



## تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای FML بهینه شده بر اساس معیار ماکزیمم فرکانس طبیعی تحت شرایط مرزی مختلف

علی نظری<sup>1</sup>، کرامت ملک‌زاده‌فرد<sup>2\*</sup>، میلاد مجیدیان<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

3- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

\*تهران، صندوق پستی 13445768، kmalekzadeh@mut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 12 فروردین 1395

پذیرش: 19 خرداد 1395

ارائه در سایت: 29 تیر 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات

لایه‌چینی

زاویه‌چینی

پوسته هیبریدی

### چکیده

در این مقاله ساختار پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه فلز و کامپوزیت که به اختصار به آنها FML گفته می‌شود با هدف دستیابی به بیشترین فرکانس طبیعی مورد بهینه‌سازی قرار گرفته‌اند. به این منظور ترتیب چینش لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر و همچنین زوایای قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی پوسته استوانه‌ای FML مرتباً تغییر کرده و برای هر حالت فرکانس طبیعی پوسته استخراج گردیده و در نهایت ساختاری از پوسته که منجر به بیشترین فرکانس طبیعی گردیده به عنوان ساختار بهینه پوسته هیبریدی تعیین گردیده است. به منظور استخراج معادلات حاکم از اصل همپلتون و روش انرژی و برای مدلسازی جابجایی‌های پوسته از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است. برای تعیین پاسخ ارتعاشات آزاد، با استفاده از سری‌های فوریه مساله مورد نظر تبدیل به یک مساله مقادیر ویژه گردیده و مورد تحلیل قرار گرفته است. یکی از مهمترین نوآوری‌های این پژوهش ایجاد یک برنامه کامپیوتری جامع به منظور بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی می‌باشد. به این منظور برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شده و با لینک آن با نرم‌افزار المان محدودی آباکوس پوسته‌های FML با ساختارهای متفاوت مورد بهینه‌سازی قرار گرفته‌اند. برنامه نوشته شده امکان تحلیل و بهینه نمودن پوسته‌های FML با هر تعداد لایه‌های فلز و کامپوزیت، هر نوع زاویه قرارگیری الیاف و تحت هر نوع شرایط مرزی را دارا می‌باشد. نتایج مورد نظر در این مقاله برای شرایط مرزی دوسرولولا و دو سرگیردار و ترکیب‌های مختلف از زوایای 0، 30، 60 و 90 درجه برای لایه‌های کامپوزیتی استخراج گردیده است.

## Vibration analysis of FML cylindrical shell optimized according to maximum natural frequency under various boundary conditions

Ali Nazari<sup>1</sup>, Keramat Malekzade Fard<sup>2\*</sup>, Milad Majidian<sup>3</sup>

1-3- Department of Aerospace Engineering, Aerospace Research Institute, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Malekshatar University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 13445768, Tehran, Iran, kmalekzadeh@mut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 31 March 2016  
Accepted 08 June 2016  
Available Online 20 July 2016

#### Keywords:

Vibration  
layer sequence  
layer orientation  
fiber metal laminate shell

### ABSTRACT

In this paper the arrangement of the fiber metal laminate for cylindrical shells to achieve the maximum natural frequencies is optimized. In order to maximize the FML shell natural frequencies the sequence of the composite –metal layers and fiber orientation are changed frequently and for each case, the sample natural frequency is calculated. Finally FML shell with maximum natural frequencies is found. Hamilton's principle and energy method is used to define the equation of motion and First order shear deformation theory (FSDT) is utilized for vibration analysis in the shell's equilibrium equation. In order to solve free vibration problem the double Fourier series is used to obtain the eigenvalue problem. For this purpose, through a MATLAB program linked to the finite element software of ABAQUS, different shells with various layer sequence and fiber orientation are created and studied from optimization aspect. This comprehensive program is able to analyze the FML shells with various arrangements of composite –metal layers, fiber orientation and boundary condition. The simply-simply and clamp-clamp boundary conditions are applied on edges. The applicable fiber orientations are 0,30,60,90 degrees.

### 1- مقدمه

مکانیکی خوبی داشته باشند، متمرکز شده است. یکی از این ترکیبات ساخته شده از مواد مرکب که خواص خوب مواد فلزی نظیر چکش خواری، ضربه و محدوده خرابی بالا را با مزیت‌های خوب مواد مرکب مانند مقاومت ویژه بالا، سختی ویژه بالا، خوردگی مناسب و تحمل خستگی ترکیب می‌سازند

یکی از پرکاربردترین مواد مورد استفاده در سازه‌های هوایی و فضایی مواد مرکب می‌باشند. به همین دلیل در دهه‌های اخیر تلاش‌ها بر روی ساخت مواد مرکب با مقاومت در برابر خستگی و ضربه بالا که وزن کم و خواص

Please cite this article using:

A. Nazari, K. Malekzade Fard, M. Majidian, Vibration analysis of FML cylindrical shell optimized according to maximum natural frequency under various boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 143-152, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

که در مجموع در حدود چهارهزار حالت تنها برای یک نوع شرایط مرزی بررسی گردیده است. در این مقاله ترتیب قرارگیری لایه‌های پوسته هیبریدی و همچنین زوایای قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی از سمت داخل به خارج می‌باشد. به طور مثال پوسته هیبریدی سه لایه با لایه چینی AL/GI-Ep/GI-Ep و زوایای [0/90] معرف پوسته‌ای است که سطح داخلی آن از جنس آلومینیوم، لایه دوم از جنس شیشه/اپوکسی با زاویه قرارگیری صفر درجه و لایه خارجی آن نیز از جنس شیشه/اپوکسی با زاویه قرارگیری 90 درجه می‌باشد.

در مورد ارتعاشات و بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی مقالات متعددی به چاپ رسیده است. نام و وانگ [1]، در سال 2001 در مقاله‌ای طرح ترتیب چینش لایه‌های پوسته هیبریدی برای دستیابی به حداکثر استحکام را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای آنالیز پوسته از روش المان محدود براساس تئوری تغییر شکل برشی بهره‌گیری کردند. متغیرهای طراحی را زاویه الیاف اتخاذ کرده و توابع هدف را معیار واماندگی تسمای-هیل و معیار تسلیم میز، بترتیب برای لایه پریپرگ و لایه فلزی در نظر گرفتند. ملک‌زاده و همکاران [3,2]، در سال 2010 پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای FML تحت پیش تنش و بارهای پالسی عرضی را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای به دست آوردن معادلات تعادل از تئوری برشی مرتبه اول و برای حل معادلات از روش گلرکین استفاده نمودند. سامین [4]، در سال 2013 پاسخ گذرای غیرخطی پوسته کروی توخالی چند لایه FML تحت یک فیلد دمایی غیریکنواخت را بررسی نمودند. یگانو و همکارانش [5]، در سال 2013 آنالیز ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپ با شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند. آنها در این مقاله روش‌های موثری را برای حل ارتعاشات گذرا، هارمونیک و آزاد ورق‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک ارائه دادند. لام و لوی [6]، در سال 1995 تاثیر شرایط مرزی و جهت‌گیری لایه‌های کامپوزیتی را بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته چند لایه ارتوتروپیک مورد بررسی قرار دادند. آنها از تئوری لاو و روش ریتز استفاده نمودند.

سن و همکارانش [7]، در سال 2015 با ارائه یک پروسه طراحی بهینه، لایه‌چینی پوسته‌های FML را بر اساس معیار ایجاد ترک بهینه نمودند. آنها تنها لایه‌چینی پوسته را به عنوان متغیر در نظر گرفتند و با استفاده از یک پروسه طراحی معکوس لایه‌چینی بهینه را به گونه‌ای تعیین نمودند که دارای بیشترین استحکام جهت جلوگیری از ایجاد ترک باشند.

آلدریستن و همکارانش [8]، در سال 2015 به بهینه‌سازی لایه‌چینی پوسته‌های FML بر اساس معیار رشد ترک پرداختند. آنها لایه‌چینی‌ها را به صورت متقارن فرض نمودند و زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی نیز ثابت در نظر گرفته شدند و برای انجام فرایند بهینه‌سازی از الگوریتم ژنتیک استفاده نمودند. آنها لایه‌چینی را به گونه‌ای بهینه نمودند که دارای بیشترین مقاومت در برابر رشد ترک در لایه‌ها باشند.

