



## تحلیل غیرخطی تغییرشکل استاتیکی و فرکانس طبیعی میکرو تیر یکسر درگیر دولایه تحت تحریک الکترواستاتیک با هدف یافتن ترکیب بهینه

احسان پلوئی<sup>1</sup>، مهدی زمانیان<sup>2\*</sup>، سیدعلی اصغر حسینی<sup>2</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 14911-15719، zamanian@khu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 12 دی 1393

پذیرش: 02 اسفند 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:

تغییرشکل استاتیکی

فرکانس طبیعی

الکترواستاتیک

گلرکین

سیستم میکرو الکترومکانیکال

### چکیده

در این پژوهش تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی میکرو تیر یکسر درگیر دو لایه تحت تحریک الکترواستاتیک که لایه دوم بخشی از طول لایه اول را می پوشاند مطالعه می شود. این مدل المان بسیاری از میکروسنسورها و میکروسوئیچها می باشد. ابتدا معادله حرکت غیرخطی با فرض کوتاه شوندهگی تار خنثی خمشی با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می شود. سپس معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل استاتیکی و فرکانس ارتعاش آزاد حول موقعیت استاتیکی سیستم، به کمک روش گلرکین با استفاده از سه شکل مود میکرو تیر یکسر درگیر به عنوان تابع مقایسه ای حل می شوند. با ثابت نگه داشتن حجم لایه دوم، نحوه تغییرات فرکانس طبیعی و تغییر شکل استاتیکی برای طول و ضخامت های مختلف از لایه دوم در سه حالت مختلف بررسی شد. در هر سه حالت ابتدا فرض می شود لایه دوم بر روی کل میکرو تیر لایه نشانی شده است. در حالت اول یکسر آن در تکیه گاه گیردار ثابت در نظر گرفته، و از سمت دیگر از طول آن کاسته و به ضخامت افزوده می شود. در حالت دوم یکسر آن در انتهای آزاد میکرو تیر ثابت در نظر گرفته می شود و از سمت دیگر از طول آن کاسته و به ضخامت افزوده می شود. در حالت سوم از طول لایه دوم از هر دو سمت کاسته و به ضخامت افزوده می شود. همچنین در این تحقیق تغییر رفتار مکانیکی سیستم برای موقعیت های مختلف لایه دوم با فرض ثابت بودن طول و ضخامت آن بررسی می شود. نتایج نشان می دهد که رفتار سیستم بسته به ابعاد و موقعیت لایه دوم تغییر می کند. نتایج این تحقیق می تواند در طراحی بهینه میکروسوئیچها و میکرو سنسورها مورد استفاده قرار گیرد.

## Static deflection and natural frequency analysis of a two-layered electrostatically actuated microcantilever for finding the optimum configuration

Ehsan Poloei, Mehdi Zamanian\*, Seyyed Ali Asghar Hosseini

Department of Mechanical Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 15719-14911 Tehran, Iran, zamanian@khu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 02 January 2015  
Accepted 21 February 2015  
Available Online 04 April 2015

### Keywords:

Static deflection  
Natural frequency  
Electrostatic  
Galerkin  
Micro electromechanical systems (MEMS)

### ABSTRACT

In this study, the static deflection and natural frequency of an electrostatically excited patch-coated microcantilever beam are analyzed. The proposed model is considered as the main element of many microsensors and microswitches. Firstly, the nonlinear motion equation is extracted by means of Hamilton principle, assuming shortening effect. Secondly, differential equations governing the static deflection and free vibration equation around the stability point are solved using Galerkin method and the three mode shapes of a uniform microbeam are employed as the comparison function. By assuming that the volume of deposited layer is constant, the variation of natural frequency and static deflection are examined in three different cases. In any case, it is presumed that the second layer is initially deposited on the entire length of microbeam. In the first case, one end of coated layer is considered fixed at the clamped side of microcantilever, and then its length is decreased from the other side, where its thickness is increased. In the second case, one end of coated layer is perceived fixed at the free side of microcantilever, and then its length is decreased from the other side, where its thickness is escalated. In the third case, the length of second layer is decreased from both the left and right ends, where its thickness is expanded. In addition, the effect due to the change of the second layer position is considered on the mechanical behavior of the system. It is shown that the mechanical behavior of the system depends on the position and dimension of the deposited second layer. The results of this paper can be used for optimum design of microsystems such as microswitches and microsensors.

### 1- مقدمه

باشند و سیستم های میکروالکترومکانیکال با اضافه کردن چشم و بازو، این

قدرت تفکر را توسعه می دهد تا این میکروسیستمها بتوانند محیط اطرافشان

مدارهای مجتمع میکروالکترونیکی می توانند به عنوان مغز متفکر سیستمها

Please cite this article using:

E. Poloei, M. Zamanian, S. A. A. Hosseini, Static deflection and natural frequency analysis of a two-layered electrostatically actuated microcantilever for finding the optimum configuration, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 245-253, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

E. Poloei, M. Zamanian, S. A. A. Hosseini, Static deflection and natural frequency analysis of a two-layered electrostatically actuated microcantilever for finding the optimum configuration, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 245-253, 2015 (In Persian)

همکارانش [13] و رضازاده [14] ولتاژ پولین را بر روی تیر چند لایه مورد مطالعه قرار دادند. در [15] رضازاده میکروتیر یکسر در گیر دولایه را به عنوان سنسور دما مورد بررسی قرار داد. معادله حرکت تیر یکسر در گیر دو لایه تحت تحریک الکترواستاتیک با فرض پیزوالکتریک بودن لایه دوم و با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی توسط نیکخواه بهرامی و همکارانش استخراج و با استفاده از روش گلرکین حل شده است [16]. در مقاله [17] ارتعاشات آزاد و تغییر شکل استاتیکی میکروتیر سه لایه با شرایط مرزی یکسر در گیر و ساده حل شده است. معادلات حرکت از اصل همیلتون استخراج گردیده است.

در این تحقیق نیز تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی میکروتیر یکسر در گیر دولایه تحت تحریک الکترواستاتیک بررسی می‌شود. در قیاس با تحقیقات قبلی که در آنها طول لایه اول و دوم یکسان در نظر گرفته شد در این جا فرض می‌شود که لایه دوم بخشی از طول لایه اول را بپوشاند. اهمیت این نوع ترکیب بندی در میکروسنسورهای جرم و آلاینده می‌باشد [18]. در این ترکیب بندی با جذب ذرات آلاینده توسط لایه دوم، میکروتیر تغییر شکل می‌دهد. در نتیجه ظرفیت خازنی متشکل از میکروتیر و الکتروتود مقابلش تغییر کرده و باعث ایجاد جریان می‌شود. با اندازه‌گیری سیگنال حاصل از جریان میزان آلاینده‌گی سنجیده می‌شود. در این سیستم‌ها فرکانس طبیعی نمادی از سرعت عمل سنسور و تغییرشکل استاتیکی معیاری از قدرت سیگنال می‌باشد. با توجه به این که مقدار این پارامترها وابسته به موقعیت و ضخامت لایه دوم می‌باشد لذا در این تحقیق اثر این پارامترها بر روی رفتار مکانیکی سیستم با فرض ثابت ماندن جرم و یا به عبارتی حجم لایه دوم مطالعه می‌شود. در این بررسی اثرات غیرخطی تحریک الکترواستاتیک و اثرات غیرخطی هندسی و اینرسی با فرض عدم کشیدگی لایه میانی در نظر گرفته می‌شود. اعتبار و درستی روش حل با صفر فرض نمودن ضخامت لایه دوم و مقایسه نتایج با نتایج حاصل از نمونه تجربی گزارش شده در کارهای قبلی بررسی شده است. همچنین تعداد موده‌های مورد استفاده در روش گلرکین به عنوان تابع مقایسه‌ای با بررسی همگرایی حل مشخص می‌شود.

