



# Topology Optimization of Structure in the Fluid-Structure Interaction Problem using the Level Set Method

## ARTICLE INFO

### Article Type

Original Research

### Authors

Jahangiri M.A.<sup>1</sup>,  
Attarnejad R.<sup>1\*</sup>,  
Noei N.<sup>2</sup>

### How to cite this article

Jahangiri M.A, Attarnejad R, Noei N, Topology Optimization of Structure in the Fluid-Structure Interaction Problem using the Level Set Method. Modares Mechanical Engineering; 2024;24(08):485-498.

<sup>1</sup> College of Engineering, School of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Department of Simulation Methods and Continuum Mechanics, Leibniz Universität, Hannover, Germany.

### \*Correspondence

Address: College of Engineering, School of Civil Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

attarnjd@ut.ac.ir

### Article History

Received: May 19, 2024

Accepted: October 20, 2024

ePublished: November 16, 2024

## ABSTRACT

This research focuses on topology optimization of fluid-structure interaction (FSI) problems using the level set method. To couple the fluid and structure equations, the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) description is employed within a monolithic formulation. The use of ALE in FSI problems, while eliminating numerical instabilities caused by the convective term, enhances the speed and accuracy of finite element solutions in fluid-structure interaction. Additionally, considering the fluid in the unsteady state allows for the interpretation of optimal topology at any given moment of the analysis. The objective function of the optimal topology design problem is to minimize the structural compliance in the dry state, subject to a fixed volume of the design domain. To determine the normal velocity in the reaction-diffusion equation (RDE), adjoint sensitivity analysis based on pointwise gradients is used. The results obtained from this approach, compared to other topology optimization methods in the literature, demonstrate higher accuracy and clearer definition of structural boundaries.

**Keywords** Topology Optimization, Fluid-Structure Interaction, Level Set Method, Adjoint Sensitivity Analysis, Reaction-Diffusion Equation, Finite Element Method.

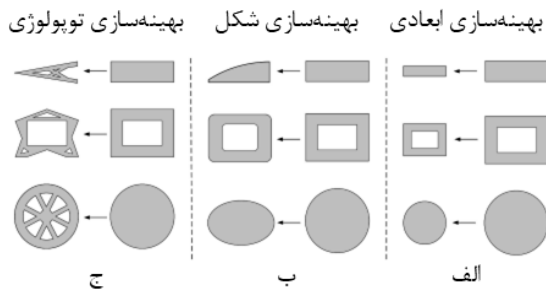
## CITATION LINKS

1- Modeling and simulation of thin-walled piezoelectric energy ... 2- Structural design optimization using ... 3- Generating optimal topologies in structural ... 4- Generalized shape optimization ... 5- Some aspects of the genesis of ... 6- Optimization of structural topology ... 7- Evolutionary Topology Optimization of ... 8- Topology optimization of binary structures ... 9- Level Set Methods and Fast Marching ... 10- Fronts propagating with curvature-dependent ... 11- Topology optimization with implicit ... 12- An immersed boundary approach ... 13- Evolutionary topology optimization for structural ... 14- Topology optimization for stationary fluid-structure ... 15- Stress-based topology optimization method ... 16- Topology optimization of fluid-structure-interaction problems ... 17- Bi-directional evolutionary structural optimization ... 18- Topology optimization of binary structures under ... 19- Shape optimization of a coupled thermal ... 20- A polytree-based adaptive polygonal finite element ... 21- Three-dimensional topology optimization ... 22- A new monolithic design approach for topology optimization ... 23- Topology optimization of structures subject ... 24- Nonlinear solid mechanics: a continuum approach ... 25- An advanced ALE-mixed finite element method ... 26- A monolithic FEM/multigrid solver for an ALE formulation ... 27- Convergence of a finite element/ALE method for ... 28- "Equipotential" zoning of two-dimensional meshes ... 29- The FEniCS project version 1.5. Archive of ... 30- A numerical solution of the Navier-Stokes ... 31- Stabilized multiscale finite element ... 32- A topology optimization method based on ... 33- Isogeometric level set-based topology optimization for ...

## بهینه‌سازی توپولوژی سازه در مسئله اندرکنش سیال-سازه به روش مجموعه سطوح تراز

محمدعلی جهانگیری<sup>۱</sup>، رضا عطار نژاد<sup>۱\*</sup>، نیما نوعی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده فنی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران، تهران، ایران  
<sup>۲</sup> بخش مدل‌سازی و مکانیک محیط‌های پیوسته، دانشگاه لایپنیتس، هانوفر، آلمان



شکل ۱) تفاوت انواع روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها [2].

در چند دهه گذشته پژوهش‌های بسیاری در زمینه بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها صورت گرفته است. از جمله روش‌های شناخته‌شده در بهینه‌سازی توپولوژی می‌توان به روش همگن‌سازی [3]، روش مصالح جامد همسان جرمه‌شده [4-6]، بهینه‌سازی تکاملی دوطرفه سازه‌ها [7]، بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های باینری [4] و روش بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز [9-11] اشاره کرد.

بهینه‌سازی توپولوژی سازه در زمینه مسائل اندرکنش سیال-سازه به‌عنوان یک حوزه تحقیقاتی مهم شناخته شده و طیف گسترده‌ای از علوم مهندسی را شامل می‌شود.

جنکینز و مائوته [12] به‌منظور تفکیک و طبقه‌بندی روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی در مسائل اندرکنش سیال-سازه عبارت بهینه‌سازی توپولوژی در حالت خشک و مرطوب را معرفی نمودند. منظور ایشان از بهینه‌سازی توپولوژی خشک، حالتی است که تحت آن تنها شکل و توپولوژی داخلی سازه بهینه می‌شود. همچنین در حالت بهینه‌سازی مرطوب روش‌های حل قادر به شناسایی و تغییر شکل هندسه و حذف مرز سیال-سازه هستند. بهینه‌سازی توپولوژی در حالت خشک به‌راحتی می‌تواند بدون توجه به اینکه روش بهینه‌سازی توپولوژی اتخاذ شده، مبتنی بر چگالی یا روش مجموعه سطوح تراز باشد، استفاده شود.

در مقابل بهینه‌سازی توپولوژی تر که به آن مسئله وابسته به طراحی نیز اطلاق می‌شود، در روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر چگالی نیاز به تکنیک‌های عددی اضافی دارند تا تعامل معادلات مختلف در طول روند بهینه‌سازی را مدل کنند. مرز سیال-سازه در مسئله بهینه‌سازی مرطوب، همچنین مکان، جهت و مقدار بارهای سیال، ممکن است در طول فرآیند بهینه‌سازی تغییر کند. روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر چگالی مقادیری قابل‌ملاحظه از چگالی میانه را ارائه می‌دهند و به‌عبارت‌دیگر، قادر به شناسایی مرز مسئله اندرکنش سیال-سازه به‌صورت مستقیم نیستند [13].

شکل ۲ نمایی از تفاوت بهینه‌سازی توپولوژی در حالت‌های خشک و تر را نشان می‌دهد.

### چکیده

این پژوهش به بهینه‌سازی توپولوژی مسائل اندرکنش سیال-سازه به روش مجموعه سطوح تراز می‌پردازد. به‌منظور جفت کردن معادلات سیال-سازه از روش توصیف لاگرانژی-اولری دلخواه (ALE) در فرمول‌بندی یکپارچه استفاده شده است. استفاده از توصیف لاگرانژی-اولری تحت فرمول‌بندی یکپارچه برای مسائل FSI، ضمن حذف ناپایداری‌های عددی ناشی از ترم همرفت، باعث افزایش سرعت و دقت حل اجزای محدود مسائل اندرکنش سیال-سازه خواهد شد. همچنین در نظر گرفتن سیال در حالت ناپایا (Unsteady) امکان تفسیر توپولوژی بهینه را در هر لحظه از تحلیل فراهم می‌آورد. تابع هدف مسئله طراحی بهینه توپولوژی سازه، به‌حداقل رساندن نرمی سازه در حالت خشک تحت حجم معینی از دامنه طراحی سازه در نظر گرفته شده است. به‌منظور یافتن سرعت نرمال معادله واکنش-انتشار (RDE) از آنالیز حساسیت الحاقی مبتنی بر گرادینان نقطه‌ای استفاده شده است. نتایج حاصله از این رویکرد در مقایسه با سایر رویکردهای بهینه‌سازی توپولوژی موجود در ادبیات فنی نشان از دقت بالاتر و تشکیل مرزهای سازه‌ای واضح‌تر دارد.

**کلیدواژه‌ها:** بهینه‌سازی توپولوژی، اندرکنش سیال-سازه، روش مجموعه سطوح تراز، آنالیز حساسیت الحاقی، معادله واکنش-انتشار، روش اجزای محدود.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۲۹

\*نویسنده مسئول: attarnjd@ut.ac.ir

### ۱- مقدمه

تحلیل مسئله اندرکنش سیال-سازه بر اساس نحوه تعامل بین دامنه‌های سیال و سازه با استفاده از رویکرد تقسیم‌بندی شده و یکپارچه صورت می‌پذیرد. استفاده از رویکرد یکپارچه به‌منظور فراهم آوردن دقت و پایداری مناسب‌تر، پیشنهاد شده است [1].

