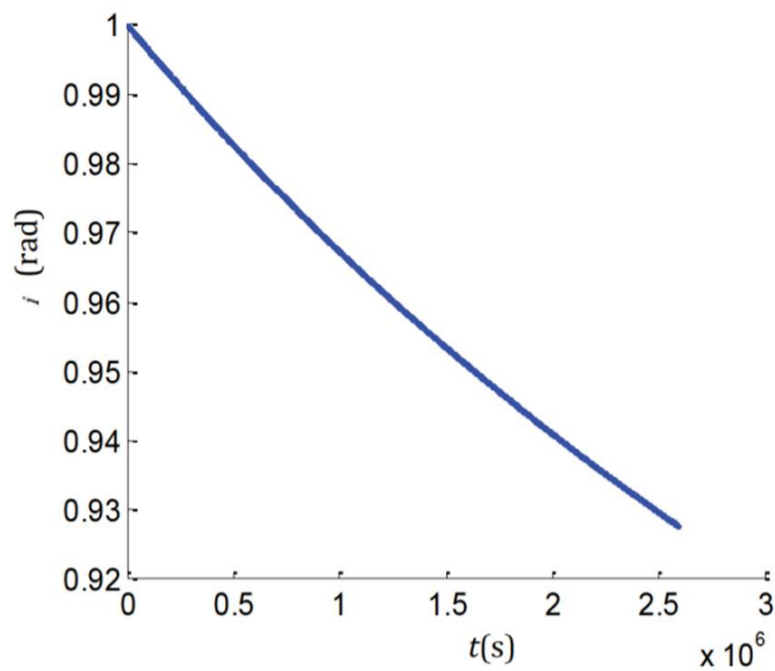
6- حل بهینه مسئله

جهت حل مساله بهینه، در ابتدا فرض شده که عناصر مداری کلاسیک در لحظه ابتدایی متعلق به زباله فضایی مطابق معادله (19) است:

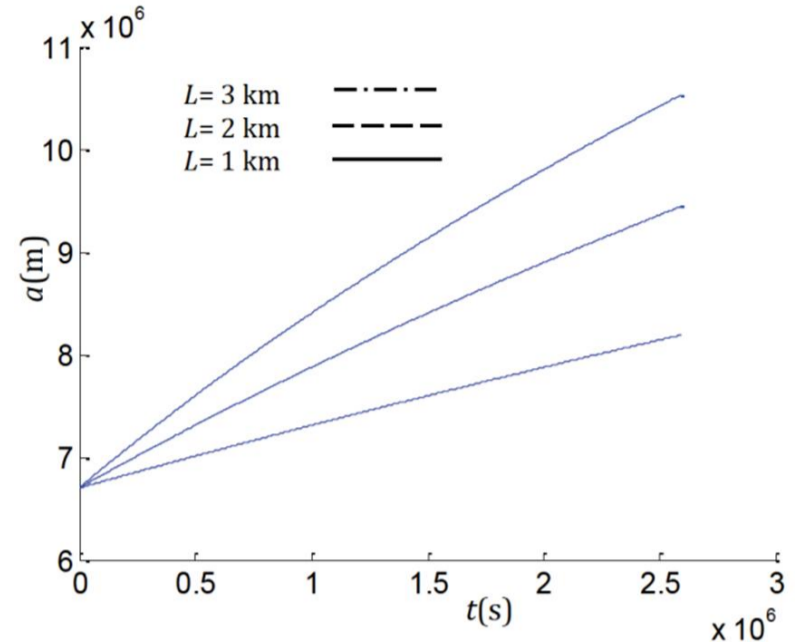
$$\text{Orbit}_{\text{debris}} = [52000 \ 0.0015 \ 157 \ 51 \ 151 \ 100] \quad (19)$$

درایه های ماتریس فوق به ترتیب از چپ به راست نشان دهنده اندازه

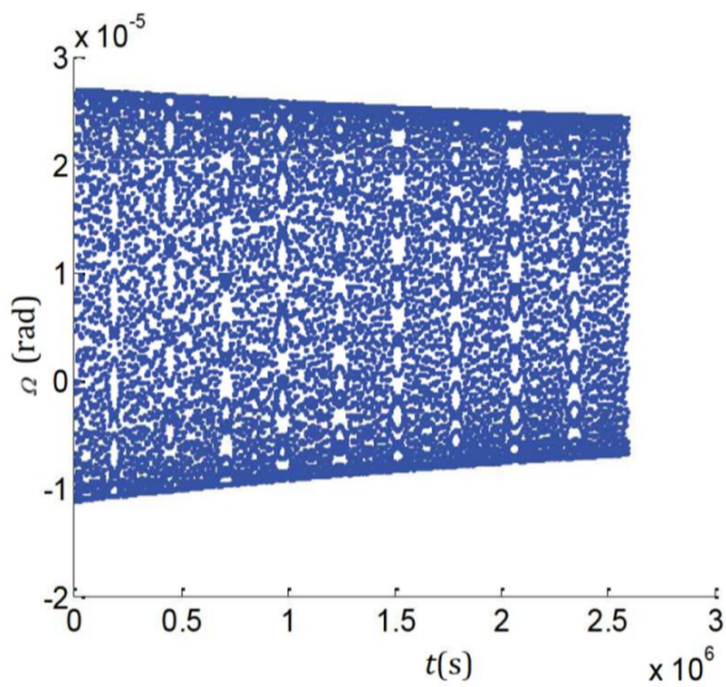
جدول 2 مقادیر اولیه متغیرهای حالت در شبیه سازی		
عنصر مداری	مقدار اولیه	واحد
نیم قطر اصلی	6700	km
خروج از مرکزی	0/0015	--
شیب مداری	1	Rad
زاویه بعد	0	Rad
آرگومان حضيض	1	Rad
آنومالی حقیقی	0	Rad



