



## بررسی پیشروی آسیب در ورق‌های کامپوزیتی تحت بار خستگی خمشی

محمد خان محمدی<sup>1</sup>، عیسی احمدی<sup>2\*</sup>

1- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

\* زنجان، صندوق پستی 313-45195، i\_ahmadi@znu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 شهریور 1393

پذیرش: 18 آبان 1393

ارائه در سایت: 03 دی 1393

کلید واژگان:

ورق کامپوزیتی

بارخستگی خمشی

تئوری کاهش استحکام

عمر خستگی

### چکیده

در این تحقیق ورق کامپوزیتی تحت بار خستگی ناشی از بار خمشی با استفاده از تئوری کاهش استحکام مدل سازی شده و اثر زاویه الیاف و چینش لایه‌ها در عمر خستگی آن مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا خیز ورق تحت بار خمشی با استفاده از تئوری ناوبر برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده بدست آمده و توزیع تنش در لایه‌های کامپوزیت با استفاده از این حل استخراج شده است. سپس با استفاده از تئوری کاهش استحکام بروتمن و ساها، میزان کاهش استحکام و کاهش سفتی برای هر لایه در هر مرحله از بارگذاری، بدست آمده و مقادیر جدید بدست آمده برای استحکام و مدول هر لایه در سیکل بعدی بارگذاری مورد استفاده قرار گرفته است. این مراحل تکرار شده است تا سرانجام تک‌تک لایه‌ها در راستای الیاف و ماتریس شروع به خستگی و شکست نمایند. در این مرحله از تئوری قاعده کاهش ناگهانی برای مدل کردن شکست یک لایه از لایه‌های کامپوزیت استفاده شده است. در حل مسأله، فرایند شکست لایه‌ها تا زمان شکست ناگهانی کل ورق کامپوزیتی ادامه می‌یابد. با استفاده از این مدل میزان عمر خستگی تک‌تک لایه‌ها و اثرات شکست یک لایه بر رفتار لایه‌های دیگر تا رسیدن به شکست نهایی کل سازه مورد بررسی قرار گرفته است. در قسمت نتایج عددی عمر خستگی برای ورق کامپوزیتی از جنس کربن - اپوکسی با زوایای مختلف و چینش متفاوت لایه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده است.

## Progressive damage analysis of laminated composite plate subjected to bending fatigue

Mohammad Khanmohammadi, Isa Ahmadi\*

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

\* P.O.B. 313-45195, Zanjan, Iran, i\_ahmadi@znu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 30 August 2014  
Accepted 09 November 2014  
Available Online 26 December 2014

**Keywords:**  
Composite Plate  
Bending Fatigue Load  
Strength Degradation Theory  
Fatigue Life

### ABSTRACT

In this paper, a laminated composite plate that was subjected to bending fatigue load was modeled based on the strength degradation theory of the composites. Also, effects of the fiber directions in the layers and layer stacking on the fatigue life of the plate were studied. First, the governing equation of the laminate plate in bending was obtained by the Navier theory. Then, by solving the governing equation, the deflection and stresses in the plies of each layer were obtained. Finally, using the Brotman-Sahu strength degradation theory, reduction of strength and stiffness in each layer of the plate in each loading step was determined. The data obtained in each step were used to specify the data and material properties of the next solution step. This process was repeated until a fatigue failure in the fiber or matrix began in one or more layers. Using the sudden death theory and iteration of the solution process, the final fatigue life of symmetric laminates with various stacking and fiber direction was investigated. In the numerical results, the carbon/epoxy composite laminate with different layer stacking was studied.

### 1- مقدمه

کشش - کشش و کشش - فشار هستند که در آن، لایه‌های ماده مرکب تک-جنس و با الیاف هم‌جهت در معرض ایجاد و رشد یکسان آسیب قرار دارند. وضعیتی که در نوع بارگذاری خستگی خمشی کاملاً متفاوت بوده و در آن هر لایه، بنا به جایگاه قرارگیری خود در لایه‌چینی، حتی اگر لایه‌های ماده مرکب هم‌جنس و هم‌جهت باشند، شرایط خاص خود را خواهند داشت. بطوری که ممکن است نحوه شکست و خستگی در دو لایه‌ای که کاملاً از نظر ظاهر، شکل اولیه (از قبیل ابعاد، راستای الیاف) و همچنین شرایط اولیه با هم یکسان هستند، متفاوت باشد. به نحوی که ممکن است یک لایه، ابتدا در راستای الیاف و سپس در راستای ماتریس شکسته شود. درحالی که در لایه

در میان انواع شرایط بارگذاری ممکن بر روی سازه‌های تهیه شده از مواد مرکب، بارگذاری خستگی یکی از مهمترین آنهاست. اگرچه خستگی مواد مرکب مدتهاست که مورد بررسی قرار می‌گیرد، اما هنوز این تحقیقات برای ارزیابی عمر خستگی و رفتار خستگی در تمام شرایط کافی نیست و به بررسی بیشتر فرایندها و عوامل مؤثر بر آنها نیاز است. در بیشتر روش‌های معرفی شده برای بررسی رفتار خستگی مواد کامپوزیت، لازم است آزمایش‌های فراوانی صورت پذیرد. رایج‌ترین نوع این آزمایش‌ها، آزمایش‌های خستگی

Please cite this article using:

M. Khanmohammadi, I. Ahmadi, Progressive damage analysis of laminated composite plate subjected to bending fatigue, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 72-80, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

رابطه ارائه شده توسط شکرپه و لسارد یک رابطه دقیق و نسبتاً کاملی است اما تنها مسأله مورد توجه در این رابطه بدست آوردن ضرایب  $\beta$  و  $\alpha$  است که تا حدودی مشکل ایجاد می‌کند، چراکه این ضرایب از طریق آزمایش‌های تجربی بدست می‌آید و لذا برای انواع مواد این پارامترها وجود نداشته و در آن صورت می‌بایست برای این قبیل مواد آزمایش‌های تجربی انجام پذیرد که نیازمند صرف هزینه و زمان زیادی خواهد بود. بر همین اساس پژوهشگران در مطالعات خود به دنبال ارائه روابطی گشتند تا ضمن آنکه جواب مسأله تا حد قابل قبولی دقیق و درست باشد، نیاز کمتری به پارامترهای تجربی و غیره داشته باشد. به همین منظور ساها و بروتمن<sup>5</sup> رابطه‌ای مشابه با رابطه ارائه شده توسط شکرپه و لسارد، با این تفاوت که در آن اثری از ضرایب  $\beta$  و  $\alpha$  وجود نداشته و شکل ساده شده‌ای از آن تئوری می‌باشد، ارائه نمودند [9].

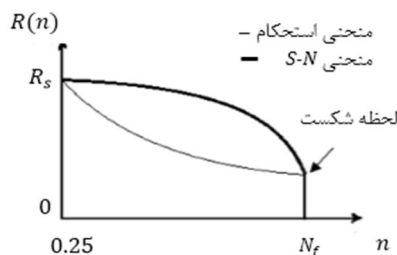
هرچند رابطه ارائه شده توسط ساها و بروتمن دقت رابطه شکرپه و لسارد را ندارد، اما به دلیل فراگیری و راحتی محاسبه برای تمامی مواد، مورد استقبال بیشتری قرار گرفته و نیز از دقت قابل قبولی برای اکثر مواد برخوردار است. به همین منظور در این مقاله به علت در دسترس نداشتن ضرایب  $\beta$  و  $\alpha$  برای جنس ورق انتخاب شده و نیز سادگی و دقت قابل قبول تئوری ساها و بروتمن، برای محاسبه کاهش استحکام از تئوری فوق استفاده شده است که در ادامه در قسمت حل مسأله توضیحات بیشتر در رابطه با این تئوری داده شده است. همچنین جنس ورق مورد بررسی در این تحقیق از نوع کربن-اپوکسی (AS/3501-5A) است که در جدول 1 خواص اولیه این ماده نشان داده شده است [10].