بهینه‌سازی سازه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود: بهینه‌سازی ابعاد، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی توپولوژی. در شکل ۱ نمایی شماتیک از ساختار این سه روش بهینه‌سازی نشان داده شده است. بهینه‌سازی توپولوژی به‌عنوان یک روش محاسباتی کارآمد در یافتن بهترین الگوی توزیع مصالح در یک دامنه طراحی مشخص، شناخته می‌شود که بهترین عملکرد مورد انتظار را تحت وجود قیود طراحی را فراهم نماید.

اخیراً رویکرد بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های باینری TOBS نیز توسط پیچلی و همکاران [18] برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژی اندرکنش سیال-سازه با فرض رفتار الاستیک خطی سازه‌ها توسعه یافت.

برخلاف روش‌های مبتنی بر چگالی، بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز نمایشی واضح از مرزهای سازه ارائه می‌دهد. جنکینز و مائوته [12] با ترکیب نمودن روش مجموعه سطوح تراز به‌همراه روش اجزای محدود گسترده به بهینه‌سازی توپولوژی سازه پرداخته‌اند. در پژوهش ایشان مسائل اندرکنش سیال-سازه در وضعیت پایدار با فرض رفتار خطی سازه الاستیک در نظر گرفته شده است و مثال‌های ارائه‌شده به‌تغییرشکل‌های کوچک محدود شده‌اند.

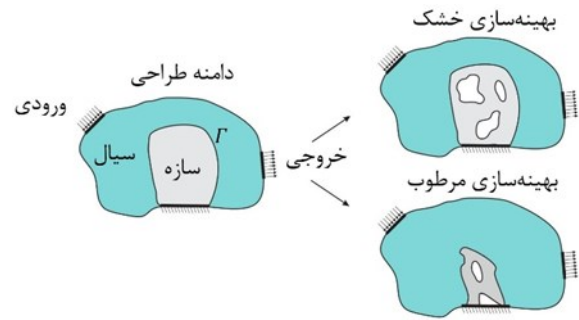
همچنین، فپون و همکاران [19] از تکنیک مش‌بندی مجدد در یک مش منطبق در ترکیب با بهینه‌سازی توپولوژی به‌روش مجموعه سطوح تراز در مسائل دوبعدی استفاده نمودند. در هر تکرار، مرز سیال-سازه با روش مجموعه سطوح تراز تکامل می‌یابد و متعاقباً به‌منظور ردیابی مرز، دامنه‌های سیال و سازه به‌صورت جداگانه مجدداً مش‌بندی می‌شود. در پژوهش ایشان، برای تحلیل مسئله اندرکنش سیال-سازه از رویکرد تقسیم‌بندی شده استفاده شده است.

هو و همکاران [20] مسئله بهینه‌سازی را برای سازه موج‌شکن مستغرق تحت فرمول‌بندی تقسیم‌بندی شده با روش مبتنی بر چگالی SIMP را ارائه نمودند. در این پژوهش تابع هدف مسائل بهینه‌سازی تابع نرمی و تابع قید مقدار حجم مصالح در نظر گرفته‌شد.

لی و همکاران [21] به‌بررسی جامع‌تری از مسائل پرداختند. در پژوهش ایشان مسائل دو و سه‌بعدی به‌منظور بهینه‌سازی توپولوژی سازه در حالت‌های خشک و تر با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز بیان شده است. همچنین بهینه‌سازی استهلاک انرژی سیال تحت محدودیت ابعاد مجاز کانال از دیگر موارد موردبررسی در این پژوهش است. آن‌ها از معادلات ناویه-استوکس در حالت پایدار برای دامنه سیال و معادله الاستیسیته خطی برای دامنه جامد در پژوهش خود استفاده نموده‌اند.

یون به‌منظور ارتقا پژوهش خود [22] به بهینه‌سازی توپولوژی سازه در مسئله اندرکنش سیال-سازه در حالت گذرا تحت فرمول‌بندی یکپارچه با روش SIMP پرداخته است. استفاده از فرمول‌بندی برای جریان سیال گذرا نخستین بار در این پژوهش صورت گرفت. در پژوهش ایشان تابع هدف مسائل بهینه‌سازی تابع نرمی و تابع قید مقدار حجم مصالح در نظر گرفته‌شد.

همچنین رنجبر زاده و همکاران [23] در ادامه تحقیقات با در نظر گرفتن معادلات سیالات غیرنیوتنی و معادلات الاستیسیته‌خطی نخستین بار مسائل بهینه‌سازی سازه در مسائل اندرکنش سیال-سازه را برای اعداد رینولدز بالا (۲۰۰۰) تحت جریان آرام ارائه نمودند.



شکل ۲) تفاوت توپولوژی بهینه در حالت‌های خشک و تر.

اولین پژوهش در زمینه بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها در مسائل اندرکنش سیال-سازه توسط یون [14] با استفاده از رویکرد مبتنی بر چگالی انجام شد. در پژوهش ایشان بیان گردید که استفاده از روش تقسیم‌بندی شده، در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش‌های مبتنی بر چگالی دشوار است، زیرا وجود المان‌هایی با چگالی میانه باعث ایجاد مرزهای مبهم می‌شود و در نتیجه نمایش واضحی از مرز میان سیال و سازه وجود ندارد. در پژوهش ایشان، برای سیال تراکم ناپذیر در حالت پایدار از معادلات ناویه-استوکس و برای سازه از معادلات الاستیسیته خطی با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های کوچک استفاده شده است.

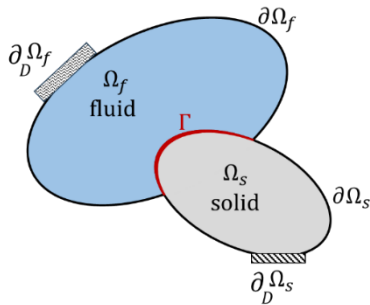
یون [15] در ادامه پژوهش خود به بهینه‌سازی جرم تحت محدودیت‌های تنش پرداخت. همچنین معادلات برای سیال و سازه مطابق پژوهش قبلی ایشان فرض شدند.

آندریسن و زیگموند [16] از یک رویکرد مشابه برای بهینه‌سازی توپولوژی مسائل در فرمول‌بندی یکپارچه محیط‌های تخلخلی اشباع‌شده استفاده کردند. ایشان، از قانون جریان ماکروسکوپی نوع داری برای اتصال جریان استوکس در منافذ سازه با در نظر گرفتن تغییر شکل کوچک استفاده نمودند.

لوندگارد و همکاران [7]، فرمولاسیون یکپارچه ارائه‌شده توسط یون [15] تحت عنوان معادلات ناویه-کوشی و ناویه-استوکس را مورد بازبینی قرار داده و یک فرمولاسیون اصلاح‌شده را ارائه نمودند و به بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از رویکرد مبتنی بر چگالی برای مسائل FSI پرداختند. در پژوهش ایشان با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های کوچک، از اثرات جابجایی سازه بر روی سیال صرف‌نظر گردید.

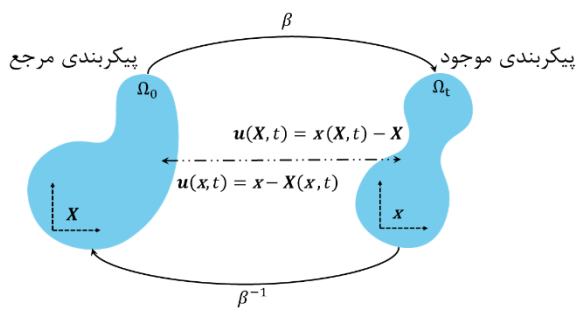
در روش‌های مبتنی بر چگالی به‌منظور به‌حداقل رساندن المان‌های با چگالی میانه نیاز به شبکه‌های مش بسیار ریز وجود دارد. رویکرد بهینه‌سازی توپولوژی BESO برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه در مسئله اندرکنش سیال-سازه که توسط پیچلی و همکاران [17] ارائه شده است، از متغیرهای چگالی گسسته به‌جای متغیرهای چگالی پیوسته استفاده می‌کند، بنابراین برخی از چالش‌های موجود در روش‌های مبتنی بر چگالی را بهبود می‌بخشد.

دامنه جامد شامل تمام قسمت‌های مرز جامد به غیر از مرز دیریکله و مرز مشترک با سیال می‌باشد.  $\Gamma$ ، که دو دامنه را به هم متصل می‌کند، شرایط پیوستگی یا جفت‌شدگی را اعمال می‌کند و می‌تواند شامل تعادل نیرو و جابجایی بین سیال و جامد باشد. این ساختار به‌طور کلی در مسائل تعامل سیال و سازه (FSI) استفاده می‌شود که به مطالعه و تحلیل تعاملات بین دامنه‌های سیال و جامد می‌پردازد.



شکل ۳ شماتیک دامنه و مرزهای محاسباتی.