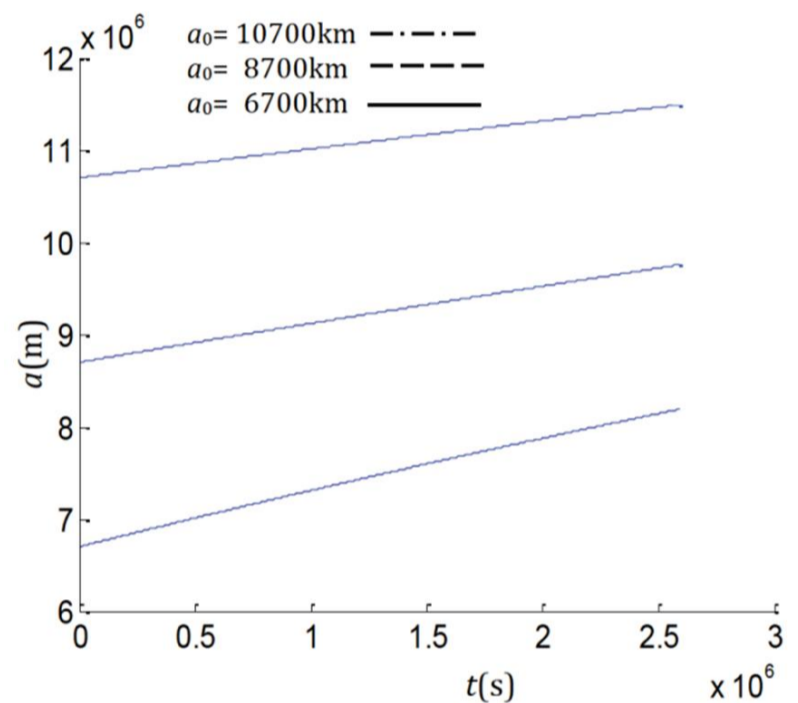
شکل 8 نمودار تغییرات شیب مداری در یک ماه



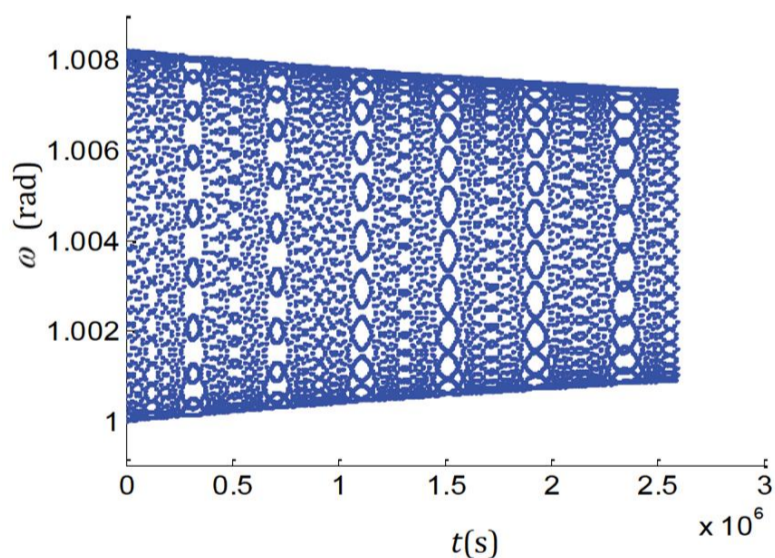
شکل 5 نمودار تغییرات نیم قطر اصلی در طول یک ماه با طول های مختلف تدر



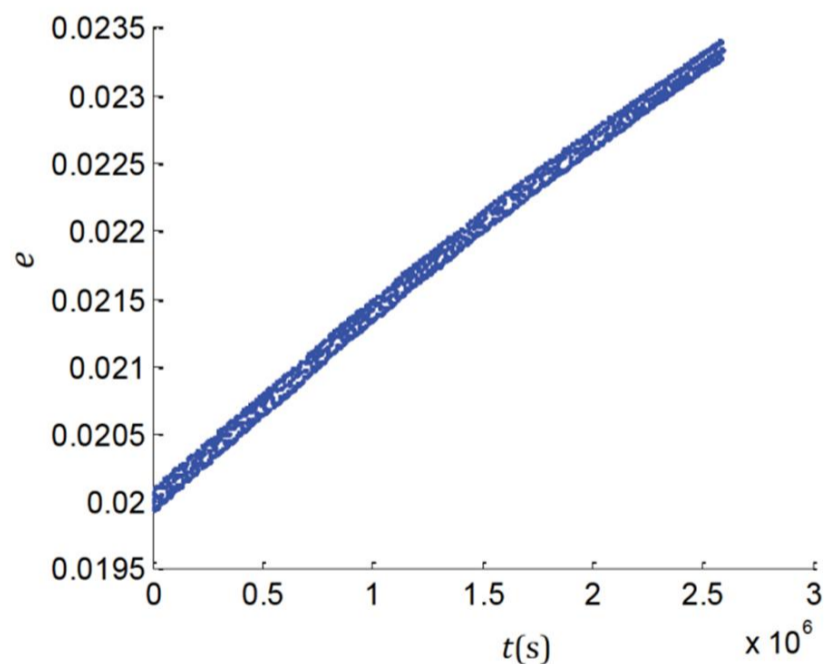
شکل 9 نمودار تغییرات زاویه بعد در یک ماه