## 2- تعریف مسأله

مسأله مورد بحث در این مقاله، در حالت کلی بررسی یک ورق کامپوزیتی تحت بارگذاری متناوب خمشی است که منجر به خستگی ورق شده و در ادامه اثر ترتیب چینش لایه‌ها بر رفتار خستگی ورق مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه فرض شده است که ورق توسط تکیه‌گاه ساده در هر ضلع مهار شده است. در شکل 2 ورق و نوع بارگذاری به طور شماتیک نشان داده شده است.

## 2-1- هدف مسأله

هدف از انجام این پژوهش، محاسبه عمر خستگی یک ورق کامپوزیتی تحت بار خستگی ناشی از خمش و بررسی اثر چیدمان‌های مختلف با زوایای متفاوت در رفتار خستگی ورق کامپوزیتی تحت بار خستگی خمشی است.



شکل 1 نمودار تعیین نقطه شکست به وسیله مدل کاهش استحکام، در ورق تک‌جهته تحت بارگذاری خمشی

بعدی با همان شرایط و فقط تفاوت در جایگاه قرارگیری در لایه، نحوه شکست کاملاً بر عکس حالت قبلی باشد، یعنی لایه بعدی ابتدا در راستای ماتریس و سپس در راستای الیاف شکسته شود.

در اثر بارگذاری خمشی بر روی ورق کامپوزیتی، میدان تنش در راستای ضخامت لایه‌چینی به خاطر موقعیت هندسی لایه نسبت به تارخنی و خواص مکانیکی آن متغیر خواهد بود. بنابراین لایه‌ها با تقدم و تأخر خاصی نسبت به هم دچار شکست و واماندگی می‌شوند. لذا به منظور محاسبه تنش و کاهش استحکام و نیز بهره‌گیری از تئوری کاهش ناگهانی خواص، تعیین ترتیب شکست لایه‌ها و راستای شکست آنها حائز اهمیت است.

بررسی تاریخیچه کارهای انجام‌شده در رابطه با رفتار خمشی مواد مرکب نشان می‌دهد که این ویژگی، به میزان کمتری مورد مطالعه قرار گرفته است. بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه، بیشتر صرف گسترش بعضی از مدل‌های خستگی به وضعیت پیچیده‌تر خمشی شده است. تحقیق رفتار خمشی مواد مرکب تحت بارگذاری استاتیک که بسیار ساده‌تر از بارگذاری خستگی است نیز همچنان ادامه دارد. در ادامه چند نمونه از مهمترین تئوری‌های ارائه شده در این رابطه بیان شده است.

کاربرا<sup>1</sup> و همکاران، خمش مواد مرکب و صفحات ساندویچی تحت بارهای عرضی را با مقایسه بین نتایج حاصل از انواع تئوری‌ها به انجام رساندند [1]. پرهی<sup>2</sup> و همکاران، رفتار صفحات مرکب تحت خمش و ضربه را با در نظر گرفتن جدایش لایه‌ها بررسی نمودند. تحلیل انجام شده توسط آنها بر مبنای اولین واماندگی لایه‌ای و با قرار دادن جدایش در نقاط دلخواه انجام گردید. آنها همچنین در ادامه با تغییر اندازه و تعداد جدایش لایه‌ها، بر روی نتایج حاصل از اولین واماندگی لایه‌ای بحث کردند [2].

همچنین شکرپه-لسارد<sup>3</sup> و شکرپه-طاهری نیز رابطه‌ای به منظور محاسبه کاهش استحکام ارائه نمودند که نسبت به روابط و تئوری‌های پیشین خود بسیار کامل‌تر بوده و نتایج حاصل از آن قابل قبول می‌باشد [3-8]. به همین جهت این رابطه به منظور محاسبه کاهش استحکام بسیار مورد توجه قرار گرفت (رابطه 1).

$$R(n, \sigma, k) = \left[ 1 - \left( \frac{\log(n) - \log(.25)}{\log(N) - \log(.25)} \right)^\beta \right]^\alpha (R_s - \sigma) + \sigma \quad (1)$$

که در آن  $R(n, \sigma, k)$ : استحکام پسماند،  $R_s$ : استحکام استاتیک،  $\sigma$ : اندازه ماکزیمم تنش اعمالی،  $n$ : شماره سیکل طی شده،  $N$ : تعداد سیکل خستگی ماده مرکب تحت بار  $\beta$  و  $\alpha$ : پارامترهای تجربی مستقل از تنش در ترسیم منحنی  $R(n, \sigma, k)$  بر حسب تغییرات سیکل نرمال شده هستند. در تئوری ارائه شده توسط آنها، با افزایش شمار سیکل‌ها، تحت تنش اعمال شده ثابت  $(\sigma)$ ، استحکام خستگی ( $R_n$ ) کاهش می‌یابد. سرانجام پس از تعداد خاصی از سیکل بارگذاری که تعداد سیکل شکست نامیده می‌شود، استحکام کاهش‌یافته به مقدار حاصل شده از منحنی تنش - بر حسب سیکل طی شده<sup>4</sup> مربوط به خود می‌رسد. در این نقطه ورق کامپوزیتی دچار شکست فاجعه‌بار (نهایی) می‌شود و عمر خستگی در آن لایه مربوطه به اتمام می‌رسد. در شکل 1 نحوه شکست لایه توسط برخورد دو منحنی استحکام کاهش‌یافته با منحنی تنش - بر حسب سیکل طی شده، در لایه تک‌جهته نمایش داده شده است.

1- Carrera  
2- Parhi  
3- Shokrieh & Lessard  
4- S-N Curve

افزایش یافته است تا در کمترین زمان، دقیق‌ترین پاسخ بدست آید و این موضوع خود یکی از مهم‌ترین نوآوری‌های این پژوهش است.

### 2-2-1- فرمول بندی ناویر

در معادله (2) رابطه مربوط به خیز ورق ناشی از خستگی خمشی با فرض تئوری کلاسیک ورق‌ها ( $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ )، و نیز با در نظر گرفتن ساختار متقارن ( $B_{ij} = 0$ ) برای ورق و همچنین بدون در نظر گرفتن اثر تغییرات دما و رطوبت، نشان داده شده است [11,12].

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad (2)$$

که در آن ترم‌های سفتی خمشی بصورت رابطه (3) تعریف می‌شود [13].

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (3)$$

در رابطه فوق  $[\bar{Q}]$  ماتریس سفتی لایه  $k$  ام است و جزییات مربوط به محاسبه آن در پیوست اشاره شده است.

### 2-2-2- شرایط مرزی

در این مقاله، شرط مرزی ورق بصورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است.