با توجه به بررسی‌های صورت گرفته بزرگترین نوآوری‌های این تحقیق نسبت به تحقیقات گذشته عبارتند از:

- در این تحقیق برای اولین بار کد سیستماتیک برای بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی ارائه گردیده است که امکان بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی با هر نوع شرایط مرزی را دارا می‌باشد.
- در تحقیقات گذشته به منظور بهینه‌سازی ساختار پوسته‌های هیبریدی زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی و یا ترتیب

کامپوزیت‌های فلز و الیاف<sup>1</sup> یا همان چندلایه‌های هیبریدی می‌باشند که به اختصار به آنها FML گفته می‌شود. معمولاً بخش مهمی از سازه‌های مختلف از پوسته‌ها تشکیل می‌شوند. بالا بودن فرکانس طبیعی یک پوسته مزیت بسیار بزرگی برای سازه می‌باشد زیرا باعث می‌شود سازه در فرکانس‌های بالاتری دچار پدیده تشدید گردد. در نتیجه دستیابی به پوسته‌هایی با فرکانس طبیعی بالا از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از پوسته‌هایی که اخیراً کاربرد وسیعی در سازه‌های گوناگون پیدا کرده است پوسته‌های هیبریدی می‌باشند. یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد پوسته‌های هیبریدی امکان تغییر فرکانس طبیعی این پوسته‌ها با تغییر ترتیب قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر و همچنین تغییر زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی است. از آنجائیکه ترتیب قرارگیری لایه‌ها و زاویه قرارگیری آنها دارای حالت‌های بسیار زیادی می‌باشد در نتیجه باید بتوان با توجه به شرایط عملیاتی سازه، بهترین ترتیب لایه‌چینی و بهترین زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی را برای پوسته هیبریدی به منظور دستیابی به فرکانس طبیعی مورد نظر تحت شرایط مرزی مختلف مشخص نمود تا با هزینه مقرون به صرفه پوسته مورد نظر تولید گردد. یکی از مهمترین کاربردهای پوسته‌های هیبریدی در بدنه بلوک‌های انتقال مداری ماهواره‌ها می‌باشد. دستیابی به ساختاری بهینه برای این پوسته‌ها که دارای حداکثر سختی ممکن باشد دارای اهمیت به سزایی می‌باشد. در عین حال فرکانس‌های طبیعی این ساختارهای بهینه شده باید به اندازه کافی از فرکانس‌های موتور بلوک انتقال مداری دور باشند تا پدیده تشدید منجر به تخریب این پوسته‌ها نگردد. این مورد یکی از مهمترین دلایل انتخاب فرکانس طبیعی جهت انجام فرایند بهینه‌سازی می‌باشد. همچنین تغییر فرکانس طبیعی تابعی از تغییر جرم و یا سختی سازه می‌باشد و از آنجائی که در این تحقیق جنس پوسته ثابت در نظر گرفته می‌شود در نتیجه تغییر در فرکانس طبیعی تنها تابعی از سختی پوسته می‌باشد و افزایش و یا کاهش سختی پوسته به ترتیب منجر به افزایش و یا کاهش فرکانس طبیعی می‌گردد در نتیجه برای تعیین ساختار بهینه پوسته که دارای بیشترین سختی ممکن باشد از فرکانس‌های طبیعی به عنوان معیاری مناسب جهت تشخیص دستیابی به این هدف استفاده گردیده است. در این تحقیق پوسته‌های استوانه‌ای FML با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول مورد تحلیل ارتعاشی قرار گرفته‌اند و جهت تعیین بهینه‌ترین ساختار ممکن برای پوسته‌های هیبریدی با هدف دستیابی به فرکانس طبیعی ماکزیمم ترتیب قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر و همچنین زوایای قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی مرتباً تغییر کرده و فرکانس‌های طبیعی برای تمامی حالت‌های ممکن تحت شرایط مرزی مختلف مشخص شده است. به این منظور برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شده و با ایجاد ارتباط بین نرم‌افزار متلب و نرم‌افزار المان محدودی آباکوس پوسته‌های هیبریدی مورد نظر تحلیل گردیده‌اند. نمونه مورد بررسی در این مقاله برای اجراء روند بهینه‌سازی و تحلیل فرکانسی یک پوسته هیبریدی شش لایه می‌باشد که دو لایه آن از جنس آلومینیوم و چهار لایه آن از جنس شیشه/اپوکسی است. زاویه قرارگیری لایه‌ها نیز به صورت ترکیبی از زوایای 90/60/30/0 می‌باشند. به طور مثال برای تعیین بیشترین فرکانس طبیعی پوسته هیبریدی شش لایه، پانزده حالت قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر که در هر یک از این پانزده حالت لایه‌چینی 256 حالت برای زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی وجود دارد مورد بررسی قرار گرفته

<sup>1</sup> Fiber metal laminate

زوایای ارائه شده برای زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی ایجاد می‌گردد سپس با لینک برنامه نوشته شده در محیط متلب با نرم افزار آباکوس ترتیب قرارگیری لایه‌های فلزی و کامپوزیتی تشکیل‌دهنده پوسته و همچنین زوایای قرارگیری هر یک از لایه‌های کامپوزیتی پوسته هیبریدی مورد بررسی مرتباً تغییر کرده و برای تمامی ساختارهای ممکن پوسته هیبریدی میزان فرکانس طبیعی استخراج می‌گردد و در نهایت با مقایسه تمامی فرکانس‌های طبیعی، ساختاری از پوسته هیبریدی که منجر به بیشترین فرکانس طبیعی گردیده است به عنوان ساختار بهینه تعیین می‌گردد. در شکل 1 نیز نمودار فرایند بهینه‌سازی پوسته هیبریدی ارائه گردیده است.

فرایند بهینه‌سازی تا جایی ادامه می‌یابد که تحلیل فرکانسی تمامی ساختارهای ممکن برای پوسته هیبریدی مورد بررسی قرار گیرد. به این منظور از قیود طراحی ارائه شده در روابط (3) استفاده گردیده است.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } \omega \\ 0 < N.L.S \leq \frac{(M+N)!}{M! \times N!} \\ 0 < N.L.U \leq R^N \end{aligned} \quad (3)$$

مهمترین گام در شبیه‌سازی پوسته‌های هیبریدی در نرم افزار آباکوس نحوه تعیین خواص لایه‌های کامپوزیتی و انتخاب نوع المان جهت انجام مش‌بندی می‌باشد. به این منظور با ایجاد محورهای مختصات جدید خواص

قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده است اما در این تحقیق زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی و ترتیب قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر به طور همزمان به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند.

در تحقیقات گذشته بهینه‌سازی ساختار پوسته‌های هیبریدی نهایتاً برای سه زاویه 0, 45, 90 درجه انجام گرفته است ولی در این تحقیق برای زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی هیچ محدودیتی وجود ندارد.

### 2- بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی

در این پژوهش ساختار پوسته‌های هیبریدی با هر تعداد لایه‌های فلز و کامپوزیت و هر گونه زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی به گونه‌ای بهینه گردیده است که پوسته دارای بیشترین فرکانس طبیعی ممکن گردد. متغیرهای طراحی برای دستیابی به این هدف ترتیب قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت و همچنین زاویه قرارگیری هر یک از لایه‌های کامپوزیتی پوسته هیبریدی می‌باشند. در جدول 1 پارامترهای مورد استفاده در فرایند بهینه‌سازی معرفی گردیده‌اند.