شکل 6 نمودار تغییرات نیم قطر اصلی در طول یک ماه با مقادیر اولیه مختلف



شکل 10 نمودار تغییرات زاویه آرگومان حضیض در یک ماه



شکل 7 نمودار تغییرات خروج از مرکزی در یک ماه

و واضح است که شرایط نهایی مطابق معادله 21 است:

$$x(t_f) = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (21)$$

حد بالا و پایین متغیرهای حالت برای جلوگیری از بروز خطا و خارج شدن از محدوده‌ی مجاز معادلات C-W به صورت معادلات (22) تعریف شده است.

$$\begin{aligned} x_{\min}(t) &= [-1000000 \ -1000000 \ -1000 \ -1000] \\ x_{\max}(t) &= [1000000 \ 1000000 \ 1000 \ 1000] \end{aligned} \quad (22)$$

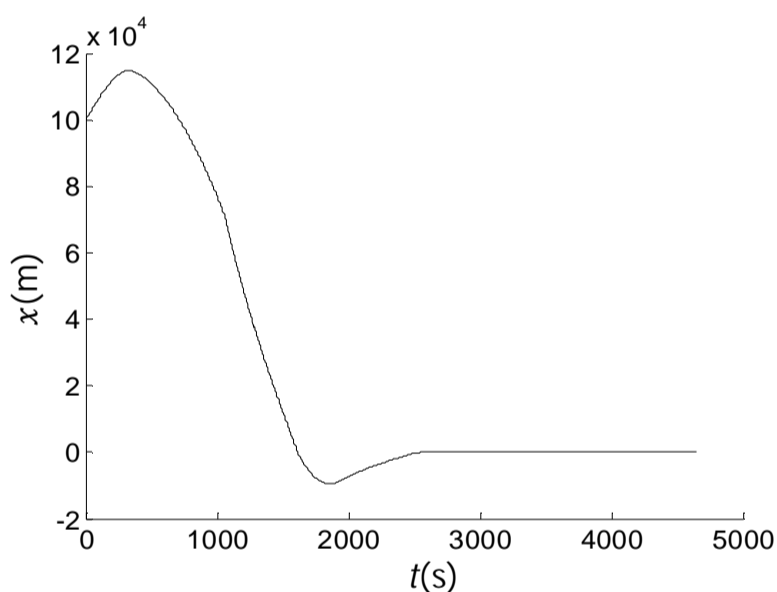
حرکت زاویه‌ای، خروج از مرکزی، زاویه بعد، زاویه میل، آرگومان حضیض و آنومالی حقیقی مدار اولیه‌ی زباله فضایی می‌باشند (زاویه‌ها برحسب درجه می‌باشند). شرایط اولیه متغیرهای حالت (موقعیت و سرعت نسبی در دو بعد) مطابق معادله 20 است:

$$x(0) = [101000 \ 102000 \ 65 \ 75] \quad (20)$$

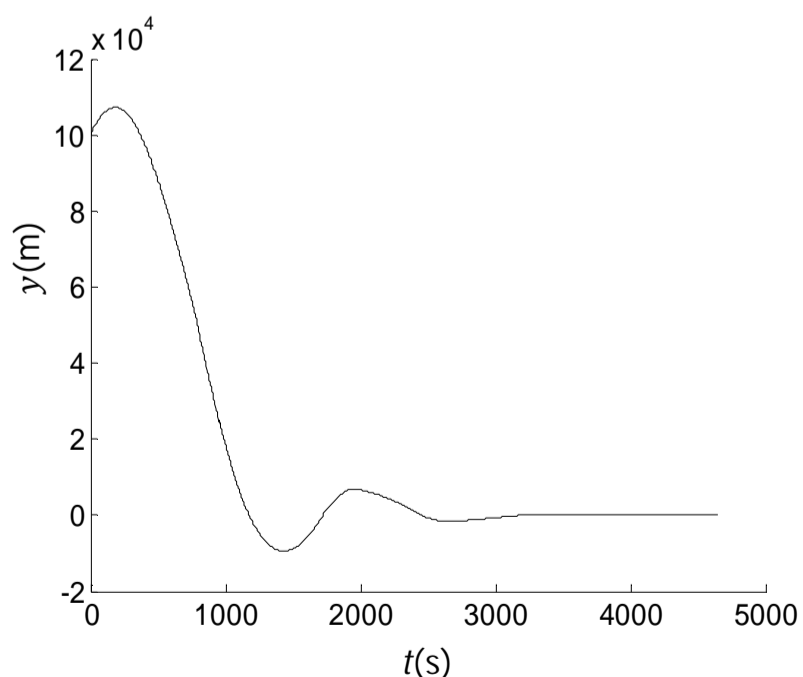
متغیرهای حالت به صفر رسیده و ماموریت ملاقات انجام شود. در ابتدا فاصله ماهواره زباله‌روب و زباله فضایی حدود 143km است و این فاصله در زمان بهینه به دست آمده که 4645 ثانیه است، به صفر می‌رسد. تغییرات متغیر کنترلی یعنی جریان درون تدر باید به گونه‌ای باشد که نیروی لورنتس در کمترین زمان، متغیرهای حالت یعنی موقعیت و سرعت نسبی در راستای x و y را به صفر برساند. اشکال 12 و 13 تغییرات موقعیت نسبی ماهواره زباله‌روب را در دستگاه مختصات ملاقات (شکل 1) نشان می‌دهند. اشکال 14 و 15 نیز تاریخچه تغییرات سرعت نسبی در دو راستا را نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رود زمانی که شیب نمودار موقعیت نسبی مثبت است، مقدار سرعت نسبی نیز مثبت است. همچنین تفرع نمودار موقعیت و شیب نمودار سرعت هم‌علامت هستند. شکل 16 تاریخچه تغییرات متغیر کنترلی را که در واقع مجهول اصلی مسئله است، نشان می‌دهند. در انتهای ماموریت تلاش کنترلی بیشتری مشاهده می‌شود که برای ثابت کردن سرعت‌های نسبی و تنظیم همزمان متغیرهای حالت است. شکل 17 نیز نشان‌دهنده تغییرات موقعیت ماهواره زباله‌روب و زباله فضایی از ابتدا تا انتهای ماموریت ملاقات در صفحه‌ی مداری (دستگاه پرفوکال⁴) است.

7- اعتبارسنجی نتایج

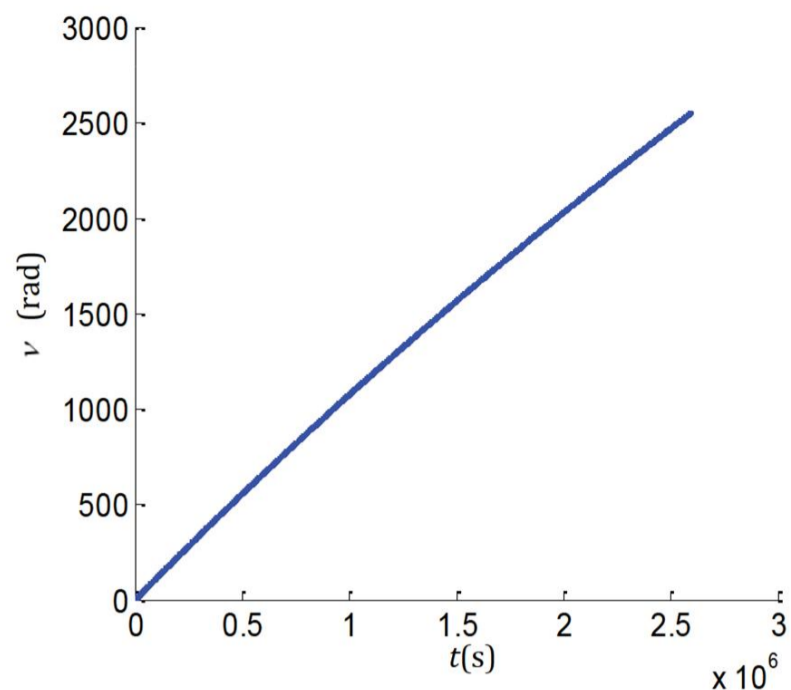
در این قسمت به اعتبارسنجی نتایج بدست آمده پرداخته و صحت نتایج



شکل 12 تاریخچه تغییرات موقعیت نسبی در راستای x



شکل 13 تاریخچه تغییرات موقعیت نسبی در راستای y



شکل 11 نمودار تغییرات آنومالی حقیقی در یک ماه

همچنین محدوده‌ی قابل قبول برای متغیر کنترلی یعنی جریان تدر را مطابق معادله (23) در نظر گرفته‌ایم:

$$[I_{\min} \quad I_{\max}] = [-1 \quad +1] \quad (23)$$

تابع هزینه نیز زمان ماموریت ملاقات است که در معادله (24) قابل مشاهده است. هدف پیدا کردن کنترل بهینه مناسب برای رسیدن به مبدا مختصات یعنی فضایی هدف (زباله فضایی) در زمان کمینه است.