برای تکیه‌گاه ساده در روی مرزهای ورق باید روابط زیر ارضا شود و در آن راستای عمود بر سطح مرز است.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \quad (4)$$

### 2-2-3- بارگذاری مکانیکی

در حل این مسئله بار یکنواخت و گسترده که بصورت متناوب با زمان تغییر می‌کند، بر سطح ورق اعمال شده است و با رابطه (5) نشان داده شده است.

$$P(x, y) = P_0 \sin(\omega t) \quad (5)$$

### 2-2-4- تئوری محاسبه خیز

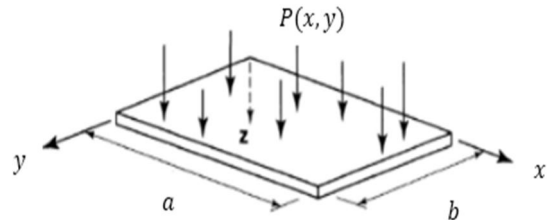
با توجه به نوع شرط مرزی، جواب رابطه (2) بصورت یک سری قابل محاسبه است. برای این منظور دامنه خیز ورق و دامنه بار اعمال شده،  $P_0$ ، بصورت بسط سری فوریه سینوسی در نظر گرفته می‌شود (روابط 6 و 7).

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

با جاگذاری روابط فوق در معادله خیز ورق و با فرض اینکه در حالت بار-گسترده یکنواخت،  $P(x, y) = P_0$  بوده و نیز با فرض اینکه لایه‌ها کاملاً به هم چسبیده هستند و در تئوری کلاسیک ( $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ ) می‌باشد، تنش‌های واقع در در مرکز ورق از رابطه زیر بدست خواهند آمد [11,12].

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{16P_0 z}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mnD} \times \begin{pmatrix} \left[ -\bar{Q}_{11}^k \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \bar{Q}_{12}^k \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \left[ -\bar{Q}_{12}^k \left(\frac{m}{a}\right)^2 - \bar{Q}_{22}^k \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \left[ 2\bar{Q}_{66}^k \left(\frac{m}{a}\right) \left(\frac{n}{b}\right) \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{pmatrix} \quad (8)$$



شکل 2 ورق کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده در چهار طرف

در ادامه اثر ترتیب چینش لایه‌ها در عمر خستگی یک ورق کامپوزیتی تحت بار خستگی خمشی مورد بررسی قرار گرفته است.

### 2-2-2- روند حل مسأله

برای حل مسأله ابتدا باید تنش‌ها را در هر لایه از ورق کامپوزیتی که تحت بارگذاری خمشی است، بر حسب میزان بار اعمال شده، خواص مکانیکی و شرط تکیه‌گاهی، محاسبه کرد. به همین منظور نیازمند داشتن معادله خیز ورق بوده تا توسط آن کرنش و تنش در هر لایه محاسبه شود.

برای محاسبه خیز یک ورق، تئوری‌های مختلفی از قبیل تئوری لوی، ناویر و حل تبدیلی وجود دارد که هر کدام از این تئوری‌ها برای مسائل مختلف قابل استفاده بوده و نسبت به یکدیگر معایب و مزایایی دارند. از آنجا که مسأله مورد نظر در این مقاله حل یک ورق تحت تکیه‌گاه ساده است، لذا بهترین تئوری قابل استفاده برای حل مسأله، استفاده از تئوری ناویر است که اساس این تئوری بر پایه شرط تکیه‌گاه ساده در هر چهار طرف ورق می‌باشد. برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده این حل منجر به جوابی بصورت سری خواهد شد.

در مسأله مدل‌سازی خستگی با مدل کاهش خواص که در این پژوهش استفاده شده است، به علت اینکه در فرایند بارگذاری، با گذشت زمان و افزایش تعداد سیکل‌ها، خواص لایه‌های مختلف کامپوزیت تغییر می‌کنند، لذا در حین حل مسأله در هر مرتبه از بارگذاری مقداری از میزان سفتی و استحکام اولیه ماده کاهش یافته و لذا این میزان کاهش باید در سیکل بعدی بارگذاری اعمال شود بطوری که در هر سیکل بارگذاری از اطلاعات بدست آمده از سیکل قبلی استفاده خواهد شد تا در نهایت با کاهش این خواص، هر یک از لایه‌ها در راستای الیاف و یا ماتریس شروع به شکسته شدن خواهند کرد و این شکست منجر خواهد شد تا نمودار کاهش استحکام با شیب تندتری کاهش یافته و در هر مرحله از شکست از تئوری قاعده کاهش خواص ناگهانی که در ادامه به طور مختصر بیان شده است، استفاده خواهد شد تا در نهایت کل لایه‌ها شکسته خواهند شد و عمر خستگی ورق به پایان خواهد رسید.

اما از آنجا که روند حل مسأله خستگی طولانی است و برای رسیدن به خستگی نهایی می‌بایست چند هزار سیکل طی شود، لذا استفاده از روش‌های تحلیلی به تنهایی قادر به حل مسأله نخواهد بود و یا بسیار زمان‌بر خواهد بود. همچنین استفاده از روش حل عددی مثل روش المان محدود با تعداد حل بسیار زیاد و با خواص متفاوت نیز زمان‌بر بوده و زمان حل مسأله را بسیار افزایش داده و حجم کار بسیار زیاد خواهد شد. لذا در این پژوهش با تلفیقی از روش حل تحلیلی و کدنویسی در نرم‌افزار مت‌لب<sup>1</sup>، مسأله مورد نظر ضمن آن که به دلیل استفاده از روابط تحلیلی بسیار دقیق حل شده است، به دلیل کدنویسی در نرم‌افزار ذکر شده، سرعت حل نیز به میزان قابل ملاحظه‌ای

1- Matlab Software

$$D = D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \quad (9)$$

### 2-2-5- محاسبه کاهش استحکام و سفتی

پس از آنکه تنش‌های موجود در هر لایه محاسبه شد، در گام بعدی باید با استفاده از یکی از تئوری‌های موجود در رابطه با کاهش استحکام و سفتی، که در این پژوهش از تئوری ساها و بروتمن استفاده شده است، تنش‌های محاسبه شده در هر لایه را در این تئوری جاگذاری کرده تا میزان کاهش استحکام و سفتی بدست آید. در واقع این مرحله از حل مسأله، مرحله ماقبل نهایی است. چرا که پس از محاسبه کاهش استحکام و سفتی، سیکل خستگی دوباره از مرحله اول، اما این بار با استفاده از نتایج بدست آمده از مرحله قبل، تکرار شده تا زمانی که این کاهش به میزانی برسد که منحنی تجربی تنش - بر حسب سیکل طی شده را قطع نماید که در این صورت نقطه برخورد منحنی کاهش استحکام و منحنی تنش - بر حسب سیکل طی شده میزان عمر خستگی قطعه را در راستای موردنظر نشان خواهد داد. روابط کاهش استحکام و مدول که توسط بروتمن و ساها بدست آمده با روابط (10، 11) نشان داده شده است [9، 14].

$$R = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right) (R_0 - \sigma) + \sigma \quad (10)$$

$$E = \left(1 - \frac{n}{N_f}\right) \left(E_0 - \frac{\sigma}{E_f}\right) + \frac{\sigma}{E_f} \quad (11)$$

در روابط فوق  $R$  میزان استحکام کاهش یافته و  $E$  میزان سفتی کاهش یافته در هر سیکل از بارگذاری،  $n$  شماره سیکل،  $N$  تعداد سیکل خستگی،  $R_0$  استحکام استاتیکی،  $E_0$  مدول استاتیکی،  $E_f$  متوسط کرنش لحظه واماندگی و  $\sigma$  تنش است.