نحوه تغییرات فرکانس طبیعی و تغییر شکل استاتیکی برای طول و ضخامت‌های مختلف از لایه دوم در سه حالت مختلف بررسی می‌شود. در هر سه حالت ابتدا فرض می‌شود لایه دوم کل طول میکروتیر را بپوشاند سپس از طول آن کاسته و ضخامت آن افزایش می‌یابد تا حجم آن ثابت باقی بماند. در حالت اول یکسر آن در تکیه‌گاه گیردار ثابت در نظر گرفته می‌شود و از سمت آزاد از طول آن کاسته و به ضخامت افزوده می‌شود. در حالت دوم یکسر آن در تکیه‌گاه آزاد ثابت در نظر گرفته می‌شود و از سمت گیردار از طول آن کاسته می‌شود و در حالت سوم از طول آن از هر دو سمت گیردار و آزاد کاسته می‌شود. از نتایج این تحقیق می‌توان برای یافتن موقعیت بهینه برای لایه دوم که منجر به تغییر شکل استاتیکی بالا یا فرکانس طبیعی بالا و یا تغییر شکل و فرکانس طبیعی بطور همزمان بالا شود استفاده نمود.

## 2- مدل سازی و فرمول بندی

نمایی از سیستم مورد بررسی در شکل 1 نشان داده شده است. اگر  $u$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در راستای محور  $X$  و  $Z$  در نظر گرفته شود. با توجه به شکل 2 می‌توان روابط بین جابجایی‌ها را مطابق معادله (1) نوشت.

$$e = \frac{ds - dx}{dx} = \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} - 1$$

$$\cos \theta = \frac{1+u'}{1+e}, \quad \sin \theta = \frac{w'}{1+e}, \quad \theta = \arctang \frac{w'}{1+u'} \quad (1)$$

را حس کرده و کنترل نمایند. این سنسورها در ساده‌ترین حالت خود با کمک اندازه‌گیری پدیده‌های مکانیکی، گرمایی، زیستی، شیمیایی، نوری و مغناطیسی، اطلاعات را از محیط جمع‌آوری می‌کنند. پس از اخذ اطلاعات از حس‌کننده‌ها، دستگاه‌های الکترومکانیکی به کمک قدرت تصمیم‌گیری خود، محرک‌ها را به پاسخ‌هایی چون: حرکت، جابجایی، تنظیم کردن، پمپ کردن و فیلتر کردن وادار کرده، محیط را به سمت نتایج موردنظر هدایت می‌کنند. از آن‌جا که سیستم‌های میکروالکترومکانیکال با تکنیک‌های میکرو ماشین‌کاری ساخته می‌شوند، می‌توان سطح بسیار بالایی از کارکرد، اطمینان و پیچیدگی را با هزینه اندک بر روی تراشه کوچک سیلیکونی شکل داد.

میکروتیر یکسر در گیر، المان اصلی بسیاری از این سیستم‌ها می‌باشد. در یک میکروسنسور، هنگامی که ولتاژ DC بین میکروتیر و الکتروتود اعمال می‌شود میدان الکتریکی ناشی از اعمال یک نیروی الکترواستاتیک بر روی میکروتیر متحرک آن را به سمت الکتروتود ثابت منحرف می‌کند. این انحراف را تغییر شکل استاتیکی می‌نامند. در یک ولتاژ به اندازه کافی زیاد میکروتیر ناپایدار شده و به الکتروتود ثابت متصل می‌شود و میکروسوئیچ در وضعیت روشن قرار می‌گیرد. این پدیده که در اثر غیرخطی بودن نیروی الکترواستاتیک ایجاد می‌شود به عنوان پولین شناخته می‌شود. تحقیقات زیادی برای محاسبه‌ی تغییر شکل استاتیکی و محاسبه ولتاژ پولین این سیستم‌ها انجام شده است [1]. لیژانگ و خانولی رفتار دینامیکی و استاتیکی میکروتیر یکسر در گیر را تحت تحریک الکترواستاتیک مطالعه نمودند [2]. میکروتیر یکسر در گیر تحت اثر نیروی الکترواستاتیک با فاصله اولیه زیاد بین الکتروتودها توسط شاطرجی و پوهیت مورد بررسی قرار گرفت [3]. در مرجع [4] راسخ و خادم آنالیز ولتاژ پولین بر روی یک نانو تیوب یکسر در گیر غیرخطی تحت تحریک الکترواستاتیک انجام شد. یومینگ فانگ به بررسی ولتاژ پولین در میکروتیر یکسر در گیر و دوسر در گیر پرداخت و نتیجه کار خود را با نمونه تجربی موجود مقایسه کرد [5]. یوان، پدیده پولین را با در نظر گرفتن اثر انحنا و زاویه بررسی کرد که در مطالعه‌های قبلی اثر زاویه در نظر گرفته نشده بود [6]. نجار، اثر مقیاس کوچک بر روی تغییر شکل استاتیکی و ولتاژ پولین بر روی یک میکروتیر تحت تحریک الکترواستاتیک را بررسی کرد. او همچنین نیروهای بین مولکولی نظیر کسیمر و واندروالس را در نظر گرفت [7]. رهایی‌فرد و احمدیان تغییر شکل استاتیکی و پولین ناپایدار میکروتیر یکسر در گیر تحت تحریک الکترواستاتیک را از تئوری گرادیان کرنشی بررسی کردند [8]. قادر رضازاده در [9] نشان داد رفتار وابسته به اندازه مواد، موقعی ضرورت پیدا می‌کند که اندازه ضخامت یک سازه نزدیک به مقدار پارامتر مشخصه طولی ماده باشد. در چنین مواردی نادیده گرفتن این رفتار ممکن است به نتایج نادرستی منجر شود. در این مقاله اثر شدید وابستگی به اندازه روی رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیک مطالعه شده است. یاسر ابوالکاظم در [10] به تحلیل دینامیکی سنسور جرم پرداخته که براساس تغییر در فرکانس رزونانس عمل می‌کند. راسخ و خادم نانو ژيروسکوپ را بررسی کردند که پایه آن میکروتیر یکسر درگیری بود که در انتهای آن جرم قرار داشت [11]. مجاهدی، احمدیان و فیروزبخش نیز میکروتیر یکسر در گیر که در انتهای آن جرم قرار دارد را در نظر گرفته‌اند، آن‌ها معادله حرکت را با استفاده از اصل همیلتون استخراج و با استفاده از گلرکین آن را جداسازی کرده و معادله غیرخطی را از روش مقیاس چندگانه حل نمودند [12].

برخی از تحقیقات بر روی تیر چند لایه انجام شده است، نای و

$m(x)$  جرم واحد طول و برابر معادله (7) می‌باشد:

$$m(x) = w_b \left( \rho_b t_b + (H_{l_1} - H_{l_2}) \rho_p t_p \right) \quad (7)$$

$$H_{l_i}(x - l_i) = \begin{cases} 1 & x \geq l_i \\ 0 & x \leq l_i \end{cases} \quad i = 1, 2$$

در آن  $w_b$  عرض میکروتیر و لایه دوم، همچنین  $\rho_p$  و  $\rho_b$  به ترتیب چگالی میکروتیر و لایه دوم می‌باشند انرژی پتانسیل کرنشی را می‌توان به شکل معادله (8) نوشت:

$$V = \int_{V_b} \int_0^\varepsilon \sigma_b d\varepsilon dV_b + \int_{V_p} \int_0^\varepsilon \sigma_p d\varepsilon dV_p = \int_0^l \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} \int_0^\varepsilon (1 - H_{l_1}) \times \sigma_b d\varepsilon w_b d\bar{z} dx + \int_0^l \int_{-\frac{t_b}{2} - \bar{z}_n}^{\frac{t_b}{2} - \bar{z}_n} \int_0^\varepsilon (H_{l_1} - H_{l_2}) \sigma_b d\varepsilon w_b \times d\bar{z} dx + \int_0^l \int_{\frac{t_b}{2} - \bar{z}_n}^{\frac{t_b}{2} - \bar{z}_n + t_p} \int_0^\varepsilon (H_{l_1} - H_{l_2}) \sigma_p d\varepsilon w_b d\bar{z} dx + \int_0^l \int_{\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} \int_0^\varepsilon H_{l_2} \sigma_b d\varepsilon w_b d\bar{z} dx \quad (8)$$