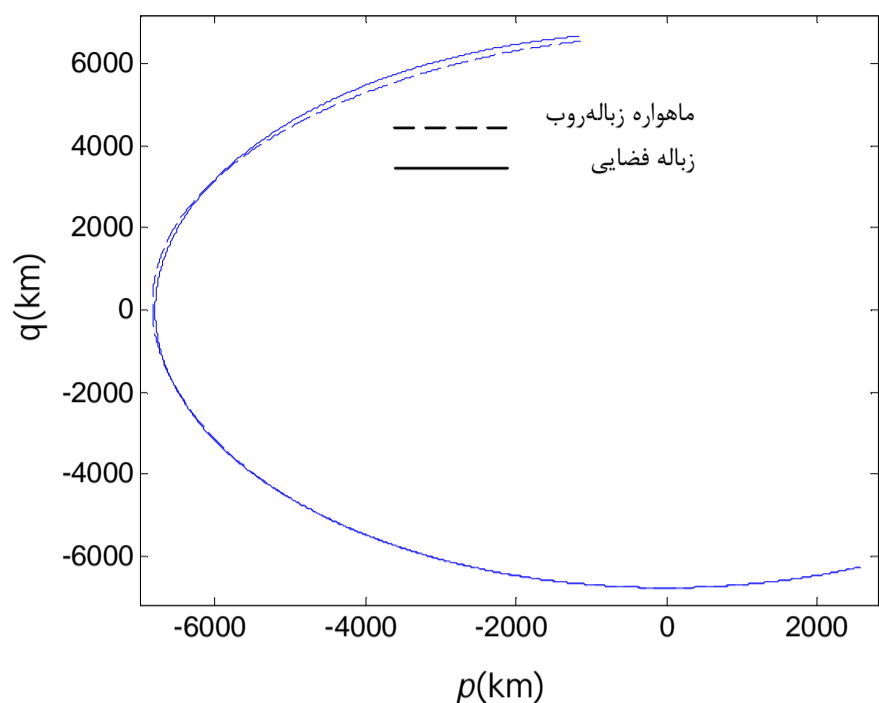
$$j = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (24)$$

برای حل این مسئله از روش مستقیم استفاده می‌کنیم. امروزه روش‌های مستقیم بسیاری توسعه یافته‌اند. دو مورد از ساده‌ترین و مرسوم‌ترین روش‌های مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه روش پرتاب مستقیم¹ و روش پرتاب چندگانه² می‌باشد [18,17]. رویکرد دیگر، بهره‌گیری از روش‌های مرتب‌سازی مستقیم³ [20,19] می‌باشد، که در آن هم متغیر کنترلی و هم متغیر حالت، با استفاده از یک مجموعه قیدهای جبری-دیفرانسیلی در یک سری نقاط هم‌نشانی شده به صورت عددی به دست می‌آیند. در روش مرتب‌سازی مستقیم متغیرهای حالت و کنترل همزمان گسسته‌سازی شده و مسئله کنترل بهینه پیوسته با زمان، به معادلات جبری گسسته تبدیل می‌شود. روش مرتب‌سازی مستقیم در مقایسه با دو روش پرتاب مستقیم و پرتاب چندگانه دارای این برتری بوده که نیاز به دانش قبلی در مورد فعال بودن یا عدم فعال بودن قیدهای نامساوی در طول مسیر نمی‌باشد، بنابراین روش مرتب‌سازی مستقیم نسبت به سایر روش‌های ذکر شده، برای حدس اولیه از حساسیت کمتری برخوردار خواهد بود.

جهت حل مسئله بهینه متغیرهای حالت و کنترل گسسته‌سازی شده و شرایط مسئله متناسب با حل‌کننده امپریال کالج لندن کدنویسی شده است. این حل‌کننده محدودیت‌هایی نظیر تعداد متغیرهای حالت و تعداد نقاط گسسته‌سازی، دارد. همچنین با تغییر موقعیت مولفه‌های میدان مغناطیسی زمین تغییر کرده و باید تغییرات به صورت فعال در حین مسئله اعمال شود. با توسعه این حل‌کننده و نوشتن برنامه بهینه‌سازی مناسب با مسئله مورد نظر در نرم‌افزار متلب، کنترل بهینه یعنی جریان بهینه درون تدر با روش مرتب‌سازی مستقیم بدست آمده است؛ بطوری‌که در کمترین زمان ممکن

1- Direct Shooting Method
2- Multiple Shooting Method
3- Collocation Method

4- Perifocal Frame



شکل 17 تغییرات مدار ماهواره زباله‌روب و زباله فضایی در صفحه مداری

فضایی می‌شود یا خیر؟ دوم این که آیا ورودی بدست آمده ورودی بهینه است و این ورودی منجر به پیمودن مسیر بهینه برای رسیدن به هدف در کمترین زمان ممکن می‌شود یا خیر؟

برای بررسی قسمت اول، معادلات دینامیک نسبی در محیط سیمولینک شبیه‌سازی شده و با اعمال ورودی کنترلی بدست آمده، تغییرات متغیرهای حالت مشخص می‌شود. در نتایج برنامه بهینه‌سازی زمان به هزار بازه‌ی کوچک تقسیم شده و مقادیر همه‌ی متغیرها در هزار و یک نقطه، بدست آمده است. ورودی کنترلی به صورت یک ماتریس با اندازه 1001×2 که شامل زمان و مقدار متناظر ورودی کنترلی در آن زمان است، به برنامه شبیه‌سازی سیمولینک داده شد و همان نتایج با اختلاف کمتر از 0/01% بدست آمد. این اختلاف کم ناشی از ثابت بودن مقدار کنترل در هر بازه زمانی است، همانطور که در نمودارهای بدست آمده از برنامه بهینه‌سازی مشخص است، مقادیر متغیرها در نقاط گسسته‌شده، به صورت پیوسته متصل شده‌اند، اما در سیمولینک، این نقاط به عنوان ورودی شبیه‌سازی به صورت گسسته وارده شده‌اند و مقادیر در هر بازه‌ی کوچک ثابت است.