روابط فوق با فرض اینکه تنش در طول حل مسأله ثابت است، قابل استفاده هستند. اما از آنجا که در طول حل مسأله این پژوهش تنش همواره در حال تغییر است، لذا برای ثابت فرض نمودن تنش، باید از مشتق روابط (10) و (11) نسبت به دو پارامتر تنش و تعداد سیکل، استفاده کرد که شکل نهایی آنها پس از مشتق گیری به صورت روابط (12، 13) خواهد بود.

$$R(n) = R(n-1) + \left[-\frac{1}{N_f} (R_0 - \sigma)\right] \quad (12)$$

$$E(n) = E(n-1) + \left[-\frac{1}{N_f} \left(E_0 - \frac{\sigma}{E_f}\right)\right] \quad (13)$$

روابط فوق به خوبی نشان می‌دهد که میزان کاهش استحکام و سفتی در هر سیکل بارگذاری، به میزان استحکام و سفتی باقی مانده در مرحله بعدی وابسته است.

### 2-2-6- محاسبه عمر خستگی نهایی

این مرحله که در واقع آخرین مرحله حل مسأله می‌باشد، عمر نهایی نمونه را تخمین خواهد زد. همان طور که در قسمت قبل اشاره شد، با محاسبه عمر خستگی در هر لایه و در دو راستای الیاف و ماتریس، فرایند بارگذاری مجدد ادامه پیدا خواهد کرد تا زمانی که یک لایه در راستای الیاف یا ماتریس خود شروع به خستگی و شکستن نماید که در این صورت در این مرحله با استفاده از تئوری مربوط به قاعده کاهش ناگهانی، خواص مربوط به آن لایه کاهش یافته و خواص جدید کاهش یافته شده جایگزین خواص قبلی خواهد شد. پس از جایگزینی خواص دوباره فرایند بارگذاری شروع شده تا سرانجام تک- تک لایه‌ها شکسته شوند که در این صورت در اثر شکست آخرین لایه عمر خستگی نهایی نمونه محاسبه خواهد شد. در ادامه تئوری قاعده کاهش

ناگهانی به طور خلاصه بیان شده است.

### 2-2-6-1- تئوری قاعده کاهش ناگهانی

هنگامی که شکست در لایه‌های ورق کامپوزیتی رخ می‌دهد، خواص لایه‌ای که دچار شکست شده، با استفاده از تئوری قاعده کاهش ناگهانی تغییر می‌کند. به طوری که شکست در برخی راستاها، به عنوان مد شکست فاجعه‌بار نامگذاری شده که در این صورت، تمام خواص آن لایه صفر در نظر گرفته می‌شود. اما برخی از مدهای شکست از جمله مدهایی که مربوط به شکست ماتریس یا شکست برشی باشند، فاجعه بار نبوده و در آنها تنها برخی از خواص لایه صفر در نظر گرفته خواهد شد که در پژوهش به دلیل جلوگیری از ناپایداری عددی در اجرای برنامه، یک مقدار بسیار کوچک نزدیک به صفر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه مدهای شکست به طور خلاصه بیان شده است [15].

- کاهش خواص الیاف:

مد شکست یک ورق در راستای الیاف، مد شکست نهایی (فاجعه‌بار) است. زمانی که مواد دچار شکست در راستای الیاف شده باشند، در این صورت نمی‌توانند هر نوع ترکیبی از تنش را تحمل کنند، بنابراین این خواص مواد کاهش پیدا کرده و به صفر می‌رسد. که در رابطه (14) نشان داده شده است.

$$[E_{xx}, E_{yy}, E_{xy}, v_{xy}, v_{yx}, X, Y, S_{xy}] \rightarrow [0] \quad (14)$$

همان طور که ذکر شد این مد شکست فاجعه‌بار بوده و اگر این اتفاق بیفتد، نیازی به تعیین دیگر مدهای شکست نیست. در محاسبات کامپیوتری کاهش خواص و رسیدن به مقدار صفر باعث ناپایداری عددی می‌شود. برای جلوگیری از این مشکل خواص مواد به مقادیر بسیار کوچکی نزدیک به صفر کاهش می‌یابد.

- کاهش خواص برشی الیاف و ماتریس:

مد برشی ماتریس و الیاف یک لایه تک‌جهته، می‌تواند بار را در راستای الیاف و ماتریس در جهت عمود تحمل کند؛ اما در صفحه تنش برشی این تنش قابل تحمل نیست. این مد شکست در قاعده کاهش ناگهانی به صورت رابطه (15) تعریف می‌شود:

$$[E_{xy}, v_{xy}, v_{yx}, S_{xy}] \rightarrow [0] \quad (15)$$

- کاهش خواص ماتریس:

این مد شکست فاجعه‌بار نبوده و در صورت شکست در این راستا، ماده قادر خواهد بود در راستای الیاف بار تحمل نماید و تنها برخی از پارامترها در اثر شکست در این راستا صفر در نظر گرفته می‌شوند که با رابطه (16) نشان داده شده است:

$$[E_{yy}, v_{yz}, v_{yx}, Y_t] \rightarrow [0] \quad (16)$$

### 3- داده‌های مسأله

همان گونه که در بخش مقدمه اشاره شد، جنس ورق کامپوزیتی مورد استفاده در این پژوهش از نوع کربن اپوکسی (AS/3501-5A) با  $V_f = 0.7$  است. در جدول 1 خواص اولیه مربوط به این ماده بیان شده است [10].

ابعاد ورق  $300 \times 300 \text{ mm}$ ، ضخامت هر لایه  $0.5 \text{ mm}$  و میزان فشار اولیه  $0/2$  استحکام نهایی است.

همچنین زوایای مورد نظر (0، 30، 45) درجه هستند که به صورت 5 لایه متقارن اما با آرایش‌های مختلف در چیدمان لایه، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

جدول 1 خواص اولیه مربوط به کربن-اپوکسی (AS/3501 - 5A) [10]

$E_x$ (GPa)	$E_y$ (GPa)	$G_{xy}$ (GPa)	$\nu_{xy}$	$(\sigma_x^t)_{ult}$ (MPa)	$(\sigma_y^t)_{ult}$ (MPa)	$(\sigma_{xy}^t)_{ult}$ (MPa)	$(\sigma_x^c)_{ult}$ (MPa)	$(\sigma_y^c)_{ult}$ (MPa)	$(\sigma_{xy}^c)_{ult}$ (MPa)	زاویه (درجه)
137	9/6	5/24	0/3	1836	1836	56/9	207	93	93	0
28	13	6/4	0/23	129	400	70	230	93	93	30
18	18	7/1	0/18	94	260	211	260	93	93	45
9/6	137	5/24	0/025	56/9	207	1836	1836	93	93	90

#### 4- نتایج و تشریح

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از عمر خستگی سه نوع چیدمان مختلف با زوایای (0, 30, 45) درخواه شد. در هر سه نوع چیدمان، خواص اولیه از قبیل سفتی، استحکام نهایی و نوع بارگذاری آنها مشابه هم است. همچنین در هر یک از نمونه‌ها روند شکست تک‌تک لایه‌ها در راستای الیاف و ماتریس و ترتیب شکست آنها مورد بررسی و در نمودارهای مجزا نشان داده شده است. توضیحات بیشتر در رابطه با هر نمونه در ادامه و در بخش مربوط به نتایج آن نمونه، شرح داده شده است.

