



Application of the Modified Differential Transformation Method to Nonlinear Oscillations of a Magnetic Spherical Oscillator Considering the Damping Effect



ARTICLE INFO

Authors

Mohammadian M¹

¹Mechanical Engineering Department, Esfarayen University of Technology, Esfarayen, North Khorasan, Iran

Mo.mohammadyan@gmail.com

How to cite this article

Mohammadian M. Application of the Modified Differential Transformation Method to Nonlinear Oscillations of a Magnetic Spherical Oscillator Considering the Damping Effect. Proceedings of the 6th National Conference on Mechanical-Civil Engineering and Advanced Technologies. 2024; 24(11):11-16.

ABSTRACT

In this paper, nonlinear oscillations of a charged spherical oscillator under a magnetic field are examined. The oscillator is under the influence of gravity and magnetic fields, and air resistance is considered a damping effect. Using the Hamiltonian principle, the two-dimensional equations of motion are extracted, and by considering a constant velocity in one dimension, they are transformed into a one-dimensional nonlinear equation. To obtain an analytical solution, the differential transform method (DTM) is employed. Due to the oscillatory nature of the problem, the solution obtained by the DTM is improved using the Padé approximation technique. The proposed method is then applied to the oscillator for various system parameters and initial conditions. The obtained results are compared with the numerical fourth-order Runge-Kutta method, and good agreement is observed. The proposed method is simple in implementation and provides a high level of accuracy. Hence, the method is suggested for the vibration analysis of nonlinear oscillators including damping effect.

Keywords Nonlinear Vibrations, Oscillator, Frequency, Approximate Analytical Method, Nonlinear Oscillations

ماهنامه علمی مهندسی مکانیک مدرس، ویژهنامه مجموعه مقالات ششمین کنفرانس ملی مهندسی مکانیک، عمران و فناوری‌های پیشرفته



بکارگیری روش تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته در بررسی نوسانات غیرخطی آونگ کروی مغناطیسی بادر نظرگرفتن اثر میرائی



چکیده

در این مقاله نوسانات غیرخطی نوسانگر آونگ کروی باردار قرارگرفته در یک میدان مغناطیسی بررسی می‌شود. نوسانگر تحت تاثیر میدان جاذبه و میدان مغناطیسی دارای حرکت نوسانی است و مقاومت هوا بعنوان یک کاهنده نوسانات در نظر گرفته شده است. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات دو بعدی حرکت استخراج شده و با در نظرگرفتن سرعت ثابت در یک بعد، تبدیل به یک معادله‌ی غیرخطی یک بعدی می‌شوند. برای ارائه یک حل تحلیلی مناسب برای معادله‌ی غیرخطی استخراج شده، از روش تبدیل دیفرانسیل استفاده می‌شود. به علت ماهیت نوسانی مسئله، حل به دست آمده با استفاده از روش تقریب پاد بهبود می‌یابد. روش پیشنهادی برای شرایط اولیه متفاوت و پارامترهای مختلف سیستم به کارگرفته شده و حل‌های به دست آمده با نتایج حل عددی رانج کوتای مرتبه‌ی ۴ مقایسه می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند حل‌های به دست آمده تطابق بسیار خوبی با نتایج حل عددی دارند. به کارگیری روش ارائه شده بسیار آسان بوده و مقایسه نتایج بیانگر دقت بسیار مناسب آن می‌باشد. از این رو، این روش برای بررسی ارتعاشات و نوسانات غیرخطی سایر سیستم‌ها با در نظرگرفتن اثر میرائی پیشنهاد می‌شود.

مشخصات مقاله

نویسنده‌ها

مصطفی محمدیان^۱

^۱ گروه مهندسی مکانیک، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، خراسان شمالی، ایران

* نویسنده مسئول

آدرس:

Mo.mohammadyan@gmail.com

کلیدواژه‌ها ارتعاشات غیرخطی، نوسانگر، فرکانس، روش تحلیلی تقریبی، نوسانات غیرخطی

۱- مقدمه

بررسی ارتعاشات در سازه‌ها و سیستم‌های مکانیکی یکی از موضوعات مهم و کاربردی در حوزه مهندسی است که به دلیل اهمیت آن مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. برای تحلیل مناسب معمولا ساختارهای پیچیده را با مدل‌های ساده‌تر معادل‌سازی می‌کنند. نوسانگر آونگ یکی از مدل‌های ساده‌ای است که برای تحلیل بسیاری از مسائل کاربردی در مهندسی استفاده می‌شود^[1,2]. تحلیل ارتعاشات در بسیاری از مسائل واقعی ماهیت غیرخطی دارند و مدل آونگ یک مدل بسیار مناسب برای تحلیل و ارزیابی روش‌های جدید ارائه شده برای تحلیل‌های غیرخطی نوسانگرها است. در ارتعاشات غیرخطی معمولا یافتن یک حل دقیق بسیار مشکل و در بسیاری از موارد غیرممکن است. از این رو، روش‌های متعددی توسط محققین برای مسائل مختلف ارائه شده است که از جمله‌ی مهمترین آن‌ها می‌توان به روش آشفتگی هموتویی^[3]، روش تکراری تغییراتی^[4]، روش تعادلی هارمونیک^[5]، روش همپلتونین^[6]، روش بیشینه-کمینه^[7] و روش تعادل انرژی^[8] اشاره کرد که هر کدام از این روش‌ها دارای مزایا و معایب مخصوص به خود هستند.

علاوه بر روش‌های فوق، روش‌های تحلیلی-عددی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسایل مختلف حوزه مکانیک و فیزیک نیز استفاده می‌شوند. یکی از این روش‌ها، روش تبدیل دیفرانسیل است. این روش برای اولین بار توسط ژو^[9] برای تحلیل و بررسی مدارهای الکتریکی در حالت یک‌بعدی پیشنهاد شد. در این روش، از بسط سری تیلور برای جواب معادلات دیفرانسیل به صورت یک چندجمله‌ای استفاده می‌شود. در روش سری تیلور برای محاسبه ضرایب سری، باید مشتقات مراتب بالاتر مختلف تابع را در یک نقطه‌ی معین به دست آورد که این محاسبات در مراتب بالا بسیار پرهزینه است. روش تبدیل دیفرانسیل یک فرآیند تکراری برای به دست آوردن جواب سری تیلور معادله‌ی دیفرانسیل مفروض است. در این روش مشتقات به صورت مستقیم محاسبه نمی‌شوند بلکه برای محاسبه مشتقات از یک فرآیند تکراری استفاده می‌شود. به همین دلیل، این روش حجم محاسبات را بسیار کاهش داده و بدون نیاز به خطی‌سازی، گسسته‌سازی و ایجاد آشفتگی در مساله، به جوابی قابل قبول با دقت بالا می‌رسد^[10].

شینگ و کوانگ^[11] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک تیر یکنواخت بر روی یک بستر غیرهمگن را بررسی کردند. نورآذر و میرزاییگی^[12] با استفاده از این روش حل‌های تقریبی تحلیلی را برای نوسانگر دافینگ با در نظر گرفتن اثر میرایی به دست آوردند. ابراهیمی و همکاران^[13] ارتعاشات نانو تیرهای با تغییرات تدریجی را با استفاده از نظریه غیرمحل و روش تبدیل دیفرانسیل بررسی کردند. شکراللهی و کاویان پور^[14] با

استاده از روش تبدیل دیفرانسیل ارتعاشات غیرخطی همراه با میرایی یک تیر یکسرگیردار را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از نتایج به دست آمده مدلی را برای شناسائی تیر یکسرگیردار که دارای رفتار غیرخطی است ارائه کردند. هامزا و همکاران^[15] براساس مدل تیر اویلر و شرایط مرزی دلخواه، ارتعاشات نانولوله‌های کربنی تک‌لایه در بستر الاستیک را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل تحلیل کردند. ارتعاشات آزاد تیر در حال چرخش با مرزهای الاستیک با استفاده از نظریه‌ی تیر تیموشنکو و در نظر گرفتن اثر نیروی کریولیس توسط هانگ و وانگ^[16] و با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل انجام شد. ژو و همکاران^[17] به بررسی وضعیت دینامیکی پره‌های توربین با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل پرداختند و نتایج خود را با نتایج عددی و تجربی مقایسه کردند. در این مقاله از روش تبدیل دیفرانسیل برای بررسی نوسان‌های غیرخطی یک آونگ کروی که تحت میدان‌های جاذبه و مغناطیسی است استفاده می‌شود. جهت بهبود حل به دست آمده، روشی پیشنهاد شده و در قالب چند مثال نتایج آن با نتایج عددی مقایسه می‌شود.