حال با توجه به  $\varepsilon = -\kappa \bar{z}$  و جای گذاری معادله (4) و انتگرال گیری می‌توان انرژی پتانسیل را به شکل معادله (9) نوشت:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l C_\eta(x) \kappa^2 dx \quad (9)$$

که در آن  $C_\eta(x)$  معادل سختی خمشی سیستم و برابر با معادله (10) می‌باشد:

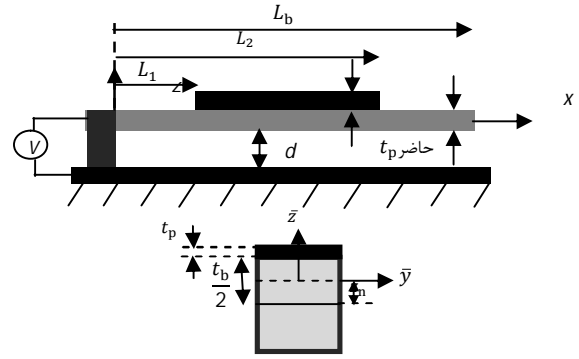
$$C_\eta(x) = (1 - H_{l_1}) E_b I_b + (H_{l_1} - H_{l_2}) E_b \bar{I}_b + (H_{l_1} - H_{l_2}) E_p I_p + H_{l_2} E_b I_b$$

$$I_b = \frac{w_b t_b^3}{12}, \quad \bar{I}_b = \frac{w_b t_b^3}{12} + w_b t_b \bar{z}_n^2$$

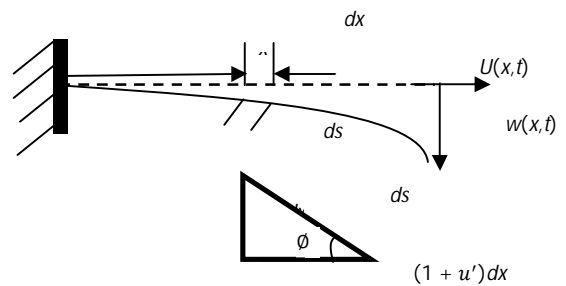
$$I_p = w_p \left( t_p \bar{z}_n^2 - (t_p^2 + t_b t_p) \bar{z}_n + \frac{1}{3} \left( t_p^3 + \frac{3}{2} t_b t_p^2 + \frac{3}{4} t_b^2 t_p \right) \right) \quad (10)$$

با استفاده از معادلات (6) و (9) و شرایط کوتاه شوندگی لایه محوری معادله (5)، لاگرانژین  $L = T - V$  به صورت معادله (11) تعریف می‌شود:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l -C_\eta(s) (w''^2 - 2w''^2 w'^2 - 2w''^2 u' - 2w' w'' u'') dx + \frac{1}{2} \int_0^l \lambda (1 - (1 + u')^2 - w'^2) dx \quad (11)$$



شکل 1 طرح کلی میکروتیر



شکل 2 میکروتیر پس از تغییر شکل

همچنین شعاع انحنا را، می‌توان به شکل معادله (2) نوشت:

$$\kappa = \theta' = w'' - w'' u' - w' u'' - w'' w'^2 \quad (2)$$

در قسمت‌هایی از میکروتیر که لایه دوم وجود ندارد تار خنثی با محور هندسی منطبق است اما مکان تار خنثی برای قسمتی که لایه دوم وجود دارد با مساوی صفر قرار دادن ممان اول سطح حول تار خنثی مطابق معادله (3) به صورت زیر به دست می‌آید. (شکل 1)

$$\bar{z}_n = \frac{E_p t_p (t_p + t_b)}{2(E_b t_b + E_p t_p)} \quad (3)$$

$t_p$  و  $t_b$  به ترتیب ضخامت میکروتیر و لایه دوم،  $E_p$  و  $E_b$  به ترتیب مدول الاستیسیته میکروتیر و لایه دوم می‌باشند. مطابق قانون هوک رابطه تنش-کرنش میکروتیر به صورت معادله (4) می‌باشد:

$$\sigma_b = E_b \varepsilon, \quad \sigma_p = E_p \varepsilon \quad (4)$$

که  $\sigma_b$  تنش میکروتیر و  $\sigma_p$  تنش لایه دوم می‌باشد. همچنین کرنش از رابطه  $\varepsilon = e - \kappa \bar{z}$  به دست می‌آید. برای تیر یکسر درگیر بدون بار طولی اثر کوتاه شوندگی وجود دارد [19]; بنابراین در معادله 1 کرنش محوری  $e$  برابر صفر قرار داده و اثر کوتاه شوندگی مطابق معادله (5) حاصل می‌گردد:

$$e = 0 \Rightarrow (1 + u')^2 + w'^2 = 1 \quad (5)$$

با استفاده از روش لاگرانژ معادله حرکت در راستای طولی و عرضی به دست آورده می‌شود؛ به این منظور بایستی انرژی جنبشی و پتانسیل مشخص شود. انرژی جنبشی سیستم صرف نظر از اینرسی چرخشی به شکل معادله (6) خواهد بود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (6)$$

که در معادله بالا مشتقات نسبت به زمان و  $l$  طول میکروتیر می‌باشد و

$$H_{\frac{l_i}{l}}\left(x - \frac{l_i}{l}\right) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{l_i}{l} \\ 0 & x \leq \frac{l_i}{l} \end{cases} \quad i=1,2$$

$$H(x) = \left(1 - H_{\frac{l_1}{l}}\right) + \frac{\bar{I}_b}{I_b} \left(H_{\frac{l_1}{l}} - H_{\frac{l_2}{l}}\right) + \frac{E_p I_p}{E_b I_b} \left(H_{\frac{l_1}{l}} - H_{\frac{l_2}{l}}\right) + H_{\frac{l_2}{l}}$$

$$m(x) = \left(1 + \left(H_{\frac{l_1}{l}} - H_{\frac{l_2}{l}}\right) \frac{\rho_p t_p}{\rho_b t_b}\right)$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{d}{l}\right)^2, \quad \alpha_2 = \frac{6\epsilon l^4}{E_b t_b^3 d^3} \quad (16)$$

$\alpha_1$  و  $\alpha_2 V_e^2$  ضرایب بی بعد می باشند.