همچنین مطابق با شکل ۳ مرزهای نئومان موجود برای دامنه‌های سیال و سازه بصورت  $\partial_N \Omega = \partial \Omega \setminus [\partial_D \Omega \cup \Gamma]$  تعریف می‌شوند. هسته اصلی توصیف ALE بیان نگاهت وابسته به‌زمانی است که پیکربندی اولیه  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$  (لاگرانژی) را به پیکربندی فعلی  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$  (اویلری) انتقال می‌دهد. این نگاهت مطابق شکل ۴ به‌همراه بردارهای جابجایی در دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری نشان داده شده است. که در آن عبارت  $x(X, t)$  در بردار جابجایی، مطابق با توصیف لاگرانژی، دلالت بر نقاط متناظر پیکربندی اولیه در پیکربندی فعلی می‌باشد. به‌طور مشابه منظور از  $X(x, t)$  نقاط متناظر پیکربندی فعلی در پیکربندی اولیه می‌باشد.



شکل ۴ توصیف نگاهت بین پیکربندی‌های اولیه و فعلی.

نگاشت یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر  $\beta$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \beta: \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \\ x = \beta(X, t) \\ \beta^{-1}: \Omega_t \rightarrow \Omega_0 \\ X = \beta^{-1}(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

در این پژوهش به‌بررسی بهینه‌سازی خشک توپولوژی سازه برای مسائل اندرکنش سیال-سازه، به روش مجموعه سطوح تراز پرداخته می‌شود. تابع هدف مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، به‌حداقل رساندن نرمی سازه تحت قید حجم مشخص است. همچنین، در مسئله اندرکنش سیال-سازه، از رویکرد یکپارچه استفاده می‌شود که معادلات ناویه-استوکس را برای یک سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر تحت جریان آرام و ناپایدار که به در تعامل با یک سازه الاستیک با رفتار خطی در نظر می‌گیرد. به‌منظور به‌روزرسانی متغیرهای طراحی تابع مجموعه سطوح تراز از معادله تکاملی واکنش-انتشار در قالب روش اجزای محدود همچنین به‌منظور یافتن سرعت نرمال حاکم بر روش مجموعه سطوح تراز از آنالیز حساسیت الحاقی استفاده شده است. این پژوهش چندین جنبه نوآورانه در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها در مسئله اندرکنش سیال-سازه ارائه می‌دهد. نوآوری اصلی این مطالعه در ترکیب روش مجموعه سطوح تراز با فرمول‌بندی یکپارچه تحت توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه در شرایط ناپایدار مسئله اندرکنش سیال-سازه است. برخلاف مطالعات پیشین، این تحقیق به‌جای استفاده از مدل‌های پایدار، از تحلیل ناپایدار برای شبیه‌سازی رفتار سیال نیوتنی و سازه الاستیک استفاده می‌کند. همچنین، استفاده از معادله واکنش-انتشار به‌منظور به‌روزرسانی تابع سطوح تراز در این پژوهش وابستگی حل به ورودی اولیه و تابع فاصله علامت‌دار را حذف می‌نماید.

در ادامه ساختار کلی این پژوهش به‌صورت مقابل بیان می‌شود: در بخش ۲ به‌بیان نگاهت لاگرانژی-اویلری دلخواه پرداخته شده است. در بخش ۳ معادلات حاکم بر مسئله اندرکنش سیال-سازه با توجه به نگاهت معرفی شده تحت رویکرد یکپارچه استخراج می‌شود. بخش ۴ به‌تعریف تابع مجموعه سطوح تراز تحت معادله واکنش-انتشار اختصاص می‌یابد در بخش ۵ مسئله بهینه‌سازی به‌همراه آنالیز حساسیت الحاقی معرفی می‌شود در بخش ۶ مثال‌های عددی ارائه شده به صحت‌سنجی و مقایسه روش SIMP و LSTO تمرکز دارد. همچنین بخش ۷ به نتیجه‌گیری و پیشنهادات ناشی از پژوهش حاضر اختصاص یافته است و در بخش ۸ مراجع مورد استفاده در پژوهش حاضر ارائه شده است.

## ۲- توصیف ALE

در این پژوهش دامنه محاسباتی به‌صورت  $\Omega \in \mathbb{R}^d: \Omega_s \cup \Omega_f$  در نظر گرفته شده که در آن  $\Omega_f$  و  $\Omega_s$  به‌ترتیب بیانگر دامنه سیال و دامنه سازه می‌باشد. همچنین مطابق با شکل ۳ فصل مشترک دامنه سیال و سازه به‌صورت  $\Gamma$  نمایش داده می‌شود. مرز دامنه سیال  $\partial \Omega_f$  به دو مرز دیریکله  $\partial_D \Omega_f$  و نئومان  $\partial_N \Omega_f$  که به‌ترتیب شامل شرایط مرزی سرعت و فشار می‌باشند، تقسیم شده است. همچنین به‌طور مشابه، مرز  $\partial \Omega_s$  در دامنه جامد نیز به دو بخش مرز دیریکله  $\partial_D \Omega_s$  برای جابجایی و مرز نئومان  $\partial_N \Omega_s$  تقسیم می‌شود. مرز نئومان

زمان تطبیق دهد. بنابراین مطابق توصیف ALE سرعت  $v(x, t)$  به‌عنوان  $w_f(x, t)$  بیان شده و بیانگر سرعت دامنه سیال  $\Omega_f^\dagger$  می‌باشد. همچنین رابطه (۸) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [25]:

$$\frac{Dv(x_f, t)}{Dt} = \frac{\partial v(x_f, t)}{\partial t} + \nabla v_f(x, t) \cdot w_f(x, t) \quad (۸)$$

مشابه رابطه (۵)،  $w_f$  سرعت دامنه سیال  $\Omega_f^\dagger$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود [27]:

$$w_f(x_f, t) = \frac{\partial \beta}{\partial t} (\beta^{-1}(x_f), t) \quad (۹)$$

محاسبه نگاشت ALE به‌عنوان  $\beta: \Omega_f \rightarrow \Omega_f^\dagger$  نیازمند یک تکنیک مازاد می‌باشد این تکنیک مازاد باعث ردیابی هارمونیک جابجایی مش سیال و جلوگیری از اعوجاج المان‌های آن می‌شود. بدین منظور معادله پواسون (لاپلاس) به‌صورت زیر محاسبه خواهد شد [28]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \beta &= 0 & \Omega_f \\ \beta &= u_s & \Gamma \\ \beta &= 0 & \partial \Omega_f \end{aligned} \quad (۱۰)$$

### ۳- استخراج معادلات

#### ۳-۱- معادلات حاکم بر سیالات

معادله حاکم بر جریان سیال تراکم‌ناپذیر و نیوتنی و با صرف‌نظر از نیروهای حجمی در حالت ناپایدار که عنوان معادلات ناویه-استوکس شناخته می‌شود به‌صورت زیر استخراج می‌شود [25]:

$$\begin{aligned} \rho_f \left( \frac{\partial v_f}{\partial t} + (w_f \cdot \nabla) v_f \right) &= -\nabla p + \mu_f \nabla^2 v_f & \text{in } \Omega_f \\ \nabla \cdot v_f &= 0 & \text{in } \Omega_f \\ v_f &= v_0 & \text{on } \partial \Omega_f^D \\ \sigma_f \cdot n_f &= 0 & \text{on } \partial \Omega_f^N \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در آن  $\rho_f$ ،  $\mu_f$ ،  $v_f$ ،  $p$  و  $\sigma_f$  به‌ترتیب بیانگر چگالی، ویسکوزیته دینامیکی، بردار سرعت، فشار و تنش سیال می‌باشد. علاوه بر معادلات فوق به‌منظور محاسبه نگاشت ALE معادله پواسون زیر برای ردیابی جابجایی مش سیال در نظر گرفته خواهد شد [25]:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega_f \quad (۱۲)$$

#### ۳-۲- معادلات حاکم بر سازه

معادله حاکم بر سازه با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک تحت عنوان معادله الاستیسیته با صرف‌نظر از نیروهای حجمی به‌صورت زیر خواهد بود [25]:

بدیهی است بردار جابجایی در هر دو دیدگاه مقدار برابری خواهد داشت که به‌صورت زیر به‌یکدیگر مرتبط می‌شوند [24]:

$$u(X, t) = u(\beta^{-1}(x, t), t) = u(x, t) \quad (۱)$$

به‌طور مشابه برای بردار سرعت خواهیم داشت:

$$v(X, t) = v(\beta^{-1}(x, t), t) = v(x, t) \quad (۲)$$

که در آن سرعت در دیدگاه لاگرانژی به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$v(X, t) = \frac{\partial \beta(X, t)}{\partial t} \quad (۳)$$

سرعت متناظر آن در دیدگاه اویلری به‌صورت زیر بدست می‌آید [25]:

$$v(x, t) = \frac{\partial \beta}{\partial t} (\beta^{-1}(x), t) = v \circ \beta^{-1}(x) \quad (۴)$$

در ادامه به‌منظور بیان ارتباط بین دیدگاه‌های لاگرانژی و اویلری، مشتق زمانی مادی در پیکربندی فضایی که به‌عنوان  $Dv(x, t)/Dt$  برای بردار سرعت در دیدگاه اویلری  $v(x, t)$  بیان می‌شود، بدین منظور ابتدا می‌بایست سرعت به پیکربندی مادی به‌صورت زیر نگاشت داده شود:

$$\frac{Dv(x, t)}{Dt} = \frac{[Dv(\beta(X, t), t)]}{\partial t} \quad (۵)$$

در ادامه طبق قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای توابع ترکیبی خواهیم داشت [24]:

$$\frac{\partial v(\beta(X, t), t)}{\partial t} + \frac{\partial v(\beta(X, t), t)}{\partial \beta(X, t)} \cdot \frac{\partial \beta(X, t)}{\partial t} \quad (۶)$$

درنهایت با استفاده از توصیف نگاشت، برای رابطه (۷) خواهیم داشت [24, 26]:

$$\frac{Dv(x, t)}{Dt} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \nabla v(x, t) \cdot v(x, t) \quad (۷)$$

که در آن اولین جمله سمت راست معادله بیانگر مشتق زمانی فضایی (محلی) بردار سرعت بوده و درحالی‌که دومین جمله آن بیانگر نرخ تغییرات همرفتی بردار سرعت (مربوط به حرکت نسبی پیکربندی‌های مادی و فضایی) می‌باشد که تغییر موقعیت ذره را توصیف می‌کند.