پیش از ارائه نتایج به منظور بررسی درستی و صحت نتایج حاصل شده از طریق محاسبات تحلیلی و عددی با نتایج تجربی، نمونه زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

#### 4-1- صحت‌سنجی نتایج

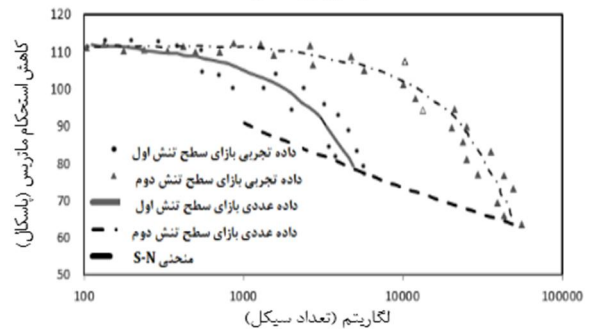
ورق کامپوزیتی 4 لایه متقارن با لایه چینی  $\pm 45^\circ$  در نظر گرفته شده است. در صورتی که ابعاد ورق  $250 \times 25$  mm و ضخامت هر لایه از ورق برابر  $0/152$  mm باشد، منحنی مربوط به کاهش استحکام و محاسبه عمر خستگی با استفاده از نتایج بدست آمده از حل عددی و نتایج تجربی موجود در مرجع بازای دو سطح تنش 80% و 50% استحکام نهایی برای شیشه اپوکسی با خصوصیات بیان شده در جدول 2 در شکل 3 با یکدیگر مقایسه شده است [4].

همان‌گونه که از مقایسه نتایج موجود در شکل 3 مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده با دقت قابل قبولی به نتایج تجربی نزدیک است. لذا می‌توان به درستی نتایج در بخش بعدی اطمینان کرد.

جدول 2 خواص اولیه شیشه اپوکسی

$E_{11}=38$ GPa	$E_{22}=8.2$ GPa	$G_{12}=4.14$ GPa
$\nu_{12}=0.26$	$\sigma_{ult}^1=1062$ MPa	$\sigma_{ult}^2=110$ MPa

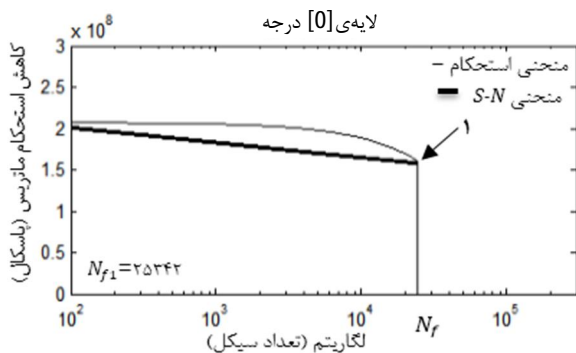
لایه اول  $\pm 45^\circ$



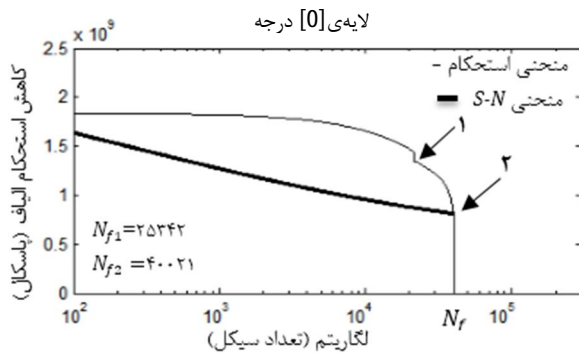
شکل 3 نمودار صحت‌سنجی نتایج حل بدست آمده از روش عددی با استفاده از تئوری ساها و بروتمن با نتایج تجربی موجود در مرجع برای نمونه  $\pm 45^\circ$

#### 4-2- نمونه $30/45/0$

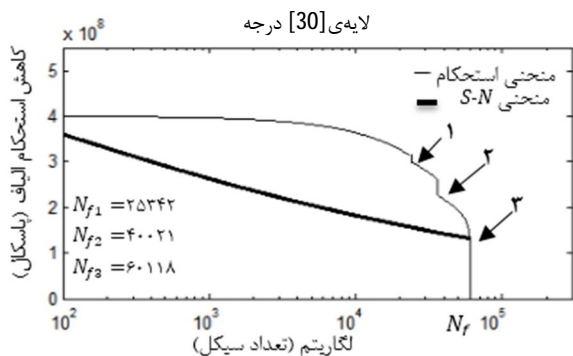
در شکل‌های 4 تا 9 نمودارهای مربوط به کاهش استحکام نمونه  $30/45/0$  که از یک چیدمان متقارن 5 لایه با زوایای (0, 30, 45) ساخته شده، در دو راستای الیاف و ماتریس نشان داده شده است.



شکل 4 نمودار اولین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $30/45/0$



شکل 5 نمودار دومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $30/45/0$



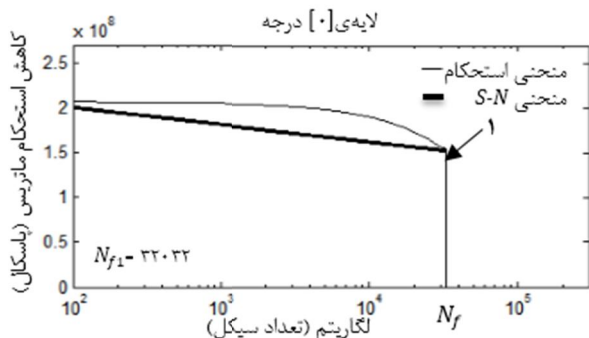
شکل 6 نمودار سومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $30/45/0$

طور کامل شکسته شد و عمر خستگی آن به پایان رسید، این بار لایه بالایی نمونه که همان لایه 30 درجه است، در راستای الیاف شروع به شکسته شدن می‌نماید و همین امر سبب خواهد شد تا طبق تئوری قاعده کاهش ناگهانی، کل خواص مربوط به این لایه پس از شکست در راستای الیاف عددی نزدیک به صفر در نظر گرفته شود. که این نقاط با شماره‌های 3 و 4 در شکل 6 و 7 نامگذاری شده است.