### 3- تغییر شکل استاتیکی میکروتیر

در معادله (15) مشتقات زمانی را صفر قرار داده و معادله استاتیکی (17) حاصل می شود:

$$\left(H(x)w_s''\right) + \alpha_1 \left(w_s' \left(H(x)w_s'w_s''\right)'\right) = \frac{\alpha_2 V_e^2}{(1-w_s)^2} \quad (17)$$

برای حل آن فرض می شود که حل معادله به صورت  $w_s = \sum_{i=1}^M a_i \varphi_i$  باشد. که

در آن  $a_i$  ثوابت و  $\varphi_i$  شکل مود تیر ساده یکسر درگیر می باشد و  $M$  تعداد شکل مود برای حل معادله می باشد. با اعمال روش گلرکین به دست آورده می شود. برای این که معادله جبری حاکم بر  $a_i$  ساده تر و به صورت چند جمله ای ظاهر شود، ابتدا مخرج الکترواستاتیک یعنی  $(1-w_s)^2$  در طرفین معادله ضرب می شود. سپس با جای گذاری فرض جواب در معادله (17) و ضرب  $\varphi_j$  به عنوان تابع مقایسه ای و انتگرال گیری در طول تیر معادلات جبری به شکل معادله (18) حاصل می شود:

$$\sum_{i,j=1}^M a_i \int_0^1 \varphi_j (H(x)\varphi_i'') dx + \sum_{i,j,k,n=1}^M a_i a_k a_n \int_0^1 \varphi_j \varphi_k \varphi_n \times$$

$$\left(H(x)\varphi_i''\right) dx - 2 \sum_{i,j,n=1}^M a_i a_n \int_0^1 \varphi_j \varphi_n \left(H(x)\varphi_i''\right) dx +$$

$$\alpha_1 \sum_{i,j,k,n=1}^M a_i a_k a_n \int_0^1 \varphi_j \left(\varphi_i' \left(H(x)\varphi_k' \varphi_n''\right)'\right) dx + \alpha_1 \sum_{i,j,k,n,m,o=1}^M a_i \times$$

$$a_k a_n a_m a_o \int_0^1 \varphi_j \varphi_m \varphi_o \left(\varphi_i' \left(H(x)\varphi_k' \varphi_n''\right)'\right) dx - 2\alpha_1 \sum_{i,j,k,n,m=1}^M a_i a_k \times$$

$$a_n a_m \int_0^1 \varphi_j \varphi_m \left(\varphi_i' \left(H(x)\varphi_k' \varphi_n''\right)'\right) dx - \alpha_2 V_e^2 \sum_{j=1}^M \int_0^1 \varphi_j dx \quad (18)$$

همچنین برای از بین بردن مشتقات تابع پله از روش جز به جز استفاده می کنیم. مثلاً برای جمله اول معادله (18) با اعمال روش جز به جز و با استفاده از شرایط مرزی معادله (15) خواهیم داشت:

$$\sum_{i,j=1}^M a_i \int_0^1 \varphi_j (H(x)\varphi_i'') dx = \sum_{i,j=1}^M a_i \int_0^1 H(x) \varphi_j'' \varphi_i'' dx \quad (19)$$

که در آن  $\lambda$  ضریب لاگرانژین به علت اثر کوتاه شوندگی لایه محوری می باشد. نیروی الکترواستاتیک بر واحد طول، بین میکروتیر و الکتروود ثابت از رابطه (12) محاسبه می گردد [20]:

$$Q_v = -\frac{1}{2} \epsilon_0 w_b \frac{V_e^2}{(d+w)^2} \quad (12)$$

در رابطه بالا  $\epsilon_0$  ثابت دی الکتریک،  $d$  فاصله بین الکتروود ثابت و میکروتیر و  $V_e$  ولتاژ بین آن هاست. معادله لاگرانژ را در راستای  $u$  نوشته از آن در طول تیر (0 تا  $l$ ) انتگرال گرفته ضریب  $\lambda$  به دست می آید، سپس معادله لاگرانژ در راستای  $w$  نوشته و با استفاده از اثر کوتاه شوندگی معادله (5)، معادله حرکت و شرایط مرزی به شکل معادله (13) حاصل می گردند:

$$m(x)\ddot{w}_d + \left(H(x)w_d''\right) + \alpha_1 \left(w_d' \left(H(x)w_s'w_s''\right)'\right)$$

$$+ \alpha_1 \left(w_s' \left(H(x)w_s'w_d'' + H(x)w_s''w_d'\right)'\right)$$

$$+ \alpha_1 \left(w_s' \int_1^x m(x) \left(\int_0^x \ddot{w}_d' w_s' dx\right) dx\right) = \frac{2\alpha_2 V_e^2}{(1-w_s)^3} w_d$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w''|_{x=l} = 0, \quad w'''|_{x=l} = 0 \quad (13)$$

که در رابطه بالا دو جمله اول معادله خطی تیر، جمله سوم غیرخطی هندسی، جمله چهارم غیرخطی اینرسی و جمله آخر نیروی غیرخطی الکترواستاتیک می باشد که با [3] مطابقت دارد. برای بی بعدسازی معادله (13) متغیرهای معادله (14) تعریف می شود:

$$\hat{w} = -\frac{w}{d}, \quad \hat{x} = \frac{x}{l}, \quad \hat{t} = \left(\frac{t}{l^2}\right) \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b A_b}} \quad (14)$$

در نتیجه معادله حرکت بی بعد و شرایط مرزی آن به شکل معادله (15) به دست خواهد آمد:

$$m(x)\ddot{w} + \left(H(x)w''\right) + \alpha_1 \left(w' \left(H(x)w'w''\right)'\right) +$$

$$\alpha_1 \left(w' \int_1^x m(x) \left(\int_0^x \ddot{w}' w' dx\right) dx\right) = \frac{\alpha_2 V_e^2}{(1-w)^2}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w'|_{x=0} = 0, \quad w''|_{x=1} = 0, \quad w'''|_{x=1} = 0 \quad (15)$$

که تابع پله بی بعد، جرم بی بعد و ضرایب بی بعد معادله (15) در معادله (16) بیان شده اند:

نتایج زیر برای میکروسوئیچی است که در آن ابعاد و مشخصات میکروتیر  $\rho_p = 2330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ،  $E_b = 169 \text{e}9 \text{Pa}$ ،  $t_b = 1.5 \mu\text{m}$ ،  $w_b = 100 \mu\text{m}$ ،  $l_b = 510 \mu\text{m}$ ،  $d = 1.18 \mu\text{m}$  و  $\epsilon_0 = 8.854 \text{e}-12$  می‌باشد، که در بسیاری از تحقیقات قبلی مورد بررسی قرار گرفته است [22].

برای لایه دوم  $\rho_p = 2230 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  و  $w_p = 100 \mu\text{m}$  می‌باشد. در حالت‌های

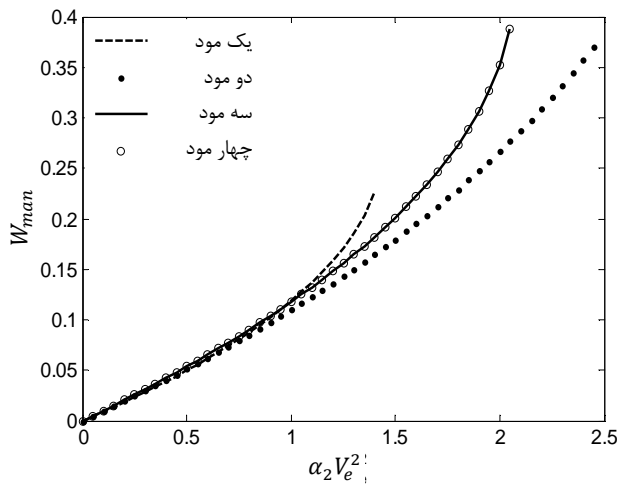
مختلف طول و ضخامت لایه دوم بر روی شکل‌ها داده شده است.

شکل 4 برای  $t_p = 0.5 \mu\text{m}$  و در حالتی که لایه دوم در وسط میکروتیر و  $L_p = 0.5 L_b$  باشد ترسیم شده است. محور افقی پارامتر بی‌بعد نیرو و محور عمودی ماکزیمم تغییرشکل استاتیکی بی‌بعد میکروتیر است که در انتهای میکروتیر رخ می‌دهد.

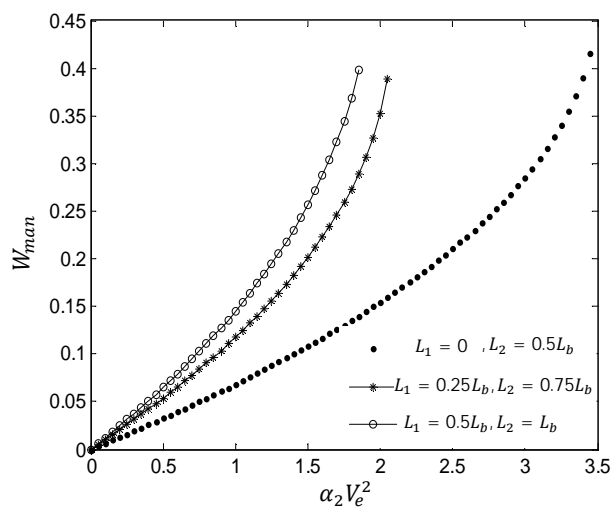
همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود حل مسئله بعد از سه مود همگرا می‌شود.