۲- بیان مسئله

شکل ۱ یک آونگ کروی مغناطیسی را به عنوان یک نوسانگر مکانیکی نشان می‌دهد. آونگ کروی دارای جرم m و بار الکتریکی q بوده که به یک میله‌ی تقریباً بدون وزن با طول l متصل شده و در نقطه‌ی ثابت O لولا شده است. آونگ با تاثیر همزمان جاذبه گرانش g و همچنین میدان مغناطیس B حرکت و نوسان می‌کند. بردار مکان آونگ به صورت زیر است:

$$\vec{r} = l \sin \theta \cos \phi \vec{i} + l \sin \theta \sin \phi \vec{j} - l \cos \theta \vec{k}. \quad (1)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی مکان نسبت به زمان، سرعت آونگ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v} = l(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \phi \sin \theta \sin \phi) \vec{i} + l(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \phi \sin \theta \cos \phi) \vec{j} + l \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}. \quad (2)$$

با داشتن سرعت آونگ، انرژی جنبشی آن به صورت زیر است:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta). \quad (3)$$

کار نیروی وزن به صورت زیر است:

$$W_{mg} = (-mg\vec{k}) \cdot (\vec{r}) = mgl \cos \theta. \quad (4)$$

علاوه بر نیروی وزن، نیروی وارد بر آونگ به دلیل حرکت در میدان مغناطیسی نیز کار انجام می‌دهد. نیروی وارد بر آونگ باردار به صورت زیر است:

لازم به ذکر است شکل بدون بعد معادله‌ی (۱۱) برای تحلیل مناسب‌تر است. با در نظر گرفتن تغییر متغیر بدون بعد زمان به صورت $\hat{t} = \sqrt{g/l}t$ زیر را داریم:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\hat{t}} \times \frac{d\hat{t}}{dt} = \sqrt{g/l} \Psi = \Psi, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = g/l \frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2},$$

$$\Omega = \hat{\Omega} \sqrt{g/l}, \quad \mu = \frac{k}{m} \sqrt{l/g}. \quad (12)$$

با جایگزینی روابط فوق در رابطه‌ی (۱۱)، شکل بدون بعد معادله‌ی حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2\theta}{d\hat{t}^2} + \mu \frac{d\theta}{d\hat{t}} \sin \theta - (\Psi^2 - 2\hat{\Omega}\Psi) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (13)$$

در ادامه برای راحتی بیشتر علامت « \wedge » را برداشته و مشتق نسبت به زمان \hat{t} با علامت « \cdot » روی متغیر نشان داده می‌شود. بنابراین معادله‌ی حرکت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} + \sin \theta - (\Psi^2 - 2\Omega\Psi) \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (14)$$

با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول بسط تیلور برای توابع مثلثاتی به صورت $\cos \theta \cong 1 - \theta^2/2$ و $\sin \theta \cong \theta - \theta^3/6$ و جایگزینی در رابطه‌ی فوق، معادله‌ی حرکت به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^3 + \alpha_3 \theta^5 = 0 \quad (15)$$

که در آن μ ضریب میرائی بدون بعد است، و ضرایب α_1 ، α_2 و α_3 مطابق روابط ذیل هستند:

$$\alpha_1 = 1 + \Psi(2\Omega - \Psi), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3}(2\Psi(2\Omega - \Psi) + \frac{1}{2}),$$

$$\alpha_3 = \frac{\Psi}{12}(2\Omega - \Psi) \quad (16)$$

در ادامه روش حل معادله‌ی غیرخطی (۱۵) برای شرایط اولیه $\theta(0) = A$ و $\dot{\theta}(0) = B$ ارائه می‌شود.