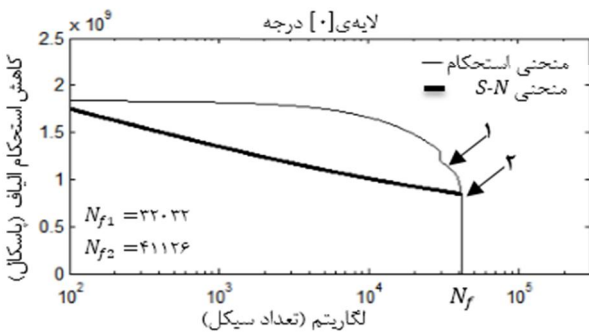
در آخر، لایه 45 درجه به عنوان آخرین لایه، همچون لایه 30 درجه، ابتدا در راستای الیاف شکسته می‌شود و در این لایه نیز طبق قاعده کاهش خواص، کل خواص مربوط به این لایه نزدیک به صفر در نظر گرفته شده و در نهایت عمر خستگی نهایی در نقطه 6 بدست خواهد آمد که در شکل 9 به خوبی نشان داده شده است. همچنین به منظور جلوگیری از ناپایداری عددی در محاسبه تخریب نهایی چند سیکل قبل تر از نقطه شکست، برنامه متوقف شده است. و برای اجرای این حالت در کد عددی نوشته شده بیان شده که در صورتی که میزان نتایج حاصل از منحنی S-N نسبت به نتایج حاصل شده از منحنی کاهش استحکام که محل برخورد این دو منحنی جواب مسأله است، به اندازه کمی نزدیک به 4 فاصله بود برنامه متوقف شود. همچنین روابط مربوط به نمودارهای S-N رای لایه صفر درجه در راستای الیاف،  $N^{0.0786}$  و  $N^{0.0420}$  201 است. برای لایه 30 درجه در راستای الیاف،  $N^{0.1115}$  351 و در راستای ماتریس،  $N^{0.1062}$  201 می‌باشد. همچنین برای لایه 45 درجه در راستای الیاف،  $N^{0.1250}$  238 در راستای ماتریس،  $N^{0.1250}$  188 است [10].

3-4- نمونه [30/0/45]

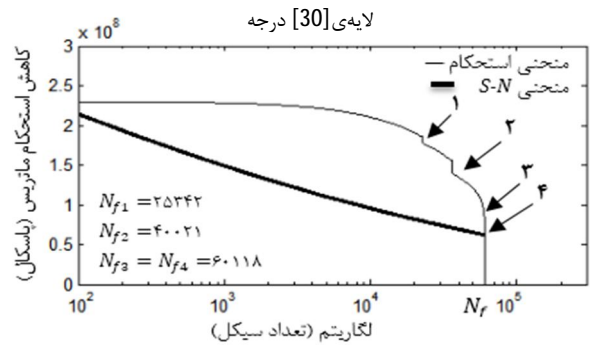
در این نمونه، تنها ترتیب چینش لایه‌ها نسبت به نمونه قبل تغییر کرده و در ادامه همچون نمونه قبل، نمودارهای مربوط به کاهش استحکام برای هر لایه در شکل‌های 10 تا 15 نشان داده شده است.



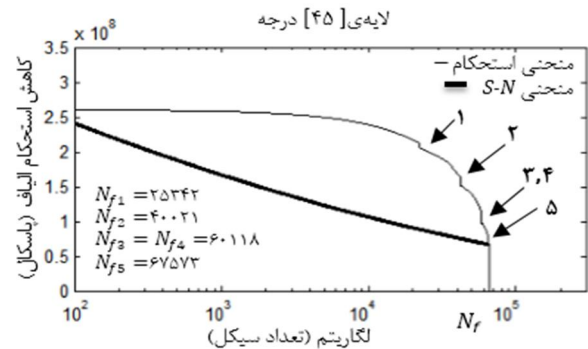
شکل 10 نمودار اولین شکست توسط کاهش استحکام در چینش [30/0/45]



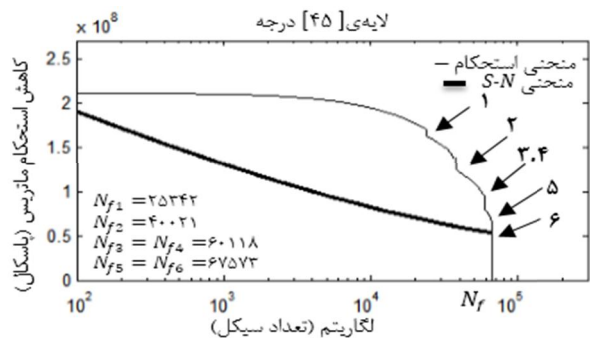
شکل 11 نمودار دومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش [30/0/45]



شکل 7 نمودار چهارمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش [30/45/0]



شکل 8 نمودار پنجمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش [30/45/0]



شکل 9 نمودار ششمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش [30/45/0]

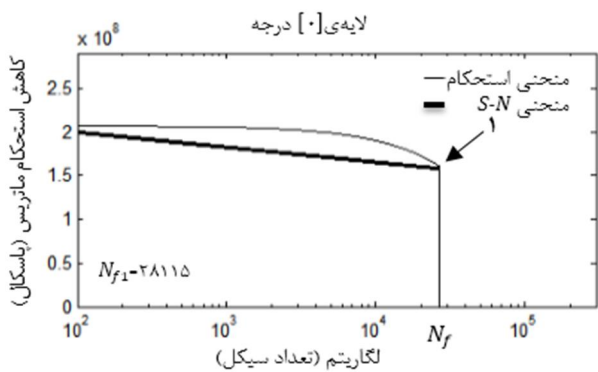
در نمونه [30/45/0] که نمودارهای مربوط به کاهش استحکام آن در شکل‌های 4 تا 9 نمایش داده شده، مشاهده می‌شود پس از گذشت تعداد زیادی از سیکل بارگذاری که در این بازه نرخ کاهش استحکام بسیار کوچک است، کم‌کم نرخ کاهش با شیب بیشتری افزایش یافته و همین موضوع سبب شده تا ابتدا لایه زیرین این نمونه یعنی صفر درجه در راستای ماتریس شروع به شکسته شدن نماید و این شکست در واقع آغاز شکست‌های بعدی در این نمونه خواهد بود. چرا که در اثر شکست هر لایه، لایه بعدی با نرخ کاهش استحکام بیشتری روبرو خواهد شد. پس از شکست این لایه در راستای ماتریس، در مرحله بعدی با استفاده از قاعده کاهش ناگهانی، خواص این لایه تغییر کرده و با جایگزینی خواص جدید، فرایند بارگذاری ادامه پیدا کرد تا اینکه این لایه در راستای الیاف نیز شکسته شود که نمودار مربوط به آن در شکل 5 نشان داده شده است. نکته قابل توجه اینکه شکست این لایه در راستای ماتریس سبب خواهد شد تا عمر خستگی این لایه و دیگر لایه‌ها نسبت به عمر طبیعی خود کاهش بیشتری یافته و همین امر سبب شده تا در اثر شکست هر لایه و در هر راستا، کاهش استحکام لایه بعدی با شیب بیشتری آغاز شود. در ادامه فرایند بارگذاری و پس از آنکه لایه صفر درجه به

همین موضوع سبب شده تا در دو نمونه‌ای که دارای سفتی و استحکام اولیه، یکسان بوده و تنها در ترتیب چینش لایه‌ها با یکدیگر تفاوت دارند، عمر خستگی متفاوتی داشته بطوری که در نمونه دوم عمر خستگی در حدود 5000 سیکل کاهش یافته است که این میزان عدد قابل توجهی بوده و اهمیت ترتیب چینش لایه‌ها را به خوبی نشان می‌دهد.