بنابراین در ادامه مسئله با سه شکل مود اول میکروتیر یکسر در گیر ساده بررسی می‌شود. لازم به ذکر است که به علت غیرخطی بودن سیستم چنانچه مسئله با تعداد مود کمتر حل شود نتایج اشتباه گرفته خواهد شد.

ابتدا در شکل 5 لایه دومی که 50% طول میکروتیر را می‌پوشاند در سه موقعیت مختلف سمت گیردار، وسط و سمت آزاد میکروتیر ترسیم شده است.



شکل 4 تعداد مود همگرایی



شکل 5 نمودار تغییرشکل استاتیکی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم یکسان در سه موقعیت مختلف

#### 4- فرکانس طبیعی حول موقعیت استاتیکی

در معادله (15)،  $w$  را می‌توان به شکل جمع تغییر شکل دینامیکی  $w_d(x, t)$  و تغییر شکل استاتیکی  $w_s(x)$  در نظر گرفت [3]، در نتیجه با قراردادن  $w(x, t) = w_d(x, t) + w_s(x)$  در معادله (15) و بسط نیروی الکترواستاتیک حول موقعیت استاتیکی  $w_s(x)$  و صرف‌نظر از جمله‌های غیرخطی  $w_d(x, t)$  رابطه (20) به دست خواهد آمد:

$$m(x)\ddot{w}_d + (H(x)w_d'')'' + \alpha_1 \left( w_d' (H(x)w_s' w_s'')' \right)' + \alpha_1 \left( w_s' (H(x)w_s' w_d'' + H(x)w_s'' w_d')' \right)' + \alpha_1 \left( w_s' \int_1^x m(x) \left( \int_0^x \ddot{w}_d' w_s' dx \right) dx \right)' = \frac{2\alpha_2 V_e^2}{(1-w_s)^3} w_d \quad (20)$$

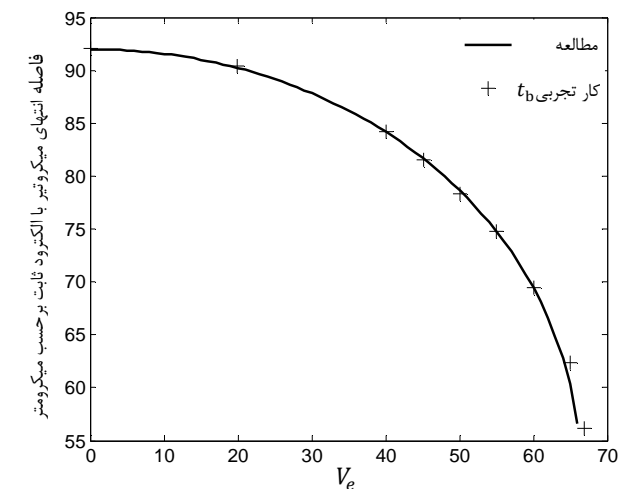
معادله (20) جای‌گذاری کرده، معادله

دیفرانسیل حاکم بر فرکانس طبیعی خطی حاصل می‌گردد. سپس  $\varphi_m$  را به عنوان تابع مقایسه‌ای ضرب کرده و با انتگرال‌گیری در طول میکروتیر معادله جبری حاکم بر فرکانس طبیعی به دست می‌آید. با صفر کردن دترمینان ضرایب  $(|K - m\omega^2| = 0)$  فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد محاسبه می‌گردد.

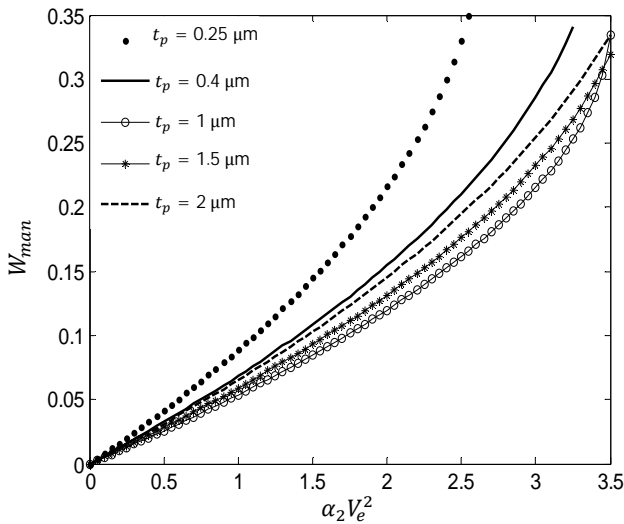
#### 5- نتایج

به منظور نشان دادن دقت محاسبات انجام شده در شکل 3 تغییر شکل استاتیکی با نمونه تجربی [21] مقایسه شده است. در این شکل مقادیر  $\alpha_1 = 2.1 \text{e}-5$  و  $\alpha_2 = 0.0003$  و  $t_p = 0$  طبق نمونه در نظر گرفته شده است.

در این شکل محور افقی ولتاژ برحسب ولت و محور قائم فاصله انتهای میکروتیر پس از تغییر شکل با الکتروود ثابت برحسب میکرومتر می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مطالعه حاضر از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

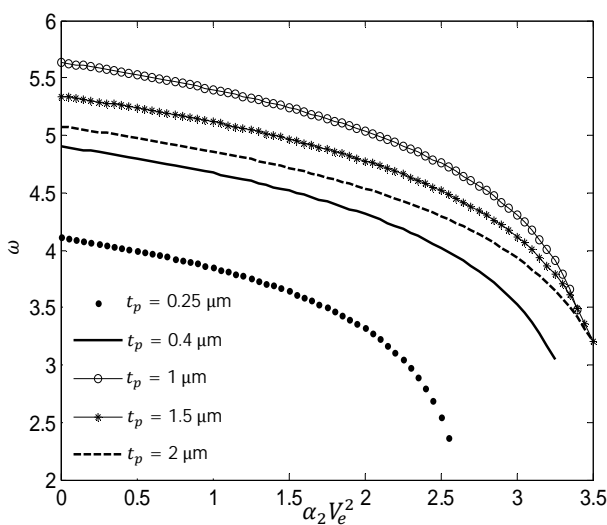


شکل 3 مقایسه مطالعه حاضر با نمونه تجربی



شکل 7 نمودار تغییر شکل استاتیکی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در سمت گیردار میکروتیر)

همان‌طور که در شکل 7 دیده شد سختی در این حالت ابتدا افزایش و سپس کاهش یافت. جرم معادل سیستم در ارتباط با انرژی جنبشی است. در مود اول دامنه حرکت میکروتیر یکسر درگیر با افزایش فاصله از سمت گیردار افزایش می‌یابد. در نتیجه با کاهش طول لایه دوم از سمت آزاد جرم معادل سیستم کاهش می‌یابد. در نتیجه فرکانس طبیعی ابتدا با نرخ بالایی زیاد می‌شود. در ادامه با کاهش بیشتر طول لایه دوم سختی سیستم و جرم معادل هر دو کاهش می‌یابد اما میزان کاهش سختی بیشتر از کاهش جرم معادل سیستم می‌باشد. در نتیجه با کاهش بیشتر طول لایه دوم فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد اما نرخ تغییرات آن کندتر از حالت افزایشی است. حال با توجه به کاربرد میکروسنسور یا میکروسوییچ اگر حالتی مد نظر باشد که همزمان میزان تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی بالا باشد؛ می‌بایست حالتی انتخاب شود که  $t_p = 0.625 t_0$  باشد. نمودار با خط پر، در شکل 8 چنین خاصیتی را دارا می‌باشند.