باید توجه داشت که تنها دامنه فعلی (اویلری) که شامل یک مرز متحرک می‌شود، به نگاشت ALE برای تولید یک شبکه متحرک نیاز دارد تا بتواند حرکت مرز را بدون شکستن اتصال مش در طول

$$\begin{aligned} v &\in V \subset (H^1 \Omega_f)^d \\ p &\in P \subset (L^2(\Omega_f))^d \\ w &\in W \subset (H^1(\Omega_s))^d \\ (\varphi, \eta, \psi) &\in V \times P \times W \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن  $(\varphi, \eta, \psi)$  توابع آزمایشی و  $(v, p, w)$  توابع حدسی مربوط به جابجایی دامنه سیال، فشار و سرعت در فضای ترکیبی  $V \times P \times W$  می‌باشد. در ادامه معادلات با استفاده توابع آزمایشی و حدسی بازنویسی خواهد شد [29].

در ادامه به منظور گسسته‌سازی فضایی مسئله از چندجمله‌ای‌های درجه دوم برای تقریب مؤلفه‌های سرعت و چندجمله‌ای‌های خطی برای تقریب فشار مطابق پیشنهاد [30] استفاده شده است. پایداری و دقت چنین المان‌هایی برای معادلات ناویه-استوکس، در مقایسه با سایر المان‌ها مورد بررسی و تأیید قرار گرفته است [31]. همچنین از یک طرح زمانی اولیری پس‌رو به منظور گسسته‌سازی زمانی معادلات به صورت زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^{n+1} &\approx \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t w \end{aligned} \quad (20)$$

در نهایت با توجه به گسسته‌سازی‌های فضایی و زمانی بیان شده استخراج شکل ضعیف معادلات حاکم بر مسئله اندرکنش سیال-سازه به صورت روابط (۲۲-۲۴) و (۲۵-۲۶) که به ترتیب به عنوان روابط حاکم بر دامنه سیال و سازه در نظر گرفته می‌شوند، بیان خواهند شد:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_f}{\Delta t} (v_f^{n+1}, \varphi)_{\Omega_f} + \rho_f \left( (v_f^{n+1} - w_f) \cdot \nabla \right) v_f^0, \varphi)_{\Omega_f} \\ - (p, \nabla \cdot \varphi)_{\Omega_f} + 2\mu_f (\varepsilon(v_f^{n+1}), \nabla \varphi)_{\Omega_f} \\ = \frac{\rho_f}{\Delta t} (v_f^n, \varphi)_{\Omega_f} \end{aligned} \quad (21)$$

$$-(\nabla \cdot v_f^{n+1}, \eta)_{\Omega_f} = 0 \quad (22)$$

$$\Delta t (\nabla w_f, \nabla \psi)_{\Omega_f} = -(\nabla u^n, \nabla \psi)_{\Omega_f} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s}{\Delta t} (v_s^{n+1}, \varphi)_{\Omega_s} + \rho_s ((v_s^{n+1} \cdot \nabla) v_s^0, \varphi)_{\Omega_s} \\ + \Delta t 2\mu_s (\varepsilon(v_s^{n+1}), \varepsilon(\varphi))_{\Omega_s} + \Delta t \lambda_s (\nabla \cdot v_s^{n+1}, \nabla \cdot \varphi)_{\Omega_s} \\ = \frac{\rho_s}{\Delta t} (v_s^n, \varphi)_{\Omega_s} - 2\mu_s (\varepsilon(u^n), \varepsilon(\varphi))_{\Omega_s} \\ - \lambda_s (\nabla \cdot u^n, \nabla \cdot \varphi)_{\Omega_s} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{1}{\delta} (v_s^{n+1}, \psi)_{\Omega_s} - \frac{1}{\delta} (w_s, \psi)_{\Omega_s} = 0 \quad (25)$$

که در آن  $\delta$  به عنوان گام همگرایی مقداری برابر با  $10^{-8}$  دارد.

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \nabla \cdot \sigma_s(u) && \text{in } \Omega_s \\ u &= u_0 && \text{on } \partial \Omega_s^D \\ \sigma_s \cdot n_s &= 0 && \text{on } \partial \Omega_s^N \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن  $u, \rho_s$  و  $\sigma_s$  به ترتیب بیانگر چگالی، بردار جابجایی و تانسور تنش سازه می‌باشد.

$$\sigma_s(u) = 2\mu_s \varepsilon(u) + \lambda \nabla \cdot (\varepsilon(u)) I \quad (14)$$

معادله (۱۵) بیانگر تانسور تنش سازه بوده که در آن  $\mu_s$  و  $\lambda$  به عنوان ضرایب لامه شناخته می‌شوند. همچنین تانسور کرنش سازه  $\varepsilon$  با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های کوچک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (15)$$

از آنجایی که معادلات حاکم بر سیال با در نظر گرفتن سرعت بیان شده‌اند می‌بایست روابط حاکم بر سازه الاستیک را با در نظر گرفتن  $\partial u / \partial t = v_s$  و  $u = u^0 + \int_0^t v_s dt$ ، بر حسب سرعت سازه به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma_s(v_s) = \nabla \cdot \sigma_s(u) \quad \text{in } \Omega_s \quad (16)$$

همچنین با جایگزینی صورت گرفته، تانسور تنش ارائه شده در معادله (۱۵) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\sigma_s(v_s) = 2\mu_s \varepsilon \left( \int_0^t v_s dt \right) + \lambda \nabla \cdot \left( \varepsilon \left( \int_0^t v_s dt \right) \right) I \quad (17)$$

### ۳-۳- شرایط حاکم بر فصل مشترک

در مسائل اندرکنش سیال-سازه که در چهارچوب ALE توصیف می‌شوند هیچ ماده‌ای نمی‌تواند از مرز  $\Gamma$  عبور کند در چنین حالتی می‌بایست سرعت سیال و جامد در فصل مشترک، برابر باشد. به طور کلی، باید از بقای جرم در مرز اطمینان حاصل کرد. بدین ترتیب شرایط مرزی زیر در فصل مشترک سیال و سازه برقرار خواهد بود [25]:

$$\begin{aligned} v_f &= v_s && \Gamma \\ \sigma_f \cdot n_f &= \sigma_s \cdot n_s && \Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

### ۴-۳- گسسته‌سازی زمانی و فضایی

توابع آزمایشی و حدسی مورد نیاز به منظور حل مسئله اندرکنش سیال سازه به صورت زیر در فضای سوبولف مشخص شده است:

$$C = \frac{\int_D dD}{\int_D |L'|dD} \quad (۲۹)$$

در ادامه معادله (۲۹) با استفاده از روش تفاضل محدود در زمان گسسته خواهد شد:

$$\frac{\phi(t + \Delta t)}{\Delta t} - \tau \nabla^2 \phi(t + \Delta t) = -CL' + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \quad (۳۰)$$

که در آن  $\Delta t$  شبه زمان یا گام زمانی معادله تکامل می‌باشد. در ادامه با ضرب تابع آزمایشی  $\tilde{\phi}$  و استخراج شکل ضعیف معادلات فوق، می‌توان فرایند بهینه‌سازی را توسط روش گسسته اجزای محدود انجام داد:

$$\int_D \frac{\phi(t + \Delta t)}{\Delta t} \tilde{\phi} + \nabla^T \phi(t + \Delta t) (\tau \nabla \tilde{\phi}) + \left( CL' - \frac{\phi(t)}{\Delta t} \right) \tilde{\phi} dD = 0 \quad (۳۱)$$

#### ۵- مسئله بهینه‌سازی

در ادامه مسئله طراحی بهینه، با به‌حداقل رساندن نرمی به‌عنوان تابع هدف تحت قید حجم در نظر گرفته می‌شود. نرمی معیاری است برای چگونگی تغییر شکل یک جسم در پاسخ به یک نیروی اعمال شده. در مقابل سفتی میزان مقاومت یک ماده در برابر تغییر شکل را اندازه‌گیری می‌کند، بنابراین کمین نمودن نرمی مفهومی مشابه با بیشینه نمودن سفتی خواهد داشت. نرمی معمولاً در زمینه الاستیسیته‌خطی برای توصیف رابطه بین تنش و کرنش استفاده می‌شود. بنابراین، مدل ریاضیاتی اولیه مسئله بهینه‌سازی بدون در نظر گرفتن نیروهای حجمی به‌صورت مقابل بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\phi} \quad & J = \int_D f \cdot u_{\phi} dx \\ \text{s.t.} \quad & E = K_{\phi} u_{\phi} - f = 0 \\ & G = V_{\phi} - V_{\max} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

$$\text{where, } V_{\phi} = \int_D H_{\phi}(x) dx$$

که در آن  $V_{\max}$  مقدار حداکثر حجم مصرفی مجاز و  $K_{\phi}$  ماتریس ضرایب کل سازه می‌باشد.