۳- روش تبدیل دیفرانسیل

در صورتی که تابع $\theta(t)$ در بازه‌ی G تحلیلی باشد، می‌توان آن را برحسب سری‌های توانی حول هر نقطه‌ی دلخواه از دامنه G نوشت. تبدیل دیفرانسیل تابع $\theta(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود^[9]:

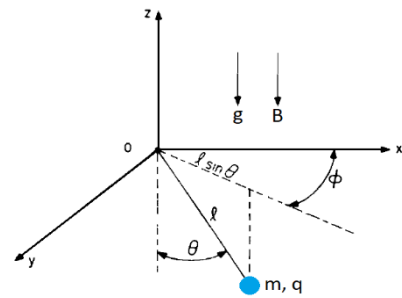
$$\Phi(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \theta(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (17)$$

که در رابطه‌ی فوق $\theta(t)$ و $\Phi(k)$ به ترتیب بیانگر توابع اصلی و تبدیل یافته هستند. تبدیل وارون تابع $\Phi(k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(k) t^k. \quad (18)$$

با ترکیب دو رابطه‌ی (۱۷) و (۱۸) رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \theta(t)}{dt^k} \right]_{t=0} t^k. \quad (19)$$



شکل ۱) آونگ کروی مغناطیسی و دستگاه مختصات مربوطه

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \times (-B\vec{k})$$

$$= -qB(v_y\vec{i} - v_x\vec{j}). \quad (5)$$

بنابراین کار نیروی مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$W_B = \vec{F}_B \cdot \vec{r} = -qB(v_y r_x - v_x r_y) = -qBl^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta. \quad (6)$$

با فرض این که نیروی مقاومت هوا فقط در جهت زاویه دوران θ موثر بوده و با توجه به سرعت کم آونگ، نیروی مقاوم هوا به صورت $F_{air} = kv$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین اندازه تغییرات کار این نیرو به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta W_{air} = -kv l \delta \theta = -kl^2 \dot{\theta} \delta \theta. \quad (7)$$

با استفاده از اصل همپلتون به صورت

$$\delta \int_0^t (K + W_{mg} + W_B + W_{air}) dt = 0, \quad (8)$$

معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta - \left(\dot{\phi}^2 - 2 \frac{qB}{m} \dot{\phi} \right) \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (9 \text{ الف})$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta - qBl^2 \sin^2 \theta) = 0. \quad (9 \text{ ب})$$

رابطه‌ی (۹ ب) نشان می‌دهد عبارت داخل پرانتز دارای مقداری ثابت است. بنابراین:

$$\dot{\phi} = \frac{C}{ml^2 \sin^2 \theta} + \frac{qB}{m}, \quad (10)$$

که در آن C مقدار ثابتی است که با توجه به شرایط اولیه مقدار آن به دست می‌آید. رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که سرعت زاویه‌ای در جهت دوران زاویه ϕ ثابت است. با در نظر گرفتن $\dot{\phi} = \Psi$ و $\Omega = qB/m$ رابطه‌ی (۸ الف) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta - (\Psi^2 - 2\Omega\Psi) \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (11)$$

رابطه‌ی (۲۲) در روابط (۲۳) الی (۲۵) جایگزین شده و به این ترتیب مقادیر $\Phi(2), \Phi(3), \Phi(4)$ و ... به صورت متوالی محاسبه می‌شوند. با جایگزینی این مقادیر در رابطه‌ی (۱۸)، تقریبی از تابع $\theta(t)$ به دست می‌آید. در ادامه روش فوق در قالب چند مثال برای شرایط اولیه و همچنین ضرائب متفاوت رابطه‌ی (۱۵) ارزیابی می‌شود.

۴-۱- ارائه چند مثال

مثال ۱. در مثال اول حرکت نوسانگر برای سرعت اولیه‌ی صفر، ضرایب غیرخطی بزرگ و میرائی کوچک بررسی می‌شود. در مثال اول ضرائب و شرایط اولیه به صورت $\mu = 0.1, \alpha_1 = 1, A = 0.2, B = 0, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 10$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از ضرائب فوق و روش ارائه شده در بخش ۳، تابع $\theta(t)$ با در نظر گرفتن هفت جمله‌ی اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta(t) = 0.2 - 0.1216t^2 + 0.0041t^3 + 0.0169t^4 - 0.00068t^5 - 0.0028t^6 + 0.000156t^7. \quad (26)$$