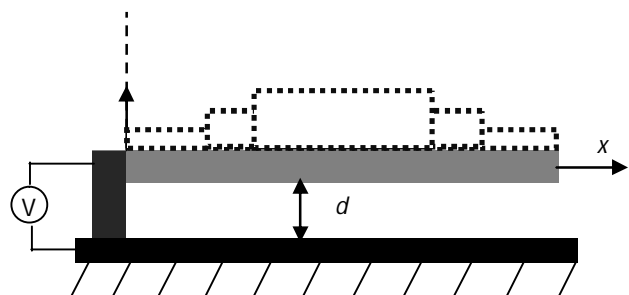
شکل 8 نمودار تغییر فرکانس طبیعی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در سمت گیردار میکروتیر)

مشاهده می‌شود که با جابجایی لایه دوم در طول میکروتیر از سمت تکیه‌گاه گیردار به سمت سر آزاد میکروتیر، تغییرشکل استاتیکی افزایش می‌یابد. این تغییرات موید این حقیقت است که سختی معادل تیر یکسر درگیر با دور شدن لایه دوم از سمت گیردار و نزدیک شدن آن به سمت آزاد میکروتیر کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که تغییرات جرم معادل بر رفتار استاتیکی بی‌اثر می‌باشد.

در ادامه به منظور بهینه‌سازی ضخامت، طول و موقعیت لایه دوم حجم آن را ثابت و مقدار آن برابر  $12750 \mu\text{m}^3$  در نظر می‌گیریم که معادل است با لایه دومی به ضخامت  $t_p = 0.25 \mu\text{m}$  که بر روی کل میکروتیر لایه‌نشانی شده باشد. سپس در سه حالت مختلف از طول لایه دوم کاسته و به ضخامت آن اضافه می‌شود. با توجه به ثابت بودن حجم در شکل‌های مربوط به این قسمت تنها ضخامت لایه دوم داده شده است و از نوشتن طول لایه دوم خودداری شده است.

در حالت اول یکسر آن در تکیه‌گاه گیردار ثابت در نظر گرفته می‌شود و از سمت آزاد از طول آن کاسته می‌شود. در حالت دوم یکسر آن در تکیه‌گاه آزاد ثابت در نظر گرفته می‌شود و از سمت گیردار از طول آن کاسته می‌شود. در حالت سوم از طول آن از هر دو سمت گیردار و آزاد کاسته می‌شود (شکل 6) در حالت اول طول لایه دوم از سمت آزاد میکروتیر کاسته و ضخامت آن زیاد می‌شود. شکل 7 نشان می‌دهد که با کاهش طول لایه دوم تا یک طول خاص تغییر شکل استاتیکی افزایش می‌یابد و در ادامه این روند معکوس می‌شود. در این‌جا روند معکوس شدن در حالتی که لایه دوم تنها 25% سمت گیردار از میکروتیر را می‌پوشاند یعنی حالت  $t_p = 1 \mu\text{m}$  اتفاق می‌افتد. علت این رفتار را بدین صورت می‌توان توجیه کرد. ابتدا افزایش ضخامت لایه دوم به علت جمع شدن آن به سمت تکیه‌گاه گیردار باعث افزایش سختی خمشی سیستم می‌شود. اما در ادامه و با کاهش عمده طول قسمت دولایه و افزایش عمده ضخامت آن، کم‌کم رفتار انتهای لایه دوم مانند یک بخش صلب می‌شود. به عبارت دیگر سیستم مانند یک تیر یکسر درگیر تک لایه خواهد بود که مرز گیردار آن در انتهای لایه دوم قرار دارد. به همین دلیل تغییر شکل سیستم با جمع شدن بیشتر لایه دوم به سمت قسمت گیردار افزایش می‌یابد. البته لازم به ذکر است که این تغییرات به ضخامت میکروتیر پایه نیز وابسته است و میکروتیر پایه باید در ابتدا ضخامتش از ضخامت لایه دوم بیشتر باشد.

در شکل 8 فرکانس طبیعی سیستم برای حالت اول یعنی کاهش طول لایه دوم از سمت آزاد ترسیم شده است. روند تغییرات فرکانس طبیعی با کاهش طول لایه دوم نیز شبیه روند تغییرات تغییر شکل استاتیکی است. فرکانس طبیعی وابسته به جرم و سختی سیستم می‌باشد لذا تغییرات آن را می‌توان با بررسی روند تغییرات این پارامترها بررسی کرد.



شکل 6 لایه دوم با حجم ثابت

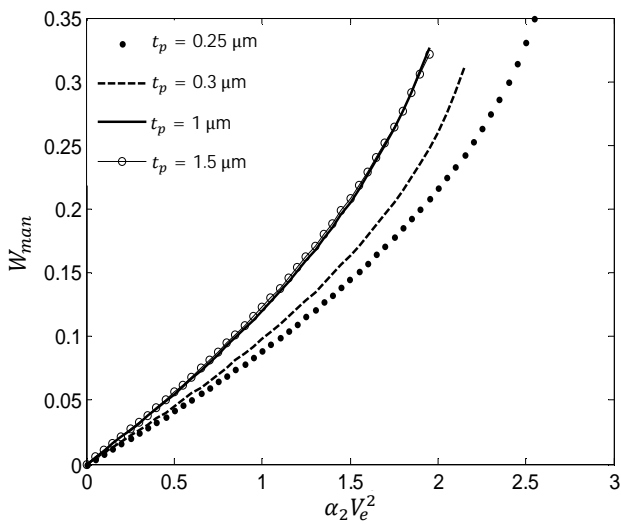
همچنین با کاهش طول لایه دوم از سمت تکیه‌گاه گیردار به سمت سر آزاد میکروتیر جرم معادل افزایش می‌یابد زیرا دامنه حرکت در مود اول با حرکت به سمت انتهای آزاد افزایش می‌یابد. بنابراین در این حالت عامل افزایش فرکانس وجود دارد. در نتیجه در ابتدا نرخ تغییرات فرکانس طبیعی سریعتر از نرخ تغییرات تغییر شکل استاتیکی است. با کاهش بیشتر طول لایه دوم به علت غالب بودن تغییرات سختی به تغییرات جرم معادل روند تغییرات مانند روند تغییرات تغییر شکل استاتیکی کند می‌شود.

در حالت سوم طول لایه دوم از دو سمت آزاد و گیردار میکروتیر کاسته می‌شود و به ضخامت آن افزوده می‌شود. شکل‌های 11 و 12 نشان می‌دهد که روند تغییرات مانند حالت قبل است اما نرخ تغییرات کندتر است.