### 3- بررسی فرآیند بهینه‌سازی پوسته هیبریدی

فرایند اجرا شده برای بهینه‌سازی پوسته هیبریدی به این گونه است که ابتدا با توجه به تعداد لایه‌های فلز و کامپوزیت و با استفاده از رابطه (1) تعداد حالت‌های مختلف قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر مشخص می‌شود.

$$S = \frac{(M+N)!}{M! \times N!} \quad (1)$$

سپس با استفاده از رابطه (2) تعداد حالت‌های مختلف برای زوایای قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی مشخص می‌گردد. لازم به ذکر است معادلات (1) و (2) توسط مولفین ارائه گردیده است.

$$U = R^N \quad (2)$$

با ضرب معادلات (1) و (2) در یکدیگر تعداد کل ساختارهای قابل حصول برای پوسته هیبریدی با  $M$  لایه فلزی و  $N$  لایه کامپوزیتی مشخص می‌شود. حال باید از بین تمامی این ساختارهای ممکن برای پوسته هیبریدی مورد نظر ساختاری که منجر به بیشترین فرکانس طبیعی می‌گردد مشخص شود. به این منظور ابتدا در محیط نرم افزار آباکوس یک پوسته هیبریدی با ساختاری دلخواه و با توجه به تعداد لایه‌های فلزی و کامپوزیتی و همچنین

جدول 1 معرفی پارامترهای مورد استفاده در فرایند بهینه‌سازی

نام پارامتر	تعریف پارامتر
$M$	تعداد لایه‌های فلزی پوسته هیبریدی
$N$	تعداد لایه‌های کامپوزیتی پوسته هیبریدی
$R$	تعداد زوایای قابل تخصیص به هر لایه کامپوزیتی
$S$	تعداد لایه‌چینی‌های قابل حصول برای پوسته هیبریدی
$U$	تعداد ترکیب‌های مختلف زاویه‌چینی برای لایه‌های کامپوزیتی
$N.L.S$	تعداد لایه‌چینی‌های بررسی شده
$N.L.U$	تعداد زاویه‌چینی‌های بررسی شده

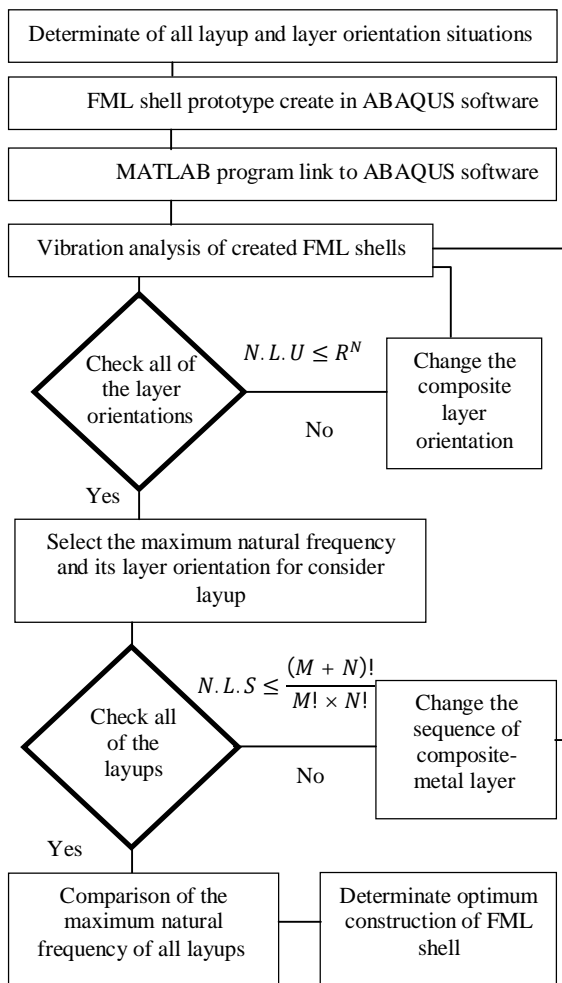


Fig. 1 Flowchart of design and optimization of cylindrical FML shell  
شکل 1 نمودار فرایند بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای هیبریدی

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right), \quad \gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

میدان جابجایی رابطه (4) برای استخراج معادلات حاکم در تئوری برشی مرتبه اول پوسته هیبریدی با استفاده از اصل همیلتون مورد استفاده قرار می‌گیرد [3]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [U - W - K] dt = 0 \quad (6)$$

که در آن  $\delta K$  تغییرات انرژی جنبشی،  $\delta U$  تغییرات انرژی کرنشی و  $\delta W$  تغییرات انرژی پتانسیل ناشی از بارهای اعمالی می‌باشد. برای استخراج روابط از حساب تغییرات استفاده شده است. هر کدام از این ترم‌ها با استفاده از میدان جابجایی معرفی شده بسط داده می‌شوند. در حالت ارتعاشات آزاد،  $\delta W$  صفر می‌باشد و روابط برای تغییرات انرژی جنبشی و کرنشی به صورت روابط (7) و (8) می‌باشند [3].

$$\delta k = \int \rho (\dot{U} \delta \dot{U} + \dot{V} \delta \dot{V} + \dot{W} \delta \dot{W}) dv \quad (7)$$

که در آن  $\rho$  معرف چگالی پوسته است. انرژی کرنشی کششی و خمشی پوسته بوسیله رابطه (8) بدست خواهد آمد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \varepsilon^T [S] \varepsilon R d\theta dx \quad (8)$$

که  $\varepsilon$  بردار کرنش پوسته با رابطه (9) به دست می‌آید

$$\varepsilon_1^T = \{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_4^0, \varepsilon_5^0, \varepsilon_6^0, \varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \varepsilon_3^1\} \quad (9)$$

در رابطه (9)،  $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_6^0\}$  کرنش سطح مرجع  $\{\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \varepsilon_3^1\}$  انحنا سطح مرجع و  $\{\varepsilon_4^0, \varepsilon_5^0\}$  کرنش‌های برشی هستند. با جایگذاری عبارت‌های مربوط به جابجایی که در روابط (4) داده شد در روابط (5)، کرنش‌های خطی بر حسب جابجایی سطح میانی را می‌توان به صورت روابط (10) به دست آورد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & \varepsilon_1^1 &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + w_0 \right) & \varepsilon_2^1 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} + \theta_z \right) \\ \varepsilon_6^0 &= \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \right] & \varepsilon_6^1 &= \left[ \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial x} \right] + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \theta_x}{\partial \varphi} \right] \\ \varepsilon_5^0 &= \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] + \theta_x & \varepsilon_4^0 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - v_0 \right) + \theta_\varphi \end{aligned} \quad (10)$$

در رابطه (8)،  $[S]$  ماتریس سختی پوسته کامپوزیتی لایه‌ای می‌باشد که به صورت رابطه (11) تعریف می‌شود [3]:

$$[S] = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \quad (11)$$

در رابطه (11)،  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  به ترتیب سختی کششی، پیچشی و خمشی پوسته کامپوزیتی چند لایه می‌باشند که با رابطه (12) تعریف می‌گردند [3].

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k - h_{k+1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^2 - h_{k+1}^2) \end{aligned}$$

مواد کامپوزیتی مورد نظر و زاویه قرارگیری آنها به لایه‌های کامپوزیتی مدل شده اختصاص داده می‌شود. همچنین برای مش‌بندی پوسته از المان ایجاد لینک بین نرم افزار متلب و آباکوس از دستور abaqus job استفاده شده و فایل‌های ایجاد شده با پسوند .inp، .dat، و .txt در محیط آباکوس توسط کد متلب فراخوانی شده و سپس با تعیین بخش‌های مربوط به ترتیب لایه‌چینی و زاویه‌چینی در فایل‌های فراخوانی شده آباکوس، ترتیب لایه‌چینی و زاویه‌چینی لایه‌ها توسط برنامه نوشته شده در محیط متلب تغییر نموده و نمونه‌های ایجاد شده مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

#### 4- میدان جابجایی

تئوری برشی مرتبه اول برای بیان رفتار اکثر ورق‌ها و پوسته‌ها مناسب است. در این تئوری به جهت اینکه نیروی برشی محاسبه شده از این تئوری با نیروی برشی به دست آمده از روابط تعادل تنش برابر باشد از ضریب تصحیح برشی استفاده می‌شود.

پوسته هیبریدی مطابق شکل 2 با ضخامت  $h$ ، شعاع متوسط  $R$ ، دانسیته جرمی  $\rho$  و طول  $L$  در نظر گرفته شده است. محور مختصات استوانه‌ای در سطح مرجع (سطح میانی) پوسته قرار گرفته است. جابجایی پوسته در سه جهت طولی، محیطی و شعاعی به ترتیب با  $u$ ،  $v$  و  $w$  نمادگذاری می‌شوند.

میزان جابجایی هر نقطه از پوسته به صورت روابط (4) با میزان جابجایی سطح مرجع ارتباط دارد و از بسط سری تیلور برای توسعه یک فرمولاسیون دو بعدی از یک مسأله الاستیسیته سه بعدی استفاده گردیده است [3].