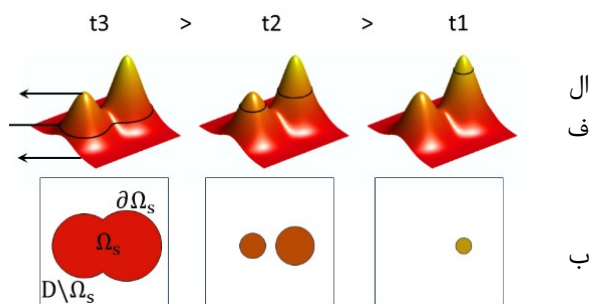
#### ۵-۱- آنالیز حساسیت

آنالیز حساسیت یک عملیات ریاضیاتی برای درک چگونگی تغییرات در متغیرهای ورودی (توابع قید) و تأثیر آن بر متغیرهای خروجی (توابع هدف) می‌باشد. در بهینه‌سازی توپولوژی، یک تابع هدف وجود دارد که سعی بر به‌حداقل یا حداکثر آن خواهیم داشت در مقابل متغیرهای طراحی متغیرهایی هستند که هندسه، توزیع مواد یا سایر جنبه‌های سیستم را تعریف می‌کنند. در طول فرآیند

#### ۴- روش مجموعه سطوح تراز مبتنی بر معادله واکنش-انتشار

به‌منظور به‌روزرسانی تابع مجموعه سطوح تراز از روش پیشنهادشده توسط یامادا [32] بنام معادله واکنش-انتشار استفاده شده است. تابع مجموعه سطوح تراز که مطابق شکل ۵ نشان داده شده است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \phi(x) &> 0 & \forall x \in \Omega_s \\ \phi(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega_s \\ \phi(x) &< 0 & \forall x \in D \setminus \Omega_s. \end{aligned} \quad (۲۶)$$



شکل ۵ (الف) توصیفات هندسی تابع مجموعه سطوح تراز (ب) تصویر تابع روی سطح تراز صفر

روش مبتنی بر مجموعه سطوح تراز از رویکرد مصالح جایگزین به‌عنوان تابع هویساید به‌صورت زیر استفاده می‌کند:

$$H_{\phi} = \begin{cases} 1, & \phi \geq 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \quad (۲۷)$$

در ادامه با درون‌یابی رابطه فوق در دامنه طراحی  $D$  به‌منظور به‌روزرسانی مکرر تابع مجموعه سطوح تراز، معادله واکنش-انتشار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -(CL' - \tau \nabla^2 \phi) = C v_n + \tau \nabla^2 \phi & \text{in } D \\ \phi = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (۲۸)$$

که در آن  $C$  یک ضریب تناسب،  $L'$  حساسیت طراحی توپولوژی و  $\tau$  پارامتر تنظیم می‌باشد. استفاده از  $L'$  اجازه می‌دهد تا حفره‌های جدید در طول فرآیند بهینه‌سازی شکل گیرند. همچنین اصطلاح پارامتر تنظیم عبارتی ثابت و وابسته به ابعاد مش بوده که تابع مجموعه سطوح تراز را تنظیم می‌کند. مطابق پژوهش یامادا [32] ضریب تناسب  $C$  به‌صورت مقابل بدست می‌آید:

که در آن  $\mathbb{C}$  و  $B$  به ترتیب تانسور الاستیسیته و ماتریس کرنش-تغییر مکان مسائل الاستیسیته خطی می‌باشد. در ادامه حذف حساسیت‌های  $\partial u / \partial \phi$  با استفاده از روش الحاقی به صورت زیر صورت می‌پذیرد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J}{\partial u} + \eta \frac{\partial E}{\partial u}\right) \frac{\partial u}{\partial \phi} &= 0 \\ (f + K_\phi \eta) \frac{\partial u}{\partial \phi} &= 0 \\ f + K_\phi \eta &= 0 \\ \Rightarrow \eta &= -u_\phi(x) \\ \Rightarrow \frac{dL}{d\phi} &= -u_\phi^T K'_\phi u_\phi + \lambda V'_\phi \end{aligned} \quad (36)$$

مشتق زمانی تابع لاگرانژی مسئله بهینه‌سازی، به منظور یافتن سرعت نرمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \cdot \nabla \phi \cdot v\right) \frac{|\nabla \phi|}{|\nabla \phi|} = \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \cdot |\nabla \phi| \cdot v\right) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \cdot v_n \cdot |\nabla \phi| \end{aligned} \quad (37)$$

در ادامه به منظور کمینه نمودن تابع لاگرانژی مسئله بهینه‌سازی، می‌بایست هرگونه تغییر در تابع لاگرانژی نسبت به زمان  $dL/dt$  منفی باشد. بدین منظور می‌بایست حاصل ضرب عبارت  $(\partial L / \partial \phi) \cdot |\nabla \phi|$  همواره منفی باشد؛ بنابراین سرعت نرمال مسئله بهینه‌سازی بر اساس روش تندترین شیب نزولی، به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi} \cdot v_n &< 0 \\ \Rightarrow v_n &= -\frac{\partial L}{\partial \phi} \\ v_n &= u_\phi^T K'_\phi u_\phi - \lambda V'_\phi \end{aligned} \quad (38)$$

از آنجا که مسئله بهینه‌سازی نرمی که توسط معادلات الاستیسیته-خطی بیان شده است یک مسئله خودالحاقی می‌باشد بنابراین حساسیت طراحی به عنوان قرینه سرعت نرمال به صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$L' = -u_\phi^T K'_\phi u_\phi + \lambda V'_\phi \quad (39)$$

در این پژوهش به منظور محاسبه ضریب لاگرانژ قید حجم  $\lambda$ ، از روش دویخشی ارائه شده توسط جهانگیری و همکاران [33] استفاده شده است. سه قسمت اصلی فرایند بهینه‌سازی توپولوژی

بهینه‌سازی، از اطلاعات آنالیز حساسیت برای به‌روزرسانی هرچه مناسب‌تر متغیرهای طراحی به صورت مکرر استفاده می‌شود. با به‌روزرسانی مکرر متغیرهای طراحی بر اساس اطلاعات حساسیت و حل مسئله بهینه‌سازی، الگوریتم به پاسخی همگرا می‌شود که یک طرح بهینه را مطابق با اهداف مشخص شده، نشان می‌دهد. سه نوع مختلف آنالیز حساسیت عبارت‌اند از: روش تفاضل محدود، روش تفاضل مستقیم و روش الحاقی. با توجه به اینکه روش الحاقی نیاز به هزینه محاسباتی بسیار کمتری داشته و مستقل از روش‌های اتخاذ شده برای حل مسئله اندرکنش سیال-سازه (یکپارچه یا تقسیم‌بندی شده) می‌باشد، بنابراین در این پژوهش برای به‌روزرسانی نقطه بهینگی از روش الحاقی استفاده شده است. بدین منظور، تابع لاگرانژی مسئله بهینه‌سازی تعریف شده در رابطه (۳۳) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L = J + \eta^T E + \lambda G \quad (33)$$

که در آن  $\eta$  و  $\lambda$  به ترتیب ضرایب لاگرانژ مرتبط با قیود  $E$  و  $G$  در رابطه (۳۳) می‌باشند. همچنین آنالیز حساسیت به عنوان مشتق توابع هدف و قید نسبت به متغیر طراحی  $\phi$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

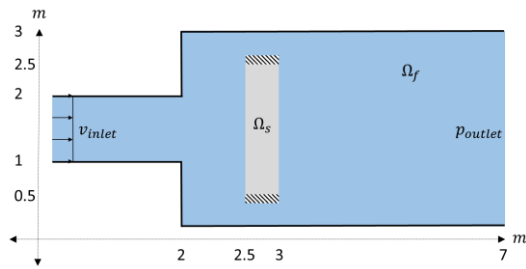
$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\phi} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial J}{\partial \phi} + \eta^T \frac{\partial E}{\partial \phi} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \phi} \\ &+ \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \eta^T \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (34)$$