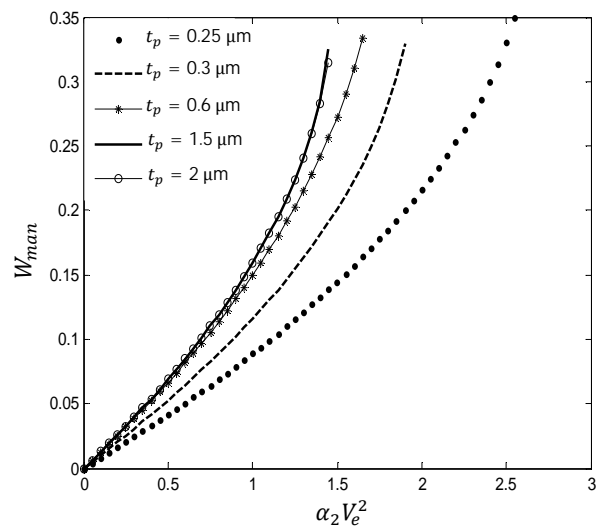
برای نمونه در  $\alpha_2 V_e^2 = 1.5$  برای  $t_p = 0.6 \mu\text{m}$  میزان حداکثر تغییر شکل استاتیکی بی‌بعد در حالت سوم 0/2 و در حالت دوم 0/27 می‌باشد. علت این تفاوت این است که در این‌جا مانند حالت قبل با کاهش طول لایه دوم از سمت تکیه‌گاه گیردار سختی خمشی کاهش و جرم معادل افزایش می‌یابد. اما

تغییر شکل استاتیکی برای حالت دوم در شکل 9 ترسیم شده است. در این‌جا با فرض ثابت ماندن حجم لایه دوم طول آن از سمت تکیه‌گاه گیردار کاهش و به ضخامت آن افزوده می‌شود. این شکل نشان می‌دهد که برعکس حالت قبل که روند تغییرات تغییر شکل استاتیکی با تغییرات طول لایه دوم روند افزایشی و سپس کاهشی بود در اینجا تغییر شکل استاتیکی با نرخ بالایی افزایش می‌یابد و با کاهش بیشتر آن روند افزایش تغییر شکل استاتیکی کند و سپس متوقف می‌شود. شکل 10 نشان می‌دهد که همین روند برای فرکانس طبیعی نیز برقرار است.

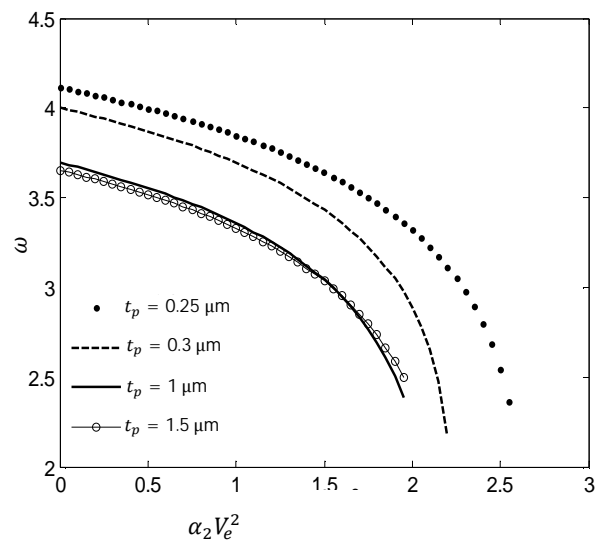
علت این تغییرات این است که ابتدا افزایش ضخامت لایه دوم به علت جمع شدن آن به سمت تکیه‌گاه آزاد باعث کاهش سختی خمشی سیستم می‌شود. به همین دلیل تغییر شکل سیستم با جمع شدن بیشتر لایه دوم به سمت قسمت گیردار افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که تغییرات انحنا در انتهای تیر یکسر درگیر ناچیز است لذا کاهش بیشتر طول لایه دوم تاثیر چندانی در سختی خمشی ندارد و از یک طول و ضخامت خاص به بعد (در این‌جا  $t_p = 1.5 \mu\text{m}$ ) کاهش تغییر شکل استاتیکی محسوس نخواهد بود.



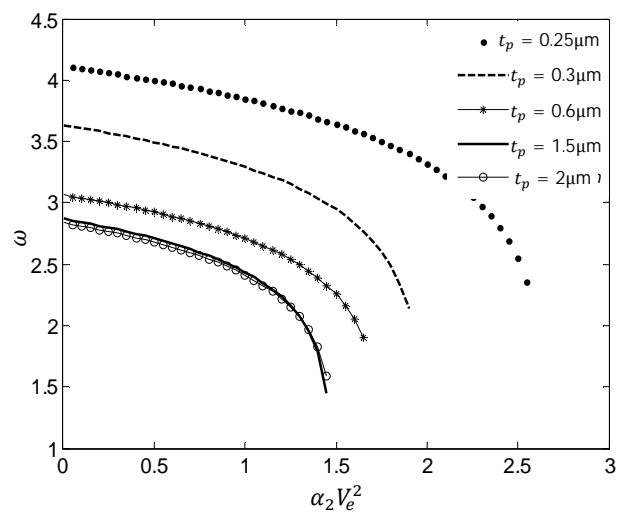
شکل 11 نمودار تغییر شکل استاتیکی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در وسط میکروتیر)



شکل 9 نمودار تغییر شکل استاتیکی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در سمت آزاد میکروتیر)



شکل 12 نمودار تغییر فرکانس طبیعی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در وسط میکروتیر)



شکل 10 نمودار تغییر فرکانس طبیعی با تغییر ولتاژ برای لایه دوم با حجم ثابت و ضخامت‌های مختلف (لایه دوم در سمت آزاد میکروتیر)

نیز برقرار است. همچنین نتایج بیان می‌کند که روند تغییرات برای حالت سوم مانند حالت دوم است اما نرخ تغییرات کندتر است.

#### 7- فهرست علائم

$d$	فاصله اولیه میکروتیر و الکتروود ثابت ( $\mu\text{m}$ )
$e$	کرنش طولی تار خنثی
$E_b$	مدول الاستیسیته میکروتیر (Pa)
$E_p$	مدول الاستیسیته لایه دوم میکروتیر (Pa)
$I_b$	گشتاور دوم سطح میکروتیر حول تار خنثی در جایی که لایه دوم وجود ندارد
$\bar{I}_b$	گشتاور دوم سطح میکروتیر حول تار خنثی در جایی که لایه دوم وجود دارد
$I_p$	گشتاور دوم سطح لایه دوم حول تار خنثی در جایی که لایه دوم وجود دارد
$L_b$	طول میکروتیر ( $\mu\text{m}$ )
$L_1$	فاصله ابتدای لایه دوم از سمت راست میکروتیر ( $\mu\text{m}$ )
$L_2$	فاصله انتهای لایه دوم از سمت راست میکروتیر ( $\mu\text{m}$ )
$T$	انرژی جنبشی
$t_b$	ضخامت میکروتیر ( $\mu\text{m}$ )
$t_p$	ضخامت لایه دوم میکروتیر ( $\mu\text{m}$ )
$V$	انرژی پتانسیل
$U(x,t)$	جابه‌جایی طولی میکروتیر
$W(x,t)$	جابه‌جایی عرضی میکروتیر
$w_d$	تغییر شکل دینامیکی بی‌بعد
$w_s$	تغییر شکل استاتیکی بی‌بعد
$\bar{z}_n$	فاصله بین تارخنثی و لایه میانی میکروتیر

#### علائم یونانی

$\sigma_b$	تنش محوری لایه اول میکروتیر (Pa)
$\sigma_p$	تنش محوری لایه دوم میکروتیر (Pa)
$\rho_b$	چگالی لایه اول میکروتیر ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )
$\rho_p$	چگالی لایه دوم میکروتیر ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )
$Q_v$	تحریک الکترواستاتیک بر واحد طول
$\varepsilon$	کرنش در راستای طولی
$\varepsilon_0$	ثابت دی‌الکتریک بین میکروتیر و الکتروود ثابت

#### 8- مراجع

- [1] M. I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics*, pp. 197-201, New York: Springer, 2011.
- [2] X. Lizhoung, J. Xiaoli, Electromechanical coupled nonlinear dynamics for microbeams, *Arc. Appl. Mech.*, Vol. 77, No. 7, pp. 485-502, 2007.
- [3] S. Chaterjee, G. A. Pohit, Large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams, *Journal of sound and vibration*, Vol. 322, No. 4-5, pp. 969-986, 2009.
- [4] M. Rasekh, S. E. Khadem, Pull-in analysis of an electrostatically actuated nano-cantilever beam with nonlinearity in curvature and inertia, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 53, No. 2, pp. 108-115, 2011.