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, z, t) &= u_0(x, \varphi, t) + z\theta_x(x, \varphi, t) \\ v(x, \varphi, z, t) &= v_0(x, \varphi, t) + z\theta_\varphi(x, \varphi, t) \\ w(x, \varphi, z, t) &= w_0(x, \varphi, t) \end{aligned} \quad (4)$$

در روابط (4)، عبارت‌های  $u(x, \varphi, z, t)$ ،  $v(x, \varphi, z, t)$  و  $w(x, \varphi, z, t)$  جابجایی‌های یک نقطه دلخواه  $(x, \varphi, z)$  در فضای چندلایه و به ترتیب در جهات  $x$ ،  $\varphi$  و  $z$  هستند و  $t$  زمان است. پارامترهای  $u_0$  و  $v_0$  جابجایی‌های درون صفحه و  $w_0$  جابجایی خارج از صفحه یک نقطه دلخواه  $(x, \varphi)$  بر روی سطح میانی چند لایه است. توابع  $\theta_x$  و  $\theta_\varphi$  چرخش‌های خط عمود بر سطح میانی المان پوسته حول محورهای  $x$  و  $\varphi$  هستند.

#### 5- استخراج معادلات

با تعریف کرنش‌ها از تئوری الاستیسیته خطی، روابط کرنش-جابجایی عمومی

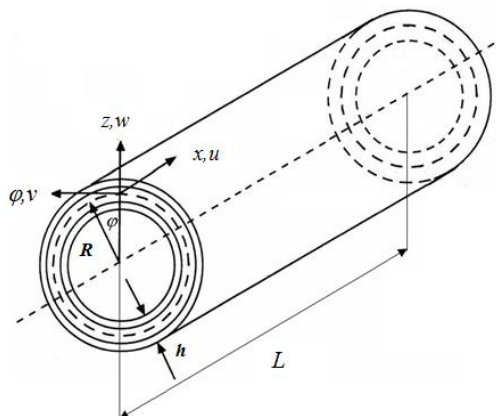


Fig. 2 Geometry of cylindrical shell and referenced coordinate system  
شکل 2 هندسه پوسته استوانه‌ای و سیستم مختصات مرجع

$$a(1,4) = -B(1,1) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - \frac{B(6,6) \partial^2 \theta_x}{R^2 \partial \varphi^2} + \rho h z \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}$$

$$a(1,5) = -\frac{A(1,2) \partial w}{R \partial x} \quad (17)$$

سپس با جایگذاری روابط (15) در معادلات تعادل پوسته که چند نمونه از آنها در روابط (17) آورده شده است ماتریس‌های جرم و سختی پوسته استخراج می‌گردند و سپس برای یافتن فرکانس‌های طبیعی پوسته باید معادله (18) حل گردد.

$$(\{K\} - \{M\} \omega^2) \{X\} = \{0\} \quad (18)$$

همانطور که در رابطه (18) ملاحظه می‌شود مساله ارتعاشات آزاد پوسته تبدیل به یک مساله مقادیر ویژه استاندارد گردیده است. در رابطه (18)،  $\{X\}$  بردار جابجایی،  $K$  ماتریس سختی و  $M$  ماتریس جرم می‌باشد که با حل معادله مقادیر ویژه فرکانس‌های طبیعی سازه استخراج می‌گردند. ترم‌های بردار جابجایی پوسته نیز در رابطه (19) نشان داده شده است.

$$\{X\} = \{u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{\varphi mn}\} \quad (19)$$

### 7- صحنه سنجی نتایج

جهت دریافت پاسخ صحیح از سازه باید همگرایی فرکانس‌های طبیعی بررسی شود. به این منظور نحوه تغییرات کمترین فرکانس طبیعی برای دو ساختار متفاوت با تغییر تعداد مش‌ها در شکل 3 نشان داده شده است.

همانطور که در شکل 3 نشان داده شده است میزان کمترین فرکانس طبیعی هر دو ساختار مورد بررسی با افزایش تعداد مش‌ها دقیق‌تر گردیده ولی با افزایش تعداد مش‌ها به بیش از 15000، فرکانس طبیعی هر دو ساختار ثابت شده و دیگر با افزایش تعداد مش‌ها میزان کمترین فرکانس طبیعی به میزان بسیار کمی دقیق‌تر می‌گردد که این امر نشان‌دهنده همگرا شدن حل می‌باشد.

در ادامه اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از تحلیل ارتعاشات آزاد با مقایسه با نتایج سایر محققین صورت پذیرفته است. به منظور حصول اطمینان از صحت نتایج ارائه شده، ابتدا در حالت‌های خاص مانند مواد ارتوتروپیک همگن، صحنه‌گذاری نتایج به دست آمده از این تحلیل با نتایج مراجع [6] و [9] انجام شده است. سپس به اعتبارسنجی نتایج درباره مواد با درجه پیچیدگی بالاتر یعنی پوسته‌های چندلایه هیبریدی پرداخته شده است. به این منظور فرکانس‌های طبیعی یک پوسته دو لایه ارتوتروپیک استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر لولا و خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آورده شده در روابط (20) مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصله در جدول 2 آورده شده است.

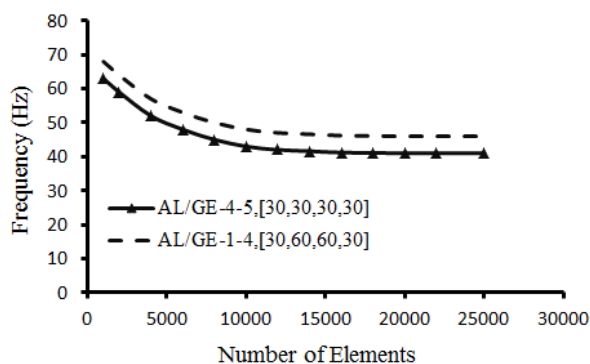


Fig. 3 Natural frequency convergence plot

شکل 3 نمودار همگرایی فرکانس طبیعی

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (h_k^3 - h_{k+1}^3) \quad (12)$$

در رابطه (12)،  $h_{k+1}$  و  $h_k$  فاصله سطح داخلی و خارجی لایه  $k$ ام از سطح مرجع،  $N$  تعداد لایه‌ها و  $\bar{Q}_{ij}^k$  ماتریس سختی انتقال یافته لایه  $k$ ام می‌باشد، که نحوه محاسبه آن در ضمیمه آورده شده است. با توجه به روابط (8)، (9)، (10)، (11) و (12) خواهیم داشت:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} [A_{11}(\varepsilon_1^0)^2 + 2A_{12}\varepsilon_2^0\varepsilon_1^0 + A_{22}(\varepsilon_2^0)^2 + A_{44}(\varepsilon_4^0)^2 + 2A_{45}\varepsilon_4^0\varepsilon_5^0 + A_{55}(\varepsilon_5^0)^2 + A_{66}(\varepsilon_6^0)^2 + 2B_{11}\varepsilon_1^0\varepsilon_1^1 + 2B_{22}\varepsilon_2^0\varepsilon_2^1 + 2B_{12}(\varepsilon_1^1\varepsilon_2^0 + \varepsilon_1^0\varepsilon_2^1) + 2B_{66}\varepsilon_6^0\varepsilon_6^1 + D_{11}(\varepsilon_1^1)^2 + 2D_{12}\varepsilon_1^1\varepsilon_2^1 + D_{22}(\varepsilon_2^1)^2 + D_{66}(\varepsilon_6^1)^2] R d\theta dx \quad (13)$$

### 6- استخراج و حل معادلات نهایی

به علت محدودیت تعداد صفحات مقاله، در این بخش معادلات شرایط مرزی تنها برای حالت دو سر لولا آورده شده است و از آوردن معادلات سایر شرایط مرزی صرفنظر گردیده است هر چند نتایج برای سایر شرایط مرزی استخراج گردیده و در ادامه آورده شده است. پس از محاسبه عبارات‌های مربوط به کار و انرژی در تابع اصل همیلتون، امکان استخراج عملگرهای دیفرانسیلی فراهم می‌آید. بدین نحو که بر مبنای قضیه اساسی حساب تغییرات، مجموع کل ضرایب عبارات‌های  $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y$  در عبارات زیر انتگرال‌های دوگانه بایستی برابر صفر قرار داده شوند. با فرض اینکه پوسته در دو سر دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده باشد، رابطه (14) از لحاظ ریاضی برقرار است [3]:

$$v=0, w=0, N_x=0, M_x=0 \quad \text{at } x=0, L \quad (14)$$

با توجه به اینکه ترم‌های جابجایی باید شرایط مرزی را ارضاء کند، به صورت روابط (15) انتخاب می‌گردند [3]:

$$u = u_{0mn} \cos(\lambda x) \cos(n\theta + \omega t)$$

$$v = v_{0mn} \sin(\lambda x) \sin(n\theta + \omega t)$$

$$w = w_{0mn} \sin(\lambda x) \cos(n\theta + \omega t)$$

$$\theta_x = \theta_{xmn} \cos(\lambda x) \cos(n\theta + \omega t)$$

$$\theta_\varphi = \theta_{\varphi mn} \sin(\lambda x) \sin(n\theta + \omega t) \quad (15)$$