نکته‌ی مهم دیگر بررسی بهینه بودن جواب بدست آمده است. به طور کلی برای سیستم معادلات حالت (25 و 26) و تابع هزینه (27)، تابع هزینه افزوده مطابق معادله (28) تعریف می‌شود [21]:

$$f(X) = 0 \quad (25)$$

$$f(X) = [f_1(X) \dots f_m(X)]^T \in R^m \quad (26)$$

$$J = h(X(\tau_f), \tau_f) + \int_{\tau_0}^{\tau_f} g(X(\tau), U(\tau), \tau) d\tau \quad (27)$$

$$\bar{J}(X, \lambda) = J(X) + \lambda^T f(X) \quad (28)$$

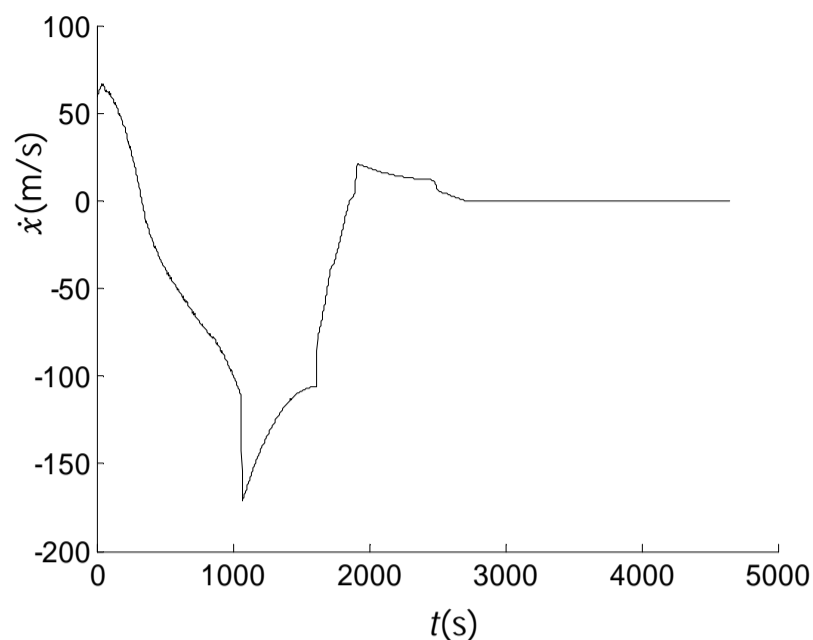
با توجه به این که کنترل بهینه، کنترلی است که منجر به کمینه شدن تابع هزینه می‌شود، داریم [21]:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial U} = 0 \quad (29)$$

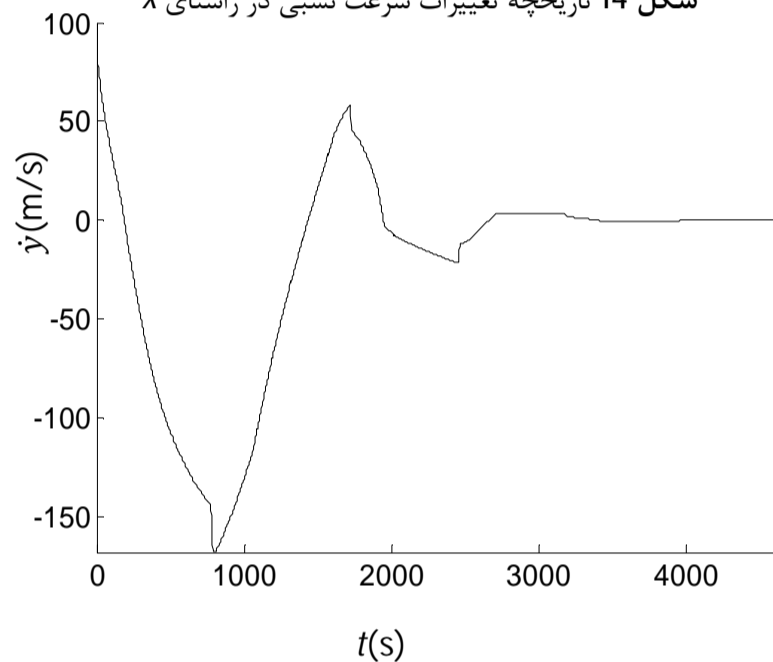
در شکل (18) نمودار تغییرات معادله (29) بر حسب زمان رسم شده است.