مطابق رابطه فوق مشتق تابع لاگرانژی شامل متغیر طراحی  $\phi$  و بردار جابجایی  $u$  بوده که به صورت روابط (۳۶) گسسته می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{dJ}{d\phi} = \frac{\partial J}{\partial \phi} + \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{dE}{d\phi} = \frac{\partial E}{\partial \phi} + \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{dG}{d\phi} = \frac{\partial G}{\partial \phi} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (K_\phi u_\phi - f) = \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} u_\phi = u_\phi^T \int_D B^T \mathbb{C} B \delta_\phi(\nu) \\ \frac{\partial G}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \int_D H_\phi(x) dx \right) = \int_D \delta_\phi(x) dx = V'_\phi \\ = K'_\phi u_\phi \end{cases} \quad (35)$$

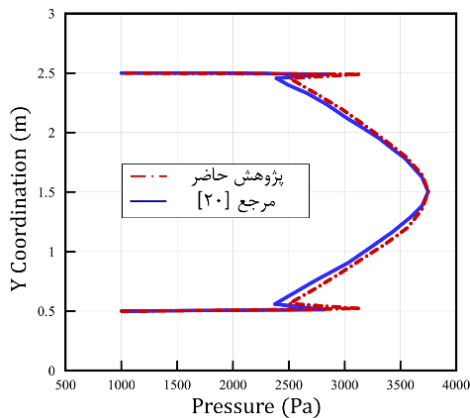
$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial u} (f \cdot u_\phi) \frac{\partial u}{\partial \phi} = f \cdot \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial u} (K_\phi u_\phi - f) \frac{\partial u}{\partial \phi} = K_\phi \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \end{cases}$$





شکل ۶ هندسه و شرایط مرزی مسئله اول

مدت‌زمان شبیه‌سازی حرکت سیال و گام زمانی افزایشی برای این مسئله به صورت [۵ : ۰/۰۵ : ۰] همچنین سرعت ورودی سیال در مرز سمت چپ به صورت ثابت  $v_{in} = 1 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است. در مرز سمت راست فشار صفر اعمال شده است. در سایر مرزهای کانال شرط عدم لغزش برقرار است. مطابق این شرط سرعت و جابجایی برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه به منظور صحت‌سنجی پاسخ پژوهش حاضر مطابق شکل ۷ فشار روی مرز سمت چپ سازه با پژوهش مرجع [۲۰] مقایسه شده است.



شکل ۷ فشار وارد بر مرز سمت چپ سازه در پژوهش حاضر و مرجع [۲۰]

بیشینه فشار ناشی از سیال روی مرز سمت چپ سازه در پژوهش حاضر مقداری برابر با ۳۷۵۰ پاسکال دارد. با توجه به مقایسه صورت‌گرفته نتایج حاکی از انطباق قابل قبول در پاسخ‌های فشار می‌باشد.

همچنین به منظور تکمیل صحت‌سنجی، کانتورهای سرعت، فشار و جابجایی در شکل ۸ نشان داده شده است. کانتورهای نمایش داده شده در این مطالعه به خوبی توزیع متغیرهای اصلی مسئله همچون فشار، سرعت و جابجایی را در نواحی مختلف نشان می‌دهند. کانتور فشار، توزیع فشار را در نقاط مختلف دامنه سیال و در مرزهای سازه به وضوح نشان می‌دهند، که این توزیع وابسته به جریان سیال و نیروی اعمال شده بر سازه است. از سوی دیگر، کانتورهای سرعت نمایانگر تغییرات سرعت سیال در دامنه جریان بوده و نقاطی با سرعت بالا و پایین را به خوبی تفکیک می‌کنند.

عبارت‌اند از مدل‌سازی هندسی مسئله، تحلیل سازه و آنالیز حساسیت مسئله بهینه‌سازی و به‌روزرسانی متغیرهای طراحی. ابتدا می‌بایست مدل هندسی مناسبی برای دامنه طراحی انتخاب شود و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر گرفته شود. سپس یک مدل تحلیلی مناسب برای تحلیل سازه‌ها انتخاب گردد. پس از انجام تحلیل عددی به منظور یافتن مجهولات (تغییر مکان‌ها) و به‌روزرسانی متغیرهای طراحی، الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدیدی را برای متغیرهای طراحی محاسبه خواهد نمود. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و مجدداً به مرحله تحلیل سازه فرستاده می‌شود. از تحلیل مجدد، مقادیر مجهول جدید و سپس نتایج حساسیت توابع هدف و قیدهای ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌گردد. در انتها اگر معیار لازم، اکتان شده بود محاسبات خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت این فرایند تا زمان همگرایی ادامه خواهد داشت. همچنین در مثال‌های انجام شده معیار توقف چرخه بهینه‌سازی به‌عنوان بهبود توابع هدف و قید در سه تکرار متوالی در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \frac{\Delta J^{t-1} + \Delta J^t + \Delta J^{t+1}}{3} \leq \text{Tol}_J \\ \frac{\Delta G^{t-1} + \Delta G^t + \Delta G^{t+1}}{3} \leq \text{Tol}_V \end{cases}$$

در رابطه فوق  $\text{Tol}_J$  و  $\text{Tol}_V$  به ترتیب حد همگرایی تابع هدف و حد همگرایی تابع قید می‌باشد که در این پژوهش هر دو برابر با  $10^{-3}$  در نظر گرفته شده است.

## ۶- مثال‌های عددی

### ۱-۶ مسئله اول

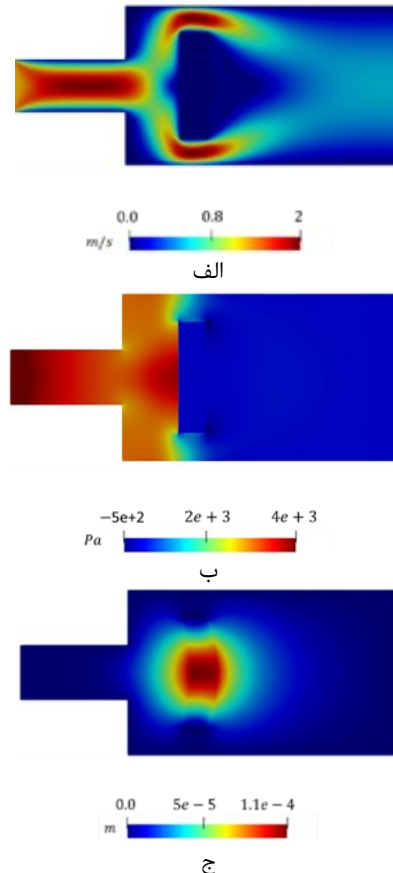
مسئله اول مطابق با پژوهش هو و همکاران [۲۰] به منظور صحت‌سنجی و مقایسه روش SIMP مورد استفاده در مرجع با روش LSTO اتخاذ شده در پژوهش حاضر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱ و شکل ۶ به ترتیب نشان‌دهنده مشخصات مصالح و شرایط مرزی مسئله، در نظر گرفته شده است. همچنین مسئله موجود با مش مثلثی شامل ۲۹۳۳۱۲ درجه آزادی، ۷۱۲۰ المان برای دامنه سازه و ۲۷۰۹۵ المان برای دامنه سیال حل شده است.

جدول ۱- مشخصات مصالح

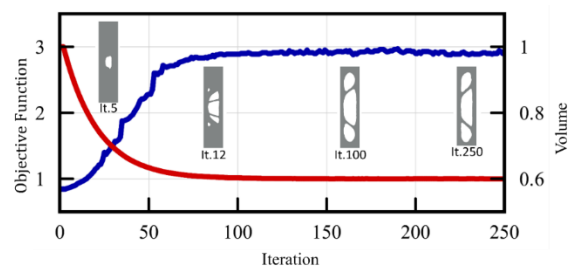
خواص سیال			خواص سازه		
$\rho_f(\text{kg/m}^3)$	$\nu_f(\text{m}^2/\text{s})$	$\mu_f(\text{kg/m}\cdot\text{s})$	$\rho_s(\text{kg/m}^3)$	$\nu_s$	$E(\text{N/m}^2)$
۱۰۰۰	۰/۰۵	۵۰	۷۸۰۰	۰/۳	$۲/۱ \times 10^8$

همچنین، کانتورهای جابجایی نشان‌دهنده مقادیر تغییر شکل سازه در پاسخ به بارهای وارده هستند.



شکل ۸ الف) کانتور سرعت ب) کانتور فشار ج) کانتور جابجایی

در ادامه توپولوژی بهینه سازه با هدف کمینه کردن نرمی، تحت قید حجم ۶۰٪ در زمان همگرا شدن مسئله به پاسخهای حالت پایدار، به همراه نمودار همگرایی تابع نرمی و حجم به صورت شکل ۹ مشخص شده است.



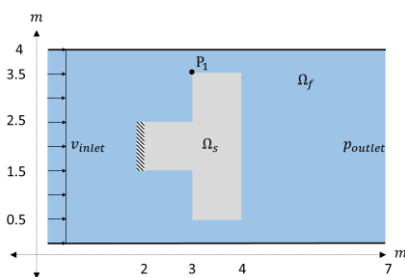
شکل ۹ توپولوژی بهینه تحت قید حجم ۶۰٪ و نمودار روند همگرایی

شکل موجود نشان‌دهنده کاهش تدریجی تابع هدف (نرمی سازه) در طول مراحل مختلف بهینه‌سازی است. این نمودار نشان می‌دهد که با پیشرفت الگوریتم بهینه‌سازی و به‌روزرسانی مکرر متغیرهای

طراحی، مقدار تابع هدف به تدریج به یک مقدار بهینه نزدیک می‌شود. همگرایی سریع در مراحل ابتدایی بیانگر کارایی الگوریتم و دقت بالای آن در یافتن راه‌حل بهینه است. روند صاف و یکنواخت همگرایی نشان‌دهنده پایداری روش به‌کاررفته و نبود نوسانات شدید در فرآیند بهینه‌سازی است، که این مسئله به اعتبار و دقت نتایج نهایی افزوده است.