در رابطه (15)،  $m$  شماره مد طولی و  $n$  شماره مد محیطی می‌باشد. اینرسی‌های جرمی به صورت رابطه (16) تعریف می‌شوند:

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{i=1}^{NL} \int_{Z_i}^{Z_{i+1}} \rho_k(1, z, z^2) \quad (16)$$

جهت استخراج عملگرهای دیفرانسیلی ابتدا باید از روابط کرنش-جابجایی تعریف شده در روابط (10)، مقادیر کرنش را در رابطه منته‌جه‌های تنش، جایگذاری کرده سپس روابط حاصله در معادلات تعادل پوسته، جایگذاری می‌گردند. پس از جداسازی مشتقات مربوط به هریک از مؤلفه‌های جابجایی و مرتب‌سازی، در نهایت 25 معادله دیفرانسیلی نهایی به دست می‌آیند. به علت تعداد زیاد معادلات حاصله به عنوان نمونه پنج معادله دیفرانسیلی از 25 معادله حاصله در روابط (17) آورده شده است.

$$a(1,1) = -A(1,1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A(6,6) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$a(1,2) = -\frac{A(1,2) \partial^2 v}{R \partial x \partial \varphi} - \frac{A(6,6) \partial^2 u}{R \partial \varphi^2}$$

$$a(1,3) = -\frac{B(1,2) \partial^2 \theta_\varphi}{R \partial x \partial \varphi} - \frac{B(6,6) \partial^2 \theta_\varphi}{R \partial x \partial \varphi}$$

تشکیل دهنده پوسته FML نسبت به یکدیگر و منظور از زاویه‌چینی عبارت است از زوایای قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی تشکیل‌دهنده پوسته FML. همچنین در این مقاله از یک روش نامگذاری اختصاری برای پوسته FML استفاده شده است. نحوه این نامگذاری به این صورت است که به عنوان نمونه یک پوسته هیبریدی شش لایه که از دو لایه آلومینیومی و چهار لایه شیشه/اپوکسی با لایه‌چینی به صورت AL/Gl.Ep/AL/Gl.Ep/Gl.Ep/ Gl.Ep تشکیل شده به طور اختصار به صورت AL/GE-1-3 نامگذاری گردیده است که AL مخفف لایه آلومینیوم و GE مخفف لایه شیشه/اپوکسی است. در این نامگذاری اعداد 1 و 3 نشان‌دهنده شماره لایه‌های آلومینیومی هستند به این معنی که لایه‌های اول و سوم از جنس آلومینیوم و سایر لایه ها از جنس شیشه/اپوکسی هستند.

### 9- تحلیل فرکانسی پوسته FML شش لایه تحت شرایط مرزی دو سر گیردار

در جدول 5 برای تمامی حالت‌های ممکن لایه‌چینی پوسته FML شش لایه، فرکانس‌های طبیعی ماکزیمم و مینیمم و همچنین زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی که منجر به این فرکانس‌های ماکزیمم و مینیمم گردیده‌اند برای شرایط مرزی دو سرگیردار آورده شده است. در شکل 5 تغییرات پنج فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای FML برای چهار لایه‌چینی مختلف و تحت شرایط مرزی دو سر گیردار نشان داده شده است. زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی ثابت و برای تمام لایه‌چینی‌ها به صورت 0/90/90/0 می‌باشد. همانطور که از این نمودار نیز مشخص است در یک پوسته FML با تغییر وضعیت قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر فرکانس‌های طبیعی تغییر خواهند کرد.

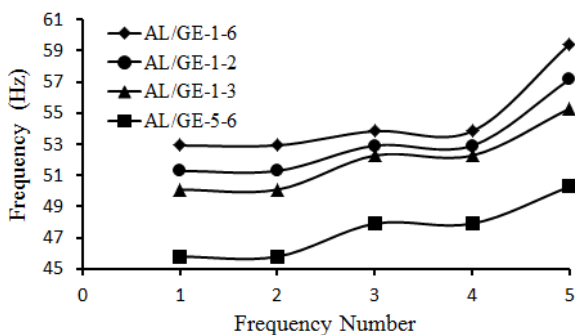


Fig. 5 Variation of the five primary natural frequencies for clamp-clamp FML cylindrical shell for different kind of four layer sequences  
شکل 5 تغییرات پنج فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای هیبریدی برای چهار لایه‌چینی مختلف تحت شرایط مرزی دو سرگیردار

جدول 4 خواص آلومینیوم و شیشه/اپوکسی مورد استفاده در پوسته FML

Table 4 Aluminum and glass/epoxy properties used for FML shells

مدول برشی GPa	مدول الاستیسیته GPa	ضرایب پواسون	چگالی kg/m <sup>3</sup>	
$G_{12} = 27.8$	$E_{11} = 72.4$	$\nu_{12} = 0.3$	$\rho = 2700$	آلومینیوم
$G_{13} = 27.8$	$E_{22} = 72.4$	$\nu_{13} = 0.3$		
$G_{23} = 27.8$	$E_{33} = 72.4$	$\nu_{23} = 0.3$		
$G_{12} = 4.7$	$E_{11} = 50$	$\nu_{12} = 0.25$	$\rho = 2500$	شیشه اپوکسی
$G_{13} = 4.7$	$E_{22} = 15.2$	$\nu_{13} = 0.25$		
$G_{23} = 3.28$	$E_{33} = 15.2$	$\nu_{23} = 0.42$		

$$E_{22} = 7.6 \frac{GN}{m^2}, E_{11}/E_{22} = 2.5, G_{12} = 4.1 \frac{GN}{m^2}, \theta_{12} = 0.26, \rho = 1643 \text{ kg/m}^3, h/R = 0.01, L_x/R = 1 \quad (20)$$

به این منظور از فاکتور بی بعد  $\omega^* = \omega h / \pi \sqrt{\rho/G_{12}}$  برای بی‌بعد سازی فرکانس‌های حاصله استفاده شده است.

همچنین برای بررسی صحت پاسخ‌های تئوری و روش مورد استفاده یک پوسته هیبریدی متشکل از پنج لایه آلومینیومی و چهار لایه کامپوزیتی تحت شرایط گیردار-آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مواد به کار رفته در پوسته هیبریدی مذکور در جدول 3 ارائه گردیده است.

در این پوسته لایه‌های فلز و کامپوزیت به صورت یک در میان قرار گرفته‌اند و زوایای لایه‌های کامپوزیتی به صورت صفر و نود درجه و ضخامت همه لایه‌های فلز و کامپوزیت با هم برابر در نظر گرفته شده‌اند. همانطور که در جدول 2 و شکل 4 نشان داده شده است، این تئوری دارای تطابق جواب‌های خوبی با مراجع معرفی شده می‌باشد.

### 8- نتایج تحلیل‌های انجام شده

پوسته مورد تحلیل در این پژوهش یک پوسته هیبریدی شش لایه متشکل از دو لایه آلومینیومی و چهار لایه شیشه/اپوکسی می‌باشد. خواص این مواد در جدول 4 آورده شده است. همچنین در این مقاله به منظور رعایت اختصار از اصطلاحات لایه‌چینی و زاویه‌چینی استفاده گردیده است. منظور از لایه‌چینی عبارت است از نحوه و ترتیب قرارگیری لایه‌های فلزی و کامپوزیتی

جدول 2 مقایسه فرکانس‌های بی بعد شده پوسته دو لایه با زاویه (90/0) با نتایج مراجع [6] و [9]

Table 2 comparison of the present result with [6] & [9] references

شماره مد	روش حاضر	مراجع [6]	مراجع [9]
1	2.004	2.106	2.106
2	1.21	1.344	1.344
3	0.9472	0.9586	0.9589
4	0.7381	0.7492	0.7495
5	0.6314	0.6419	0.6423

جدول 3 خواص مواد مورد استفاده در پوسته FML جهت صحت سنجی

Table 3 material properties used for FML shell for validation

ماده	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$G_{23}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
GRP <sup>T</sup>	60	13	0.3	3.4	3.4	2100
Al 2024	72.4	72.4	0.33	28	28	2770