همان‌طور که در شکل (18) مشخص است مقدار $\frac{\partial \bar{J}}{\partial U}$ همواره کمتر از

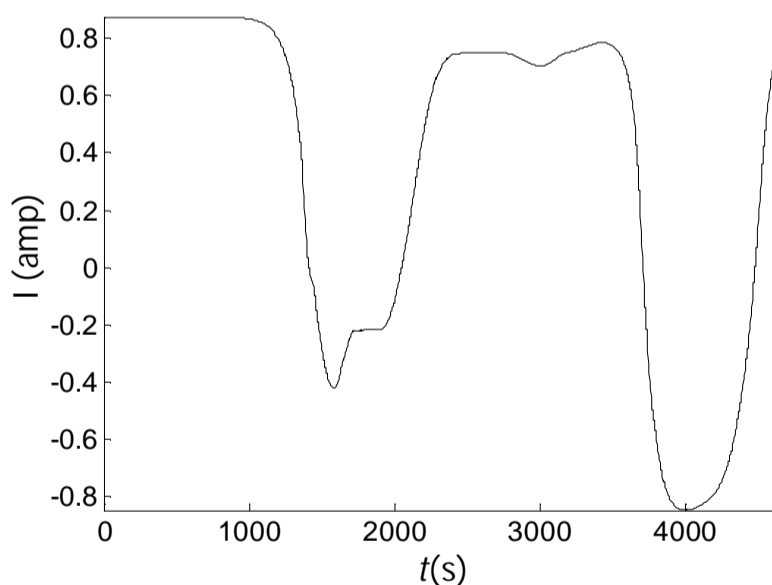
0/0004 است، بنابراین با تقریب خوبی می‌توان گفت که جواب بدست آمده



شکل 14 تاریخچه تغییرات سرعت نسبی در راستای X



شکل 15 تاریخچه تغییرات سرعت نسبی در راستای Y



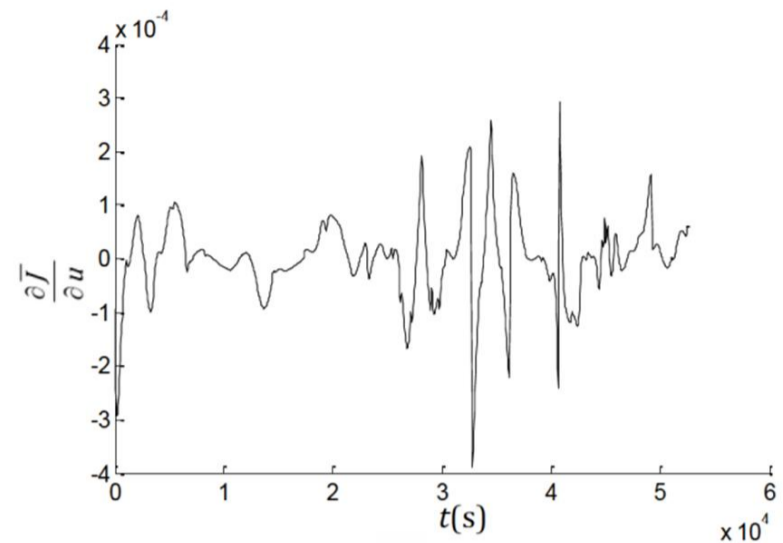
شکل 16 نمودار تغییرات متغیر کنترلی (جریان در تدر)

بدست آمده را بررسی می‌کنیم. متأسفانه داده‌های واقعی از مأموریت ملاقات و یا مانورهای مداری با استفاده از تدر الکترو دینامیک در دسترس نیست. بنابراین مقایسه و اعتبارسنجی به صورت تجربی امکان‌پذیر نیست. اما همان‌طور که گفته شد هدف این پژوهش، انجام عملیات ملاقات زمان بهینه است. واضح است که جهت اعتبارسنجی نتایج، باید دو مسئله بررسی شود. اول این که آیا ورودی بدست آمده سیستم را به نقطه‌ی انتهایی مورد نظر، یعنی مبدا مختصات منتقل می‌کند یا خیر؟ به عبارت دیگر باید اطمینان حاصل شود که ورودی بدست آمده منجر به ملاقات ماهواره زباله‌روب و زباله

مداری با استفاده از سامانه تدر الکترودینامیک را بدست آورد. همچنین ابزار لازم جهت اعتبارسنجی نتایج فراهم شده است.