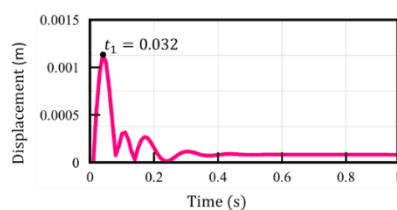
#### ۲-۶- مسئله دوم

در این بخش برای هندسه و شرایط مرزی مشخص شده مطابق با شکل ۱۰ توپولوژی بهینه سازه در زمان‌های مختلف مقایسه شده است. همچنین مشخصات مصالح مشابه با جدول ۱ در نظر گرفته شده است.



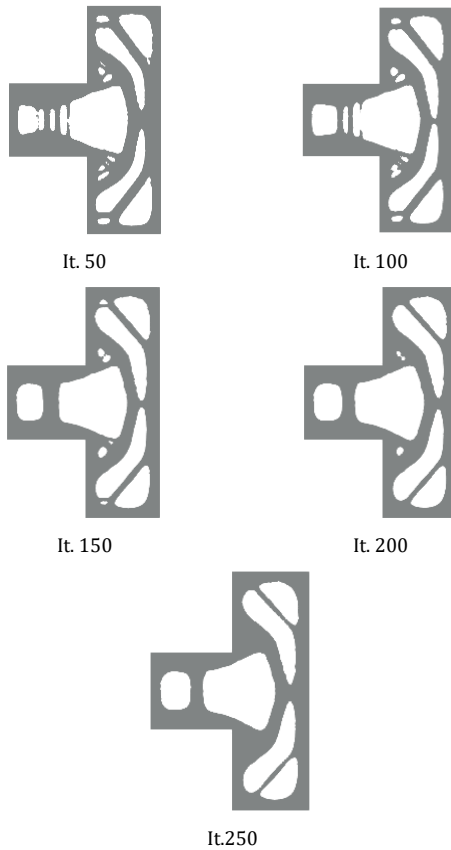
شکل ۱۰ هندسه و شرایط مرزی مسئله دوم

مطابق شکل ۱۰ سرعت ورودی در مرز سمت چپ به صورت  $v_{in} = 0.1 \text{ m/s}$  و در مرز بالایی و پایینی کانال شرط عدم لغزش برقرار است. همچنین در مرز سمت راست شرط فشار صفر اعمال شده است. مسئله موجود با مش مثلثی شامل ۲۱۹۲۶۱ درجه آزادی و تعداد المان‌های دامنه سازه و سیال به ترتیب ۱۲۸۳۶ و ۱۲۸۰۰ در نظر گرفته شده است و کل مدت زمان شبیه‌سازی سیال و نیز گام زمانی افزایشی این مثال به صورت [۱ : ۰/۱ : ۰] در نظر گرفته شده است. همچنین نمودار جابجایی برای این مدت زمان در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

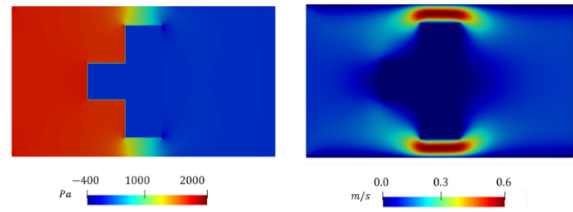
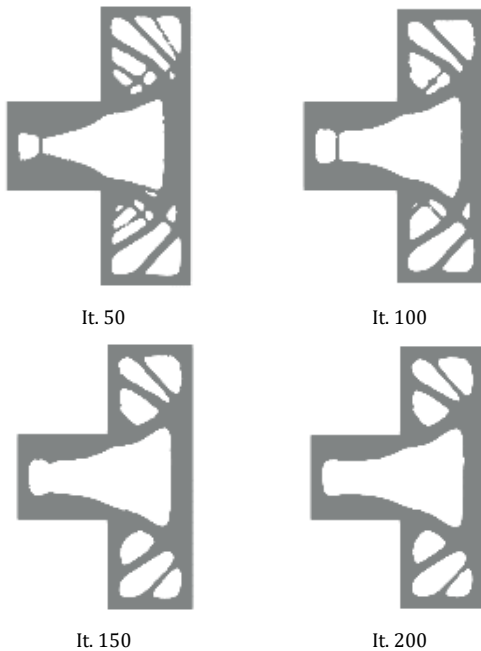


شکل ۱۱ نمودار جابجایی-زمان برای نقطه  $P_1$

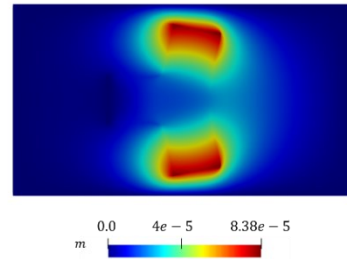
همچنین به منظور فراهم آوردن امکان تجزیه و تحلیل دقیق‌تر از رفتار اندرکنشی سیال-سازه کانتورهای سرعت، فشار و جابجایی در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲ تکامل توپولوژی بهینه برای زمان  $t = 0.032$  ثانیه



الف) کانتور سرعت (ب) کانتور فشار (ج) کانتور جابجایی



شکل ۱۴ الف) کانتور سرعت (ب) کانتور فشار (ج) کانتور جابجایی

در ادامه به منظور مشاهده روند تکامل توپولوژی تحت قید حجم ۶۰٪، در هر ۵۰ مرحله گام زمانی بهینه‌سازی، توپولوژی بهینه به همراه نمودار روند همگرایی برای زمان‌های  $t = 0.032$  و  $t = 1$  مطابق شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ مقایسه شده است.

توپولوژی بهینه به دست آمده از فرآیند بهینه‌سازی، توزیع بهینه مواد را در سازه نشان می‌دهد. این شکل با کمینه‌سازی نرمی سازه و تحت قیود مشخص مانند محدودیت حجم، به گونه‌ای طراحی شده که بیشترین سفتی و کارایی را با استفاده ۶۰٪ مصالح را فراهم کند. مطابق شکل‌های ۱۳ و ۱۴ با پیشرفت الگوریتم بهینه‌سازی، نواحی کم‌اهمیت از لحاظ ساختاری شناسایی و حذف می‌شوند. به تدریج، مواد در مناطقی که نقش کلیدی در تحمل بارها و کاهش تنش‌ها دارند، متمرکز می‌شوند. این توپولوژی بهینه حاصل از روش مجموعه سطوح تراز و الگوریتم به‌روزرسانی طراحی، مرزهای واضح‌تری را نسبت به سایر روش‌ها ایجاد کرده و به دقت بیشتری در طراحی سازه منجر می‌شود.

با نزدیک شدن به انتهای فرآیند، شکل نهایی توپولوژی به یک توزیع بهینه و کارآمد می‌رسد که در آن مواد به بهترین شکل برای افزایش سفتی و کاهش نرمی در پاسخ به قیود مسئله و محدودیت حجم توزیع شده‌اند. این تکامل تدریجی، بیانگر عملکرد مؤثر الگوریتم بهینه‌سازی و قابلیت آن در تولید طرح‌های بهینه سازه‌ای است.

تفسیر نتایج در زمان‌های متفاوت، دقت حل را بهبود بخشیده است.

همچنین، روش مجموعه سطوح تراز با معادله واکنش-انتشار و آنالیز حساسیت الحاقی که به ترتیب برای به‌روزرسانی متغیرهای طراحی و محاسبه سرعت نرمال به کار گرفته شده‌اند، مرزهای سازه‌ای بسیار دقیق و واضحی را نسبت به روش‌های مبتنی بر چگالی مانند SIMP، تولید و از تشکیل مرزهای مبهم جلوگیری کرده است.

دستاوردهای فوق می‌تواند در پژوهش‌های متنوعی از برنامه‌های علمی و مهندسی مانند مهندسی هوا و فضا، مکانیک زیستی، مهندسی سواحل، بنادر و سازه‌های دریایی و ... مفید و قابل توسعه باشد.