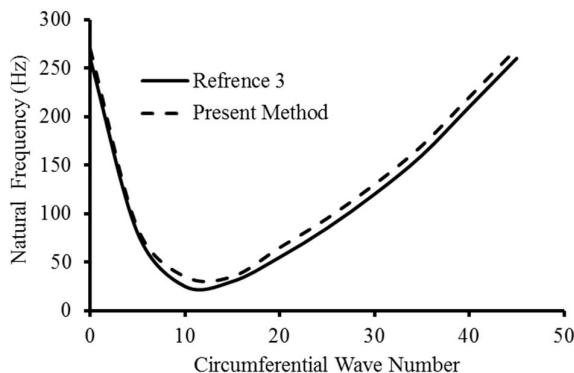


Fig. 4 Comparison of the present result with [3] reference  
شکل 4 مقایسه نتایج تحلیل حاضر با نتایج مرجع [3]

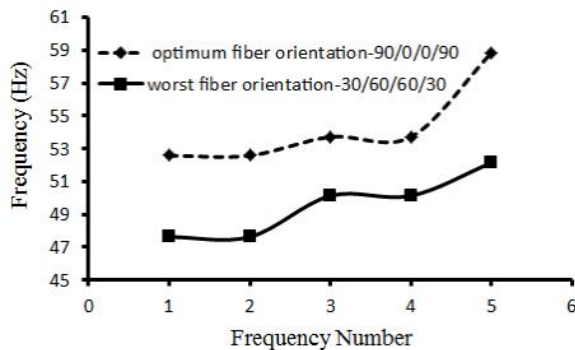


Fig. 7 Variation of natural frequencies for the best and worst of fiber orientation of clamp-clamp FML cylindrical shell with AL/GE-1-5 layer sequences

شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هیبریدی برای مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی برای لایه‌چینی AL/GE-1-5 با شرایط مرزی دو سرگیردار

زوایای 0، 30، 60 و 90 درجه را دارا می‌باشند و برای لایه‌چینی مذکور تمامی حالات ممکن برای زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی که در حدود 256 حالت می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است.

که در نتیجه مشخص شد در صورت زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی به صورت 90/0/0/90 بیشترین فرکانس طبیعی و با زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی به صورت 30/60/60/30 کمترین فرکانس طبیعی در پوسته FML مذکور حاصل می‌گردد.

در شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی پایه پوسته FML شش لایه با تغییر زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی برای چهار لایه‌چینی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در این شکل برای هر حالت لایه‌چینی، فرکانس طبیعی اول برای هفت زاویه‌چینی مختلف لایه‌های کامپوزیتی محاسبه گردیده است. همانطور که از این نمودار نیز مشخص است با تغییر همزمان لایه‌چینی و زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی و تعیین ساختار بهینه برای پوسته مذکور در حدود 30٪ افزایش در فرکانس‌های طبیعی ایجاد خواهد شد.

در شکل 9 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای بهترین و بدترین حالت‌های لایه‌چینی و زاویه‌چینی پوسته FML ترسیم گردیده است. همانطور که در شکل 9 نشان داده شده است برای پوسته FML شش لایه ساختار 90/0/0/0 & AL/GE-1-6 منجر به بیشترین فرکانس طبیعی و

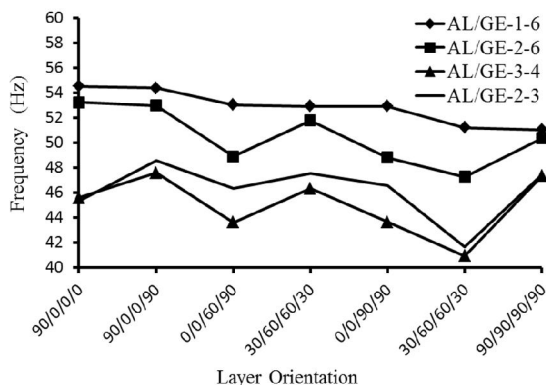


Fig. 8 Variation of the first natural frequencies with the change of fiber orientation for different kind of four layer sequences

شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای هیبریدی با تغییر زاویه‌چینی برای چهار لایه‌چینی مختلف با شرایط مرزی دو سرگیردار

جدول 5 مقایسه فرکانس‌های طبیعی ماکزیمم و مینیمم لایه‌چینی‌های مختلف

پوسته هیبریدی شش لایه با شرایط مرزی دو سرگیردار

Table 5 comparison of the maximum and minimum natural frequencies of clamp-clamp FML cylindrical shell for different kind of layer sequences

نوع لایه چینی	فرکانس	زاویه‌چینی منجر	فرکانس	زاویه‌چینی
طبیعی	به فرکانس	طبیعی	منجر به	زاویه‌چینی
ماکزیمم	طبیعی	ماکزیمم	مینیمم	فرکانس طبیعی
AL/GE-1-2	51.28	0/0/90/90	44.53	60/60/30/30
AL/GE-1-3	50.08	0/0/90/90	44.55	60/60/30/30
AL/GE-1-4	50.58	60/0/0/90	45.60	30/60/60/30
AL/GE-1-5	52.58	90/0/0/90	47.63	30/60/60/30
AL/GE-1-6	54.53	90/0/0/0	51.02	90/90/90/90
AL/GE-2-4	49.20	90/0/0/90	42.22	30/60/60/30
AL/GE-2-6	53.23	90/0/0/0	47.27	30/60/60/30
AL/GE-2-5	51.22	90/0/0/90	43.88	30/60/60/30
AL/GE-2-3	48.56	90/0/0/90	41.59	30/60/30/30
AL/GE-3-5	49.26	90/0/0/90	41.97	30/30/30/30
AL/GE-3-4	47.58	90/0/0/90	39.39	30/30/30/30
AL/GE-3-6	51.42	90/0/0/0	44.86	30/30/30/30
AL/GE-4-5	48.67	90/0/0/90	40.40	30/30/30/30
AL/GE-4-6	50.88	90/0/0/0	43.20	30/30/30/30
AL/GE-5-6	51.83	90/90/30/30	42.95	30/30/30/30

در شکل 6 تاثیر تغییر زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته FML شش لایه با لایه‌چینی AL/GE-1-4 مورد بررسی قرار گرفته است.

در شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی برای مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی پوسته FML با لایه‌چینی AL/GE-1-5 مشخص شده است. به این منظور فرض گردیده که لایه‌های کامپوزیتی پوسته استوانه‌ای هیبریدی امکان قرارگیری به صورت ترکیب‌های مختلفی از

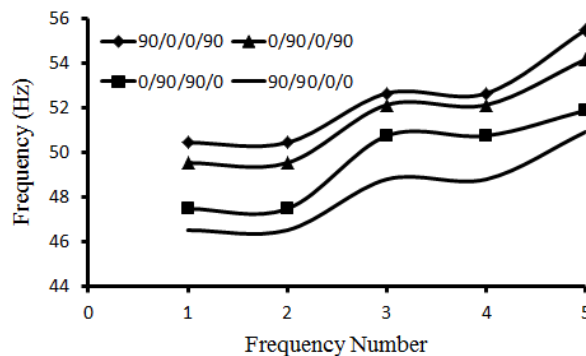


Fig. 6 Variation of natural frequencies for different kind of fiber orientation of clamp-clamp FML cylindrical shell with AL/GE-1-4 layer sequences

شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای هیبریدی با تغییر زاویه‌چینی برای لایه‌چینی AL/GE-1-4 با شرایط مرزی دو سرگیردار

فرکانس‌های طبیعی ماکزیمم و مینیمم و همچنین زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی که منجر به این فرکانس‌های ماکزیمم و مینیمم گردیده‌اند تحت شرایط مرزی دو سرلولا آورده شده است.

در شکل 10 تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای FML برای چهار لایه‌چینی مختلف و تحت شرایط مرزی دو سر لولا نشان داده شده است. زاویه‌چینی لایه‌های کامپوزیتی ثابت و برای تمام لایه‌چینی‌ها به صورت 90/90/90/90 می‌باشد. همانطور که از این نمودار نیز مشخص است در یک پوسته FML با تغییر وضعیت قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت نسبت به یکدیگر فرکانس‌های طبیعی تغییر خواهند کرد.

در شکل 11 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته FML با ساختار AL/GE-1-5&[90/0/0/90] تحت شرایط مرزی دو سرلولا و دو سرگردار با یکدیگر مقایسه گردیده است.