شکل ۲ نتایج حل به دست آمده در رابطه‌ی (۲۶) را با نتایج حل عددی رانج کوتای مرتبه‌ی ۴ مقایسه می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج رابطه‌ی (۲۶) فقط برای بازه‌ی نسبتاً کوچکی با حل عددی سازگار است. با این وجود می‌توان حل به دست آمده از روش تبدیل دیفرانسیل را بهبود داد. برای این کار، ابتدا از طرفین رابطه‌ی (۲۶) تبدیل لاپلاس گرفته که منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$L[\theta(t)] = \frac{0.2}{s} - \frac{0.2432}{s^3} + \frac{0.0246}{s^4} + \frac{0.4056}{s^5} - \frac{0.081472}{s^6} - \frac{2.016}{s^7} + \frac{0.78866}{s^8}. \quad (27)$$

در رابطه‌ی فوق ابتدا s با $1/t$ جایگزین می‌شود. سپس، تقریب پاد از مرتبه [4/4] گرفته شده و پس از جایگزینی t با $1/s$ رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{[4]}{[4]} = \frac{2s^3 + 0.6838s^2 + 24.8850s + 2.6481}{10s^4 + 3.1419s^3 + 136.5852s^2 + 16.168s + 145.3871}. \quad (28)$$

با گرفتن وارون تبدیل لاپلاس رابطه‌ی (۲۸) و در نظر گرفتن بخش حقیقی آن، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\theta(t) = (0.0009 \cos(3.529t) + 0.0001 \sin(3.529t))e^{-0.1171t} + (0.1991 \cos(1.079t) + 0.0097 \sin(1.079t))e^{-0.0539t}. \quad (29)$$

حل به دست آمده در رابطه‌ی (۲۹) در نمودار شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود حل تبدیل دیفرانسیل بهبود یافته (رابطه‌ی (۲۹)) برخلاف حل تبدیل دیفرانسیل (رابطه‌ی (۲۶)) برای بازه‌ی گسترده‌تری با نتایج حل عددی سازگاری دارد.

مثال ۲. در این مثال نوسانات غیرخطی آونگ مغناطیسی با در نظر گرفتن اثر میرائی بالا بررسی می‌شود. ضرائب و شرایط اولیه به صورت $A = 0.1, B = 0, \mu = 0.8, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 10$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از ضرائب فوق و روش ارائه شده در بخش

باید توجه شود که هنگام استفاده از رابطه‌ی (۱۹)، سری برای تعداد متناهی جمله به دست می‌آید. به عبارتی دیگر، تابع $\theta(t)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\theta(t) \approx \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \theta(t)}{dt^k} \right]_{t=0} t^k, \quad (20)$$

که در آن N بیانگر تعداد جملات در نظر گرفته شده برای سری است. برخی قواعد مربوط به تبدیل دیفرانسیل در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱) قواعد مربوط به روش تبدیل دیفرانسیل [17]

تابع اصلی	تابع تبدیل یافته
e^t	$\frac{1}{k!}$
$au(t) \pm \beta v(t)$	$aU(k) \pm \beta V(k)$
$\frac{d^m u(t)}{dt^m}$	$\frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)$
$u(t)v(t)w(t)$	$\sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} U(k_1)V(k_2-k_1)W(k-k_2)$
$g_1(t)g_2(t) \dots g_n(t)$	$\sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})G_n(k-k_{n-1})$

۴- کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل در نوسانات غیرخطی آونگ مغناطیسی

در این قسمت روش تبدیل دیفرانسیل را برای نوسانات غیرخطی آونگ کره‌ای مغناطیسی به کار گرفته می‌شود. ابتدا با توجه به قواعد تبدیل دیفرانسیل که در جدول ۱ ارائه شد، رابطه‌ی (۱۵) تبدیل به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$(k+2)(k+1)\Phi(k+2) + \mu(k+1)\Phi(k+1) + \alpha_1 \Phi(k) + \alpha_2 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \Phi(k_1)\Phi(k_2-k_1)\Phi(k-k_2) + \alpha_3 \sum_{k_4=0}^k \sum_{k_3=0}^{k_4} \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \Phi(k_1)\Phi(k_2-k_1)\Phi(k_3-k_2) \Phi(k_4-k_3)\Phi(k-k_4) = 0. \quad (31)$$

همچنین تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه $\theta(0) = A$ و $\dot{\theta}(0) = B$ به صورت زیر است:

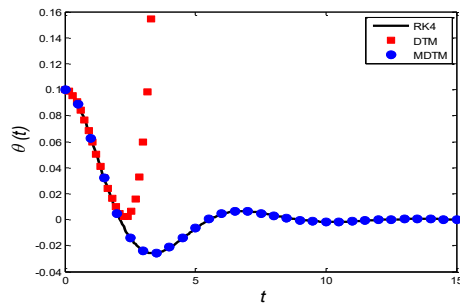
$$\Phi(0) = A, \quad \Phi(1) = B. \quad (32)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳۱) و مقادیر مختلف k ، روابط ذیل حاصل می‌شوند:

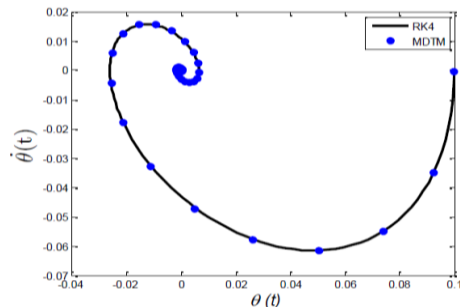
$$k = 0: 2\Phi(2) + \mu\Phi(1) + \alpha_1\Phi(0) + \alpha_2\Phi(0)^3 + \alpha_3\Phi(0)^5 = 0. \quad (33)$$

$$k = 1: 6\Phi(3) + 2\mu\Phi(2) + \alpha_1\Phi(1) + 3\alpha_2\Phi(0)^2\Phi(1) + 5\alpha_3\Phi(0)^4\Phi(1) = 0. \quad (34)$$

$$k = 2: 12\Phi(4) + 3\mu\Phi(3) + \alpha_1\Phi(2) + \alpha_2(3\Phi(0)^2\Phi(2) + 3\Phi(1)^2\Phi(0)) + \alpha_3(5\Phi(0)^4\Phi(2) + 10\Phi(0)^3\Phi(1)^2) = 0. \quad (35)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳ (الف) مقایسه حل‌های به‌دست آمده با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) و روش تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته (MDTM) با حل عددی رانج کوتای مرتبه‌ی ۴ (RK4)، (ب) مقایسه نتایج تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته و حل عددی در نمودار سرعت-مکان آونگ مثال ۲.

دیفرانسیل (رابطه‌ی (۳۰)) برای بازه گسترده‌تری با نتایج حل عددی سازگاری دارد.

مثال ۳. در این مثال نوسانات غیرخطی آونگ مغناطیسی با در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی غیرصفر بررسی می‌شود. در این حالت آونگ دارای سرعت اولیه است. ضرائب و شرایط اولیه به‌صورت، $A = -0.15$ ، $B = -0.2$ ، $\mu = 0.5$ ، $\alpha_1 = 1$ ، $\alpha_2 = 3$ ، $\alpha_3 = 5$ با استفاده از ضرائب فوق و روش ارائه شده در بخش ۳، تابع $\theta(t)$ با در نظر گرفتن هفت جمله‌ی اول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta(t) = -0.15 - 0.2t + 0.1303t^2 + 0.0188t^3 - 0.0105t^4 - 0.0024t^5 - 0.00085t^6 + 0.00090t^7. \quad (34)$$

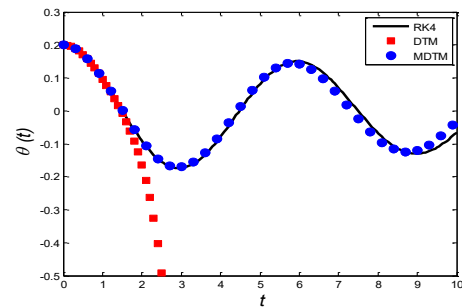
مشابه روش ارائه شده در دو مثال قبل، حل به‌دست آمده در رابطه‌ی فوق به‌صورت بهبودیافته زیر تبدیل می‌شود:

$$\theta(t) = -(0.151 \cos(1.028t) + 0.23 \sin(1.028t))e^{-0.2533t} + (0.001 \cos(3.453t) - 0.0005 \sin(3.453t))e^{-0.2196t}. \quad (35)$$

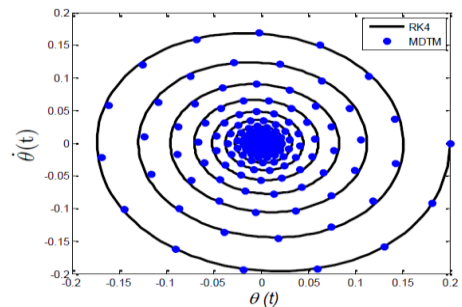
نتایج حل‌های به‌دست آمده در روابط (۳۴) و (۳۵) با نتایج عددی در نمودار نمودار شکل ۴ مقایسه می‌شوند. همانطور که دیده می‌شود حل تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته (رابطه‌ی (۳۷)) تطابق خوبی با نتایج حل عددی دارد.