**تاییدیه اخلاقی:** محتویات علمی این مقاله حاصل پژوهش نویسندگان است و در هیچ نشریه ایرانی و غیر ایرانی منتشر نشده است.

**تعارض منافع:** در این مقاله هیچ تعارض منافعی برای اظهار وجود ندارد.

**فهرست علائم**

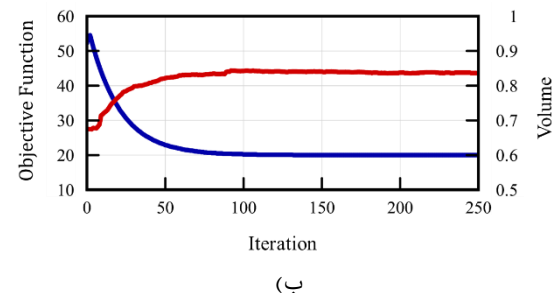
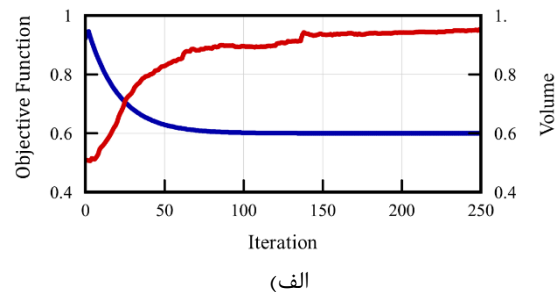
p	فشار
$v_f$	بردار سرعت سیال
$v_{in}$	سرعت ورودی
$u$	بردار جابجایی
$w_f$	بردار جابجایی مش سیال
علائم یونانی	
$\sigma_f$	تنش سیال
$\rho_f$	چگالی سیال
$\mu_f$	ویسکوزیته دینامیکی
$\rho_s$	چگالی سازه
$\nu_s$	ضریب پواسون
$\sigma_s$	تانسور تنش جامد
$\Gamma$	فصل مشترک سیال و جامد
$\partial\Omega^D$	مرز دیریکله
$\partial\Omega^N$	مرز نئومان
$\lambda_s$	ضریب لامه
$\mu_s$	مدول برشی
$\epsilon$	تانسور کرنش سازه
$\mathcal{L}$	تابع لاگرانژی
$\mathcal{L}'$	تابع حساسیت
$\tau$	پارامتر تنظیم
$C$	تانسور الاستیسیته
$\phi$	متغیر طراحی
$\lambda$	ضریب لاگرانژ قید حجم



It.250

شکل ۱۴ تکامل توپولوژی بهینه برای زمان  $t = 1$  ثانیه

در ادامه نمودار روند همگرایی مسئله موجود برای زمان‌های ۱ و ۰/۰۳۲ ثانیه به ترتیب مطابق با شکل‌های ۱۵ الف و ب نشان داده شده است.



شکل ۱۵ روند همگرایی تحت قید حجم ۶۰٪ الف  $t = 1$  و ب  $t = 0.032$

به‌منظور تفسیر نمودار روند همگرایی به‌طور مشابه با مسئله اول مطابق شکل‌های ۱۵ الف و ب مسائل موجود در کمتر از ۱۲۰ تکرار اول به همگرایی رسیده‌اند، که حاکی از کیفیت تحلیل می‌باشد. همچنین ادامه فرایند به‌منظور کنترل پایداری تحلیل صورت پذیرفته است.

**۷- نتیجه‌گیری**

این پژوهش یک رویکرد نوین برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه در مسائل وابسته به زمان اندرکنش سیال-سازه با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز ارائه کرده است. استفاده از توصیف لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) در چارچوب یکپارچه، با حل معادلات وابسته به زمان سیال و سازه به‌صورت همزمان، ناپایداری‌های عددی ناشی از ترم همرفت را مرتفع نموده و علاوه بر فراهم آوردن امکان

- [11] Belytschko T, Xiao SP, Parimi C. Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003 Jun 28;57(8):1177-96.
- [12] Jenkins N, Maute K. An immersed boundary approach for shape and topology optimization of stationary fluid-structure interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2016 Nov;54:1191-208.
- [13] Picelli R, Vicente WM, Pavanello R. Evolutionary topology optimization for structural compliance minimization considering design-dependent FSI loads. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2017 Nov 1;135:44-55.
- [14] Yoon GH. Topology optimization for stationary fluid-structure interaction problems using a new monolithic formulation. *International journal for numerical methods in engineering*. 2010 Apr 30;82(5):591-616.
- [15] Yoon GH. Stress-based topology optimization method for steady-state fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014 Aug 15;278:499-523.
- [16] Andreasen CS, Sigmund O. Topology optimization of fluid-structure-interaction problems in poroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2013 May 1;258:55-62.
- [17] Picelli R, Vicente WM, Pavanello R. Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. *Engineering Optimization*. 2015 Oct 3;47(10):1324-42.
- [18] Picelli R, Ranjbarzadeh S, Sivapuram R, Gioria RD, Silva EC. Topology optimization of binary structures under design-dependent fluid-structure interaction loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2020 Oct;62:2101-16.
- [19] Feppon F, Allaire G, Bordeu F, Cortial J, Dapogny C. Shape optimization of a coupled thermal fluid-structure problem in a level set mesh evolution framework. *SeMA Journal*. 2019 Sep 1;76:413-58.
- [20] Vu-Huu T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Wahab MA. A polytree-based adaptive polygonal finite element method for topology optimization of fluid-submerged breakwater interaction. *Computers & Mathematics with Applications*. 2018 Sep 1;76(5):1198-218.
- [21] Li H, Kondoh T, Jolivet P, Furuta K, Yamada T, Zhu B, Izui K, Nishiwaki S. Three-dimensional topology optimization of a fluid-structure system using body-fitted mesh adaption based on the level-set method. *Applied Mathematical Modelling*. 2022 Jan 1;101:276-308.
- [22] Yoon GH. A new monolithic design approach for topology optimization for transient fluid-structure interaction system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023 Jan 1;403:115729.
- [23] Ranjbarzadeh S, Picelli R, Gioria R, Silva EC. Topology optimization of structures subject to non-Newtonian fluid-structure interaction loads using integer linear programming. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2022 May 1;202:103690.

بردار الحاقی	$\eta$
گام زمانی	$\Delta t$
بالانویس‌ها	
دیریکله	$D$
نئومان	$N$
زیرنویس‌ها	
سیال	$f$
جامد	$s$
ورودی	$in$

#### نشانه‌ها

ضریب تناسب	$C$
مدول الاستیسیته	$E$
ماتریس کرنش-تغییر مکان	$B$
ماتریس سختی	$K$
تابع هدف	$J$
بردار نیرو	$f$

#### منابع

- [1] Shang L, Hoareau C, Zilian A. Modeling and simulation of thin-walled piezoelectric energy harvesters immersed in flow using monolithic fluid-structure interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2022 Sep 1;206:103761.
- [2] Wang Y, Wang Z, Xia Z, Poh LH. Structural design optimization using isogeometric analysis: a comprehensive review. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2018 Dec 1;117(3):455-507.
- [3] Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1988 Nov 1;71(2):197-224.
- [4] Rozvany GI, Zhou M, Birker T. Generalized shape optimization without homogenization. *Structural optimization*. 1992 Sep;4:250-2.
- [5] Mlejnek HP. Some aspects of the genesis of structures. *Structural optimization*. 1992 Mar;5:64-9.
- [6] Bendsøe MP. *Optimization of structural topology, shape, and material*. Berlin: Springer; 1995 Jan.
- [7] Sanches RP. *Evolutionary Topology Optimization of Fluid-structure Interaction Problems* (Doctoral dissertation, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Mecânica).
- [8] Sivapuram R, Picelli R. Topology optimization of binary structures using integer linear programming. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2018 Feb 1;139:49-61.
- [9] Sethian JA. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University. 1999.
- [10] Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of computational physics*. 1988 Nov 1;79(1):12-49.

- [24] Holzapfel GA. Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science.
- [25] Sun P, Zhang CS, Lan R, Li L. An advanced ALE-mixed finite element method for a cardiovascular fluid-structure interaction problem with multiple moving interfaces. *Journal of Computational Science*. 2021 Mar 1;50:101300.
- [26] Hron J, Turek S. A monolithic FEM/multigrid solver for an ALE formulation of fluid-structure interaction with applications in biomechanics. In *Fluid-Structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimisation 2006* Jul 28 (pp. 146-170). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [27] San Martín J, Smaranda L, Takahashi T. Convergence of a finite element/ALE method for the Stokes equations in a domain depending on time. *Journal of computational and applied mathematics*. 2009 Aug 15;230(2):521-45.
- [28] Winslow AM. "Equipotential" zoning of two-dimensional meshes. California Univ., Livermore (USA). Lawrence Livermore Lab.; 1963 Jun 5.
- [29] Alnæs M, Blechta J, Hake J, Johansson A, Kehlet B, Logg A, Richardson C, Ring J, Rognes ME, Wells GN. The FEniCS project version 1.5. *Archive of numerical software*. 2015 Dec 7;3(100).
- [30] Taylor C, Hood P. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*. 1973 Jan 1;1(1):73-100.
- [31] Ge Z, Feng M, He Y. Stabilized multiscale finite element method for the stationary Navier-Stokes equations. *Journal of mathematical analysis and applications*. 2009 Jun 15;354(2):708-17.
- [32] Yamada T, Izui K, Nishiwaki S, Takezawa A. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010 Nov 15;199(45-48):2876-91.
- [33] Jahangiry HA, Gholhaki M, Naderpour H, Tavakkoli SM. Isogeometric level set-based topology optimization for geometrically nonlinear plane stress problems. *Computer-Aided Design*. 2022 Oct 1;151:103358.