همانطور که در شکل 11 نشان داده شده است میزان فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی دو سرگردار بیشتر از میزان فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی دو سر لولا می‌باشد.

در شکل 12 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوسته FML با لایه‌چینی AL/GE-1-5 برای چهار زاویه‌چینی مختلف لایه‌های کامپوزیتی تحت شرایط مرزی دو سر لولا مورد بررسی قرار گرفته است.

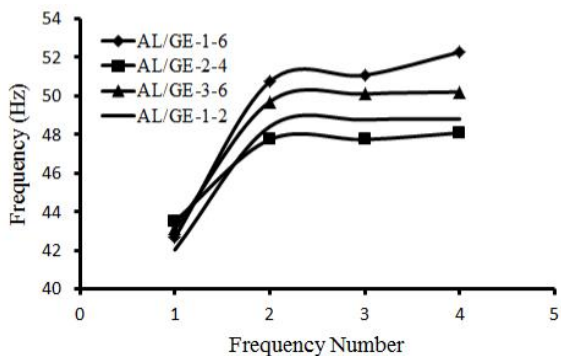


Fig. 10 Variation of the four primary natural frequencies for the simply-simply FML cylindrical shell for 90/90/90/90 fiber orientation and different kind of four layer sequences

شکل 10 تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول پوسته استوانه‌ای هیبریدی برای چهار لایه‌چینی مختلف با زاویه‌چینی 90/90/90/90 و با شرایط مرزی دو سرلولا

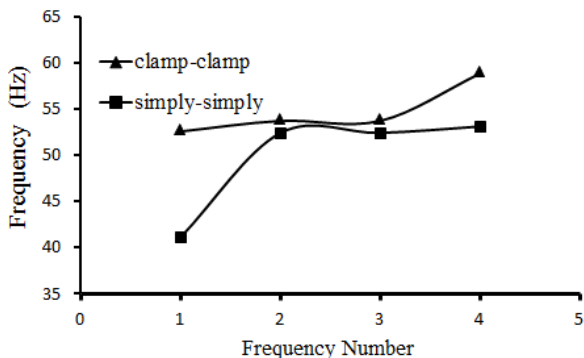


Fig. 11 comparison the Variation of the natural frequencies for the simply-simply FML cylindrical shell with AL/GE-1-5&[90/0/0/90] construction

شکل 11 مقایسه تغییرات فرکانس‌های طبیعی پایه برای پوسته FML با ساختار AL/GE-1-5&[90/0/0/90] تحت شرایط مرزی دو سرگردار و دوسر لولا

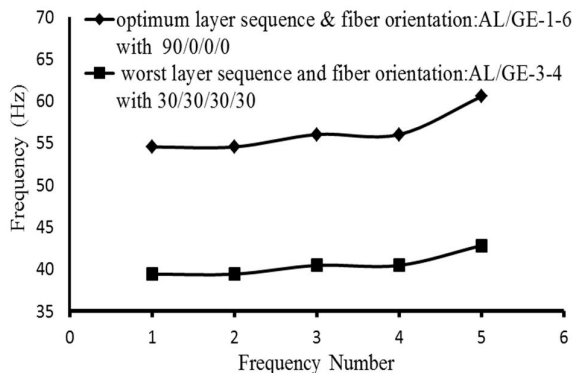


Fig. 9 Variation of the natural frequencies for the best and worst of layer sequences and fiber orientation of clamp-clamp FML cylindrical shell

شکل 9 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای بهترین و بدترین ساختارهای پوسته FML با شرایط مرزی دو سرگردار

ساختار AL/GE-3-4&[30/30/30/30] منجر به کمترین فرکانس طبیعی برای این پوسته تحت شرایط مرزی دو سرگردار می‌گردد.

### 10- تحلیل فرکانسی پوسته FML شش لایه تحت شرایط مرزی دو سر لولا

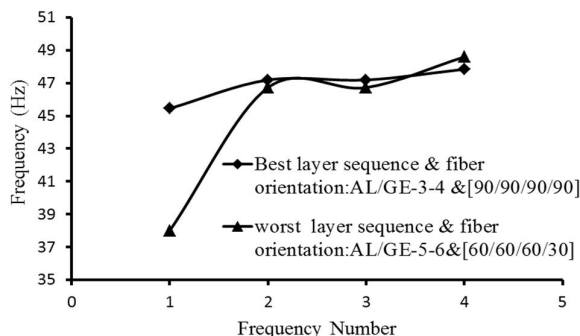
در جدول 6 برای تمامی حالت‌های ممکن لایه‌چینی پوسته FML،

جدول 6 مقایسه فرکانس‌های طبیعی ماکزیمم و مینیمم لایه‌چینی‌های مختلف پوسته هیبریدی با شرایط مرزی دو سرلولا

Table 6 comparison of the maximum and minimum natural frequencies of simply-simply FML cylindrical shell for different kind of layer sequences

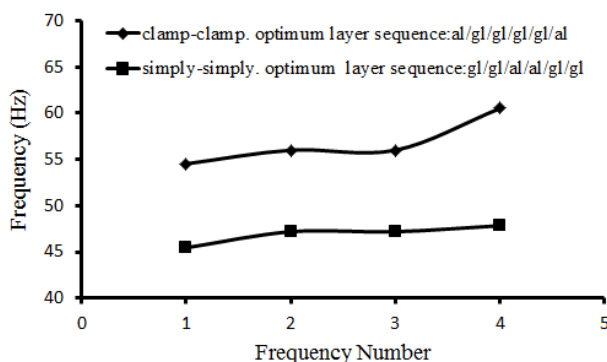
زاویه‌چینی	فرکانس	زاویه‌چینی منجر به	فرکانس	منجر به
نوع لایه چینی	طبیعی	به فرکانس	طبیعی	فرکانس
ماکزیمم	طبیعی	ماکزیمم	مینیمم	طبیعی
مینیمم				
AL/GE-1-2	42.03	90/90/90/90	39.59	30/60/60/30
AL/GE-1-3	43.07	90/90/90/90	40.54	30/30/30/30
AL/GE-1-4	42.89	90/90/90/90	39.41	30/30/30/30
AL/GE-1-5	42.35	90/90/90/90	39	30/30/30/30
AL/GE-1-6	42.67	90/90/90/90	39.91	30/30/30/30
AL/GE-2-4	43.51	90/90/90/90	40.23	30/30/30/30
AL/GE-2-6	42.46	90/90/90/90	38.94	30/30/30/30
AL/GE-2-5	42.44	90/90/90/90	38.52	30/30/30/30
AL/GE-2-3	43.93	90/90/30/30	40.31	30/0/0/90
AL/GE-3-5	43.62	90/90/90/90	39.29	60/60/60/30
AL/GE-3-4	45.45	90/90/90/90	39.33	30/30/30/30
AL/GE-3-6	43.1	90/90/90/90	38.88	60/60/30/0
AL/GE-4-5	43.98	0/90/60/90	39.02	60/60/60/30
AL/GE-4-6	43.43	0/0/90/90	39.06	60/60/60/30
AL/GE-5-6	42.69	0/0/90/90	38	60/60/60/30





**Fig. 14** Variation of the natural frequencies for the best and worst of layer sequences and fiber orientation of the simply-simply FML cylindrical shell

شکل 14 تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین حالت‌های لایه چینی و زاویه چینی پوسته FML تحت شرایط مرزی دو سر لولا

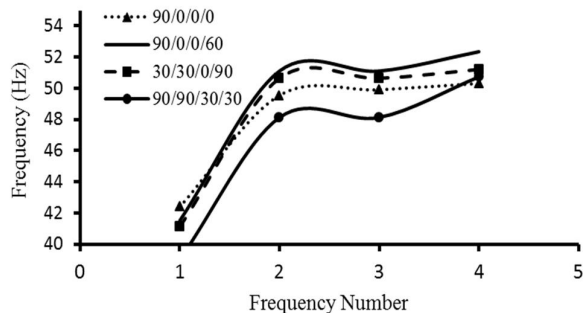


**Fig. 15** Variation of the natural frequencies for the best of layer sequences and fiber orientation of the FML cylindrical shell with clamp-clamp and simply-simply boundary conditions

شکل 15 تغییرات فرکانس‌های پایه برای بهترین حالت لایه چینی و زاویه چینی پوسته FML برای شرایط مرزی دو سر لولا و دو سر گیردار