۵- جمع‌بندی

در این مقاله معادلات حرکت یک آونگ کروی متصل به میله‌ی بدون وزن که تحت تأثیر میدان گرانش و میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد استخراج شد. اثر نیروی مقاوم هوا به عنوان یک



(الف)



(ب)

شکل ۲ (الف) مقایسه حل‌های به‌دست آمده با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) و روش تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته (MDTM) با حل عددی رانج کوتای مرتبه‌ی ۴ (RK4)، (ب) مقایسه نتایج تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته و حل عددی در نمودار سرعت-مکان آونگ مثال ۱.

۳، تابع $\theta(t)$ با در نظر گرفتن هفت جمله‌ی اول به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta(t) = 0.1 - 0.0526t^2 + 0.014t^3 + 0.0023t^4 - 0.0012t^5 - 0.000078t^6 + 0.000097t^7. \quad (30)$$

مانند مثال قبل، حل به‌دست آمده در رابطه‌ی (۳۰) بهبود می‌یابد. برای این کار، ابتدا از طرفین رابطه‌ی (۳۰) تبدیل لاپلاس گرفته که منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$L[\theta(t)] = \frac{0.1}{s} - \frac{0.1052}{s^3} + \frac{0.084}{s^4} + \frac{0.0552}{s^5} - \frac{0.144}{s^6} - \frac{0.05623}{s^7} + \frac{0.48994}{s^8}. \quad (31)$$

در رابطه‌ی فوق ابتدا s با $1/t$ جایگزین می‌شود. سپس، تقریب پاد از مرتبه [4/4] گرفته شده و پس از جایگزینی t با $1/s$ رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\left[\frac{4}{4} \right] = \frac{0.1s^3 + 0.23353s^2 + 1.10257s + 0.78836}{s^4 + 2.3353s^3 + 12.0777s^2 + 9.5s + 10.1921}. \quad (32)$$

با گرفتن وارون تبدیل لاپلاس رابطه‌ی (۳۲) و در نظر گرفتن بخش حقیقی آن، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\theta(t) = (0.00012 \cos(3.037t) + 0.0001 \sin(3.037t))e^{-0.7642t} + (0.09988 \cos(0.936t) + 0.0428 \sin(0.936t))e^{-0.4034t}. \quad (33)$$

نمودار شکل ۳ حل‌های به‌دست آمده در روابط (۳۰) و (۳۴) را با حل عددی مقایسه می‌کند. همانطور که دیده می‌شود حل تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته (رابطه‌ی (۳۳)) برخلاف حل تبدیل

4. Mohammadian M. Application of the variational iteration method to nonlinear vibrations of nanobeams induced by the van der Waals force under different boundary conditions. *The European Physical Journal Plus*. 2017;132(4):169.

5. Mohammadian M, Shariati M. Approximate analytical solutions to a conservative oscillator using global residue harmonic balance method. *Chinese Journal of Physics*. 2017;55(1):47-58.

6. Ismail G, Cveticanin L. Higher order Hamiltonian approach for solving doubly clamped beam type N/MEMS subjected to the van der Waals attraction. *Chinese Journal of Physics*. 2021;72:69-77.

7. Bayat M, Bayat M, Kia M, Ahmadi HR, Pakar I. Nonlinear frequency analysis of beams resting on elastic foundation using max-min approach. *Geomechanics & engineering*. 2018;16(4):355-61.

8. Koochi A, Goharimanesh M. Nonlinear oscillations of CNT nano-resonator based on nonlocal elasticity: The energy balance method. *Reports in Mechanical Engineering*. 2021;2(1):41-50.

9. Zhou J. *Differential transformation and its applications for electrical circuits*: Huazhong University Press, Wuhan, China; 1986.

10. Hesam S, Nazemi A, Haghbin A. Analytical solution for the Zakharov-Kuznetsov equations by differential transform method. *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*. 2011;5(3):496-501.