9- مراجع

- [1] C. R. Phipps, K. L. Baker, S. B. Libby, D. A. Liedahl, S. S. Olivier, L. D. Pleasance, A. Rubenchik, J. E. Trebes, E. V. George, B. Marcovici, J. P. Reilly, M. T. Valley, Removing orbital debris with lasers, *Advances in Space Research*, Vol. 49, no. 9, pp. 1283-1300, 2012.
- [2] N. N. Smirnov, Yu. A. Demyanov, A. V. Zvyaguin, A. A. Malashin, A. A. Luzhin, Dynamical simulation of tether in orbit deployment, *Journal of Acta Astronautica*, Vol. 67, no. 3, pp. 324-332, 2010.
- [3] K. D. Kumar, B. Tan, Nonlinear optimal control of tethered satellite systems using tether, *Journal of Acta Astronautica*, Vol. 66, no. 9, pp. 1434-1448, 2010.
- [4] M. P. Cartmell, D. J. Mckenzie, A review of space tether research. *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 44, n. 1, pp. 1-21, 2008.
- [5] V. Aslanov, V. Yuditsef, Dynamics of large space debris removal using tethered space tug, *Acta Astronautica*, Vol. 91, no. 2, pp. 149-156, 2013.
- [6] A. Miele, M. Weeks, M. Ciarcia, Optimal Trajectories for Spacecraft Rendezvous, *Journal of optimization theory and applications*, Vol. 132, no. 3, pp. 353-376, 2007.
- [7] S. R. Sahoo, R. N. Banavar, Rendezvous in space with minimal sensing and coarse actuation, *Automatica*, Vol. 49, no. 2, pp. 519-525, 2012.
- [8] B. R. Feiring, K. TOMITA, Trajectory optimization for maneuvering, *Systems & Control Letters*, Vol. 5, no. 4, pp. 223-228, 1985.
- [9] Y. Luo, G. Tang, Spacecraft optimal rendezvous controller design using simulated annealing, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 9, no. 8, pp. 732-737, 2005.
- [10] G. Tang, Y. Luo, H. Li, Optimal robust linearized impulsive rendezvous, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 11, no. 7, pp. 563-569, 2007.
- [11] L. Yazhong, Z. Jin, T. Guojin, Survey of Orbital Dynamics and Control of Space Rendezvous, *Journal of Aeronautics*, Vol. 27, no. 1, pp. 1-11, 2014.
- [12] F. A. Carlson, Optimal Orbit Maneuvers with Electrodynamics tethers, Master Thesis of Naval Postgraduate School, 2006.
- [13] S. G. Tragesser, H. San, Orbital Maneuvering with Electrodynamics Tethers, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, n. 5, pp. 805-810, 2003.
- [14] W. H. Clohessy, R. S. Wiltshire, Terminal guidance system for satellite rendezvous, *Journal of Aerospace Science*, Vol. 27, no. 9, pp. 653-658, 1960.
- [15] V. Coverstone-Carrol, Near-optimal low-thrust trajectories via micro-genetic algorithms, *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 20, no. 1, pp. 196-198, 1997.
- [16] X. Yang, H. Gao, Robust reliable control for autonomous spacecraft rendezvous with limited-thrust, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 24, no. 1, pp. 161-168, 2013.
- [17] W. E. Williamson, Use of Polynomial Approximations to Calculate Suboptimal Controls, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 11, pp. 2271-2273, 1971.
- [18] H. G. Bock, K. J. Plitt, A Multiple Shooting Algorithm for Direct Solution of Optimal Control Problems, *IFAC 9th World Congress*, Budapest, Hungary, 1984.
- [19] A. L. Herman, B. A. Conway, Direct Optimization Using Collocation Based on High-Order Gauss-Lobatto Quadrature Rules, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 3, pp. 592-599, 1996.
- [20] S. Kameswaran, L. T. Biegler, Convergence Rates for Direct Transcription of Optimal Control Problems Using Collocation at Radau Points, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 41, No. 1, pp. 81-126, 2008.
- [21] A. Tewari, *Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets*, pp. 34-35, Kanpur, India: Wiley, 2011.



شکل 18 نمودار تغییرات $\frac{\partial J}{\partial u}$ بر حسب زمان

بهینه است.

8- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ابتدا سامانه تدر الکترودینامیک به عنوان یک سامانه پیش‌ران جدید بررسی شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد با استفاده از تدر می‌توان نیم قطر اصلی مدار را از 6700km در طول 1 ماه به 8190km افزایش داد. نکته‌ی دیگر این است که همراه با افزایش شعاع مدار زاویه شیب مداری کاهش می‌یابد که این در ماموریت‌های ماهواره‌های زمین‌آهنگ¹ که نیازمند صفر شدن زاویه شیب مداری هستند، می‌تواند سودمند باشد. در این ماموریت‌ها پس از تزریق در مدار اولیه، چند مانور مداری جهت صفر شدن شیب مدار انجام شده سپس ماهواره وارد مدار انتقال می‌شود تا به شعاع مورد نظر برسد. با استفاده از تدر می‌توان در بازه زمانی بزرگ‌تر هم شیب مداری را به صفر نزدیک کرد و هم مقدار قابل توجهی از مسیر انتقال را بدون مصرف سوخت پیمود که این به معنی کاهش مصرف سوخت و وزن سیستم است. نتایج فوق نشان می‌دهد این سامانه برای انجام انواع مانورهای مداری البته در بازه زمانی بزرگ‌تر قابل استفاده و مقرون به صرفه است و با بهینه‌سازی می‌توان زمان ماموریت را کاهش داد. همان‌طور که توضیح داده شد، هدف اصلی این پژوهش بررسی ماموریت ملاقات بهینه با زباله فضایی در دو بعد به وسیله تدر الکترودینامیک است. در این مسئله موقعیت و سرعت در دو بعد متغیرهای حالت و جریان الکتریکی درون تدر متغیر کنترلی بودند. با توسعه یک برنامه حل‌کننده و رفع محدودیت‌های آن، یک برنامه بهینه‌سازی با استفاده از روش حل مرتب‌سازی مستقیم نوشته شد. در این برنامه معادلات تدر و میدان مغناطیسی زمین که در هر نقطه از نقاط گسسته‌سازی متغیر است، کدنویسی شده است. با برنامه حاضر می‌توان مسیر بهینه انواع مانورهای