### 11- نتیجه گیری

- یکی از مهمترین نوآوری‌های این پژوهش تعیین روشی کاربردی جهت بهینه‌سازی ساختار پوسته‌های هیبریدی می‌باشد به گونه‌ای که ساختار ایجاد شده منجر به بیشترین فرکانس طبیعی برای پوسته گردد.
- برای اجرا روند بهینه‌سازی پوسته‌های هیبریدی یک برنامه کامپیوتری در محیط نرم‌افزار متلب ایجاد گردیده و با لینک این برنامه با نرم افزار آباکوس فرایند بهینه‌سازی انجام می‌گیرد.
- متغیرهای فرایند بهینه‌سازی ترتیب قرارگیری لایه‌های فلز و کامپوزیت و زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی در نظر گرفته شده‌اند.
- نتایج استخراج شده از تحلیل‌های انجام شده نشان می‌دهد برای نمونه مورد بررسی در این پژوهش که یک پوسته FML شش لایه متشکل از دو لایه آلومینیوم و چهار لایه شیشه/اپوکسی می‌باشد تحت شرایط مرزی دو سر گیردار ساختار AL/GE-1-6 که لایه‌های کامپوزیتی آن با زوایای 90/0/0/0 درجه قرار گرفته‌اند منجر به بیشترین فرکانس طبیعی برای این پوسته خواهد گردید و ساختار AL/GE-3-4 که لایه‌های کامپوزیتی آن با زوایای 30/30/30/30 درجه قرار گرفته‌اند منجر به کمترین فرکانس



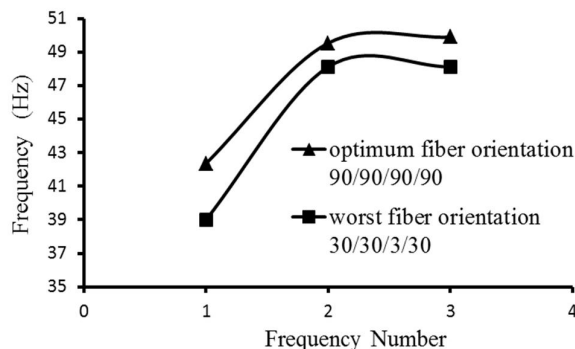
**Fig. 12** Variation of the base natural frequencies with the change of fiber orientation for the simply-simply FML cylindrical shell with AL/GE-1-5 layer sequences

شکل 12 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی پایه با تغییر زاویه چینی لایه‌های کامپوزیتی برای پوسته FML با لایه چینی AL/GE-1-5 تحت شرایط مرزی دو سر لولا

برای پوسته FML شش لایه با لایه چینی AL/GE-1-5 در صورت زاویه چینی لایه‌های کامپوزیتی به صورت 90/90/90/90 بیشترین فرکانس طبیعی ممکن و در صورت زاویه چینی لایه‌های کامپوزیتی به صورت 30/30/30/30 کمترین فرکانس طبیعی حاصل می‌گردد. در شکل 13 نحوه تغییرات فرکانس طبیعی پوسته FML با لایه چینی AL/GE-1-5 و تحت زاویه چینی‌های 90/90/90/90 و 30/30/30/30 رسم گردیده است.

برای پوسته FML شش لایه مورد بررسی در این پژوهش ساختار AL/GE-3-4&[90/90/90/90] منجر به بیشترین فرکانس طبیعی و ساختار AL/GE-5-6&[60/60/60/30] منجر به کمترین فرکانس طبیعی برای این پوسته تحت شرایط مرزی دو سر لولا می‌گردد در شکل 14 نحوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی برای مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین حالت‌های لایه چینی و زاویه چینی پوسته FML مذکور تحت شرایط مرزی دو سر لولا ترسیم گردیده است.

در شکل 15 نحوه تغییرات فرکانس‌های پایه برای بهترین ساختارهای پوسته FML تحت شرایط مرزی دو سر لولا و دو سر گیردار با یکدیگر مقایسه گردیده‌اند. همانطور که از این نمودار مشخص است بیشترین میزان فرکانس‌های طبیعی با تغییر شرایط مرزی از حالت گیردار به لولا در حدود بیست درصد کاهش می‌یابد.



**Fig. 13** Variation of the natural frequencies for the best and worst of fiber orientation of the simply-simply FML cylindrical shell with AL/GE-1-5 layer sequences

شکل 13 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای FML برای مطلوب‌ترین و نامطلوب‌ترین زاویه چینی لایه‌های کامپوزیتی برای لایه چینی AL/GE-1-5 تحت شرایط مرزی دوسر لولا

روابط (21) تا (23) ارائه گردیده است. لازم به ذکر است این ثوابت به طور کامل در مرجع [3] ارائه گردیده است.

$$Q_{11} = C_{11}\cos^4 + 2(C_{12} + 2C_{44})\sin^2\cos^2 + C_{22}\sin^4 \quad (21)$$

$$Q_{12} = C_{12}(\sin^4 + \cos^4) + (C_{11} + C_{22} - 4C_{44})\sin^2\cos^2 \quad (22)$$

$$Q_{13} = (C_{13}\cos^2 + C_{23}\sin^2) \quad (23)$$

### 13- مراجع

- [1] H.W. Nam, W. Hwang, Stacking sequence design of fiber-metal laminate for maximum strength, *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 18, pp.1654-1683, 2001.
- [2] S. M. R. Khalili, K. Malekzadeh, A. Davar, Dynamic response of pre-stressed Fiber Metal Laminate (FML) circular cylindrical shells subjected to lateral pressure pulse loads, *Journal of Composite Structures*, Vol. 92, No. 6, pp.1308-1317, 2010
- [3] K. Malekzadeh, S. M. R. Khalili, A. Davar, Transient dynamic response of clamp-free hybrid composite circular cylindrical shells, *Journal of Apply Composite Material*, Vol. 17, No. 10, pp. 243-257, 2010
- [4] Y. Fu, S. Hu, Nonlinear transient response of fiber metal laminated shallow spherical shells with interfacial damage under unsteady temperature fields, *Journal of Composite Structures*, Vol. 106, No. 1, pp. 57-64, 2013
- [5] Y. Qu, H. Hua, G. Meng, A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries, *Journal of Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 307-321, 2013
- [6] K. Y. Lam, C. T. Loy, Influence of boundary conditions and fiber orientation on the natural frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells, *Journal of Composite Structures*, Vol. 31, No. 1, pp. 21-30, 1995
- [7] I. Sen, R.C. Alderliesten, R. Benedictus, Design optimization procedure for fiber metal laminates based on fatigue crack initiation, *Journal of Composite Structures*, Vol. 120, No. 5, pp. 275-284, 2015
- [8] R.C. Alderliesten, R. Benedictus, I. Sen, Lay-up optimization of fiber metal laminates based on fatigue crack propagation and residual strength, *Journal of Composite Structures*, Vol. 124, No. 5, pp. 77-87, 2015
- [9] k. P. Soldatos, A comparison of some shell theories used for the dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylindrical panels, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 5, pp. 305-319, 1984

طبیعی می‌گردد.

- برای پوسته هیبریدی مذکور تحت شرایط مرزی دو سر لولا ساختار AL/GE-3-4&[90/90/90/90] منجر به بیشترین فرکانس طبیعی و ساختار AL/GE-5-6&[60/60/60/30] منجر به کمترین فرکانس طبیعی برای این پوسته می‌گردد.
- نوع شرایط مرزی تاثیر به سزایی بر روی نحوه تغییرات فرکانس طبیعی خواهد داشت و با تغییر شرایط مرزی نحوه چینش لایه‌ها و زاویه قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی برای دست‌یابی به فرکانس طبیعی ماکزیمم تغییر می‌نماید.
- به طور کلی میزان فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی دو سرگیردار بیشتر از میزان فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی دو سر لولا می‌باشد.
- برای پوسته FML مذکور و تحت شرایط مرزی دو سرگیردار با تعیین بهینه‌ترین ساختار پوسته در حدود 30% افزایش در فرکانس‌های طبیعی نسبت به نامطلوب‌ترین ساختار پوسته ایجاد خواهد شد.
- برای پوسته FML مذکور و تحت شرایط مرزی دو سر لولا با تعیین بهینه‌ترین ساختار پوسته در حدود 20% افزایش در فرکانس‌های طبیعی نسبت به نامطلوب‌ترین ساختار پوسته ایجاد خواهد شد.

### 12- پیوست

به علت محدودیت صفحات مقاله تنها سه ثابت کاهش یافته الاستیک در