عامل دیگر یعنی کاهش طول لایه دوم از سمت سر آزاد میکروتیر سختی خمشی این تغییرات را کند می‌کند. در حالت دوم و سوم نیز بسته به نیاز می‌توان حالت بهینه را برگزید. برای نمونه اگر میکروسوئیچی با سرعت قطع و وصل بالا مد نظر باشد بایستی حالتی که فرکانس طبیعی بیشتری دارد را انتخاب کرد. که این ویژگی را نمودارهای با دایره توپر در شکل‌های 10 و 12 دارا می‌باشند.

همه شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش ولتاژ الکتریکی بین میکروتیر و الکتروود تفاوت میان تغییرشکل استاتیکی سیستم‌های با سختی‌های متفاوت به شدت افزایش می‌یابد و علت آن اثرات نرم شوندگی ناشی از تحریک الکترواستاتیک است. چون این تحریک با مربع فاصله میکروتیر از الکتروود مقابلش رابطه معکوس دارد لذا با افزایش ولتاژ مقدار آن به صورت غیرخطی زیاد و در نتیجه سیستم‌های با سختی کمتر زودتر دچار پولین شده اند. ولتاژ پولین در شکل‌ها ولتاژی است که شیب منحنی تغییر شکل به بی‌نهایت میل می‌کند. در تحقیقات قبلی این موضوع مفصل بررسی شده است [4-1]. همین روند برای فرکانس طبیعی نیز صادق است.

#### 6- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی میکروتیر یکسر در گیر دو لایه تحت تحریک الکترواستاتیک که لایه دوم بخشی از طول لایه اول را می‌پوشاند مطالعه شد.

ابتدا برای  $t_p=0$  نتیجه کار حاضر با نمونه تجربی موجود مقایسه و نشان داده شد که کار انجام شده از دقت بالایی برخوردار می‌باشد. سپس نشان داده شد که همگرایی در روش گلرگین با استفاده از سه شکل مود به عنوان تابع مقایسه‌ای اتفاق می‌افتد.

در این تحقیق تغییر رفتار مکانیکی سیستم برای موقعیت‌های مختلف لایه دوم با فرض ثابت بودن طول و ضخامت آن بررسی شد. که در نتیجه آن مشاهده شد که به علت شرایط مرزی میکروتیر یکسر در گیر با جابجایی لایه دوم از سمت تکیه‌گاه گیردار به سمت سر آزاد، میزان تغییر شکل استاتیکی افزایش و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

در ادامه به منظور بهینه‌سازی طول، ضخامت و موقعیت لایه دوم، حجم لایه دوم ثابت در نظر گرفته شد و نحوه تغییرات فرکانس طبیعی و تغییر شکل استاتیکی برای طول و ضخامت‌های مختلف از لایه دوم در سه حالت مختلف بررسی شد. در هر سه حالت ابتدا فرض می‌شود لایه دوم بر روی کل میکروتیر لایه نشانی شده است. در حالت اول یکسر آن در تکیه‌گاه گیردار ثابت در نظر گرفته، و از سمت آزاد از طول آن کاسته و به ضخامت افزوده می‌شود. در حالت دوم یکسر آن در تکیه‌گاه آزاد ثابت در نظر گرفته می‌شود و از سمت گیردار از طول آن کاسته می‌شود. در حالت سوم از طول آن از هر دو سمت گیردار و آزاد کاسته می‌شود.

نتایج نشان داد که در حالت اول با کاهش طول لایه دوم تا یک طول خاص تغییر شکل استاتیکی افزایش و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و در ادامه این روند معکوس می‌شود. در این‌جا روند معکوس شدن در حالتی که لایه دوم تنها 25% سمت گیردار از میکروتیر را می‌پوشاند یعنی حالت  $t_p=1\mu\text{m}$  اتفاق افتاد. نتایج نشان داد که در حالت دوم برعکس حالت قبل که روند تغییرات تغییر شکل استاتیکی با تغییرات طول لایه دوم روند افزایشی و سپس کاهشی بود در این‌جا تغییرشکل استاتیکی با نرخ بالایی افزایش می‌یابد و با کاهش بیشتر آن روند افزایش تغییر شکل استاتیکی کند و سپس متوقف می‌شود. نشان داده شد که همین روند برای فرکانس طبیعی



- [13] M. Nie, Q. Huang, W. Li, Measurement of material properties of individual layers for composite films by a pull-in method, *Journal of Physics*, Vol. 34, No. 34, pp. 516–521, 2006.
- [14] G. Rezazadeh, A comprehensive model to study nonlinear behavior of multilayered micro beam switches *Microsyst, Microsyst Technol*, Vol. 14, No. 1, pp. 135–141, 2007.
- [15] G. Rezazadeh, A. Keyvani, S. Jafarmadar, On a MEMS based dynamic remote temperature sensor using transverse vibration of a bi-layer micro-cantilever, Vol. 125, pp. 73-77, 2014.
- [16] M. N. Bahrami, A. Yousefi-Koma, H. Raesifard, Modeling and nonlinear analysis of a micro-switch under electrostatic and piezoelectric excitations with curvature and piezoelectric nonlinearities, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, No. 1, pp. 263-272, 2014.
- [17] A. Li, S. Zhou, S. Zhou, B. Wang, Size-dependent analysis of a three-layer microbeam including electromechanical coupling, *Journal of Composite Structures*, Vol. 116, pp. 120-127, 2014.
- [18] I. Dufor, F. Lochon, S. M. Heinrich, F. Josse, D. Rebiere, Effect of Coating Viscoelasticity on Quality Factor and Limit of Detection of Microcantilever Chemical Sensors, *Sensors Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 230 – 236, 2007.
- [19] A. H. Nayfeh, P. F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*, pp. 221-224, New York: Wiley, 2004.
- [20] S. D. Senturia, *Microsystem design*, pp. 130-137, NEW YORK, BOSTON, DORDRECHT, LONDON, MOSCOW: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [21] Y. C. Hu, C. M. Chang, S. C. Huang, Some design considerations on the electrostatically actuated micro structures, *Sensors and Actuators*, Vol. 112, No. 1, pp. 155-161, 2004.
- [22] A. H. Nayfeh, M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, *Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators*, Vol. 48, No. 1-2, pp. 153-163, 2006.
- [5] Y. Fang, P. Li, A new approach and model for accurate determination of the dynamic pull-in parameters of microbeam actuated by a step voltage, *Micromechanics and Microengineering*, Vol. 23, No. 4, pp. 045010-045021, 2013.
- [6] Y. T. Huang, H. L. Chen, W. Hsu, An analytical model for calculating the pull-in voltage of micro cantilever beams subjected to tilted and curled effects, *Microelectronic Engineering*, Vol. 125, pp. 73-77, 2014.
- [7] F. Najar, S. El-Borgi, J. N. Reddy, K. Mrabet, Nonlinear nonlocal analysis of electrostatic nanoactuators, *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 117-128, 2015.
- [8] M. Rahaeifard, M. T. Ahmadian, On pull-in instabilities of microcantilevers, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 87, pp. 23-31, 2015.
- [9] Gh. Rezazadeh, M. sadeghi, M. Fathalilou, Study On the Size Dependent Behavior of a Micro-beam Subjected to a Nonlinear Electrostatic Pressure, *Moadares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015 (In Persian).
- [10] Y. Aboelkassem, A. H. Nayfeh, M. Ghommem, Bio-mass sensor using an electrostatically actuated microcantilever in a vacuum microchannel, *Microsyst Technol*, Vol. 16, No. 10, pp. 1749-1755, 2010.
- [11] M. Rasekh, S. E. Khadem, Design and performance analysis of a nanogyroscope based on electrostatic actuation and capacitive sensing, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 23, pp. 6155-6168, 2013.
- [12] M. Mojahedia, M. T. Ahmadian, K. Firoozbakhsh, The influence of the intermolecular surface forces on the static deflection and pull-in instability of the micro/nano cantilever gyroscopes, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 336-343, 2014.