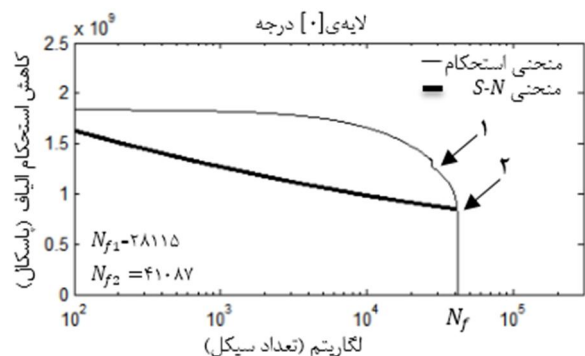
تنها نکته قابل ذکر اینکه در بعضی نمودارها مشاهده می‌شود نقطه شکست الیاف و ماتریس در یک نقطه نشان داده شده و در بعضی نمودارها، این نقاط در دو نقطه مجزا نشان داده شده‌اند. دلیل این نوع نامگذاری این نکته است که در نمونه‌هایی که لایه ابتدا در راستای الیاف شکسته می‌شود، طبق قاعده کاهش ناگهانی، کل خواص آن لایه صفر در نظر گرفته می‌شود به همین دلیل نقطه شکست الیاف و ماتریس در یک نقطه نشان داده شده اما در لایه‌هایی که ابتدا در راستای ماتریس و سپس در راستای الیاف شکسته می‌شود، این نقاط به طور جداگانه نشان داده شده‌اند. چراکه در این وضعیت بین شکست ماتریس تا شکست نهایی لایه که همان شکست الیاف می‌باشد از نظر تعداد سیکل شکست تفاوت وجود دارد. همچنین روابط مربوط به نمودارهای S-N برای هر لایه در این نمونه نیز همچون نمونه قبلی از مرجع [10] استخراج شده است.

4-4- نمونه 0/45/30

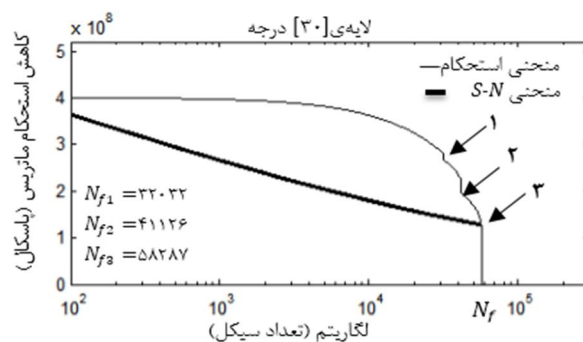
این نمونه که به عنوان سومین نمونه مورد بررسی قرار گرفته است، از همان زوایا و شرایط اولیه نمونه‌های قبلی برخوردار بوده و تنها ترتیب چینش لایه‌ها تغییر کرده که نمودارهای مربوط به کاهش استحکام این نمونه در شکل‌های 16 تا 21 نشان داده شده است.



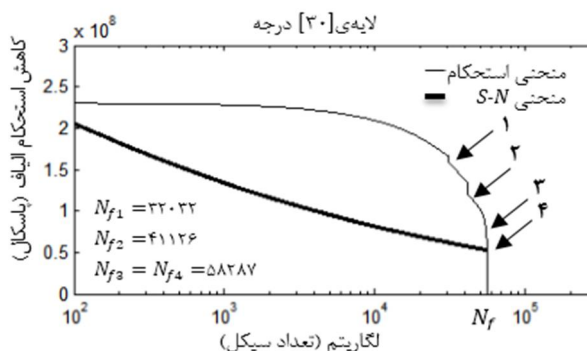
شکل 16 نمودار اولین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 0/45/30



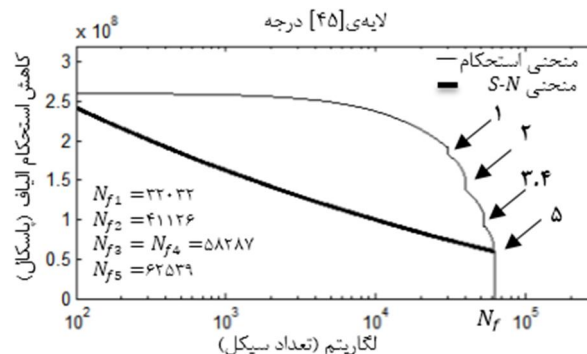
شکل 17 نمودار دومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 0/45/30



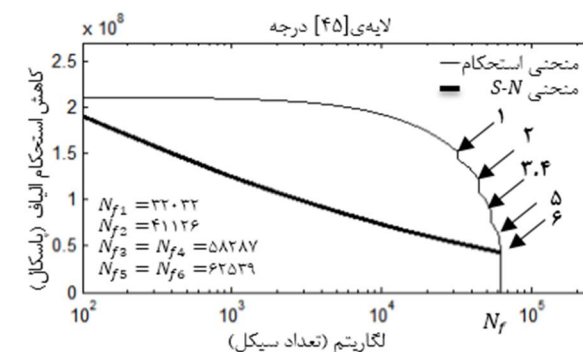
شکل 12 نمودار سومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 30/0/45



شکل 13 نمودار چهارمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 30/0/45



شکل 14 نمودار پنجمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 30/0/45



شکل 15 نمودار ششمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش 30/0/45

همان‌گونه که در شکل‌های 10 تا 15 مشاهده می‌شود، در نمونه 30/0/45 نحوه و ترتیب شکست و خستگی لایه‌ها کاملاً مشابه نمونه 30/45/0 است. تنها تفاوت آنها در ترتیب چینش لایه‌ها می‌باشد که

همان‌گونه که برای این نمونه مشاهده می‌شود، روند شکست و خستگی در ابتدا همانند نمونه‌های قبلی بوده و ابتدا لایه صفر درجه در راستای ماتریس و سپس در راستای الیاف شکسته می‌شود که در شکل‌های 16 و 17 نشان داده شده است. اما پس از آنکه لایه صفر درجه به طور کامل شکسته شد، در این نمونه بر خلاف دو نمونه قبلی، لایه 30 درجه این بار ابتدا در راستای ماتریس و سپس در راستای الیاف شکسته می‌شود که در شکل‌های 18 و 19 این موضوع نشان داده شده است. سرانجام لایه آخر که همان لایه 45 درجه است، به‌طور هم‌زمان در هر دو راستای الیاف و ماتریس شکسته می‌شود که در شکل‌های 20 و 21 این موضوع با نقاط 5 و 6 نامگذاری شده‌اند.

همچنین روابط مربوط به نمودارهای S-N برای هر لایه در این نمونه نیز همچون نمونه قبلی از مرجع [10] استخراج شده است.

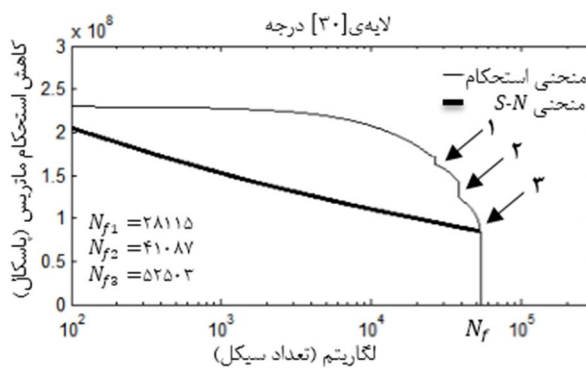
### 5- نتیجه‌گیری

همان‌گونه که در ابتدا اشاره شد، در این پژوهش، هدف بررسی پیشروی آسیب تحت بار خستگی خمشی و اثر آن بر روی ترتیب چیدمان لایه‌ها در یک ورق کامپوزیتی 5 لایه متقارن است که این موضوع به خوبی در سه نمونه فوق که تنها در ترتیب چیدمان یا یکدیگر فرق دارند، به خوبی نشان داده شده است و نتایج حاصل عبارتند از:

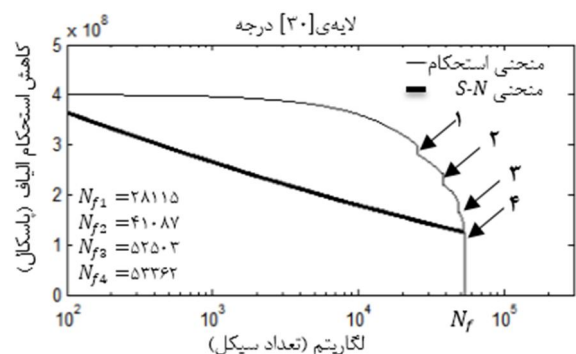
- ✓ چیدمان  $[30/45/0]$  دارای بالاترین و چیدمان  $[0/45/30]$  دارای کمترین عمر خستگی در بین سه نمونه است.
- ✓ اختلاف بین بیشترین و کمترین عمر خستگی در حدود 12000 سیکل می‌باشد و این میزان اختلاف بیانگر اهمیت ترتیب چیدمان لایه در چندلایه‌ها است.
- ✓ در صورتی که تنش و یا نیروی اعمالی اولیه کم باشد ترتیب شکست و خستگی لایه‌ها ثابت بوده و به ترتیب ابتدا لایه 0، سپس لایه 30 و در انتها لایه 45 درجه شکسته خواهد شد.
- ✓ در صورتی که تنش و یا نیروی اعمالی اولیه مقدار زیادی باشد، علاوه بر آنکه شکست و خستگی در تعداد سیکل کمتری رخ خواهد داد، احتمال تغییر در ترتیب شکست و خستگی لایه‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند.

### 6- مراجع

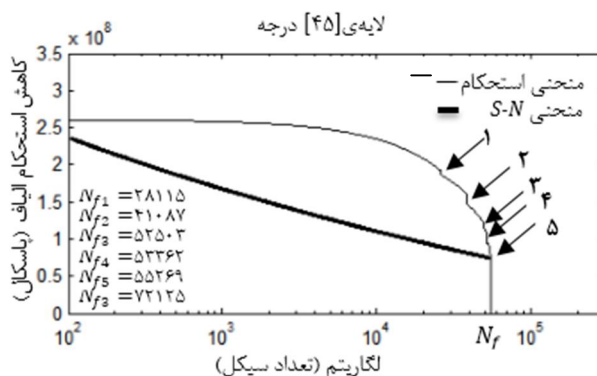
- [1] E. Carrera, A. Ciuffreda, Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loading: a comparison of various theories, *Composite Structures*, 68(2), pp. 185-202, 2005.
- [2] P.K. Parhi, S.K. Bhattacharyya P.K. Sinha, Failure analysis of multiple delaminated composite plates due to bending and impact, *Bull. Mater. Sci.*, Vol. 24, No. 2, April 2001, pp. 143-149, Indian Academy of sciences, 2001.
- [3] M. M. Shokrieh, L. B. Lessard (1997), Multiaxial fatigue behaviour of Unidirectional plies based on uniaxial fatigue experiments - I. Modelling, *International Journal Fatigue*, (19), pp. 201-207. Publishing, 2003.
- [4] M. M. Shokrieh, B. Taheri, *Fatigue life Prediction of composite Materials Based on Progressive damage modeling*, University of Science and Technology, Iran, Woodhead Publishing, pp. 261-301, 401-450, 2010.
- [5] M. M. Shokrieh, L. B. Lessard, Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part I: Modeling, *J Compos Mater*, 34(13), pp. 1056-1080, DOI: 10.1177/002199830003401301, 2000a.
- [6] M. M. Shokrieh, L. B. Lessard, Progressive fatigue damage modeling of composite materials, Part II: Material characterization and model verification, *J. Compos Mater*, 34(13), pp. 1081-1116, DOI: 10.1177/002199830003401302, 2000.
- [7] M. M. Shokrieh, B. F. Taheri, Fatigue life evaluation of unidirectional composites by using residual strain energy, *Iranian Journal of polymer science and Technology*, chem (21) pp. 19-26, 2008. (In Persian)
- [8] M. Zabihpoor, S. Adibnazari, A Micromechanics Approach for Fatigue of Unidirectional Fibrous Composite, *Iranian polymer Journal*, 16(4) pp. 219-232, 2007. (In Persian)



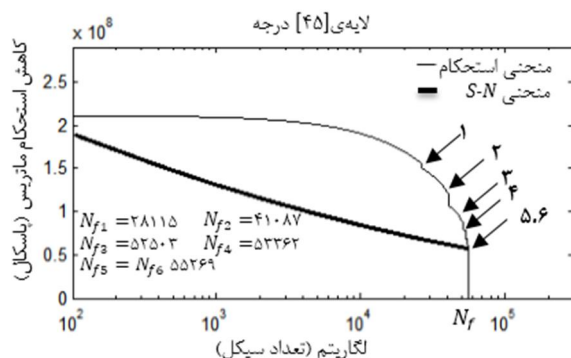
شکل 18 نمودار سومین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $[0/45/30]$



شکل 19 نمودار چهارمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $[0/45/30]$



شکل 20 نمودار پنجمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $[0/45/30]$



شکل 21 نمودار ششمین شکست توسط کاهش استحکام در چینش  $[0/45/30]$



$$Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{21}v_{12}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{21}v_{12}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{21}v_{12}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

همچنین 4 نامتغیر  $U$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_2 = (Q_{11} - Q_{22})$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

که در آن  $\theta$  زاویه لایه مورد نظر نسبت به محور  $x$  است.

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$\bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{U_2}{2} \cos 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{U_2}{2} \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{1}{2}(U_1 - U_4) - U_3 \cos 4\theta$$

- [9] L. J. Broutman, S. Sahu, A new theory to predict cumulative fatigue damage in fiberglass reinforced plastics, in *Composite Materials: Testing and Design* (2<sup>nd</sup> Conference), ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, pp. 170-188, 1972.
- [10] A. P. Vassilopoulos, T. Keller, *Fatigue of Fiber-reinforced Composites*, pp. 155-198, New York, Springer, 2011
- [11] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, Second Edition, Professor of Engineering Science and Mechanics Virginia Poly Technic Institute and State University Blacksburg, Virginia 24061-0219, pp. 55-118, 295-348
- [12] M. Shakeri, M. M. Aghdam, *Mechanical Structure. Beam, plate and shell*, Tehran, Amirkabir university of technology, pp. 149-158, 2008. (In Persian)
- [13] A. K. KAW, *Mechanics of Composite Materials*, Second Edition, Taylor & Francis Group, pp. 315-367, 2006
- [14] M. M. Shokrieh, *Progressive fatigue damage modeling of composite materials*, A Thesis Submitted to the Faculty of Graduate Studies and Research in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Department of Mechanical Engineering McGill University Montréal, Canada, 1996
- [15] B. Harris, *Fatigue in Composite*, pp.63-109, New York, WoodHead, 1986

## 7- پیوست

محاسبه ماتریس سفتی  $[\bar{Q}]$

برای محاسبه مولفه‌های ماتریس  $[\bar{Q}]$  برای هر لایه از روابط زیر استفاده می‌شود [9].

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{21}v_{12}}$$