11. Ho SH, Chen CoK. Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform. *Applied Mathematical Modelling*. 1998;22(4-5):219-34.

12. Nourazar S, Mirzabeigy A. Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method. *Scientia Iranica*. 2013;20(2):364-8.

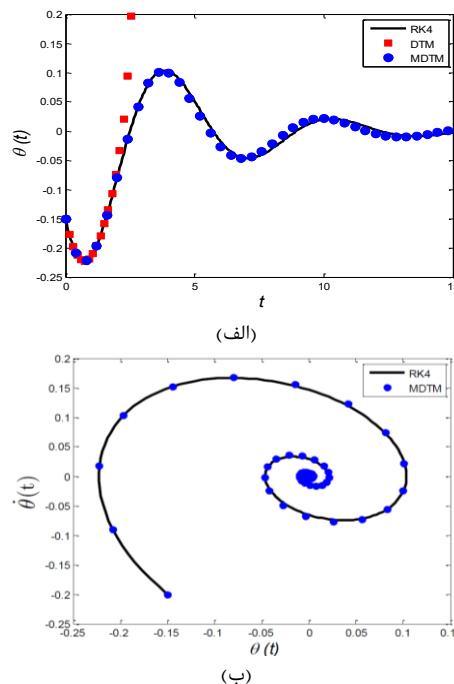
13. Ebrahimi F, Ghadiri M, Salari E, Hoseini SAH, Shaghaghi GR. Application of the differential transformation method for nonlocal vibration analysis of functionally graded nanobeams. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2015;29(3):1207-15.

14. Shokrollahi S, Kavyanpoor M. Nonlinear identification of cantilever beam using free vibration response decay and solving with differential transform method. *Modares Mechanical Engineering*. 2016;16(2):319-28. (In persian)

15. Hamza-Cherif R, Meradjah M, Zidour M, Tounsi A, Belmahi S, Bensattalah T. Vibration Analysis of Nano Beam Using Differential Transform Method Including Thermal Effect. *Journal of Nano Research*. 2018;54:1-14.

16. Xu H, Wang YQ. Differential Transformation Method for Free Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams with Elastic Boundary Conditions. *International Journal of Applied Mechanics*. 2022;14(05):2250046.

17. Zhou JW, Zhang W, Jiang X, Zhai ED. Investigation on dynamics of rotating wind turbine blade using transferred differential transformation method. *Renewable Energy*. 2022;188:96-113.



شکل ۴ (الف) مقایسه حل‌های به‌دست آمده با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) و روش تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته (MDTM) با حل عددی رانج کوتای مرتبه‌ی ۴ (RK4)، (ب) مقایسه نتایج تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته و حل عددی در نمودار سرعت-مکان آونگ مثال ۳.

عامل میراکننده‌ی ارتعاشات در نظر گرفته شد. با نوشتن انرژی جنبشی آونگ و کار میدان‌های خارجی، معادلات آونگ با به‌کارگیری اصل همپلتون به‌دست آمد. سپس با فرض سرعت ثابت، معادلات حرکت به یک معادله تبدیل و شکل بدون بعد آن استخراج شد. برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی-عددی نوسان آونگ، روش تبدیل دیفرانسیل استفاده شد. با ارائه‌ی چند مثال، روشی جهت بهبود حل تحلیلی-عددی به‌دست آمده پیشنهاد شد. مقایسه‌ی نتایج نشان داد حل به‌دست آمده از روش پیشنهادی تبدیل دیفرانسیل بهبودیافته به‌خوبی با نتایج عددی در بازه‌ی زمانی گسترده‌تری سازگاری دارد. بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند برای سایر نوسان‌گرهای غیرخطی همراه با میرائی مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

1. Freundlich J, Sado D. Dynamics of a coupled mechanical system containing a spherical pendulum and a fractional damper. *Meccanica*. 2020;55(12):2541-53.
2. Freundlich J, Sado D. Dynamics of a mechanical system with a spherical pendulum subjected to fractional damping: analytical analysis. *Nonlinear Dynamics*. 2023;111(9):7961-73.
3. He J-H, Jiao M-L, Gepreel KA, Khan Y. Homotopy perturbation method for strongly nonlinear oscillators. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023;204:243-58.